第三章习题

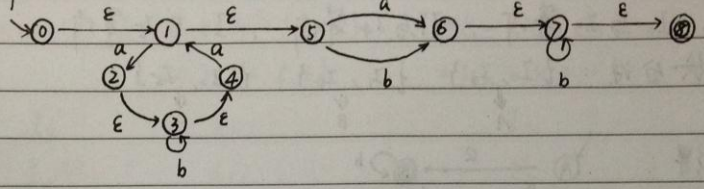
A+

一. 补充练习（五选二）

(3) $(ab^*a)^* (a|b) b^*$

解：(i) RE → NFA

使用 Top-down 方法，得到如下 NFA：



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\}) = \{0,1,5\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-closure}(I_0 \xrightarrow{a} \{2,6\}) = \{2,6,3,7,4,8\}$	$I_2 = \varepsilon\text{-closure}(I_0 \xrightarrow{b} \{6\}) = \{6,7,8\}$
$I_1 = \{2,6,3,7,4,8\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-closure}(I_1 \xrightarrow{a} \{1\}) = \{1,5\}$	$I_4 = \varepsilon\text{-closure}(I_1 \xrightarrow{b} \{3,7\}) = \{3,7,4,8\}$
$I_2 = \{6,7,8\}$	$= \varepsilon\text{-closure}(I_2 \xrightarrow{a} \emptyset) = \emptyset$	$I_5 = \varepsilon\text{-closure}(I_2 \xrightarrow{b} \{7\}) = \{7,8\}$
$I_3 = \{1,5\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-closure}(I_3 \xrightarrow{a} \{2,6\}) = \{2,6,3,7,4,8\}$	$I_2 = \varepsilon\text{-closure}(I_3 \xrightarrow{b} \{6\}) = \{6,7,8\}$
$I_4 = \{3,7,4,8\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-closure}(I_4 \xrightarrow{a} \{1\}) = \{1,5\}$	$I_4 = \varepsilon\text{-closure}(I_4 \xrightarrow{b} \{3,7\}) = \{3,7,4,8\}$
$I_5 = \{7,8\}$	$\varepsilon\text{-closure}(I_5 \xrightarrow{a} \emptyset) = \emptyset$	$I_5 = \varepsilon\text{-closure}(I_5 \xrightarrow{b} \{7\}) = \{7,8\}$

即：

I_0	I_1	I_2
I_1 (终)	I_3	I_4
I_2 (终)	$\emptyset$	I_5
I_3	I_1	I_2
I_4 (终)	I_3	I_4
I_5 (终)	$\emptyset$	I_5

(iii) DFA 最小化

终态包括：I_1, I_2, I_4, I_5

非终态包括：I_0, I_3

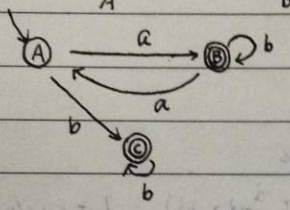
首先分两类：$\{I_0, I_3\}$，$\{I_1, I_2, I_4, I_5\}$

且 I_0 与 I_3 等价，I_1 与 I_4 等价，I_2 与 I_5 等价

最终分为：$\{I_0, I_3\}$，$\{I_1, I_4\}$，$\{I_2, I_5\}$

A　　B　　C

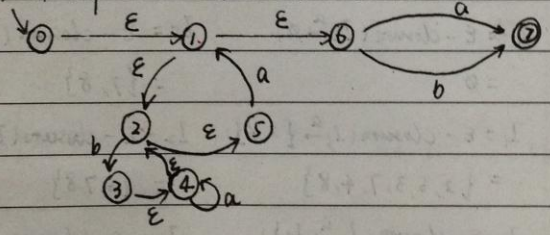
即得



(4) $((ba^*)^*a)^*(a|b)$

解：(i) RE → NFA

使用 Top-down 方法得到如下 NFA：



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}\{0\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{7,1\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{3,7\})$
$= \{0,1,2,6,5\}$	$= \{1,2,6,5\}$	$= \{3,7,4,2,5\}$
$I_1 = \{1,2,6,5\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-C}(I_1 \xrightarrow{a} \{7,1\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{3,7\})$
	$= \{1,2,6,5\}$	$= \{3,7,4,2,5\}$
$I_2 = \{3,7,4,2,5\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{a} \{4,1\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-C}(I_2 \xrightarrow{b} \{3\})$
	$= \{4,1,2,6,5\}$	$= \{3,4,2,5\}$

$I_3=\{4,1,2,6,5\}$	$I_5=\varepsilon-c(I_3\xrightarrow{a}\{4,7,1\})$	$I_2=\varepsilon-c(I_3\xrightarrow{b}\{3,7\})$
	$=\{4,7,1,2,5,6\}$	$=\{3,7,4,2,5\}$
$I_4=\{3,4,2,5\}$	$I_3=\varepsilon-c(I_4\xrightarrow{a}\{4,1\})$	$I_4=\varepsilon-c(I_4\xrightarrow{b}\{3\})$
	$=\{4,1,2,6,5\}$	$=\{3,4,2,5\}$
$I_5=\{4,7,1,2,5,6\}$	$I_5=\varepsilon-c(I_5\xrightarrow{a}\{4,7,1\})$	$I_2=\varepsilon-c(I_5\xrightarrow{b}\{3,7\})$
	$=\{4,7,1,2,5,6\}$	$=\{3,7,4,2,5\}$

即:	I_0	I_1	I_2
	I_1(终)	I_1	I_2
	I_2(终)	I_3	I_4
	I_3	I_5	I_2
	I_4	I_3	I_4
	I_5(终)	I_5	I_2

(iii) DFA 最小化

终态包括: I_1, I_2, I_5

非终态包括: I_0, ~~I_1~~, I_3, I_4

首先分两类: ~~$\{I_2, I_5\}$~~, ~~$\{I_0, I_1, I_3, I_4\}$~~ $\{I_1, I_2, I_5\}$ 和 $\{I_0, I_3, I_4\}$

$\{I_0, I_5\}$ 和 $\{I_2\}$ $\{I_0, I_3\}$ 和 $\{I_4\}$

因为 I_2 与 I_5 不等价, 所以 $\{I_2, I_5\}$ 拆为 $\{I_2\}$, $\{I_5\}$

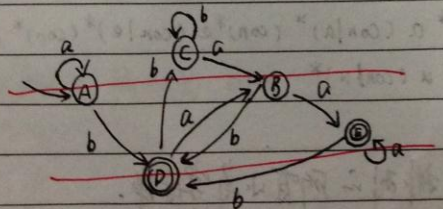
~~因为 I_0 与 I_1 等价, I_3 与 I_4 不等价, 所以拆为~~

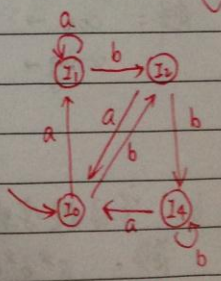
~~$\{I_0, I_1\}$, $\{I_3\}$, $\{I_4\}$~~

~~最终分为: $\{I_0, I_1\}$, $\{I_3\}$, $\{I_4\}$, $\{I_2\}$, $\{I_5\}$~~

A B C D E

即得





(I_0, I_3 等价, I_1, I_5 等价)

二. 课本练习

3.3.2 描述下列正则表达式所表示的语言

a) $a(a|b)^*a$

答：以a开头，a结尾，中间包含任意a,b字符序列的全部字符串的集合。

b) $((\varepsilon|a)b^*)^*$

答：~~0或多个b构成的字符串，以及0或多个a开头，后面跟着任意数目的b的~~ 重复的 ~~串的集合。~~ 所有a、b字符串构成的集合。

c) $(a|b)^*a(a|b)(a|b)$

答：以任意数目的a、b构成的序列开头，以aaa、aab、aba或abb结尾的字符串的集合。也即：倒数第三位为a的a、b字符串构成的集合。

d) $a^*ba^*ba^*ba^*$

答：含有3个b的所有a、b字符串构成的集合。

e) $(aa|bb)^*((ab|ba)(aa|bb)^*(ab|ba)(aa|bb)^*)^*$

答：包含偶数个a、偶数个b的a、b串构成的集合。

3.3.5 为下列语言写出正规定义。

a) 包含五个元音，且按顺序排列的所有小写字母串。

解：con → [b-df-hj-np-tv-z]

string → (con)*a(con|a)*(con)*e(con|e)*(con)*i(con|i)*(con)*o(con|o)*(con)*u(con|u)*

b) 字母按字典升序排列的所有小写字母串。

解：$a^*b^*c^*d^*e^*f^*g^*h^*i^*j^*k^*l^*m^*n^*o^*p^*q^*r^*s^*t^*u^*v^*w^*x^*y^*z^*$

c) 以/*开始，*/结束的注释，中间不能包含*/，除非包含在双引号中.

解：/*([^*"]*|".*"|*+[^/])**/

↓ 包含任意符号串

d) 不含重复数字的数字串.

解：令 $r_i = i|\varepsilon$，$i=0,1,\cdots,9$，$R_0|R_1|\cdots|R_9$ 记为 $\sum_{i\in(0,1,2,\cdots,9)} R_i$.

$P(0,1,2,\cdots,9)$ 表示 0,1,…,9 的全排列，得 $\sum_{i_0 i_1\cdots i_9 \in P(0,1,\cdots,9)} r_{i_0} r_{i_1}\cdots r_{i_9}$.

e) 至多含有一个重复数字的数字串.

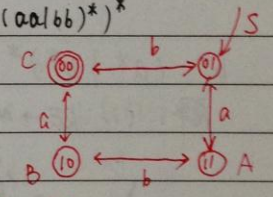
解：$\sum_{i\in(0,1,\cdots,9)} i \quad \sum_{i_0 i_1\cdots i_9\in P(0,1,\cdots,9)} r_{i_0} r_{i_1}\cdots r_{i_9}$

f) 包含偶数个 a 和奇数个 b 的 a,b 串.　　文法 → RE

解：

$E \to (aa \mid bb)^*((ab|ba)(aa|bb)^*(ab|ba)(aa|bb)^*)^*$

string → $E1E \mid E0E1E0E$



g) 不包含子串 abb 的 a,b 串.

解：$b^*(a|ab)^*$

~~DFA → RE~~

~~$b(bb)^*|a(aa)^*b(bb)^*a(aa)^*$~~

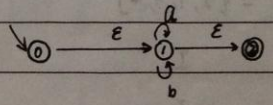
i) 不包含子序列 abb 的 a,b 串.

解：$b^*|b^*aa^*|b^*aa^*ba^*$　或简化为 $b^*a^*(ba^*|\varepsilon)$

3.7.3 将下列正规表达式转化为 DFA.

a) $(a|b)^*$.

解：(i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{1\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{1\})$
$= \{0, 1, 2\}$	$= \{1, 2\}$	$= \{1, 2\}$
$I_1 = \{1, 2\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{1\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{1\})$
	$= \{1, 2\}$	$= \{1, 2\}$
即: I_0 (终)	I_1	I_1
I_1 (终)	I_1	I_1

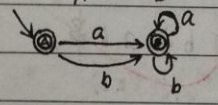
(iii) DFA 最小化

∵ I_0 包含起始状态 I_0、I_1 等价

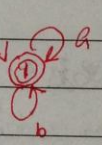
∴ 最后分为 $\{I_0\}$、$\{I_1\}$

⇓ A　⇓ B

即得

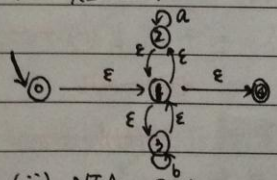


可化简



b) $(a^* \mid b^*)^*$

解: (i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{2\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{3\})$
$= \{0, 1, 2, 3, 4\}$	$= \{2, 1, 3, 4\}$	$= \{3, 1, 2, 4\}$
$I_1 = \{3, 1, 2, 4\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{2\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{3\})$
	$= \{2, 1, 3, 4\}$	$= \{3, 1, 2, 4\}$
即: I_0 (终)	I_1	I_1
I_1 (终)	I_1	I_1

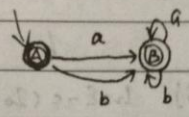
(iii) DFA 最小化

∵ I_0 包含起始状态

∴ 最后分为 $\{I_0\}$, $\{I_1\}$

A B

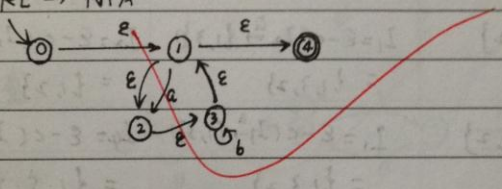
即得



与 a) 题结果等价.

c) $((\varepsilon|a)b^*)^*$.

解: (i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

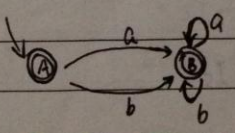
I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{2\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{3\})$
$= \{0,1,2,3,4\}$	$= \{2,3,1,4\}$	$= \{3,1,2,4\}$
$I_1 = \{3,1,2,4\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{2\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{3\})$
	$= \{2,3,1,4\}$	$= \{3,1,2,4\}$
即: I_0 (终)	I_1	I_1
I_1 (终)	I_1	I_1

(iii) DFA 最小化

∵ I_0 包含起始状态. ∴ 最后分为 $\{I_0\}$, $\{I_1\}$

A B

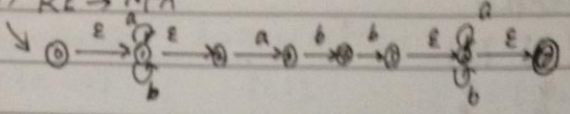
即得



与 a) 题结果等价.

d) $(a|b)^*\ abb\ (a|b)^*$

解：(i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{1\})$
$= \{0,1,2\}$	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$
$I_1 = \{1,2,3\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_3 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{1,4\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,4,2\}$
$I_2 = \{1,2\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{b} \{1\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$
$I_3 = \{1,4,2\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_3 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-c}(I_3 \xrightarrow{b} \{1,5\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,5,2,6,7\}$
$I_4 = \{1,5,2,6,7\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_4 \xrightarrow{a} \{1,3,6\})$	$I_6 = \varepsilon\text{-c}(I_4 \xrightarrow{b} \{1,6\})$
	$= \{1,3,6,2,7\}$	$= \{1,6,2,7\}$
$I_5 = \{1,2,3,6,7\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_5 \xrightarrow{a} \{1,3,6\})$	$I_7 = \varepsilon\text{-c}(I_5 \xrightarrow{b} \{1,4,6\})$
	$= \{1,3,6,2,7\}$	$= \{1,4,6,2,7\}$
$I_6 = \{1,2,6,7\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_6 \xrightarrow{a} \{1,3,6\})$	$I_6 = \varepsilon\text{-c}(I_6 \xrightarrow{b} \{1,6\})$
	$= \{1,3,6,2,7\}$	$= \{1,6,2,7\}$
$I_7 = \{1,2,4,6,7\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_7 \xrightarrow{a} \{1,3,6\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-c}(I_7 \xrightarrow{b} \{1,6,5\})$
	$= \{1,3,6,2,7\}$	$= \{1,6,5,2,7\}$

即：

I_0	I_1	I_2
I_1	I_1	I_3
I_2	I_1	I_2
I_3	I_1	I_4
I_4	I_5	I_6

I_5(终)	I_5	I_7
I_6(终)	I_5	I_6
I_7(终)	I_5	I_4

(iii) DFA 最小化

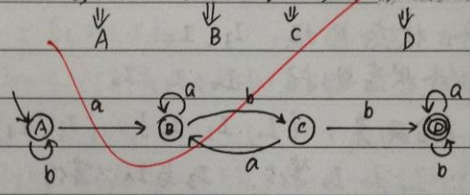
∵ $I_0 \sim I_3$ 为非终状态，$I_4 \sim I_7$ 为终态

∴ 首先分为两类：$\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$，$\{I_4, I_5, I_6, I_7\}$.

又因为 I_0 和 I_2 等价，I_1 与 I_3 不等价，故 $\{I_0, I_1, I_2, I_3\}$ 拆为 $\{I_0, I_2\}$，$\{I_1\}$，$\{I_3\}$；而 $\{I_4, I_5, I_6, I_7\}$ 满足"弱等价类"的条件，故 $\{I_4, I_5, I_6, I_7\}$ 保持不变.

∴ 最终得到：$\{I_0, I_2\}$，$\{I_1\}$，$\{I_3\}$，$\{I_4, I_5, I_6, I_7\}$

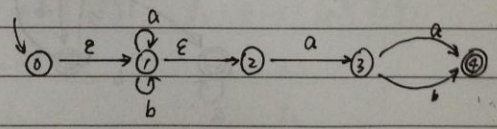
即有：



3.9.4 为下列正规表达式构造最少状态的 DFA.

a) $(a|b)^* a (a|b)$.

解：(i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{1\})$
$= \{0,1,2\}$	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$
$I_1 = \{1,2,3\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{1,3,4\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{1,4\})$
	$= \{1,2,3,4\}$	$= \{1,4,2\}$
$I_2 = \{1,2\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{b} \{1\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$

$I_0=\{1,2,3,4\}$	$I_3=\varepsilon\text{-}c(I_3\xrightarrow{a}\{1,3,4\})$	$I_4=\varepsilon\text{-}c(I_3\xrightarrow{b}\{1,4\})$
	$=\{1,2,3,4\}$	$=\{1,4,2\}$
$I_4=\{1,2,4\}$	$I_1=\varepsilon\text{-}c(I_4\xrightarrow{a}\{1,3\})$	$I_2=\varepsilon\text{-}c(I_4\xrightarrow{b}\{1\})$
	$=\{1,3,2\}$	$=\{1,2\}$

即：

I_0	I_1	I_2
I_1	I_3	I_4
I_2	I_1	I_2
I_3 (终)	I_3	I_4
I_4 (终)	I_1	I_2

(iii). DFA 最小化

终止状态包括：I_3, I_4

非终状态包括：I_0, I_1, I_2

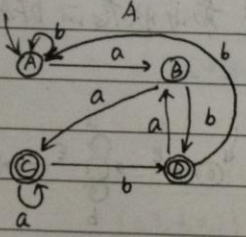
首先分两类：$\{I_0, I_1, I_2\}$, $\{I_3, I_4\}$

∵ I_0 和 I_2 等价，I_3 与 I_4 不等价

∴ 最终分为：$\{I_0, I_2\}$, $\{I_1\}$, $\{I_3\}$, $\{I_4\}$

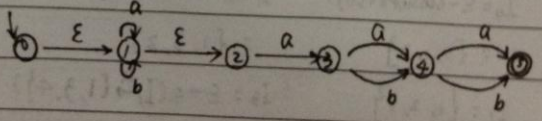
A B C D

即有：



b) $(a|b)^*a(a|b)(a|b)$

解：(i) RE → NFA



(ii) NFA → DFA

I_i	a	b
$I_0 = \varepsilon\text{-closure}(\{0\})$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_0 \xrightarrow{b} \{1\})$
$= \{0,1,2\}$	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$
$I_1 = \{1,2,3\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{a} \{1,3,4\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-c}(I_1 \xrightarrow{b} \{1,4\})$
	$= \{1,3,4,2\}$	$= \{1,4,2\}$
$I_2 = \{1,2\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_2 \xrightarrow{b} \{1\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$
$I_3 = \{1,2,3,4\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_3 \xrightarrow{a} \{1,3,4,5\})$	$I_6 = \varepsilon\text{-c}(I_3 \xrightarrow{b} \{1,4,5\})$
	$= \{1,2,3,4,5\}$	$= \{1,2,4,5\}$
$I_4 = \{1,2,4\}$	$I_7 = \varepsilon\text{-c}(I_4 \xrightarrow{a} \{1,3,5\})$	$I_8 = \varepsilon\text{-c}(I_4 \xrightarrow{b} \{1,5\})$
	$= \{1,2,3,5\}$	$= \{1,2,5\}$
$I_5 = \{1,2,3,4,5\}$	$I_5 = \varepsilon\text{-c}(I_5 \xrightarrow{a} \{1,3,4,5\})$	$I_6 = \varepsilon\text{-c}(I_5 \xrightarrow{b} \{1,4,5\})$
	$= \{1,2,3,4,5\}$	$= \{1,2,4,5\}$
$I_6 = \{1,2,4,5\}$	$I_7 = \varepsilon\text{-c}(I_6 \xrightarrow{a} \{1,3,5\})$	$I_8 = \varepsilon\text{-c}(I_6 \xrightarrow{b} \{1,5\})$
	$= \{1,2,3,5\}$	$= \{1,2,5\}$
$I_7 = \{1,2,3,5\}$	$I_3 = \varepsilon\text{-c}(I_7 \xrightarrow{a} \{1,3,4\})$	$I_4 = \varepsilon\text{-c}(I_7 \xrightarrow{b} \{1,4\})$
	$= \{1,3,4,2\}$	$= \{1,4,2\}$
$I_8 = \{1,2,5\}$	$I_1 = \varepsilon\text{-c}(I_8 \xrightarrow{a} \{1,3\})$	$I_2 = \varepsilon\text{-c}(I_8 \xrightarrow{b} \{1\})$
	$= \{1,3,2\}$	$= \{1,2\}$

即：

I_0	I_1	I_2
I_1	I_3	I_4
I_2	I_1	I_2
I_3	I_5	I_6
I_4	I_7	I_8
I_5 (终)	I_5	I_6
I_6 (终)	I_7	I_8
I_7 (终)	I_3	I_4
I_8 (终)	I_1	I_2

(iii) DFA最小化

根据终态和非终态，首先分两类：$\{I_0, I_1, I_2, I_3, I_4\}$，$\{I_5, I_6, I_7, I_8\}$

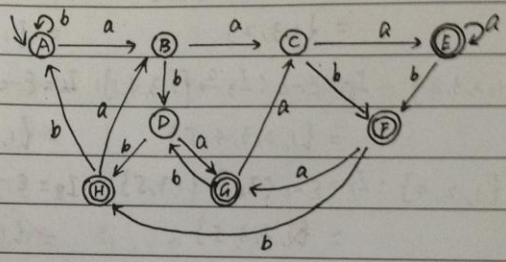
∵ I_0 和 I_2 等价，I_1，I_3，I_4 不等价 ∴ 拆为 $\{I_0, I_2\}$，$\{I_1\}$，$\{I_3\}$，$\{I_4\}$

∵ I_5，I_6，I_7，I_8 互不等价 ∴ 拆为：$\{I_5\}$，$\{I_6\}$，$\{I_7\}$，$\{I_8\}$

∴ 最终分为：$\{I_0, I_2\}$，$\{I_1\}$，$\{I_3\}$，$\{I_4\}$，$\{I_5\}$，$\{I_6\}$，$\{I_7\}$，$\{I_8\}$

⇓A ⇓B ⇓C ⇓D ⇓E ⇓F ⇓G ⇓H

即得：



c) $(a|b)^* a (a|b)(a|b)(a|b)$.

解：根据 a) 和 b) 的规律，一共有16个状态.

归纳得：$(a|b)^* a (a|b)(a|b)\cdots(a|b)$ 共有 $n-1$ 个 $(a|b)$，

对应的最小化 DFA 有 2^n 个状态.