19. Trasformata Zeta

Si tratta della versione a tempo discreto della TL $\mathcal{L}$:

$$t_n \equiv n \cdot \Delta t \equiv n$$

$\Rightarrow$ é una funzione generatrice per successioni definite per ricorrenza (ricorsione)

$\Rightarrow$ si utilizza per la risoluzione di equazioni alle differenze.

$\Rightarrow$ é uno sviluppo di Laurent "all' infinito":

se u é segnale causale, si pone $u_n = u(t_n) \equiv u(n\Delta t)$ (segnale campionato). Si ha:

$$\mathcal{L}(u)(s) = \int_0^{+\infty} u(t)\, e^{-ts}\, dt \approx \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, e^{-sn\Delta t}\, \Delta t$$

$\Rightarrow$ poniamo $z = e^{s\Delta t}$ e otteniamo:

$$\boxed{\mathcal{L}(u)(s) \approx \Delta t \cdot Z(\{u_n\})(z)}$$

con:

$$\boxed{Z(\{u_n\})(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, z^{-n}}$$

Trasformata Zeta del segnale discreto $\{u_n\}_{n \geq 0}$

Oss.:

$\{u_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ segnale discreto si dice causale se $u_n = 0 \quad \forall n < 0$:

1) $H(n) \equiv H_n = \begin{cases} 1 & \forall n \geq 0 \\ 0 & \forall n < 0 \end{cases}$ Funzione di Heaviside discreta

2) $\delta_0 \equiv \delta_0(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$ Delta di Dirac discreta

$\Rightarrow$ si ha:

$$\delta_0 = \frac{H - \tau_1 H}{1} \Rightarrow \delta_0 \text{ é la derivata discreta di } H \text{ !!!}$$

Proprietà di Z:

1) $Z(\{u_n\})$ é olomorfa all' esterno di un disco (i.e. Raggio di Convergenza - serie di Laurent)

2) se $\{u_{n+1}\}$ é il segnale traslato di 1 unità di tempo allora:

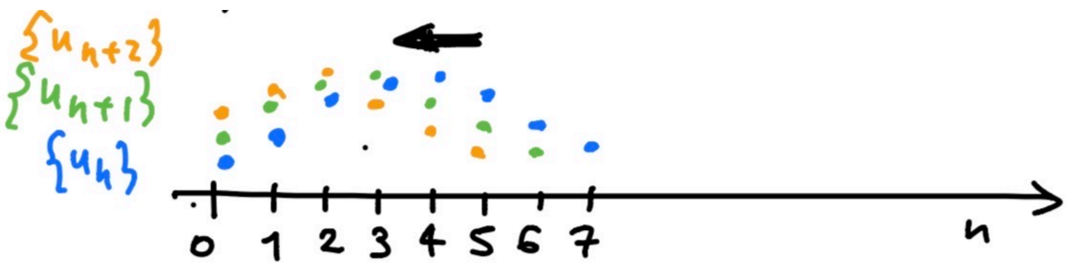
$$Z(\{u_{n+1}\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1}\, z^{-n} = z \sum_{m=1}^{+\infty} u_m\, z^{-m} = z\, Z(\{u_n\}) - z\, u_0$$

$m = n+1$

allo stesso modo:

$$\mathcal{Z}(\{u_{n+2}\}) = z^2\, \mathcal{Z}(\{u_n\}) - z^2 u_1 - z u_0$$

etc.



3) CONVOLUZIONE DISCRETA ($\equiv$ PRODOTTO DI CAUCHY):

$\{u_n\}, \{v_n\}$ segnali discreti causali $\Rightarrow$ si definisce:

$$c_n := \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} \Rightarrow \{c_n\} \equiv \{u_n\} * \{v_n\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{Z}(\{c_n\}) = \mathcal{Z}(\{u_n\}) \cdot \mathcal{Z}(\{v_n\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{-n}}$$

CONVOLUZIONE DISCRETA DI 2 SEGNALI DISCRETI

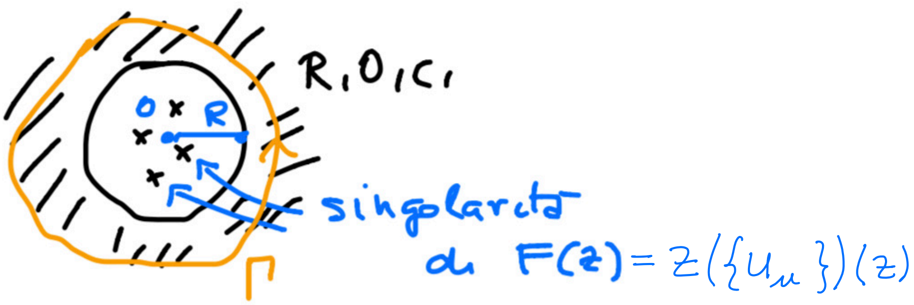
$\equiv$ PRODOTTO DI CAUCHY DI SERIE

FORMULA DI INVERSIONE:

Dalla formula per i coefficienti della Serie di Laurent si ha:

$$\boxed{u_n = \oint_{\Gamma} \mathcal{Z}(\{u_n\})(z) \cdot z^{n-1}\, dz}$$

con Γ = cerchio



RELAZIONE TRA $\mathcal{Z}$ ED $\mathcal{F}$:

se il R.O.C. contiene $\Gamma = \{|z| = 1\} = \{e^{i\theta},\ \theta \in [0, 2\pi]\}$, si ha:

$$u_n = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} F(e^{i\theta}) \cdot \underbrace{\frac{e^{in\theta}}{\cancel{e^{i\theta}}}}_{z^{n-1}} \cdot \underbrace{\cancel{i}\cancel{e^{i\theta}}\, d\theta}_{dz} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{g(\theta)}_{\equiv F(e^{i\theta})} e^{in\theta}\, d\theta$$

ovvero u_n sono i coefficienti di Fourier della restrizione $g(\theta)$ al cerchio unitario di $\mathcal{Z}(\{u_n\})$.

EQUAZIONI ALLE DIFFERENZE (ODE DISCRETE):

Sia, per esempio, $\{u_n\}$ definita dalla seguente relazione di ricorrenza:

$$\begin{cases} u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6u_n = 0 \\ u_1 = 1,\ u_0 = 0 \end{cases}$$

Sia $F(z) = \mathcal{Z}(\{u_n\})$ (funzione generatrice di $\{u_n\}$). Si ha:

$$\mathcal{Z}(\{u_{n+2}\}) = z^2 F - z^2 \cancel{u_0} - z u_1 = z^2 F - z$$

$$\mathcal{Z}(\{u_{n+1}\}) = zF - zu_0 = zF$$

$$\Rightarrow z^2 F - 5zF + 6F - z = 0 \Rightarrow F = \frac{z}{z^2 - 5z + 6}$$

Per calcolare $\{u_n\}$ possiamo determinare lo sviluppo di Laurent di F che converge fuori dal disco (ovvero secondo potenze z^{-n}, $n \geq 0$):

$$F = \frac{z}{(z-2)(z-3)} = \frac{\alpha}{(z-2)} + \frac{\beta}{(z-3)} = -\frac{2}{(z-2)} + \frac{3}{(z-3)}$$

Oss.:

$$F = \underbrace{\mathcal{Z}(\{\delta_0\})}_{z} \cdot \underbrace{\mathcal{Z}(\{g_n\})}_{(z^2-5z+6)^{-1}} \Rightarrow \mathcal{Z}(\{u_n\}) = \mathcal{Z}(\{\delta_0(n)\} * \{g_n\})$$

$$\Rightarrow u_n = \{\underbrace{\delta_0(n)}\} * \{g_n\} = \{g_n\} =: \text{SOLUZIONE FONDAMENTALE "FUNZIONE DI GREEN"}$$

identità rispetto a $*$ discreta (prodotto di Cauchy)

N.B.

si ha $\alpha = \mathrm{Res}(F; z=2)$, $\beta = \mathrm{Res}(F; z=3)$

$$\Rightarrow -\frac{2}{(z-2)} = -\frac{2}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) = -\frac{2}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{-n} \quad (|z|>2)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{(z-3)} = \frac{3}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{3}{z}}\right) = \frac{3}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} 3^n z^{-n} \quad (|z|>3)$$

$$\Rightarrow F(z) = \sum_{m=1}^{+\infty} (-2^m + 3^m) z^{-m} \quad (m = n+1)$$

$$\Rightarrow u_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 3^n - 2^n & n > 0 \end{cases}$$

Es. (Successione di Fibonacci):

$$\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_0 = a_1 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z^2 F - zF - F - z^2 - \cancel{z} + \cancel{z} = 0 \Rightarrow F = \frac{z^2}{z^2 - z + 1} = 1 + \frac{z+1}{z^2-z+1}$$

$$= 1 + \frac{z_1 + 1}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{z_2+1}{(z-z_1)(z-z_2)} = 1 + \frac{z_1^2}{z\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_1}{z}} - \frac{z_2^2}{z\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z_2}{z}}$$

$$z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = 1$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{z_1}{\sqrt{5}} \cdot z_1^n - \frac{z_2}{\sqrt{5}} \cdot z_2^n \right) \cdot z^{-n}$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} & n > 0 \end{cases} \quad \in \mathbb{N} \quad \forall n \quad !!!$$