es. 1)

Sia $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

1) Verificare che τ è topologia:

1) $\emptyset, \mathbb{R} \in \tau$ ✓

2) siano $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow A_1 = (-\infty, x_1),$
$A_2 = (-\infty, x_2)$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = (-\infty, \min\{x_1, x_2\}) \in \tau$ ✓

3) sia $\{A_i\}_{i \in I}$ con $A_i \in \tau$

$\Rightarrow A_i = (-\infty, x_i) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i = (-\infty, \sup_{i \in I}\{x_i\}) \in \tau$

$\Rightarrow \tau$ è topologia.

2) Caratterizzare le funzioni continue $f: (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$

(Già visto) f deve essere non decrescente e non deve avere salti da sinistra.

3) Stabilire se date $f, g : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau)$ continue si può sempre dedurre $f+g$ / $f-g$ continua.

$\Rightarrow$ Se f, g sono non decrescenti, allora $f+g$ è non decrescente

$\Rightarrow$ se f, g sono continue da destra, $f+g$ è continua da destra.

$\Rightarrow$ f, g continue $\Rightarrow$ $f+g$ continua.

$\Rightarrow$ $f-g$ non è sempre non decrescente se f, g lo sono, basta che g cresca più della f

$\Rightarrow$ f, g continue non implica $f-g$ continua.

es. 2)

Sia $\mathcal{B} = \{[-1,-1+\varepsilon) \cup \{0\} \cup (1-\varepsilon, 1] \mid \varepsilon \in (0,1)\}$
base di $\tau(\mathcal{B})$ per $([-1,1], \tau(\mathcal{B}))$

1) Dim. che $[-1,1]$ con $\tau(\mathcal{B})$ è connesso.
2) Det. $\overline{(0,\frac{1}{2})}$, $\overset{\circ}{(0,\frac{1}{2})}$
3) Caratterizzare per $a, b \in \mathbb{R}$ gli intervalli $[a,b] \subseteq [-1,1]$ compatti.

$\Rightarrow$ 1) $\mathcal{B} = \{[-1,-1+\varepsilon) \cup \{0\} \cup (1-\varepsilon, 1] \mid \varepsilon \in (0,1)\}$

$\Rightarrow$ 

$\in \mathcal{B}$

$\Rightarrow$ se $\varepsilon \to 1$, si ottiene $[-1,1]$

$\Rightarrow$ se $\varepsilon \to 0$, si ottiene 

$\Rightarrow$ se $[-1,1]$ è connesso $\nexists\, A_1, A_2 \in \tau(\mathcal{B})$ disgiunti non banali t.c. $A_1 \cup A_2 = [-1,1]$

$\Rightarrow$ tutti gli elementi di $\tau(\mathcal{B})$ sono fatti come gli elementi di $\mathcal{B}$.

$\Rightarrow$ Allora l'unico modo di ricoprire $[-1,1]$ con aperti di $\tau(\mathcal{B})$ è tramite unione infinita di aperti di $\tau(\mathcal{B})$ non disgiunti (tutti contengono 0)

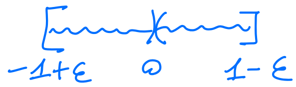
$\Rightarrow$ $[-1,1]$ è connesso.

$\Rightarrow$ 2) $\overline{(0,\frac{1}{2})}$, $\overset{\circ}{(0,\frac{1}{2})}$

$\Rightarrow$ sicuramente $\overset{\circ}{(0,\frac{1}{2})} = \emptyset$ perché $1, -1 \in A$

$\forall A \in \tau(B)$

$\Rightarrow$ I chiusi τ sono fatti così:



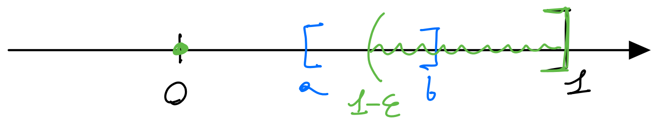
con $\varepsilon \in (0,1)$

$\Rightarrow$ $\overline{(0,\frac{1}{2})} = [-1+\frac{1}{2}, 0) \cup (0, 1-\frac{1}{2}] = [-\frac{1}{2}, 0) \cup (0, \frac{1}{2}]$

$\Rightarrow$ 3) Quando $[a,b] \subseteq [-1,1]$ è compatto?

$\Rightarrow$ Va discriminato in base a se $0 \notin [a,b]$ oppure $0 \in [a,b]$

$\Rightarrow$ se $0 \notin [a,b]$: assumiamo $0 < a < b$,

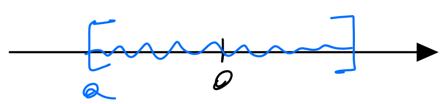


$\Rightarrow$ sicuramente $\forall R$ ricoprimento di $[-1,1]$ $\exists A \in R$ t.c. $a \in A$. Tale aperto allora contiene sicuramente anche b! (perché $[a,b] \subseteq [-1,1]$)

$\Rightarrow$ tale A è sottoricoprimento finito di R per $[a,b]$

$\Rightarrow$ se $0 \notin [a,b]$, $[a,b]$ è compatto.

$\Rightarrow$ se $0 \in [a,b]$, allora assumiamo $a \leq 0 \leq b$:



$\Rightarrow$ sia $R = \{[-1, \frac{1}{n}) \cup \{0\} \cup (1-\frac{1}{n}, 1] \mid n > 1 \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow$ R copre $[a,b]$ ed è aperto ma non ammette sottoricoprimento finito

$\Rightarrow$ se $0 \in [a, b]$, $[a, b]$ non è compatto.

es. 3)

Sia $\gamma(t) = (t - 2\sin t,\ 2 - 2\cos t)$ $t \in (-2\pi, 2\pi)$

1) Stabilire se γ è un'immersione regolare

$\Rightarrow \dot{\gamma}(t) = (1 - 2\cos t,\ 2\sin t)$

$\Rightarrow$ punti singolari:

$$\begin{cases} 1 - 2\cos t = 0 \\ 2\sin t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t = \frac{1}{2} \\ \sin t = 0 \end{cases} \lightning$$

$\Rightarrow \gamma$ è immersione locale

$\Rightarrow$ verifico se γ è iniettiva:

$$\gamma(t_1) = (t_1 - 2\sin t_1,\ 2 - 2\cos t_1)$$
$$\gamma(t_2) = (t_2 - 2\sin t_2,\ 2 - 2\cos t_2)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ \cancel{2} - 2\cos t_1 = \cancel{2} - 2\cos t_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_1 - 2\sin t_1 = t_2 - 2\sin t_2 \\ \cos t_1 = \cos t_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dalla 2) ottengo $t_1 = t_2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $t_2 + 2k\pi = t_2 \iff k = 0 \Rightarrow$ per $k \neq 0$, non ha soluzione

$\Rightarrow \exists\, t_1, t_2$ con $t_1 \neq t_2$ t.c. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$

$\Rightarrow \gamma$ non è iniettiva $\Rightarrow \gamma$ non è immersione

$\Rightarrow \gamma$ non è immersione regolare

2) Verificare se t è parametro d'arco:

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{5 - 4\cos t} \Rightarrow \|\dot{\gamma}(t)\| \not\equiv 1$$

$\Rightarrow t$ non è parametro d'arco.

3) Calcolare $k(t)$ in $p = (0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} t - 2\sin t = 0 \\ 2 - 2\cos t = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin t = \frac{t}{2} \\ \cos t = 1 \end{cases} \Rightarrow t = 0$$

$$\tilde{k}(t) = \frac{\det(\dot{\gamma}(t) \mid \ddot{\gamma}(t))}{\|\dot{\gamma}(t)\|^3} \quad \text{in } t = 0$$

$$= \det(\dot{\gamma}(0) \mid \ddot{\gamma}(0))$$

$$= \det\begin{pmatrix} -1 & \ddot{\gamma}(0) \\ 0 & \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -2$$

$$\Rightarrow \ddot{\gamma}(t) = (2\sin t, 2\cos t) \Rightarrow \ddot{\gamma}(0) = (0, 2)$$

$$\Rightarrow k(t) = |\tilde{k}(t)| = 2$$