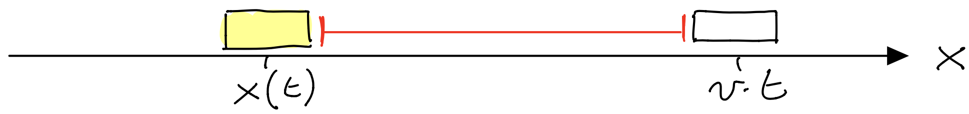
Si tratta di un semplice modello di traffico. Supponiamo la seguente condizione sulla velocità degli agenti:

velocità ottimale := assumiamo che ogni agente mantenga una "velocità ottimale" dipendente dalla distanza dall'agente che lo precede.



Si hanno le seguenti:

1) Gli agenti si muovono in un'unico verso
2) Gli agenti NON possono sorpassarsi a vicenda
3) Assumiamo che vi sia un adeguamento istantaneo della velocità di un agente in funzione della distanza dall'agente precedente ⇒ la relazione indotta è del tipo:

$$\boxed{\dot{x}(t) = v_{opt}(vt - x(t)) = v_{opt}(d)}$$

con $v_{opt} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{>0} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{>0} \\ d & \longmapsto & v_{opt}(d) \end{array}$

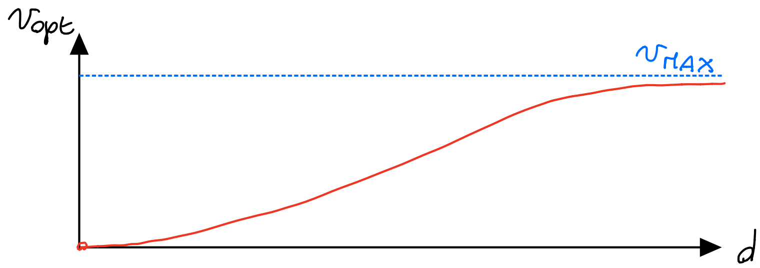
(v_{opt} associa alla distanza d la rispettiva velocità ottimale).

Si ha $d := v \cdot t - x(t)$ dove:

$v \cdot t :=$ posizione dell'agente precedente

$x(t) :=$ posizione dell'agente

4) Assumiamo v_{opt} MONOTONA e LIMITATA sia inferiormente che superiormente. Si avrà quindi un asintoto orizzontale con $v = v_{MAX}$ e un andamento sigmoide:



$\Rightarrow$ adeguando la velocità di un agente alla distanza dall'agente precedente, è possibile arrivare a viaggiare restando ad una distanza costante da tale agente?

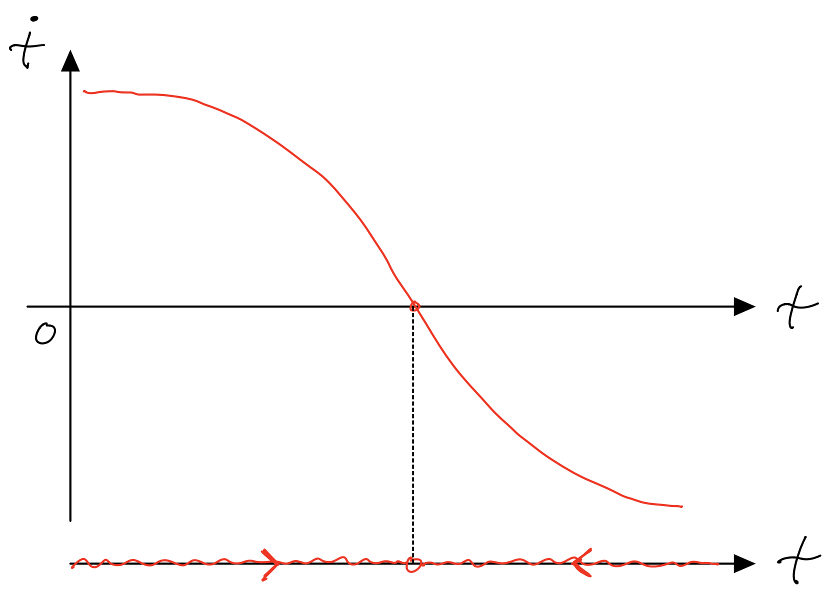
$\Rightarrow$ come e quanto dipende la conclusione precedente dalla relazione tra distanza e velocità ottimale?

$\Rightarrow$ $\dot{x} = v_{opt}(v \cdot t - x)$ è un'equazione NON AUTONOMA (compare il tempo come argomento di v_{opt}), tuttavia la si può trasformare in un'equazione autonoma con il seguente cambio di variabili:

$$x \longmapsto \tau := v \cdot t - x \Rightarrow \dot{\tau} = v - \dot{x} = v - v_{opt}(\tau)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\tau} = v - v_{opt}(\tau)}$$

(equazione nelle nuove coordinate)



$\Rightarrow$ il sistema ha un equilibrio ATTRATTIVO $\tilde{t}_v = v_{opt}^{-1}(v)$

$\Rightarrow$ v_{opt} è da scegliersi in modo tale che v_{opt}^{-1} sia la distanza di sicurezza in funzione della velocità.

Modello per lo sfruttamento di risorse:

Data la popolazione u, sia il seguente modello:

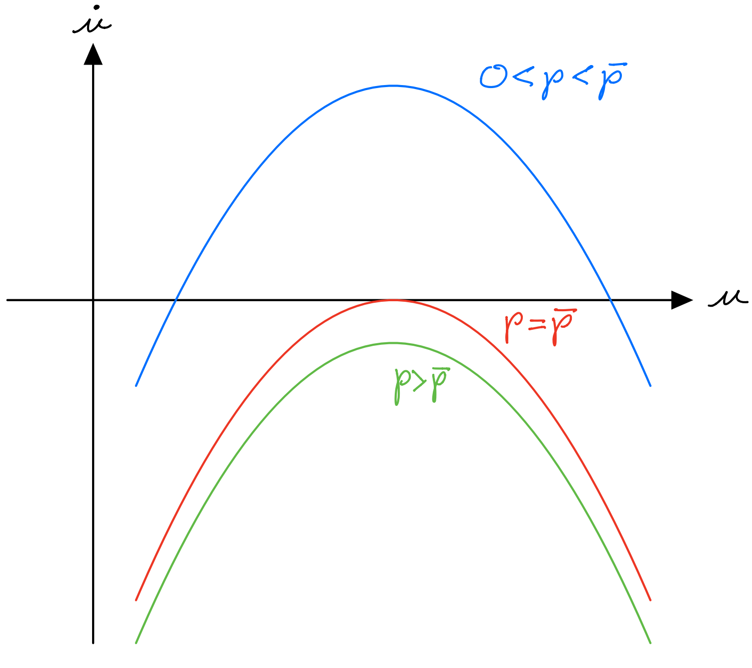
$$\dot{u} = ru\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right) - p$$

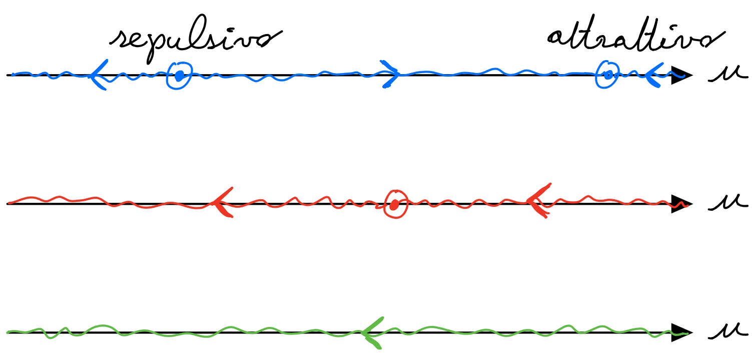
Con:

$r \in \mathbb{R}^{>0}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^{>0}$ equilibrio dell'equazione logistica,

$p \in \mathbb{R}^{>0}$ tasso di prelievo dalla popolazione (costante)

$\Rightarrow$ se $p = 0$ il sistema segue l'andamento logistico, tuttavia se $p > 0$ si ha:





2 equilibri — $0 < p < \bar{p} = \frac{r\bar{u}}{4}$

1 equilibrio — $p = \bar{p} = \frac{r\bar{u}}{4}$

0 equilibri — $p > \bar{p} = \frac{r\bar{u}}{4}$

Calcoliamo gli equilibri:

$$u^2 - \bar{u}u + \frac{\bar{u}}{\nu}p = 0 \Rightarrow \Delta = \bar{u}\left(\bar{u} - \frac{4p}{\nu}\right)$$

1) $0 < p < \bar{p} \Rightarrow$ si hanno 2 equilibri $u_2(p)$ (attrattivo) ed $u_2(p)$ (repulsivo).

   1) per dati iniziali $< u_1(p)$, la popolazione si estingue

   2) per tutti gli altri dati iniziali la popolazione tende all'equilibrio logistico $u_2(p)$

2) $p = \bar{p} \Rightarrow$ si ha un unico equilibrio $u_1(p)$:

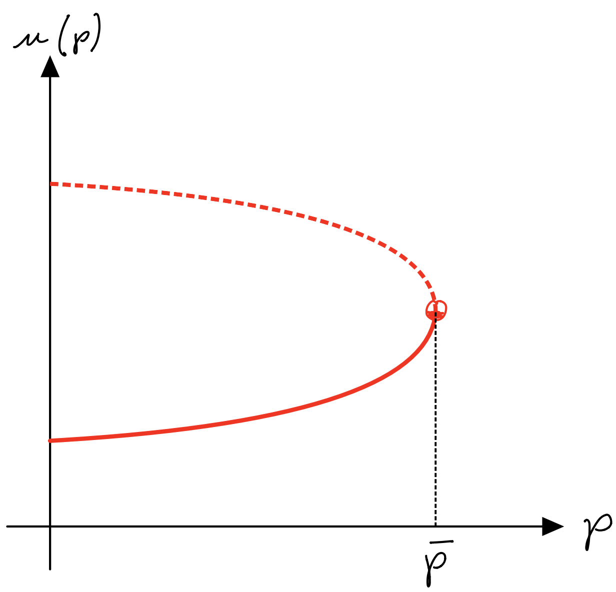
   1) per dati iniziali $< u_1(p)$, la popolazione si estingue

   2) per dati iniziali $> u_1(p)$ la popolazione tende all'equilibrio $u_1(p)$

3) $p > \bar{p} \Rightarrow$ NON vi sono equilibri $\Rightarrow$ per qualunque dato iniziale la popolazione si estingue

$\Rightarrow$ possiamo riassumere le 3 situazioni nel seguente

DIAGRAMMA DI BIFORCAZIONE:



esercizio:

Data l'equazione $\dot{u} = ru\left(1 - \frac{u}{\bar{u}}\right) - p$ con $u \in \mathbb{R}$, $r, \bar{u}, p > 0$, mediante riscalamenti in tempo e cambi di coordinate, scrivere tale equazione in funzione di un unico parametro