算法课：作业

He Wen

SIST,SYSU

hewen1990@gmail.com

October 13, 2014

Overview

1. 题目
2. 模拟
3. 递归

课堂交流作业（2）第3题

题目

37个人围成一圈，编上号码（1-37），第一个人从1数起，数到5的那个人被淘汰出局，接下来的那个人又开始从1数起，数到5的那个人也被淘汰........最后剩下的那个人为赢家；问哪个人是赢家。

一般化定义

n个数字（0,1,. . . ,n-1）形成一个圆圈，从数字0开始，每次从这个圆圈中删除第m个数字（第一个为当前数字本身，第二个为当前数字的下一个数字）。当一个数字删除后，从被删除数字的下一个继续删除第m个数字。求出在这个圆圈中剩下的最后一个数字。如果定义最初的n个数字为：0、1、. . . . . . 、n-1，那么每次最后剩下的数字应该是关于m,n的一个函数f(n,m)。

模拟

分析

首先想到的就是用一个数组来模拟圆圈，然后两层循环来依次删除数字，最后求的剩下的数字。这样的话，时间复杂度为(n-1)*m，即(mn)。

可视化

`visualization/Ring1.html`

让我们试图来寻找一种更好的解法

第一个被删除的数字为k=(m-1)%n，
删除该元素后的排列如右:
因为该序列和刚开始的序列不一样，
但最后剩下的数字同样应该是关于m、n个函数，我们设为g(n-1,m).
又因为它们最后剩下的数字肯定是相同的，所以有f(n,m)=g(n-1,m).
下面我们来做一个映射：

$$\begin{array}{ccc} k+1 & \rightarrow & 0 \\ k+2 & \rightarrow & 1 \\ \dots & \rightarrow & \dots \\ n-1 & \rightarrow & n-k-2 \\ 0 & \rightarrow & n-k-1 \\ \dots & \rightarrow & \dots \\ k-1 & \rightarrow & n-2 \end{array}$$

递归

有没有更好的解法?

可以把映射定义为：$y(x)=(x-k-1)\%n$，
所以映射之后仍然可以用函数f来表示(0到n-2)，记为：f(n-1,m)
同时:最后剩下的数字可表示为f(n-1,m).
也即$y(g(n-1,m)) = f(n-1.m)$
注意，这是求映射之后的了

k+1	$\rightarrow$	0
k+2	$\rightarrow$	1
$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$
n-1	$\rightarrow$	n-k-2
0	$\rightarrow$	n-k-1
$\dots$	$\rightarrow$	$\dots$
k-1		n-2

递归

书接上一回

- y(x)=(x-k-1)%n $\rightarrow y^{-}1$ (x)=(x+k+1)%n
- y(g(n-1,m)) = f(n-1.m)
- k = (m-1)%n
- g(n-1,m) =y^{-}1(f(n-1,m))
  =(f(n-1,m)+k+1)%n
  = (f(n-1,m)+ (m-1)%n +1)%n
  = (f(n-1,m)+m)%n
- f(n,m)=g(n-1,m)
- 做了那么多,就是为了这一个公式: f(n,m) = (f(n-1,m)+m)%n

递归

可视化

`visualization/Ring2.html`

总结

复杂度与非递归写法

- 时间复杂度为O(n)，空间复杂度为O(1)

```
int helper(int n, int m){
    int last = 0;
    for(int i = 2; i <= n; ++i){
        last = (last + m) % i;
    }
    return last;
}

int whoIsWinner(int n, int m){
    return helper(n,m) + 1;
}
```

谢谢