es. 1)

Considerare $\tau = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{(x,+\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

1) Dim. che τ è topologia su $\mathbb{R}$

1) $\phi, \mathbb{R} \in \tau$ ✓

2) Siano $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 = (x_1,+\infty), A_2 = (x_2,+\infty)$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = (\max\{x_1,x_2\}, +\infty) \in \tau$ ✓

3) Sia $\{(x_i,+\infty)\}_{i\in I} \subseteq \tau$

$\Rightarrow \bigcup_{i\in I}(x_i,+\infty) = (\inf_{i\in I} x_i, +\infty) \in \tau$ ✓

$\Rightarrow \tau$ è topologia su $\mathbb{R}$.

2) Determinare $\overset{\circ}{(0,1)}$, $\overline{(0,1)}$ in $\mathbb{R}$ con τ.

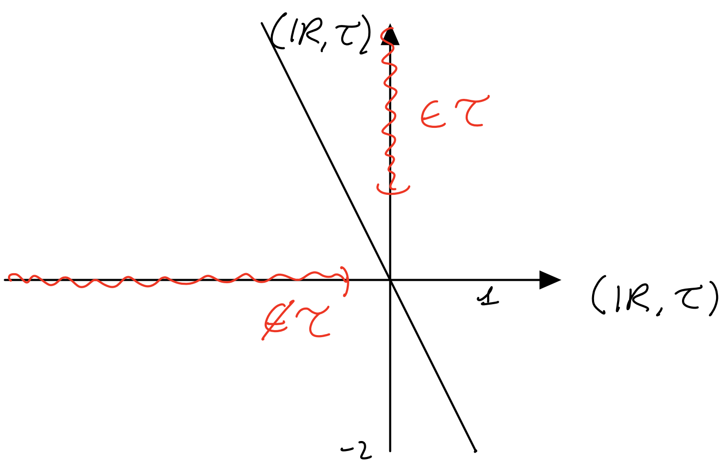
$\Rightarrow \overset{\circ}{(0,1)} = \phi$

$\Rightarrow \mathcal{T} = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow \overline{(0,1)} = (-\infty, 1]$

3) Stabilire se $f: (\mathbb{R},\tau) \to (\mathbb{R},\tau)$ è continua.

$x \longmapsto -2x$



$\Rightarrow f^{-1}((x,+\infty)) = (-\infty, \frac{x}{2}) \notin \tau \quad \forall x$

$\Rightarrow f$ non è continua.

es. 2)

Sia $\tau(\mathcal{B})$ su $\mathbb{R}$ con $\mathcal{B} = \{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ e sia $f : (\mathbb{Q}, \tau') \to (\mathbb{R}, \tau)$ con τ' topologia meno fine
$q \longmapsto q^2$

tra quelle che rendono continua f ($A' \in \tau' \Leftrightarrow A' = f^{-1}(A)$ con $A \in \tau$)

1) Dim. che $\tau_e \prec \tau$ su $\mathbb{R}$:

$\Rightarrow$ va mostrato che $\forall A \in \tau_e$ $A \in \tau$ e che non vale il viceversa.

$\Rightarrow$ $A \in \mathcal{B}_e \Leftrightarrow A = (a,b) = \bigcup_{i=1}^{+\infty} (a, b - \frac{1}{i}] \subseteq \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ $(a,b] \in \tau \wedge (a,b] \notin \tau_e \Rightarrow \tau_e \prec \tau$

2) Determinare base di aperti per τ':

$f(q) = q^2$, τ' è t.c.:

$$A' \in \tau' \Leftrightarrow f^{-1}(A) = A' \text{ con } A \in \tau$$

Come sono fatti gli A' di τ'?

$\Rightarrow$ $A = (a, b]$

$\Rightarrow$ $f^{-1}(A) = [-\sqrt{b}, -\sqrt{a}) \cup (\sqrt{a}, \sqrt{b}] \cap \mathbb{Q}$

$\Rightarrow$ Una base $\mathcal{B}'$ per τ' è:

$$\mathcal{B} = \{[-b, -a) \cup (a, b] \cap \mathbb{Q} \mid b > a \geqslant 0\}$$

3) Stabilire se i seguenti insiemi sono aperti in $(\mathbb{Q}, \tau')$

1) $(0,1) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$ Non è aperto

2) $[-1,1] \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$ è aperto (scelgo $b = 1$, $a = 0$)

3) $(-1,1) \cap \mathbb{Q} \Rightarrow$ è aperto ($f^{-1}(\bigcup_i (-\varepsilon, 1 - \frac{1}{i}))$ con $\varepsilon > 0$)

4) Stabilire, se possibile, quale tra τ' e τ_e su $\mathbb{Q}$ sia la più fine

$\Rightarrow$ τ_e su $\mathbb{Q}$ è la topologia generata da:

$$\{(a,b) \cap \mathbb{Q} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow$ Non sono confrontabili (τ' contiene solo aperti simmetrici rispetto all'origine, τ_e no)

es. 3) Considerare la curva $\gamma : [-2,2] \to \mathbb{R}^3$ data da:

$$\gamma(t) = (3t^2, 1+3t, at^3), \quad a \in \mathbb{R}$$

1) Per quali $a \in \mathbb{R}$ γ è piana?

$\Rightarrow$ deve essere $b(t) \equiv$ costante $\Leftrightarrow$ $\tau(t) \equiv 0$

$\Rightarrow$ deve quindi essere:

$$\det \begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \ddot{\gamma} \\ \dddot{\gamma} \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ $\dot{\gamma} = (6t, 3, 3at^2)$, $\ddot{\gamma} = (6, 0, 6at)$

$$\dddot{\gamma} = (0, 0, 6a)$$

$\Rightarrow$ $\det \begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 6t & 3 & 3at^2 \\ 6 & 0 & 6at \\ 0 & 0 & 6a \end{pmatrix} = 6a \cdot (-18)$

$\Rightarrow$ γ è piana per $a = 0$.

2) Posto $a = 2$, calcolare la terna di Frenét-Serret, la curvatura e la torsione di γ

$\Rightarrow$ $\gamma = (3t^2, 1+3t, 2t^3)$, $\dot{\gamma} = (6t, 3, 6t^2)$

$\ddot{\gamma} = (6, 0, 12t)$, $\dddot{\gamma} = (0, 0, 12)$

$\Rightarrow$ la terna di Frenét - Serret è: $\{\vec{\gamma}, \vec{n}, \vec{b}\}$

con $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{\gamma}$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} = \frac{(6t, 3, 6t^2)}{\sqrt{36t^2+9+36t^4}} = \frac{(6t, 3, 6t^2)}{3\sqrt{1+4t^2+4t^4}}$$

$$= \frac{(2t, 1, 2t^2)}{\sqrt{1+4t^2(1+t^2)}}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}}{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}$$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 6t & 3 & 6t^2 \\ 6 & 0 & 12t \end{pmatrix}$$

$$= (36t, -(72t^2 - 36t^2), -18) = (36t, -36t^2, -18)$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\| = \sqrt{1296(t^2+t^4) + 324} = \sqrt{324(4t^2+4t^4+1)}$$

$$= 18\sqrt{4t^2+4t^4+1}$$

$$\Rightarrow \vec{b} = \frac{(2t, -2t^2, -1)}{\sqrt{4t^2(t^2+1)+1}}$$

$$\Rightarrow n = \vec{b} \times \vec{\gamma} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2t & -2t^2 & -1 \\ 2t & 1 & 2t^2 \end{pmatrix}$$

$$= (-4t^4+1, -(4t^3+2t), 2t+4t^3)$$

$$= (-4t^4+1, -4t^3-2t, 2t+4t^3)$$

$$\Rightarrow \|n\| = \sqrt{(1-4t^4)^2 + 2(4t^3+2t)^2}$$

$$\Rightarrow \vec{n} = \frac{(-4t^4+1, -4t^3-2t, 2t+4t^3)}{\sqrt{(1-4t^4)^2 + 2(4t^3+2t)^2}}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3}$$

$$\Rightarrow \|\dot{\gamma}\|^3 = 9 \cdot \sqrt{\left(1+4t^2(1+t^2)\right)^3}$$

$$\Rightarrow k(t) = \frac{\overset{2}{\cancel{18}} \sqrt{4t^2 \cancel{+4t^4} + 1}}{\cancel{9} \cdot \sqrt{\left(1+4t^2(1+t^2)\right)^3}} = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2(1+t^2)}} \geq 0 \quad ✓$$

$$\Rightarrow \tau(t) = \frac{-108 \cdot a}{324 \cdot \left(1+4t^2(1+t^2)\right)} \underset{a=2}{=} - \frac{\overset{2}{\cancel{216}}}{\underset{3}{\cancel{324}} \left[1+4t^2(1+t^2)\right]}$$

$$= - \frac{2}{3\left(1+4t^2(1+t^2)\right)}$$

3) Per $a=2$ calcolare la lunghezza dell'arco tra i punti di γ $A=(0,1,0)$ e $B=(3,-2,-2)$

$$\Rightarrow t_A = 0 \ , \ t_B = -1$$

$\Rightarrow$ la lunghezza d'arco è:

$$s(t) = \int_{-1}^{0} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$= \int_{-1}^{0} 3\sqrt{1+4t^2+4t^4} \, dt \underset{\substack{t^2 = u \\ 2t\,dt = du}}{=} 3\int_0^1 \sqrt{1+4u+4u^2} \, \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$= 3\int_0^1 \frac{1+2u}{2\sqrt{u}} \, du = \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1+2u}{\sqrt{u}} \, du$$

$$\underset{\substack{s = \sqrt{u} \\ ds = \frac{1}{2\sqrt{u}} du}}{=} 3\int_0^1 1 + 2s^2 \, ds = 3\left(s + 2\frac{s^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 5$$

es. 4) Sia S con:

$$\varphi(u,v) = \left(u+v,\ \frac{u^2}{2}+uv,\ \frac{u^3}{3}+u^2v\right) \quad \text{con: } (u,v)\in\mathbb{R}^2$$

1) Det. i punti regolari:

$$X_1 = (1,\ u+v,\ u^2+2uv)$$

$$X_2 = (1,\ u,\ u^2)$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & u+v & u^2+2uv \\ 1 & u & u^2 \end{pmatrix}$$

$$= \left(u^2(u+v) - u(u^2+2uv),\ -(\cancel{u^2}-\cancel{u^2}-2uv),\ \cancel{u}-\cancel{u}-v\right)$$

$$= \left(\cancel{u^3}+u^2v-\cancel{u^3}-2u^2v,\ 2uv,\ -v\right)$$

$$= \left(-u^2v,\ 2uv,\ -v\right)$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} -u^2v = 0 \\ 2uv = 0 \\ -v=0 \end{cases} \iff v=0$$

$\Rightarrow$ S ha ∞ punti singolari per $v=0$

$\Rightarrow$ I punti regolari di S sono quelli per $v\neq 0$

2) Calcolare $T_p(S)$ e retta normale a S in

$P = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow \quad T_P(S) = P + \langle X_1, X_2 \rangle$

$\Rightarrow \quad V = P + \langle \vec{v} \rangle$ con $\vec{v} = X_1 \times X_2$

$\Rightarrow$ trovo $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ t.c. $\varphi(u, v) = P$

$$\Rightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ \frac{u^2}{2} + uv = 0 \\ \frac{u^3}{3} + u^2 v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = 1 - u \Rightarrow \begin{cases} \frac{u^2}{2} + u(1-u) = 0 \\ \frac{u^3}{3} + u^2(1-u) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{u^2}{2} + u - u^2 = 0 \ \wedge \ \frac{u^3}{3} + u^2 - u^3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u - \frac{1}{2}u^2 = 0 \\ u^2 - \frac{2}{3}u^3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u\left(1 - \frac{1}{2}u\right) = 0 \\ u^2\left(1 - \frac{2}{3}u\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} u = 0 \ \vee \ u = 2 \\ u = 0 \ \vee \ u = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow (u, v) = (0, 1)$$

$$\Rightarrow T_P(S) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\Rightarrow V = P + \langle X_1 \times X_2 \rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

3) Calcolare K_1, K_2, K_m, K_S in $P = (1, 0, 0)$

$\Rightarrow g_{11} = X_1 \cdot X_1 = 2, \ g_{12} = 1, \ g_{22} = 1$

$\Rightarrow X_{11} = (0, 1, 2u + 2v), \ X_{12} = (0, 1, 2u)$

$X_{22} = (0, 0, 0) \Rightarrow \ell_{22} = 0$

$\Rightarrow g = 2 - 1 = 1$

$\Rightarrow x_{11}(0,1) = (0,1,2), \; x_{12}(0,1) = (0,1,0)$

$\Rightarrow l_{ij} = \det \begin{pmatrix} x_{ij} \\ x_i \\ x_j \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow l_{11} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow l_{12} = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow l = 0 \Rightarrow K_s \equiv 0$

$\Rightarrow K_1, K_2, K_m:$

$$\lambda^2 \cdot g - \lambda (g_{11} \cancel{l_{22}}^{0} - 2 g_{12} \cancel{l_{12}}^{0} + g_{22} l_{11}) + \cancel{l}^{0} = 0$$

$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda(-2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda + 2) = 0 \Rightarrow K_1 = 0 \wedge K_2 = -2$

$\Rightarrow K_m = -1$