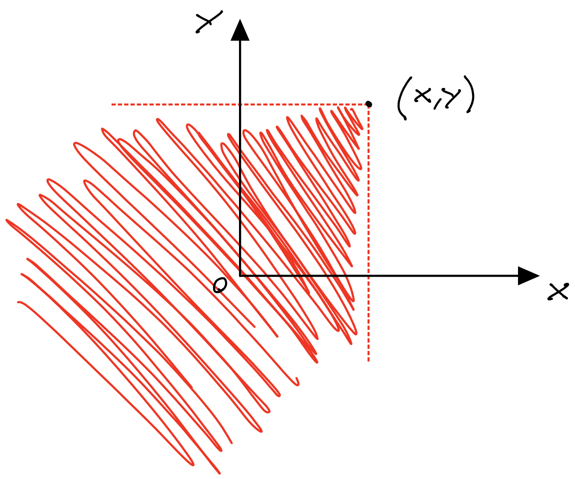
es. 1)

Sia $\mathcal{B} = \{(-\infty, x) \times (-\infty, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

1) Dim. che $\mathcal{B}$ è base di aperti
2) Stabilire $\mathring{U}, \overline{U}$ di $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
3) Stabilire $\mathring{V}, \overline{V}$ di $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$
4) Stabilire le proprietà di separazione di $(\mathbb{R}^2, \tau(\mathcal{B}))$

$\Rightarrow$ 1) Dimostro che $\mathcal{B}$ è base di aperti:



$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è un ricoprimento di $\mathbb{R}^2$:

$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 \ \exists \ (-\infty, \bar{x}+\varepsilon) \times (-\infty, \bar{y}+\varepsilon) \in \mathcal{B}$ con $\varepsilon > 0$.

$\Rightarrow$ $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B} \ \ \forall p \in B_1 \cap B_2 \ \ \exists B_3 \in \mathcal{B}$ t.c. $p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$

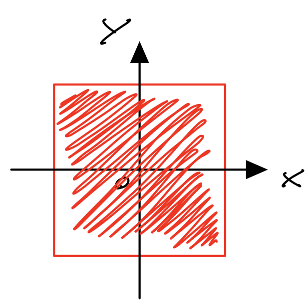
$\Rightarrow$ $B_1 = (-\infty, x_1) \times (-\infty, y_1)$, $B_2 = (-\infty, x_2) \times (-\infty, y_2)$

$\Rightarrow$ $B_1 \cap B_2 = (-\infty, \min\{x_1, x_2\}) \times (-\infty, \min\{y_1, y_2\}) \in \mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ è base di aperti.

$\Rightarrow$ 2) $U = \{|x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

$\Rightarrow$ disegno U:

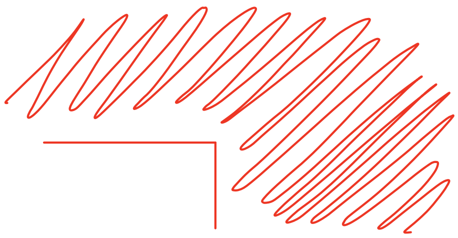


⇒ se $(x,y)\in A$, $A\in\tau(\mathcal{B})$, allora $(-\infty,x]\times(-\infty,y]\subseteq A$

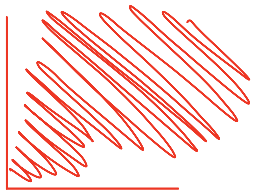
⇒ $\mathring{U}=\emptyset$

⇒ come sono fatti i chiusi?

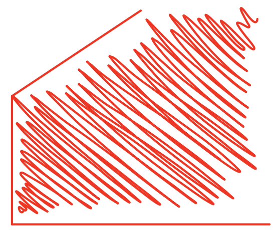
I chiusi della base sono



I chiusi di τ sono tutte le possibili unioni / intersezioni dei chiusi di $\mathcal{B}$:



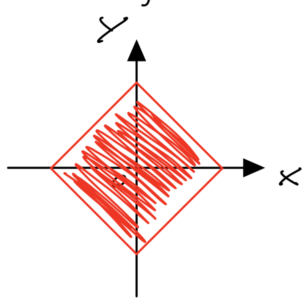
è chiuso!!!



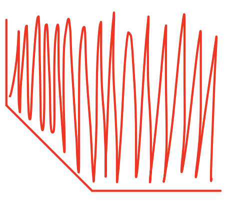
Non è chiuso!!!

⇒ $\overline{U}=[-1,+\infty)\times[-1,+\infty)$

3) $\mathring{V}=\{|x|+|y|\leq 1\}$



⇒ $\mathring{V}=\emptyset$

⇒  è chiuso!!! ⇒ $\overline{V}=\{x\geq -1,\ y\geq -1,\ x+y\geq -1\}$

4) Stabilire se $(\mathbb{R}^2,\tau(\mathcal{B}))$ è T_0, T_1 o T_2:

Non è T_1: i punti non sono chiusi

⇒ Non è T_2

⇒ É T_0: $\exists$ sempre un aperto contenente 1 punto e non l'altro.

es. 2)

Sia $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Consideriamo $X = S^2 \setminus \{(0,0,1)\}$ con τ_e. Sia $\sim$ su X t.c.

$$(x,y,z) \sim (x',y',z') \iff x=y,\ y=y,\ z=z' \lor z=z'=0$$

Sia $Y = X/\sim$ con $\tau_{quoziente}$

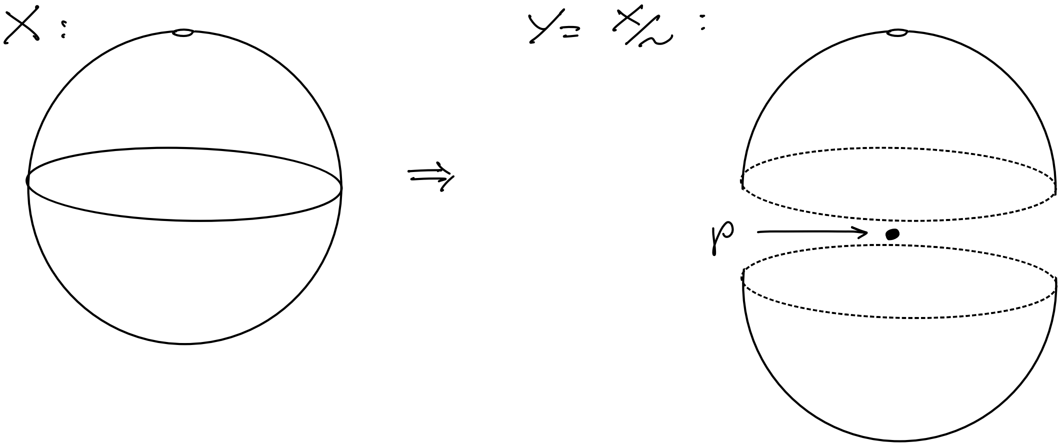
1) Y è connesso?

2) Y è compatto?

3) Trovare $\approx$ t.c. $X/\approx$ sia omeomorfo a S^2 con τ_e.

$\Rightarrow$ 1) Chi è $Y = X/\sim$?

X : $Y = X/\sim$:



$\Rightarrow \pi^{-1}(p) \notin \tau_e$!!! $\Rightarrow p \notin \tau_{quoziente}$

$\Rightarrow$ se A contiene p, A è aperto se e solo se A contiene anche punti "sopra" e "sotto" a p.

$\Rightarrow Y$ è connesso perché è quoziente di un connesso.
(S^2 è connesso per archi e, quindi, connesso)

$\Rightarrow$ 2) Y è compatto ?

N.B. X non compatto $\not\Rightarrow$ $X/\sim$ non compatto !!!

Non vale !!!!!!

$\Rightarrow$ X non è compatto perché gli manca il polo nord: è come se ci fosse un estremo escluso in un intervallo di $\mathbb{R}$!!!

$\Rightarrow$ $\sim$ non agisce sul polo nord di X, quindi lo stesso problema si verifica anche in $Y = X/\sim$

$\Rightarrow$ Y non è compatto.

$\Rightarrow$ 3) Trovare $\approx$ t.c. $X/\approx$ sia omeomorfo a S^2 con τ_e

$\Rightarrow$ sia $\approx$ t.c.

$$p \approx p' \iff p = p' \vee z \geq 0 \wedge z' \geq 0$$

$\Rightarrow$ prendo S^2 e schiaccio l'intera calotta superiore fino a ridurla ad un singolo punto.