1) Sia $f \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio t.c. $|Gal(f/\mathbb{Q})| \leqslant 11$.

Dim. che f è risolubile per radicali

$\Rightarrow Gal(f/\mathbb{Q}) = Gal(K/\mathbb{Q})$ con $K :=$ CRC di f su $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow f$ risolubile per radicali $\Leftrightarrow Gal(K/\mathbb{Q})$ è risolubile

$\Rightarrow$ sia $G := Gal(f/\mathbb{Q})$.

1) $|G| = 1 \Rightarrow G$ è ovviamente risolubile

2) $|G| = p$, p primo $\Rightarrow G$ è ciclico $\Rightarrow G$ è abeliano $\Rightarrow G$ è risolubile: una catena è $0 \lhd G$

3) $|G| = p^k$, p primo, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow$ dall'equazione delle classi si ha: $|G| = |Z(G)| + \sum_{i=1}^{r} [G : Z(x_i)]$

con $x_1, \dots, x_r$ sono rappresentanti delle orbite NON banali per coniugio

$\Rightarrow [G : Z(x_i)] \mid |G|$ (Teorema di Lagrange)

$\Rightarrow [G : Z(x_i)] \neq 1 \Rightarrow [G : Z(x_i)] \geqslant p$

$\Rightarrow p \mid [G : Z(x_i)] \ \forall i = 1, \dots, r$

$\Rightarrow p \mid |Z(G)| \Rightarrow Z(G)$ è NON banale ed è abeliano per definizione, inoltre $Z(G) \lhd G$

$\Rightarrow 0 \lhd Z(G)$

$\Rightarrow$ consideriamo $Z(G/Z(G))$:

$$0 \lhd Z(G/Z(G)) \lhd G/Z(G)$$

$$\underset{\pi}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \ 0 \lhd \underset{Z_1(G)}{\underset{\parallel}{Z(G)}} \lhd \underset{Z_2(G)}{\underset{\parallel}{\pi^{\leftarrow}(Z(G/Z(G)))}} \lhd G$$

$\Rightarrow$ si ha $0 \lhd Z_1(G) \lhd Z_2(G) \lhd G$

$\Rightarrow G$ è risolubile

4) $|G| = 6, 10 \Rightarrow |G| = 2p$ con $p = 3, 5$ primo

$\Rightarrow \exists H \leqslant G$ t.c. $|H| = p \wedge [G : H] = 2$ (Teorema di Cauchy

$\Rightarrow$ Consideriamo la catena $0 \leqslant H \leqslant G$:

H è normale ($H \cup Ha = G \wedge H \cap Ha = \phi$ $\forall a \in G \setminus H \Rightarrow Ha = G \setminus H = aH \Rightarrow Ha = aH$)

$\Rightarrow 0 \triangleleft H \triangleleft G$ ed i quozienti sono abeliani ($H/0 = H$ ciclico e abeliano, $|G/H| = 2$ $\Rightarrow G/H$ ciclico e abeliano)

$\Rightarrow G = Gal(f/\mathbb{Q})$ è risolubile $\Rightarrow f$ è risolubile per radicali

---

2) Dim. i seguenti:

a) $f = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1$ su $\mathbb{Q}$ è risolubile per radicali

$\Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow f = (x-1)g(x)$ con $\deg(g) = 4$

$\Rightarrow g$ è risolubile per radicali $\Rightarrow f$ è risolubile per radicali

b) $f = x^5 - 6x + 3$ NON è risolubile per radicali

$\Rightarrow$ se $G \leqslant S_5$ contiene una trasposizione (ciclo di lunghezza 2) ed un ciclo di lunghezza 5, allora $G = S_5$.

$\Rightarrow S_n$ NON è risolubile per $n \geqslant 5$

$\Rightarrow Gal(f/\mathbb{Q}) \leqslant S_5$ per definizione

$\Rightarrow$ sia α radice di f, $K :=$ CRC di f.

$$\underbrace{\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\alpha)}_{\text{grado } 5} \subseteq K$$

grado 5 (f irriducibile per Eisenstein)

$\Rightarrow [K : \mathbb{Q}] = 5 \cdot [K : \mathbb{Q}(\alpha)] \Rightarrow |Gal(f/\mathbb{Q})| = 5 \cdot K$

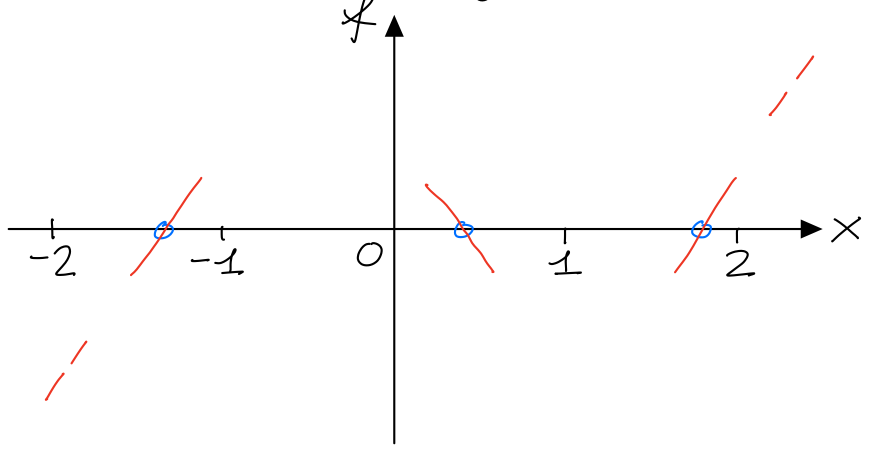
$\Rightarrow \exists$ elemento di ordine 5 $\in Gal(f/\mathbb{Q})$ ed è un ciclo di lunghezza 5.

$\Rightarrow f$ ha esattamente 3 radici reali (e 2 radici complesse), infatti:

$f(-2) = -17 < 0$, $f(-1) = 8 > 0$, $f(1) = -2 < 0$,

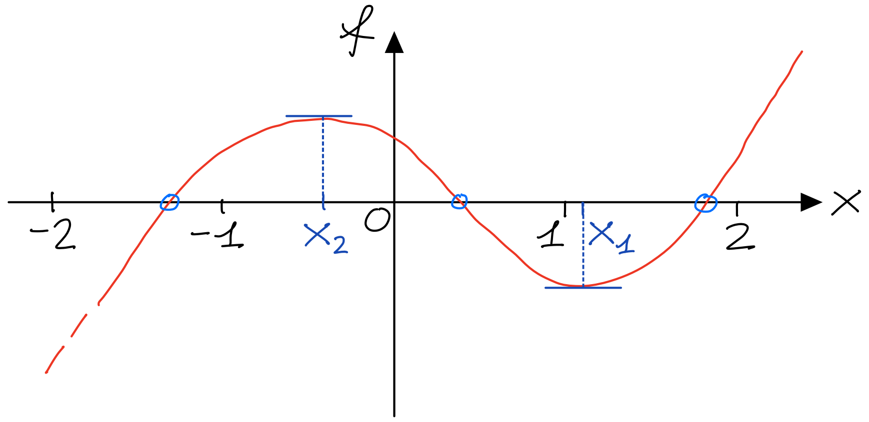
$f(2) = 23 > 0$, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

$\Rightarrow$ per il Teorema degli zeri si ha:



f ha almeno 3 zeri reali

$\Rightarrow f'(x) = 5x^4 - 6 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{6}{5}}$, quindi per il Teorema di Rolle si ha:



$\Rightarrow$ f ha esattamente 3 radici reali distinte e 2 radici complesse coniugate.

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\underbrace{\alpha, \beta, \gamma}_{\text{3 radici reali di } f}) \subseteq K$ $\Rightarrow$ In $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ si ha che $f = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)g(x)$ con $\deg g = 2$, g irriducibile (g ha solo radici complesse, quindi é irriducibile su $\mathbb{Q}$)

$\Rightarrow$ $2 \mid [K : \mathbb{Q}] = |Gal(f/\mathbb{Q})|$ $\Rightarrow$ $Gal(f/\mathbb{Q})$ contiene un elemento di ordine 2 ovvero una trasposizione

$\Rightarrow$ $Gal(f/\mathbb{Q}) = S_5$ NON é risolubile

$\Rightarrow$ f NON é risolubile per radicali.