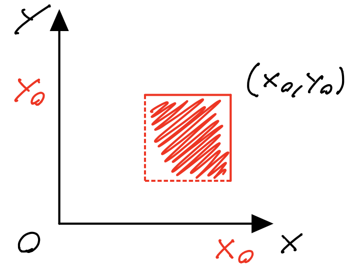
es. 1)

Sia $U(x_0, y_0, \varepsilon) = (x_0 - \varepsilon, x_0] \times (y_0 - \varepsilon, y_0] \subseteq \mathbb{R}^2$ con:

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$

$\Rightarrow$ Schema grafico:



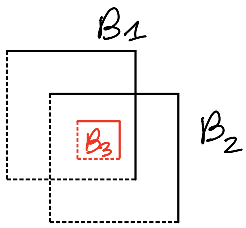
$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{B} = \{ U(x_0, y_0, \varepsilon) \mid (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0} \}$

1)

Verificare che $\mathcal{B}$ è una base di aperti:

1) ✓ (è un ricoprimento di $\mathbb{R}^2$)

2) Dati $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ si ha:



✓

2)

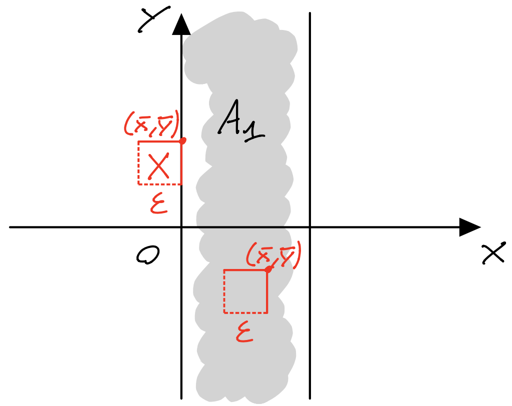
Data $\tau(\mathcal{B})$ topologia su $\mathbb{R}^2$ generata da $\mathcal{B}$, determinare per ciascuno dei seguenti insiemi, se sono aperti, chiusi, chiusura e interno

1) $A_1 = [0, 1] \times \mathbb{R}$

2) $A_2 = \mathbb{R} \times (-1, 1)$

3) $A_3 = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

⇒ 1) A_1:



⇒ prendo $0 < \varepsilon < \bar{x}$ e ottengo:

$(\bar{x},\bar{y}) \in U(\bar{x},\bar{y},\varepsilon) \subseteq A_1$

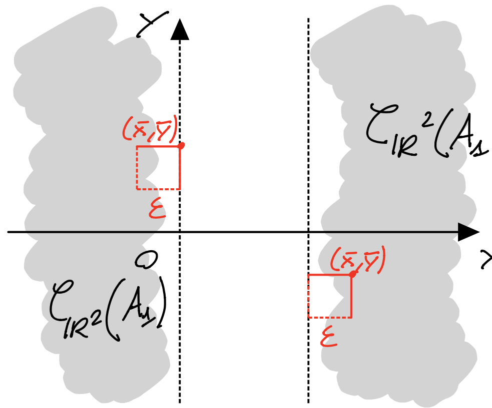
$\forall (\bar{x},\bar{y})$ t.c. $\bar{x} > 0$!!!

⇒ se $\bar{x} = 0$, $\nexists\, U(\bar{x},\bar{y},\varepsilon)$ t.c.

$(0,\bar{y}) \in U\,U(\bar{x},\bar{y},\varepsilon) \subseteq A_1$

⇒ A_1 non è aperto ⇒ $\mathring{A}_1 = (0, 1] \times \mathbb{R}$

⇒ $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_1)$ è:



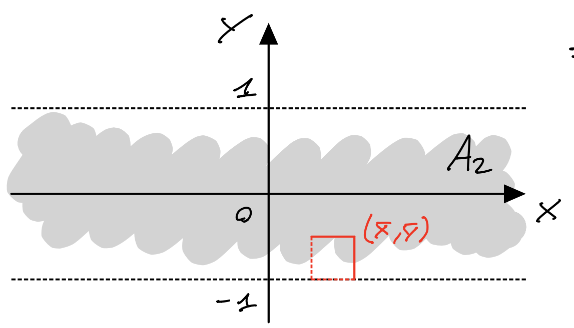
⇒ se $(\bar{x},\bar{y}) \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_1)$

si ha:

- se $\bar{x} < 0$, $(\bar{x},\bar{y}) \in U(\bar{x},\bar{y},\varepsilon) \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_1)$ $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$
- se $\bar{x} > 1$, prendo $\varepsilon < \bar{x} - 1$.

⇒ $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_1)$ è aperto ⇒ A_1 è chiuso ⇒ $\overline{A_1} = A_1$

⇒ 2) A_2:

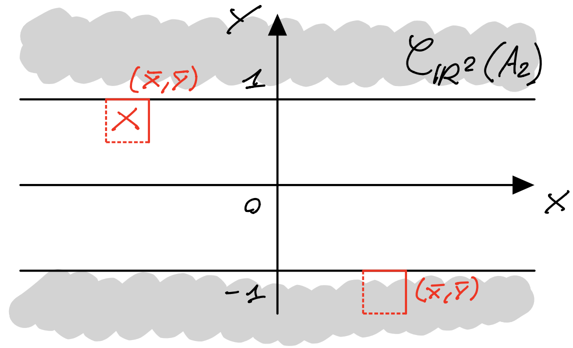


⇒ prendo $\varepsilon < \bar{y} + 1$ e ho che

$(\bar{x},\bar{y}) \in U(\bar{x},\bar{y},\varepsilon) \subseteq A_2$ $\forall (\bar{x},\bar{y}) \in A_2$

⇒ A_2 è aperto ⇒ $\mathring{A}_2 = A_2$

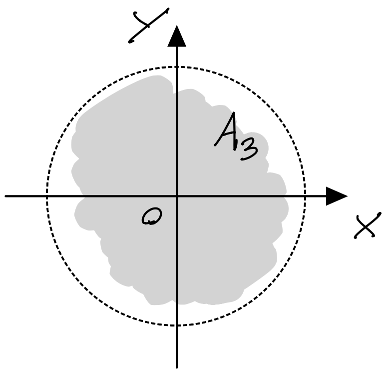
$\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_2)$:



$\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_2)$ non è aperto, per renderlo aperto va esclusa la retta $y=1$, che va quindi aggiunta ad A_2 per renderlo chiuso!!!

$\Rightarrow \overline{A_2} = A_2 \cup \{y=1\} = \mathbb{R} \times (-1, 1]$

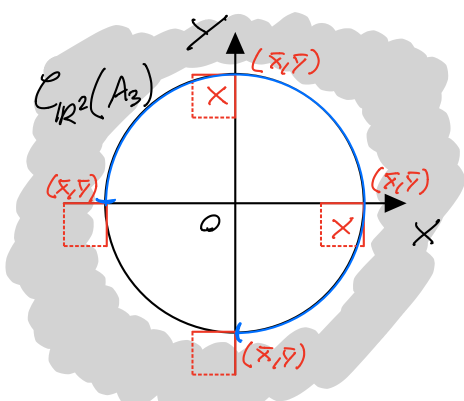
$\Rightarrow$ 3) A_3:



$\Rightarrow A_3$ è aperta perché basta prendere ε sufficientemente piccolo

$\Rightarrow \mathring{A_3} = A_3$

$\Rightarrow A_3$ è chiuso? Considero $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_3)$:



$\Rightarrow$ l'arco di circonferenza blu impedisce a $\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2}(A_3)$ di essere aperto, va quindi tolto (e, di conseguenza va aggiunta ad A_3 per renderla chiusa !!!)

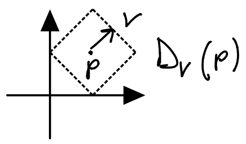
$$\Rightarrow \overline{A_3} = A_3 \cup \{(x,y) \mid x^2+y^2=1 \wedge (x>0 \vee y>0)\}$$

es. 2)

Siano: $X = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_1 = \{B_r(p) \mid p \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^{>0}\}$

$\mathcal{B}_2 = \{D_r(p) \mid p \in \mathbb{R}^2, r \in \mathbb{R}^{>0}\}$ con:

$$D_r(p) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-x_p| + |y-y_p| < r\}$$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ Consideriamo $\tau(\mathcal{B}_1)$, $\tau(\mathcal{B}_2)$. Sono confrontabili? Quale delle 2 contiene più aperti?

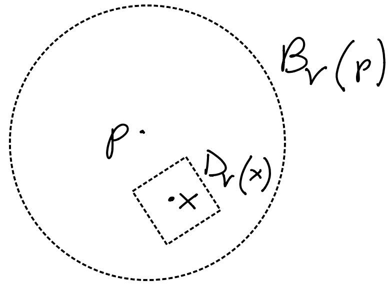
$\Rightarrow$ utilizzo il teorema:

$\tau(\mathcal{B}_1) \prec \tau(\mathcal{B}_2)$?

$\Rightarrow \forall B_1 \in \mathcal{B}_1$, $\forall x \in B_1$ $\exists B_2 \in \mathcal{B}_2$ t.c.

$$x \in B_2 \subseteq B_1$$

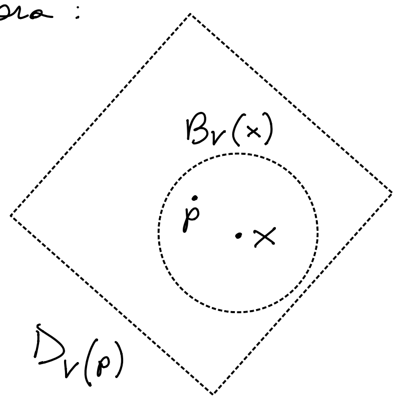
$\Rightarrow$ Infatti basta prendere il raggio di $D_r(x)$ uguale alla distanza di x dal bordo di $B_r(p) - \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ 

$\tau(\mathcal{B}_2) \prec \tau(\mathcal{B}_1)$?

$$\forall B_2 \in \mathcal{B}_2 \quad \forall x \in B_2 \quad \exists B_1 \in \mathcal{B}_1 \text{ t.c.}$$
$$x \in B_1 \subseteq B_2$$

Come sopra:



$$\Rightarrow \tau(\mathcal{B}_1) = \tau(\mathcal{B}_2)$$

es. 3)

Siano: $X = \mathbb{R}$, $\tilde{\mathcal{B}} = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ con } a<b\}$

$$\mathcal{B}_1 = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ con } a<b\}$$
$$\mathcal{B}_2 = \{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R} \text{ con } a<b\}$$

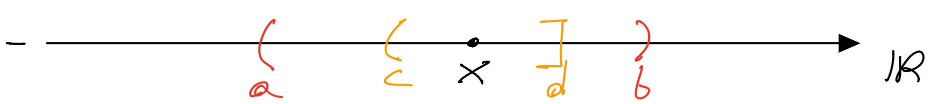
$\Rightarrow \tau(\tilde{\mathcal{B}}) = \tau_e$ (topologia euclidea)

$\Rightarrow$ Confrontare $\tau_e = \tau(\tilde{\mathcal{B}})$ con $\tau(\mathcal{B}_1)$ e $\tau(\mathcal{B}_2)$:

1) $\tau_e \prec \tau(\mathcal{B}_1)$:

$$\forall (a,b) \in \tilde{\mathcal{B}} \quad \forall x \in (a,b) \quad \exists (c,d] \in \mathcal{B}_1 \text{ t.c.}$$
$$x \in (c,d] \subseteq (a,b)$$

(basta prendere $a < c < x < d < b$)

$\Rightarrow$ 

2) $\tau(\mathcal{B}_1) \not< \tau_e$!!!

Infatti:

$\forall (c, d] \in \mathcal{B}_1 \quad \forall x \in [c, d]$ $\lightning$

$\Rightarrow$ se prendo $x = d$ ho problemi !!!

$\nexists (a, b)$ t.c. $x = d \in (a, b) \subseteq (c, d]$!!!

Quali sono gli aperti in più di $\tau(\mathcal{B}_1)$?

es. $(c, d] \in \tau(\mathcal{B}_1)$ MA $\notin \tau_e$

Analogamente si dimostra che $\tau_e < \tau(\mathcal{B}_2)$.

3) $\tau(\mathcal{B}_1) < \tau(\mathcal{B}_2)$? NO!

se $x = d$ $\nexists [a, b)$ t.c. $x = d \in [a, b) \subseteq (c, d]$

4) $\tau(\mathcal{B}_2) < \tau(\mathcal{B}_1)$? NO!

se $x = a$ $\nexists (c, d]$ t.c. $x = a \in (c, d] \subseteq [a, b)$

$\Rightarrow \tau(\mathcal{B}_2)$ e $\tau(\mathcal{B}_1)$ NON sono confrontabili tra di loro