

# Appunti di Algebra e Geometria

Ettore Forigo



# Chapter 1

## Insiemi

### 1.1 Cardinalità di Insiemi Finiti

$|A| = n \in \mathbb{N}$  dove  $n$  è il n° di elementi in  $A$ .

### 1.2 Multiinsiemi o Sistemi

Insieme con molteplicità, ovvero una collezione non ordinata di elementi con ripetizioni.

$$[a, b, c]$$

### 1.3 Insiemi Famosi

$\mathbb{N}$  = Numeri Naturali =  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  = Numeri Interi

$\mathbb{Q}$  = Numeri Razionali

$\mathbb{R}$  = Numeri Reali

$\mathbb{C}$  = Numeri Complessi

$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$\mathbb{Q}^x = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$

$\mathbb{R}^x = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\mathbb{C}^x = \mathbb{C} \setminus \{0\}$

### 1.4 Definizione di Sequenza (o Ennupla / n-upla)

Collezione ordinata di elementi.

$$(a, b, c)$$

$$\begin{aligned}(a, b) &:= \{\{a\}, \{a, b\}\} \\ (a, a) &= \{\{a\}, \{a, a\}\} = \{\{a\}, \{a\}\} = \{\{a\}\}\end{aligned}$$

## Chapter 2

# Relazioni

### 2.1 Definizione di Relazione

Si dice che  $R \subseteq A \times B$  è una relazione tra due insiemi  $A$  e  $B$ .

Se:

$$C = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$$

Si scrive:

$$b_1 = C(a_1)$$

$$b_2 = C(a_2)$$

#### 2.1.1 Proprietà delle Relazioni

##### Totalità a Sinistra

Una relazione  $R$  tra  $A$  e  $B$  si dice **ovunque definita** (o totale a sinistra) se:

$$\forall x \in A. \exists y \in B : (x, y) \in R$$

##### Funzionalità

Una relazione  $R$  tra  $A$  e  $B$  si dice **funzionale** se:

$$\forall x \in A. \exists y \in B : (x, y) \in R \implies \exists! y \in B : (x, y) \in R$$

### 2.2 Definizione di Funzione

Una relazione  $f$  si dice funzione se è funzionale e ovunque definita.

“Funzione” si riferisce alla terna: associazione di elementi, dominio e codominio, non solo all’associazione di elementi. Specificare solo un’associazione non definisce una funzione: occorre specificare anche dominio e codominio. Infatti, due funzioni che hanno una “stessa” associazione di elementi ma diverso dominio e/o diverso codominio sono funzioni diverse.

Si scrive:

$$f : A \rightarrow B$$

dove  $A$  è il dominio di  $f$  e  $B$  è il codominio di  $f$ .

### 2.2.1 Proprietà delle Funzioni

#### Iniettività

Una funzione da  $A$  a  $B$  si dice **iniettiva** se:

$$\forall x, x' \in A. f(x) = f(x') \implies x = x'$$

#### Suriettività

Una funzione da  $A$  a  $B$  si dice **suriettiva** (o totale a destra) se:

$$\forall y \in B. \exists x \in A : y = f(x)$$

(equivalentemente:  $im(f) = codom(f)$ )

#### Biiettività

Una funzione si dice **biiettiva** (o biiezione, o anche corrispondenza 1 a 1 o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

Osservazione:

$$f : A \rightarrow B \text{ è biiettiva } \implies |A| = |B|$$

$A$  e  $B$  possono essere infiniti.

$$|X| < |Y| \iff \exists \text{ una funzione iniettiva } X \rightarrow Y \wedge \nexists \text{ una biiezione } X \rightarrow Y.$$

### 2.2.2 Definizione di Immagine

L’insieme di tutti i valori di  $f : A \rightarrow B$  valutata in ogni elemento di un insieme  $S \subseteq A$  si dice l’immagine di  $S$  tramite  $f$ :

$$f[S] = f(S) := \{f(s) \in B : s \in S \subseteq A\} \subseteq B$$

$$\text{Im}f = \text{im}(f) = f[A]$$

L'immagine del dominio di una funzione  $f$  tramite  $f$  si dice immagine di  $f$ .

Il valore di  $f : A \rightarrow B$  valutata in  $x \in A$  si dice immagine di  $x$  tramite  $f$ .

$$\text{im}(f) \subseteq \text{codom}(f)$$

### 2.2.3 Definizione di Controimmagine

L'insieme degli elementi del dominio di una funzione  $f : A \rightarrow B$  che  $f$  associa a tutti gli elementi di  $S$  si dice controimmagine, preimmagine o immagine inversa di  $S$  tramite  $f$ :

$$f^{-1}[S] = f^{-1}(S) := \{x \in A : f(x) \in S \subseteq B\} \subseteq A$$

### 2.2.4 Definizione di Restrizione

Detta anche restrizione del dominio o restrizione a sinistra.

$$f : A \rightarrow B, X \subseteq A$$

Si dice restrizione di  $f$  ad  $X$  la funzione:

$$\begin{aligned} f_X : X &\rightarrow B \\ f_X(x) &= f(x) \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

O equivalentemente:

$$f_X : X \rightarrow B = \{(a, b) \in f : a \in X\}$$

O ancora:

$$f_X : X \rightarrow B = f \circ i$$

Dove  $i : X \rightarrow A$  è l'inclusione di  $X$  in  $A$  data da  $i(a) = a$ .

### 2.2.5 Definizione di Troncatura

Detta anche corestrizione, restrizione del codominio o restrizione a destra.

Data  $f : A \rightarrow B \wedge \text{Im}(f) \subseteq Y$ , si dice **troncatura** di  $f$  ad  $Y$  la funzione:

$$f^Y : A \rightarrow Y = \{(a, y) \in A \times Y : y = f(a)\}$$

Osservazione:

Il codominio viene ristretto.

In generale prima si restringe e poi si tronca una funzione.

### 2.2.6 Composizione

L'elemento  $b$  che compone in  $(g \circ f)$  è unico  $\forall a \in A$ .

## 2.3 Strutture Algebriche

### 2.3.1 Definizione di Operazione Binaria

Sia  $U$  un insieme. Si dice **operazione binaria** una funzione  $o : U \times U \rightarrow U$ .

### 2.3.2 Definizione di Struttura Algebrica

Una **struttura algebrica** è una  $n$ -upla data da un insieme ed una o più operazioni su di esso:

$$(U, o)$$

### 2.3.3 Definizione di Associatività

Si dice che  $*$  è associativa se  $\forall a, b, c \in A. a * (b * c) = (a * b) * c$ .

### 2.3.4 Definizione di Elemento Neutro

Sia  $(A, *)$  un insieme con una operazione binaria (magma):

$$\begin{aligned} * : A \times A &\rightarrow A \\ (a, b) &= a * b \end{aligned}$$

Si dice che  $e \in A$  è un **elemento neutro** per  $*$  se:

$$\forall a \in A. e * a = a * e = a$$

### 2.3.5 Definizione di Inverso, Inverso Destro e Inverso Sinistro

Se  $(X, *)$  ammette elemento neutro  $e$  si dice che  $\forall x \in X$ :

$$\begin{aligned} x' &\text{ è inverso destro di } x \text{ se } \exists x' \in X : x * x' = e \\ x'' &\text{ è inverso sinistro di } x \text{ se } \exists x'' \in X : x'' * x = e \\ x''' &\text{ è inverso di } x \text{ se } x''' \text{ è inverso destro di } x \wedge x''' \text{ è inverso sinistro } x. \end{aligned}$$



### 2.3.6 Definizione di Commutatività

Si dice che  $*$  è commutativa se  $\forall a, b \in A. a * b = b * a$ .

### 2.3.7 Definizione di Monoide

$(A, *)$  (magma) è detto **monoid** se  $*$  è associativa (semigrupp) e ammette elemento neutro.

### 2.3.8 Definizione di Gruppo

$(A, *)$  è detto **gruppo** se è un monoid  $\wedge$  ogni elemento di  $A$  ammette inverso (necessariamente unico, destro e sinistro, solitamente indicato con  $a^{-1}$ ).

### 2.3.9 Definizione di Gruppo Abeliano

$(A, *)$  è detto **gruppo abeliano** o commutativo se oltre ad essere un gruppo,  $*$  è commutativa.

### 2.3.10 Definizione di Sottrazione

La sottrazione è definita come somma con l'opposto di un elemento in  $(\mathbb{Z}, +)$ .

$$a - b = a + (-b)$$

## 2.4 Definizione di Successione

Una funzione  $f$  si dice successione se:

$$f : \mathbb{N} \rightarrow A$$

## 2.5 Matrici

Matrice  $m \times n$  a coefficienti in  $\mathbb{K}$ :  $Mat_{m,n}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m,n}$

Elementi  $a_{i,j}$

$m \neq n \rightarrow$  matrice rettangolare

$m = n \rightarrow$  matrice quadrata

$$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$$

\ = diagonale principale  
 / = diagonale secondaria

### 2.5.1 Matrici quadrate particolari

#### Triangolare superiore

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i > j$$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$$

#### Triangolare inferiore

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall j > i$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

#### Diagonale

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i > j$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

#### Scalare (Diagonale)

$$\text{con } a_{i,i} = k \in \mathbb{K}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

#### Identica (o Identità) di ordine $n$ (Scalare con $k = 1$ )

$$a_{i,i} = 1$$

$$I_n$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Nulla  $\underline{0}$**

$$a_{i,j} = 0 \quad \forall i, j$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### 2.5.2 Matrice Trasposta

$$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$$

Matrice trasposta di A:

$$A^T$$

Righe e colonne scambiate.

$$a_{i,j} = a_{j,i}$$

$$A = (A^T)^T$$

$$A = A^T \implies A \text{ è simmetrica, } A \text{ è quadrata}$$

### 2.5.3 Somma tra matrici

Somma elemento per elemento (per matrici di dimensioni uguali)

$(Mat_{m,n}(\mathbb{K}), +)$  è un gruppo abeliano.

### 2.5.4 Prodotto per scalare

**Proprietà**

Distributivo rispetto all'addizione

### 2.5.5 Prodotto righe per colonne

**Proprietà**

Non commutativo

Associativo

Distributivo rispetto alla somma

$$A \cdot B = \underline{0} \not\Rightarrow A = \underline{0} \vee B = \underline{0}$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

### 2.5.6 Calcolo del determinante

Solo per matrici quadrate.

$$|A|$$

$$\det(A)$$

$$2 \times 2$$

Differenza prodotto diagonali

$$3 \times 3 \text{ (Sarrus)}$$

Differenza (somme prodotti diagonali e prodotti sovradiagonali).

Se  $A$  è triangolare superiore il determinante è il prodotto della diagonale

#### Regola di Laplace

$$A \in \text{Mat}_n(\mathbb{K}), n \geq 2$$

$$|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \cdot |A_{i,j}|$$

Dove  $A_{i,j}$  è la matrice ottenuta da  $A$  togliendo ad  $A$  la  $i$ -esima riga e la  $j$ -esima colonna.

Il valore  $(-1)^{i+j} |A_{i,j}|$  è detto complemento algebrico di  $a_{i,j}$ .

Osservazione:

Il termine  $(-1)^{i+j}$  indica che se la somma degli indici di riga e colonna è dispari, il segno nella somma va cambiato, altrimenti va mantenuto.

Osservazione:

Si può applicare Laplace per righe / colonne qualsiasi, ma per snellire i conti conviene scegliere righe / colonne con il maggior n° di 0.

#### Proprietà dei Determinanti

$$|I_n| = 1$$

$$|A| = \prod_{i=1}^n a_{i,i}$$

Quando  $A$  è triangolare / diagonale (anche rispetto alla diagonale secondaria, anche se in quel caso non si chiama triangolare / diagonale)

$$|A| = |A^T|$$

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

Osservazione:

In generale non vale per la somma.

Se in  $A$  c'è una riga / colonna nulla, allora  $|A| = 0$

Scambiando righe e colonne il determinante cambia di segno.

Se una riga / colonna è combinazione lineare di altre righe / colonne, allora  $|A| = 0$  e viceversa.

### **Definizione di Combinazione Lineare**

Quando una riga / colonna si può scrivere utilizzando le altre righe / colonne combinate solo con operazioni di somma / prodotto e/o prodotto per scalare.

Osservazione:

Se una riga / colonna è multipla di un'altra riga / colonna allora è una sua combinazione lineare.

Sommando a una riga / colonna una combinazione lineare delle altre righe / colonne il determinante non cambia.

### **2.5.7 Definizione di Matrice Singolare**

Una matrice quadrata si dice non singolare se il suo determinante è  $\neq 0$ . Altrimenti si dice singolare.

### **2.5.8 Definizione di Matrice Inversa**

Si dice inversa di  $A$ , se  $\exists$ , la matrice  $A^{-1}$  tale che:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

Osservazione:

Sia  $A \in Mat_n(\mathbb{K})$ ,  $\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0$

Cioè  $A$  ammette inversa se e solo se  $A$  è non singolare.

### Calcolo della Matrice Inversa (Metodo del Complemento Algebrico)

Data  $A = (a_{i,j}) \in Mat_n(\mathbb{K})$  si dice aggiunta di  $A$  la matrice  $A_a \in Mat_n(\mathbb{K})$  ottenuta sostituendo in  $A$  ogni elemento col suo complemento algebrico ( $c$ ).

$$c_{i,j} = (-1)^{i+j} |A_{i,j}|$$

$$|A| \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_a^T$$

### 2.5.9 Rango

#### Definizione di Minore di Ordine $p$

Data una matrice  $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$  si dice minore di ordine  $p$  una matrice quadrata di ordine  $p$  ottenuta da  $A$  sopprimendo  $n-p$  colonne e  $m-p$  righe.

#### Definizione di Rango

Data una matrice  $A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K})$  dire che il rango di  $A$  è  $p$ :

$$rg(A) = p$$

$$r(A) = p$$

$$\rho(A) = p$$

$$\text{con } p \leq \min(m, n)$$

significa dire che  $A$  ha un minore non singolare di ordine  $p$ , e che ogni eventuale minore di ordine  $p+1$  è singolare.

$$r(A) = 0 \iff A = \underline{0}$$

$$\text{Se } A \in Mat_n(\mathbb{K}) \text{ allora } r(A) = n \iff |A| \neq 0$$

$$A \text{ ha rango massimo} = A \in Mat_n(\mathbb{K}), r(A) = n$$

$$1 \leq rg(A) \leq \min(m, n), A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}), A \neq \underline{0}$$

#### Teorema degli Orlati (Teorema di Kronecker)

$$A \in Mat_{m,n}(\mathbb{K}).$$

Il rango di  $A$  è  $p \iff \exists$  in  $A$  un minore di ordine  $p$  ( $M_p$ ) non singolare  $\wedge$  ogni minore di ordine  $p+1$  che contiene completamente  $M_p$  è singolare.

#### Definizione di Contiene Completamente

Che ha al suo interno.