Consideriamo $f(x) = x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Sia K il CRC di f su $\mathbb{Q}$:

$$f(x) = (x-\alpha)(x+\alpha)(x-i\alpha)(x+i\alpha)$$

con $\alpha = \sqrt[4]{2} \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow K = \mathbb{Q}(\alpha, i\alpha) = \mathbb{Q}(\alpha, i)$

Calcoliamo $[K:\mathbb{Q}]$:

$$[K:\mathbb{Q}] = \underbrace{[\mathbb{Q}(\alpha,i):\mathbb{Q}(\alpha)]}_{=2} \cdot \underbrace{[\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}]}_{=4} = 8$$

$\Rightarrow$ sia $G = Gal(K/\mathbb{Q}) = Aut_{\mathbb{Q}}(K)$.

$\varphi \in G \Leftrightarrow \varphi : K \longrightarrow K$ t.c.:

$$\varphi(\alpha)^4 = 2, \quad \varphi(i)^2 = -1$$

$$\Rightarrow \varphi(\alpha) \in \{\alpha, -\alpha, i\alpha, -i\alpha\}, \quad \varphi(i) = \pm i$$

$\Rightarrow$ una base è $\mathcal{B}_K = \{1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, i, i\alpha, i\alpha^2, i\alpha^3\}$, sappiamo che $|G| = [K:\mathbb{Q}] = 8$

$\Rightarrow$ possiamo riassumere gli 8 automorfismi:

Automorfismo	$\varphi(\alpha)$	$\varphi(i)$	Ordine
1	α	i	1
σ	$i\alpha$	i	4
σ^2	$-\alpha$	i	2
σ^3	$-i\alpha$	i	4
τ	α	$-i$	2
$\sigma\tau$	$i\alpha$	$-i$	2
$\sigma^2\tau$	$-\alpha$	$-i$	2
$\sigma^3\tau$	$-i\alpha$	$-i$	2

$\Rightarrow$ si ha:

$$\sigma^4 = 1 = \tau^2, \quad \tau\sigma = \sigma^3\tau, \quad \tau\sigma^2 = \sigma^2\tau, \quad \tau\sigma^3 = \sigma\tau$$

$\Rightarrow G \cong D_4 = \{\sigma^i\tau^j \mid \sigma^4 = \tau^2 = 1, \ \tau\sigma = \sigma^3\tau\}$

Quali sono i sottogruppi di D_4?

$|D_4| = 8 \Rightarrow$ i sottogruppi propri hanno ordine 2 o 4

Ordine 4:

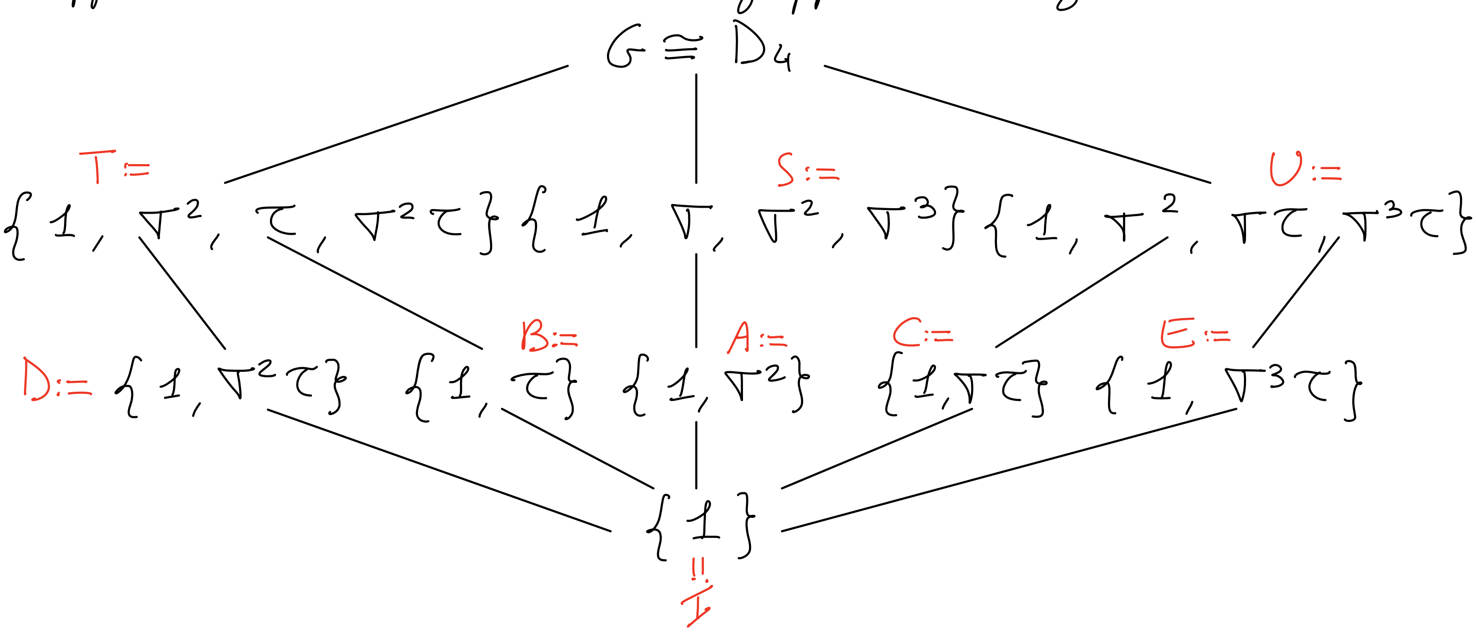
1) ciclici $\Rightarrow \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\}$

2) $\cong$ Klein $\Rightarrow \{1, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\}, \{1, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\}$

Ordine 2:

sono ciclici $\cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \Rightarrow \{1, \sigma^2\}, \{1, \tau\}, \{1, \sigma\tau\},$
$\{1, \sigma^2\tau\}, \{1, \sigma^3\tau\}$

Rappresentiamo tutti i sottogruppi nel seguente RETICOLO:



Studiamo ora i campi intermedi: per la corrispondenza di Galois sappiamo che $Fix_K(-)$ è una biezione che inverte l'inclusione tra i campi intermedi, si ottiene quindi un reticolo molto simile a quello visto sopra, capovolto:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Fix}_K(I) \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] \arrow[drr, dash] & & \\
\mathrm{Fix}_K(D) \arrow[dr, dash] & \mathrm{Fix}_K(B) \arrow[d, dash] & \mathrm{Fix}_K(A) \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \mathrm{Fix}_K(C) \arrow[d, dash] & \mathrm{Fix}_K(E) \arrow[dl, dash] \\
 & \mathrm{Fix}_K(T) \arrow[dr, dash] & \mathrm{Fix}_K(S) \arrow[d, dash] & \mathrm{Fix}_K(U) \arrow[dl, dash] & \\
 & & \mathrm{Fix}_K(G) & &
\end{tikzcd}$$

Chi sono di preciso questi sottogruppi?

$\Rightarrow S = \{1, \sigma, \sigma^2, \sigma^3\} \Rightarrow \mathrm{Fix}_K(S) = \mathbb{Q}(i)$

$\Rightarrow T = \{1, \sigma^2, \tau, \sigma^2\tau\} \Rightarrow \mathrm{Fix}_K(T) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\alpha^2)$

$\Rightarrow U = \{1, \sigma^2, \sigma\tau, \sigma^3\tau\} \Rightarrow \mathbb{Q}(i\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(i\alpha^2)$

$\Rightarrow C = \{1, \sigma\tau\}$, $\sigma\tau(\alpha) = i\alpha \wedge \sigma\tau(i) = -i$

$x \in K$:

$\Rightarrow x = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + a_4 i + a_5 i\alpha + a_6 i\alpha^2 + a_7 i\alpha^3$

$$\Rightarrow \sigma\tau(x) = a_0 + a_1 i\alpha - a_2\alpha^2 - a_3 i\alpha^3 - a_4 i + a_5\alpha + a_6 i\alpha^2 - a_7\alpha^3$$

$$= x \iff \begin{cases} a_0 = a_0,\ a_1 = a_5,\ a_2 = -a_2,\ a_3 = -a_7 \\ a_4 = -a_4,\ a_5 = a_1,\ a_6 = a_6,\ a_7 = -a_3 \end{cases}$$

$\iff a_1 = a_5,\ a_2 = 0,\ a_3 = -a_7,\ a_4 = 0,\ a_0, a_6$ arbitrari

$$\iff x = a_0 + a_1(1+i)\alpha + a_6 i\alpha^2 + a_3(1-i)\alpha^3$$

$$= a_0 + a_1(1+i)\alpha + a_6\tfrac{1}{2}(1+i)^2\alpha^2 + a_3\tfrac{1}{2}(1+i)^3\alpha^3$$

$$\in \mathbb{Q}(\alpha(1+i)) = \mathrm{Fix}_K(C)$$