



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

---

Суперкомпьютерное моделирование и технологии

**Отчет по заданию №2**  
**«Задача Дирихле для уравнения Пуассона**  
**в криволинейной области»**

ВАРИАНТ 9

**Отчет выполнил:**  
студент 614 группы  
Артамонов Георгий

Москва, 2023

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Задача Дирихле для уравнения Пуассона</b>	<b>3</b>
1.1	Математическая постановка задачи . . . . .	3
1.2	Численный метод решения . . . . .	4
1.2.1	Метод фиктивных областей . . . . .	4
1.2.2	Разностная схема решения . . . . .	5
1.2.3	Метод минимальных невязок . . . . .	7
1.3	Описание программной реализации . . . . .	8
1.3.1	Результаты расчетов . . . . .	8
1.3.2	Графики ускорений . . . . .	9
1.3.3	Графики нормы невязки . . . . .	10
1.3.4	Точка максимума невязки . . . . .	11
1.3.5	Графики приближенного решения . . . . .	12

# Глава 1

## Задача Дирихле для уравнения Пуассона

### 1.1 Математическая постановка задачи

В области  $D \subset \mathbb{R}^2$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона (1):

$$-\Delta u = f(x, y)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничным условием Дирихле (2):

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и краевому условию (2) на ее границе.

Рассмотрим задачу в случае, когда правая часть уравнения  $f(x, y) = 1$ , а область  $D$  представляет собой внутренность эллипса:  $D = \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 < 1\}$

## 1.2 Численный метод решения

### 1.2.1 Метод фиктивных областей

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод фиктивных областей. Идея метода заключается в приближенной замене исходной задачи Дирихле в криволинейной области задачей Дирихле в прямоугольнике с кусочно-постоянным коэффициентом  $k(x, y)$ . Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику  $\Pi = \{(x, y) \mid A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}$ . Разность множеств  $\Pi$  и  $\bar{D}$  обозначим  $\hat{D} = \Pi \setminus \bar{D}$ , границу прямоугольника  $\Pi$  обозначим  $\Gamma$ . В прямоугольнике  $\Pi$  рассмотрим задачу Дирихле (3):

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}) &= F(x, y) \\ v(x, y) &= 0, (x, y) \in \Gamma \end{aligned}$$

с кусочно-постоянным коэффициентом:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 1/\varepsilon & (x, y) \in \hat{D} \end{cases}$$

и правой частью:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases}$$

Требуется найти непрерывную в  $\bar{\Pi}$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x, y) = -k(x, y)\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ .

Переход к новой задаче позволяет получить решение исходной задачи с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , решая при этом задачу Дирихле в прямо-

угольнике  $\Pi$ , содержащем исходную область.

$$\max_{P \in \bar{D}} \|v(x, y) - u(x, y)\| \leq C\varepsilon, C > 0$$

Для случая, когда область  $D$  представляет собой внутренность эллипса, выберем прямоугольник  $\Pi = \{(x, y) \mid -1.0 < x < 1.0, -0.5 < y < 0.5\}$ .

## 1.2.2 Разностная схема решения

В замыкании прямоугольника  $\bar{\Pi}$  определим равномерную прямоугольную сетку  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\begin{aligned}\bar{\omega}_1 &= \{x_i = A_1 + ih_1, i = 0, \dots, M\}, & h_1 &= (B_1 - A_1)/M \\ \bar{\omega}_2 &= \{y_j = A_2 + jh_2, j = 0, \dots, N\}, & h_2 &= (B_2 - A_2)/N\end{aligned}$$

Множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$  обозначим  $\omega_h$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\omega_h$ .

Обозначим через  $w_{ij}$  значение сеточной функции  $H$  в узле сетки  $(x_i, y_j) \in \omega_h$ .

Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций  $H$ :

$$\begin{aligned}(u, v) &= \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij} \\ \|u\| &= \sqrt{(u, u)}\end{aligned}$$

Будем использовать метод конечных разностей, который заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$$A\omega = B$$

$$A : H \rightarrow H$$

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1}\left(a_{i+1j}\frac{\omega_{i+1j}-\omega_{ij}}{h_1}-a_{ij}\frac{\omega_{ij}-\omega_{i-1j}}{h_1}\right)-\frac{1}{h_2}\left(b_{ij+1}\frac{\omega_{ij+1}-\omega_{ij}}{h_2}-b_{ij}\frac{\omega_{ij}-\omega_{ij-1}}{h_2}\right)=F_{ij}$$

$$i=1,\dots,M-1, j=1,\dots,N-1$$

в котором коэффициенты при  $i=1,\dots,M, j=1,\dots,N$

$$a_{ij}=\frac{1}{h_2}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}k(x_{i-1/2},t)dt$$

$$b_{ij}=\frac{1}{h_1}\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}}k(t,y_{j-1/2})dt$$

и правая часть при  $i=1,\dots,M-1, j=1,\dots,N-1$

$$F_{ij}=\frac{1}{h_1h_2}\iint_{\Pi_{ij}}F(x,y)dxdy$$

$$\Pi_{ij}=\{(x,y):x_{i-1/2}\leq x\leq x_{i+1/2},y_{j-1/2}\leq y\leq y_{j+1/2}\}$$

Краевые условия Дирихле в задаче (3) аппроксимируются точно равенством

$$w_{ij}=w(x_i,y_j)=0, (x_i,y_j)\in\Gamma$$

Полуцелые узлы означают:

$$x_{i\pm 1/2}=x_i\pm 0.5h_1, y_{j\pm 1/2}=y_j\pm 0.5h_2$$

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде  $A\omega=B$  с самосопряженным и положительно определенным оператором  $A$ . Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы  $a_{ij}, b_{ij}$  будем вычислять аналитически:  $a_{ij}=h_2^{-1}l_{ij}+(1-h_2^{-1}l_{ij})/\varepsilon$ , где  $l_{ij}$  длина части отрезка  $[y_{j-1/2}, y_{j+1/2}]$ , которая принадлежит области  $D$ . Для вычисления  $l_{ij}$  для заданного  $\hat{x}=x_{i-1/2}$  вычислим точки пересечения прямой

$x = \hat{x}$  с границей эллипса  $\gamma$ . Тогда  $l_{ij} = \min(y_1, y_{j+1/2}) - \max(y_2, y_{j-1/2})$ , где

$$y_{1,2} = \pm \frac{1}{4} \sqrt{1 - \hat{x}^2}$$

Правую часть разностной схемы приближенно заменим на значение в центре квадрата  $\Pi_{ij}$ :

$$F_{ij} = F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in D, \\ 0, & (x_i, y_j) \in \hat{D} \end{cases}$$

### 1.2.3 Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок. Метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $\omega^{(k)} \in H$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\|_E \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty$$

Начальное приближение  $\omega^{(0)}$  выберем равным нулю во всех точках сетки. Итерация  $\omega^{(k+1)}$  вычисляется по итерации  $\omega^{(k)}$  по формуле:

$$\omega_{ij}^{(k+1)} = \omega_{ij}^{(k)} - \tau_{k+1} r_{ij}^{(k)}$$

где невязка  $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$ , итерационный параметр

$$\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E^2}$$

В качестве критерия останова можно использовать условие:

$$\|r^{(k)}\|_E < \delta$$

с некоторой положительной константой  $\delta > 0$ , задающей точность приближенного решения.

## 1.3 Описание программной реализации

Для выполнения задания был разработан последовательный код, представляющий собой программу на языке C sequential.c, реализующую описанный численный метод. Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках  $(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40)$  и построены графики полученных приближенных решений. Для написания parallel.c вложенные циклы в функциях, вызывающихся на каждой итерации метода минимальных невязок (scalar\_product, apply\_diff\_operator, linear\_comb), были размечены с помощью директивы OpenMP: `pragma omp parallel for collapse(2)`. Были проведены расчеты на сетках  $(40, 40), (80, 80), (160, 160)$  на разном числе потоков. Полученные приближенные решения совпали с соответствующими решениями при последовательных вычислениях, но время их вычисления удалось уменьшить за счет использования параллелизма. Результаты приведены в таблице.

### 1.3.1 Результаты расчетов

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки $M \times N$	Время решения	Ускорение
2	$40 \times 40$	91.549	1.298
4	$40 \times 40$	57.722	2.059
6	$40 \times 40$	48.929	2.430
8	$40 \times 40$	45.768	2.597
16	$40 \times 40$	46.381	2.563
2	$80 \times 80$	337.001	1.599
4	$80 \times 80$	183.397	2.938
6	$80 \times 80$	130.966	4.106
8	$80 \times 80$	111.136	4.848
16	$80 \times 80$	90.581	5.948
2	$160 \times 160$	321.049	1.689
4	$160 \times 160$	164.734	3.292
8	$160 \times 160$	86.978	6.235
16	$160 \times 160$	53.271	10.180
32	$160 \times 160$	51.108	10.611

Таблица 1.1: Зависимость времени решения от числа нитей для разных сеток



Был проведен дополнительный эксперимент для сетки  $(40, 40)$ . Последовательный и параллельный варианты программы были скомпилированы с флагом жесткой оптимизации `-O3`. При любом числе потоков получили проигрыш по сравнению с последовательным вариантом алгоритма. Компилятор GCC довольно хорошо оптимизирует последовательный код.

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки $M \times N$	Время решения	Ускорение
2	$40 \times 40$	52.303	0.676
4	$40 \times 40$	39.793	0.889
6	$40 \times 40$	36.659	0.965
8	$40 \times 40$	36.883	0.959
16	$40 \times 40$	36.525	0.969

Таблица 1.2: Зависимость времени решения от числа нитей с флагом `-O3`

### 1.3.2 Графики ускорений

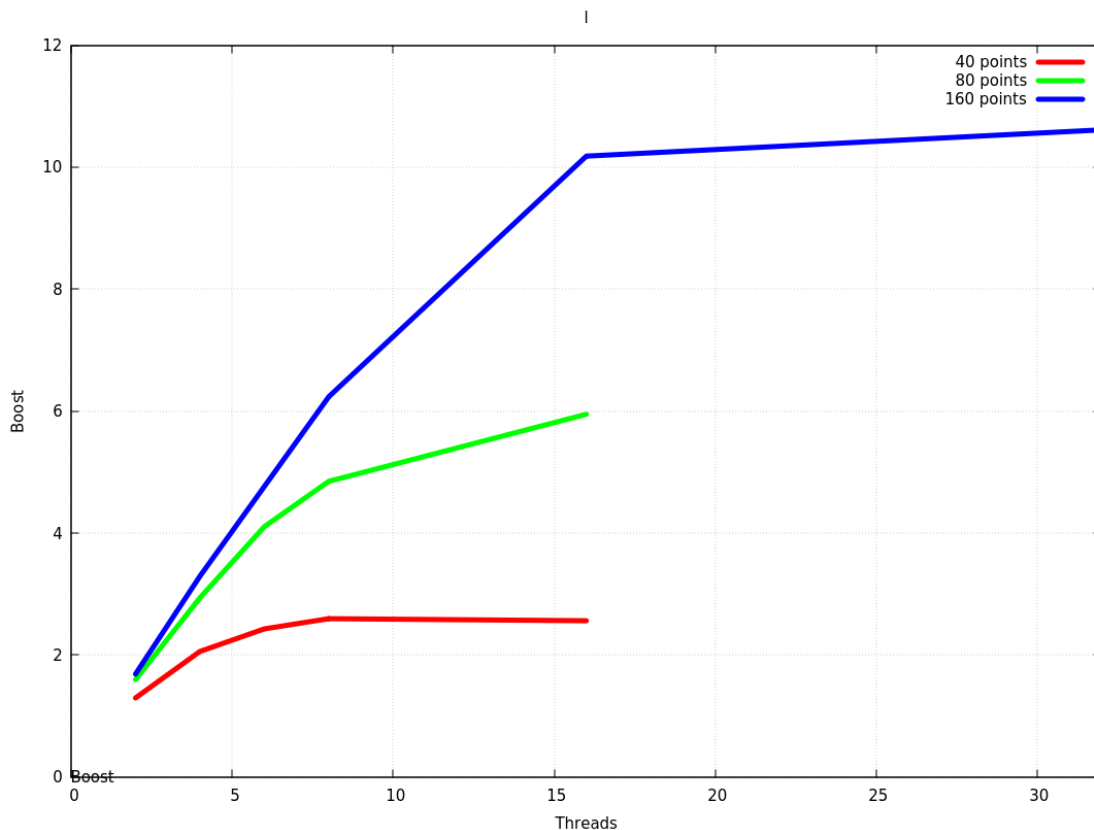


Рис. 1.1: Зависимость ускорения от числа потоков для разных для сеток

### 1.3.3 Графики нормы невязки

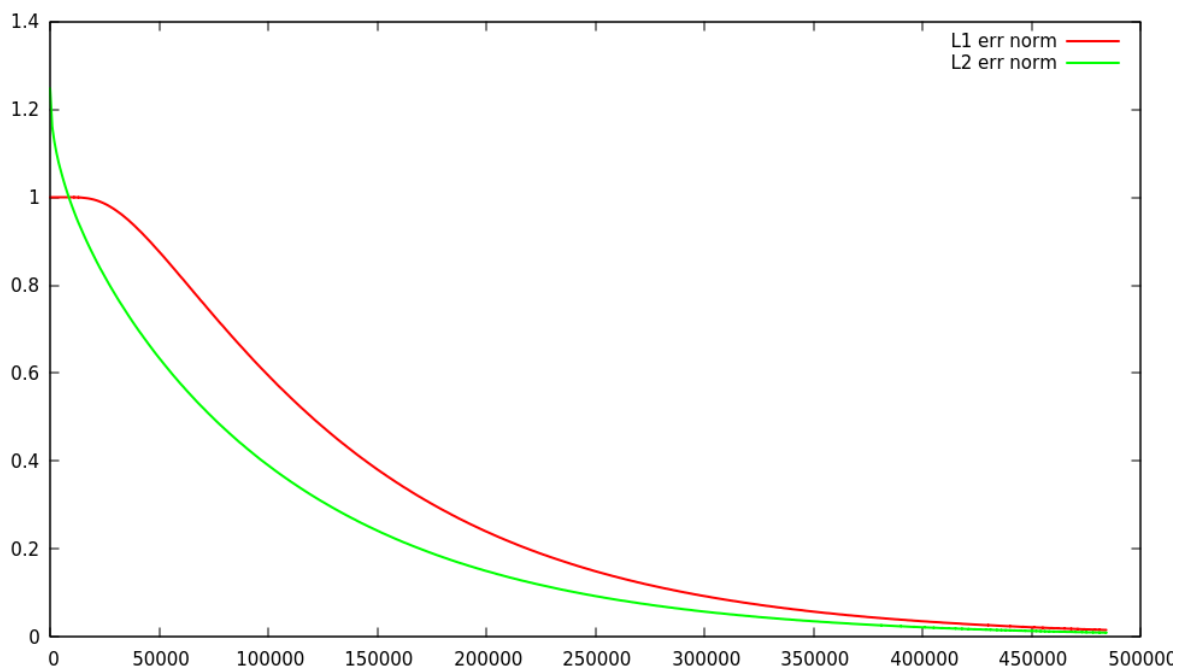


Рис. 1.2: Зависимость нормы невязки от числа итераций для сетки (40, 40)

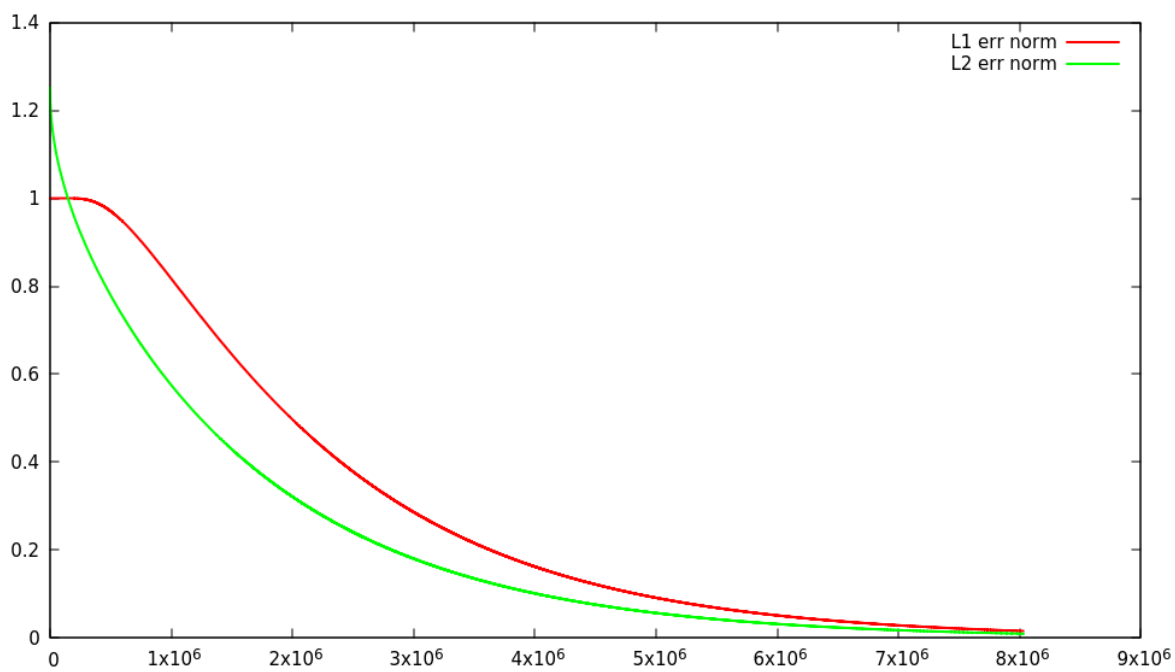


Рис. 1.3: Зависимость нормы невязки от числа итераций для сетки (80, 80)

### 1.3.4 Точка максимума невязки

Построим графики для определения точек, где ошибка принимает наибольшие значения. Каждую 1000 итераций вычисляем, в какой точке абсолютная величина ошибки равна L1 норме невязки, иными словами, в какой точке на этой итерации абсолютная величина ошибки принимает наибольшее значение. Из графиков видно, что это точка  $(0, 0)$ , являющаяся центром эллипса.

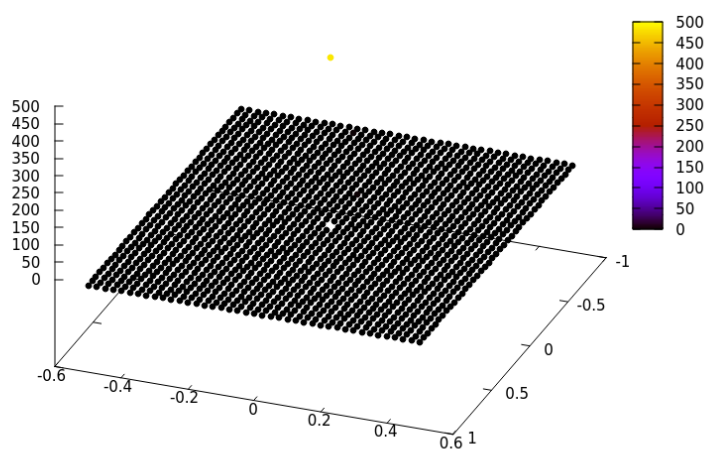


Рис. 1.4: для сетки  $(40, 40)$

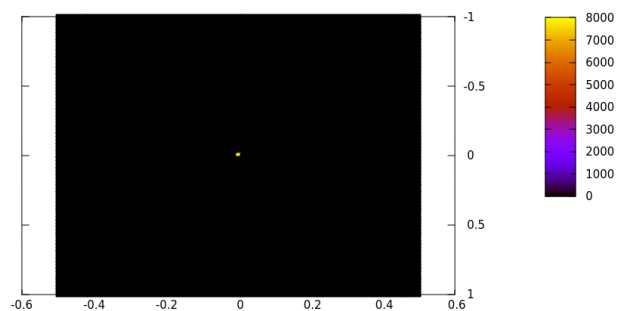


Рис. 1.5: для сетки  $(80, 80)$

### 1.3.5 Графики приближенного решения

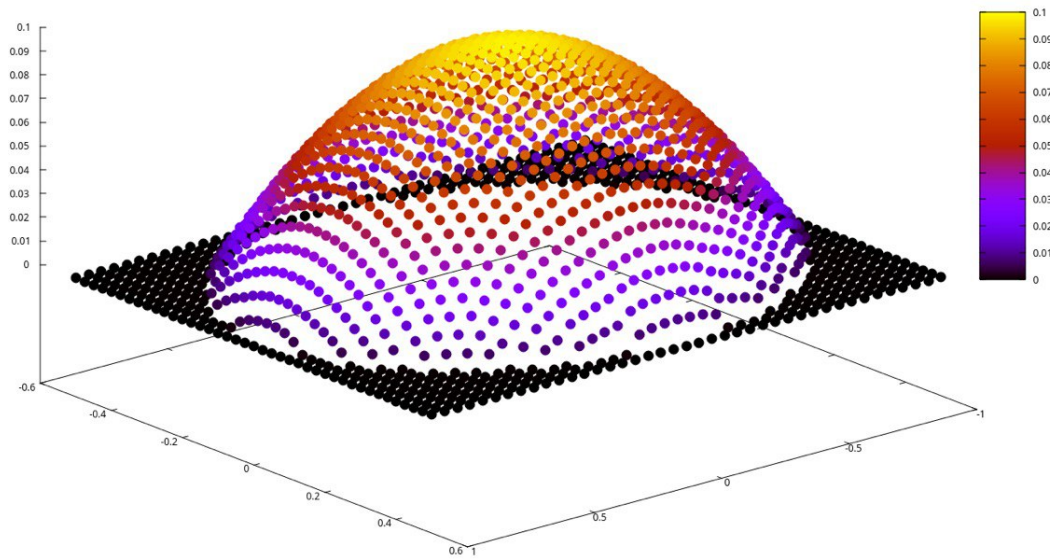


Рис. 1.6: График решения с сеткой  $40 \times 40$  точек

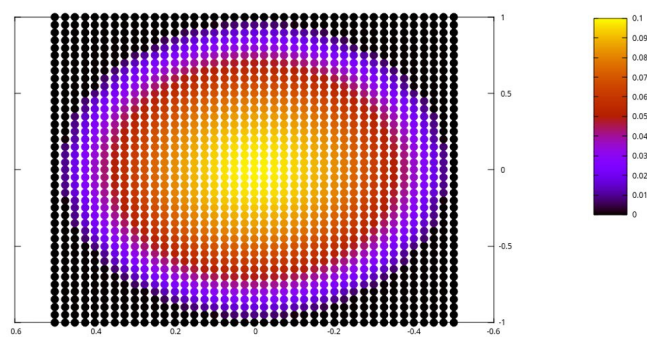


Рис. 1.7: Линии уровня с сеткой  $40 \times 40$  точек

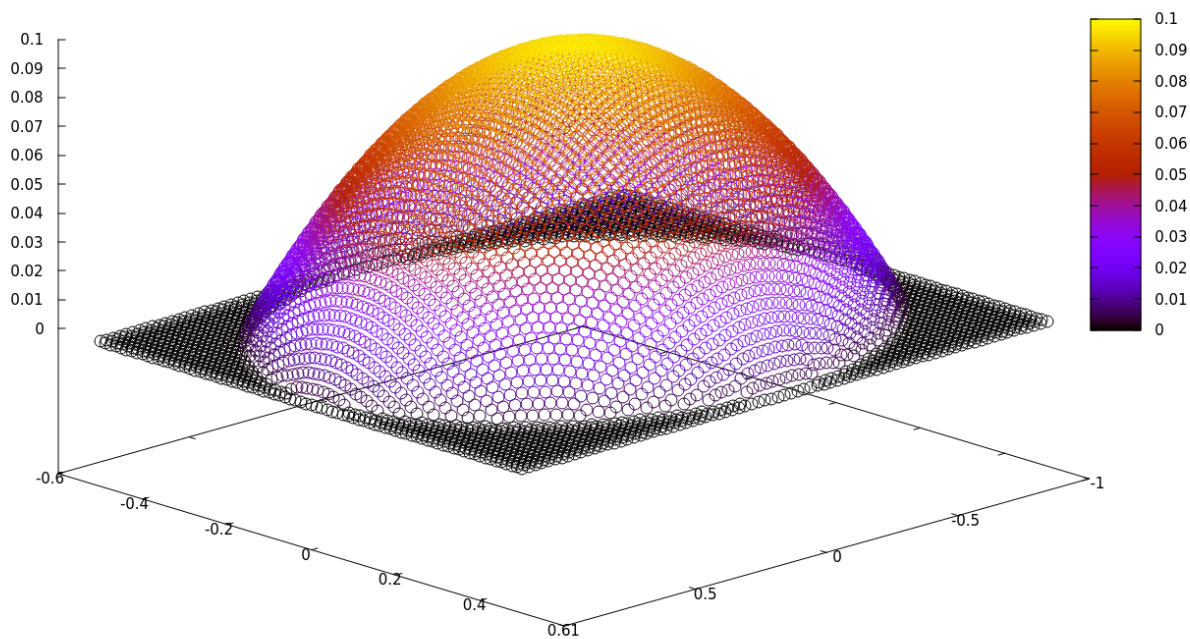


Рис. 1.8: График решения с сеткой  $80 \times 80$  точек

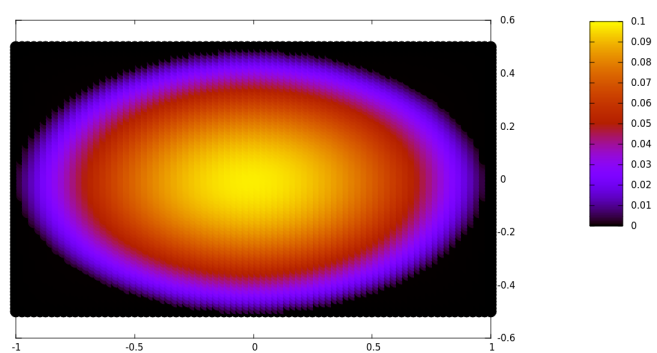


Рис. 1.9: Линии уровня с сеткой  $80 \times 80$  точек