1) Dato il gruppo simmetrico S_8, esprimere i seguenti elementi come prodotto di cicli disgiunti e come prodotto di trasposizioni (cicli di lunghezza 2):

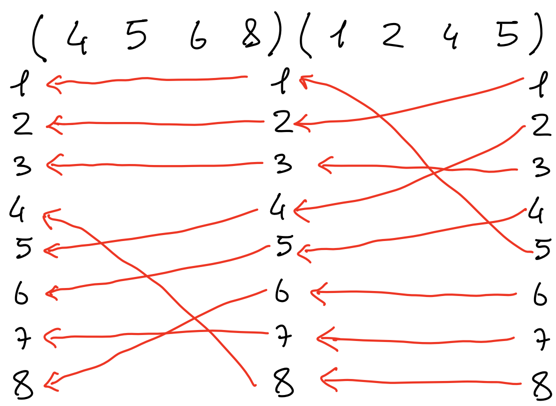
a) $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 4 & 1 & 8 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\tau = (4568)(1245)$

c) $\tau = (624)(253)(876)(45)$

$\Rightarrow$ a) $\tau = (1734)(26)(58) = (17)(73)(34)(26)(58)$

$\Rightarrow$ b) $\tau = (4568)(1245) \Rightarrow$ soluzione grafica:



$\Rightarrow \tau = (125)(468) = (12)(25)(46)(68)$

$\Rightarrow$ c) $\tau = (624)(253)(876)(45)$

$= (462)(253)(876)(45)$

$= (46253)(876)(45)$

$= (25346)(687)(45)$

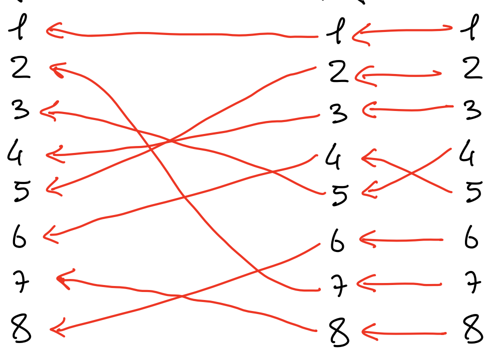
$= (2534687)(45)$

$\Rightarrow$ hanno sia il 4 che il 5 in comune

$\Rightarrow$ non possiamo riordinarli come sopra

$\Rightarrow$ usiamo quindi il metodo grafico:

$(2\ 5\ 3\ 4\ 6\ 8\ 7)(4\ 5)$



$$\Rightarrow \sigma = (2\ 5\ 6\ 8\ 7)(3\ 4) \overset{!}{=} (2\ 5)(5\ 6)(6\ 8)(8\ 7)(3\ 4)$$

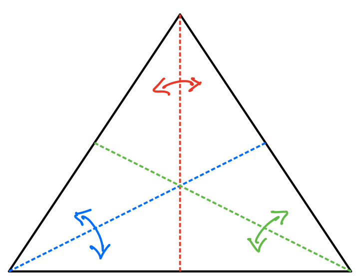
Sul gruppo S_3:

sappiamo che $S_3 := \{ f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\} \mid f \text{ biiettiva} \}$
e che $|S_3| = 3! = 6$:

$$\Rightarrow S_3 = \{ (),\ (1\ 2),\ (2\ 3),\ (1\ 3),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2) \}$$

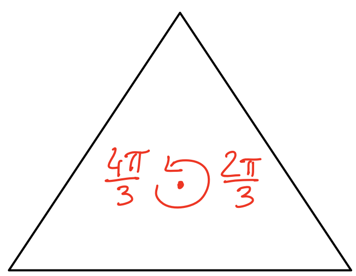
Consideriamo ora un triangolo equilatero sul piano e tutte trasformazioni rigide (rotazioni, simmetrie) dal piano in se che mandano il triangolo in sé stesso:

1) Simmetrie:



$\Rightarrow$ 3 simmetrie

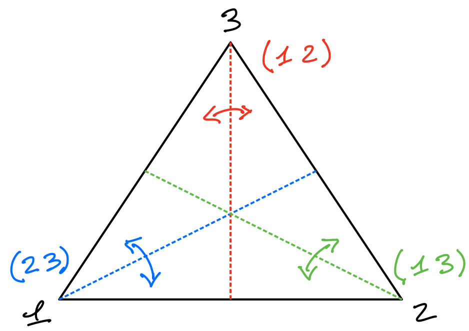
2) Rotazioni:

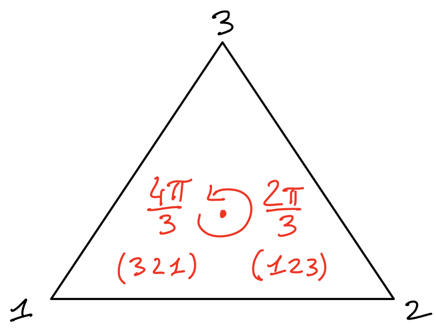


$\Rightarrow$ 2 rotazioni

$\Rightarrow$ In totale si hanno 5 trasformazioni rigide + l'identità

$\Rightarrow$ si ha che, numerando i vertici del triangolo, ciascuna trasformazione può essere identificata in base a dove vengono mappati tali vertici:



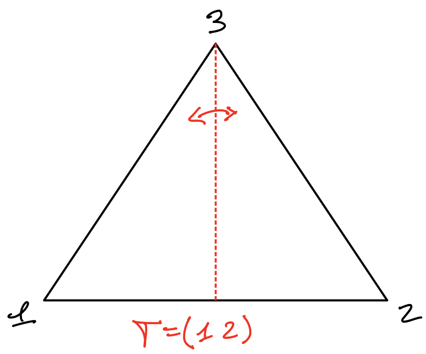


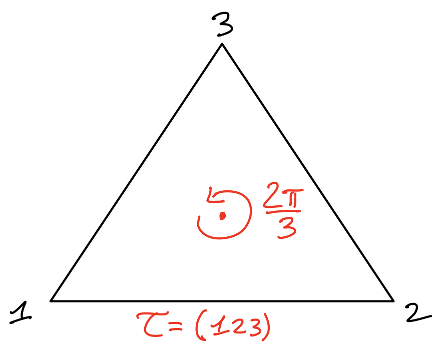
$\Rightarrow$ si nota che tali trasformazioni con l'operazione $\circ$ forma un gruppo (elemento neutro = ( )) che coincide con S_3 !!!

N.B.

Non avviene così, tuttavia, per tutti i poligoni !!!
Il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di n lati si dice GRUPPO DIEDRALE D_n e generalmente NON COINCIDE con S_n !!!

Siano ora $\sigma = (1\ 2)$, $\tau = (1\ 2\ 3)$:





$\Rightarrow$ notiamo che da σ, τ si ricavano tutte le altre!

es. ricaviamo la rotazione di $\frac{4\pi}{3}$

$$\Rightarrow \quad \frac{4\pi}{3} = \tau^2 = (1\,2\,3)^2 = (3\,2\,1)$$

ricaviamo ora le altre:

- $\tau^2 \sigma \tau$: $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\tau} \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 3 & & 1 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\tau^2} \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} = (1\,3)$

- $\tau \sigma \tau^2$: $\begin{smallmatrix} & 3 & \\ 1 & & 2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\tau^2} \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\sigma} \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 3 & & 2 \end{smallmatrix} \xrightarrow{\tau} \begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \end{smallmatrix} = (2\,3)$

- $\tau^3 = \sigma^2 = id$

$$\Rightarrow S_3 = \{(\,),\ (1\,2),\ (2\,3),\ (1\,3),\ (1\,2\,3),\ (1\,3\,2)\}$$
$$\updownarrow$$
$$\Rightarrow D_3 = \{id,\ \sigma,\ \tau\sigma\tau^2,\ \tau^2\sigma\tau,\ \tau,\ \tau^2\}$$

$\Rightarrow$ notiamo ora che $\sigma\tau = \tau^2\sigma$, $\sigma\tau^2 = \tau\sigma$, quindi:

$$\tau\sigma\tau^2 = \sigma\tau^4 = \sigma\tau$$
$$\tau^2\sigma\tau = \sigma\tau^2 = \tau\sigma$$

$$\Rightarrow D_3 = \{id,\ \sigma,\ \tau,\ \tau^2,\ \sigma\tau,\ \tau\sigma\}$$

<u>Sui gruppi Diedrali:</u>

Sia D_n il gruppo delle simmetrie di un poligono regolare di n lati, e siano:

σ = simmetria rispetto ad un asse

τ = rotazione di $\frac{2\pi}{n}$

$\Rightarrow$ si nota facilmente che $\tau^n = id = \sigma^2$ e che $|D_n| = 2n$

$$\Rightarrow D_n = \{id,\ \tau,\ \tau^2, \dots, \tau^{n-1},\ \tau\sigma,\ \sigma^2\sigma, \dots, \tau^{n-1}\sigma\}$$

$\Rightarrow$ si ha che $\{id, \tau, \tau^2, \dots, \tau^{n-1}\}$ sono ROTAZIONI,

mentre $\{\tau\gamma, \tau^2\gamma, \dots, \tau^{n-1}\gamma\}$ INVERTONO L'ORIENTAMENTO

es.

$\gamma\tau$? $\Rightarrow$ $\gamma\tau = \tau^{n-1}\gamma = \tau^{-1}\gamma$

$\Rightarrow$ con le 3 relazioni $\tau^n = id = \gamma^2$, $\gamma\tau = \tau^{-1}\gamma$ si possono scrivere tutte le possibili combinazioni

es.

Calcoliamo $\gamma\tau^2$:

$$\gamma\tau = \tau^{-1}\gamma \Rightarrow \gamma\tau\tau = \tau^{-1}\gamma\tau = \tau^{n-1}\tau^{n-1}\gamma$$

$$= \tau^{2n-2}\gamma = \tau^{n-2}\gamma \quad (\tau^n = id)$$

N.B. $|S_3| = 6 = |D_3|$ MA IN GENERALE $|S_n| = n!$, $|D_n| = 2n$

$\Rightarrow$ si ha, in generale, che $D_n \subseteq S_n$

N.B. $|G| = |P| \not\Rightarrow G = P$!!!

es.:

$n = 6 \Rightarrow$ consideriamo le rotazioni di un esagono regolare $\Rightarrow$ costituiscono un gruppo con 6 elementi, MA è evidentemente "DIVERSO" da $D_3 = S_3$, anche se hanno uguale cardinalità.

$\Rightarrow$ infatti, dato $\gamma =$ rotazione di $\frac{2\pi}{6}$, si ha:

$$\gamma^6 = id \wedge \gamma^n \neq id \quad \forall\, 0 < n < 6$$

$\Rightarrow \gamma \notin D_3$