1. Numeri Complessi

I **numeri complessi** sono l'insieme $\mathbb{C} = \{ z = a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

dove i è **l'unità immaginaria** t.c. $i^2 = -1$

Si ha che $\mathbb{C}$ è isomorfo ad $\mathbb{R}^2$: $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Rappresentazione Cartesiana

La forma $z = a + ib$ è detta **rappresentazione cartesiana**.

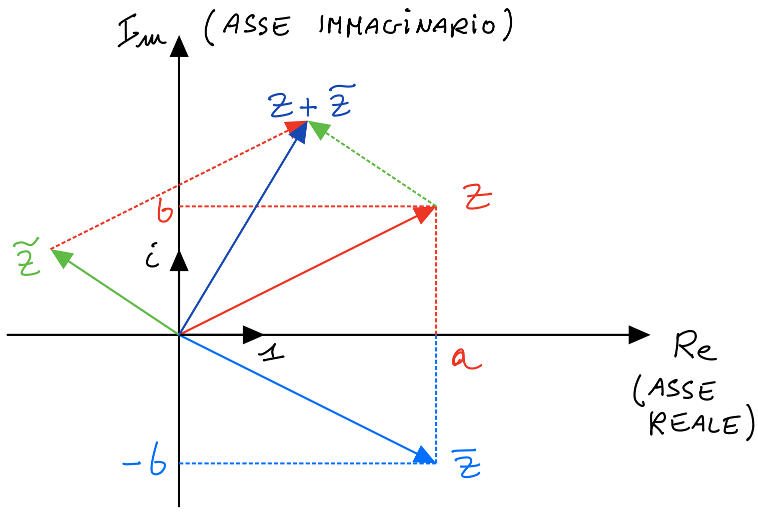
$\Rightarrow$ in tale forma si identifica $z = a + ib \equiv (a, b)$

(es.: $1 \equiv (1, 0)$, $i \equiv (0, 1)$)

Si hanno le seguenti:

- **Parte Reale:**
  $\Rightarrow \operatorname{Re}(z) = a$

- **Parte Immaginaria:**
  $\Rightarrow \operatorname{Im}(z) = b$



Si definiscono le seguenti operazioni:

1) <u>Somma</u> (Regola del Parallelogramma):

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_1 + i b_1 \\ z_2 &= a_2 + i b_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)}$$

N.B. Si tratta della somma vettoriale in $\mathbb{R}^2$!!!

2) <u>Coniugato</u>:

$$z = a + ib \Rightarrow \boxed{\bar{z} = a - ib} \qquad (z \equiv (a, b) \Rightarrow \bar{z} \equiv (a, -b))$$

N.B.
Rispetto all'operazione di coniugio, si può scrivere:

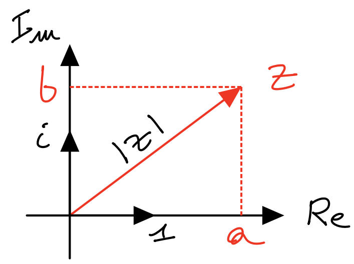
$$\boxed{Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}}$$

3) Prodotto complesso:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= a_1 + i b_1 \\ z_2 &= a_2 + i b_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2 = (a_1 \cdot a_2 - b_1 b_2) + i(a_2 b_1 + a_1 b_2)}$$

4) Modulo (o valore assoluto):

$$z = a + ib \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}}$$



N.B.
Si tratta della NORMA EUCLIDEA del vettore $z \equiv (a, b)$ che identifica il numero complesso z sul piano complesso.

5) Prodotto scalare ($\equiv$ prodotto scalare in $\mathbb{R}^2$):

$$z, w \in \mathbb{C} \Rightarrow \boxed{\langle z, w \rangle = \frac{z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w}{2} = Re(z \cdot \bar{w})}$$

N.B.
Si ha:

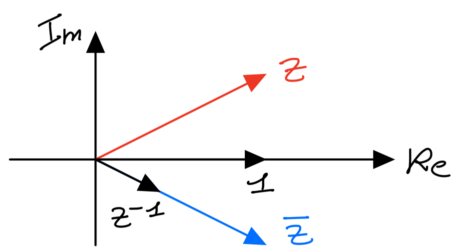
$$\boxed{|z|^2 = \langle z, z \rangle = z \cdot \bar{z}}$$

6) Inverso / Quoziente:

$$z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}} \quad \left(\text{Infatti: } z \cdot z^{-1} = \frac{z \cdot \bar{z}}{|z|^2} = 1\right)$$

N.B.
Ciò implica:

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|}$$



Rappresentazione Polare

Dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, si ha $z = |z| \cdot \frac{z}{|z|} = |z| \cdot w$ con $|w| = 1$

In particolare, $\exists \theta \in \mathbb{R}$ (definito a meno di multipli interi di 2π) t.c. $w = \cos\theta + i \sin\theta$. Si hanno quindi le seguenti:

1) Formula di Eulero: $\boxed{\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}}$

2) Rappresentazione polare: $\boxed{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z = \rho e^{i\theta}}$

con $\rho = |z|$, $\theta = \arg(z)$ dove $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\arg(z)$ è una funzione a più valori.

Se $\theta \in (-\pi, \pi]$, si definisce l'Argomento Principale:

$$\boxed{\theta = \mathrm{Arg}(z)}$$

Mediante la forma polare, si semplificano le operazioni grazie alle proprietà dell'esponenziale:

1) Prodotto complesso:

$$\left.\begin{array}{l} z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}$$

N.B.

Ciò implica, in particolare $\boxed{\arg(z_1 \cdot z_2) = \theta_1 + \theta_2}$

tuttavia, in generale si ha:

$$\boxed{\mathrm{Arg}(z_1 \cdot z_2) \neq \mathrm{Arg}(z_1) + \mathrm{Arg}(z_2)}$$

2) Inverso/Quoziente:

$$\rho e^{i\theta} = z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow \boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \rho^{-1}e^{-i\theta} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}}}$$

3) Potenze Intere:

$$\rho e^{i\theta} = z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \Rightarrow \boxed{z^{n} = \rho^{n}e^{in\theta}, \quad n \in \mathbb{Z}}$$

4) Radice n-sima (Formula di De-Moivre):

Dati $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$ si dice che w è radice n-sima di z se $w^n = z$, ovvero (posti $w = \tau e^{i\phi}$, $z = \rho e^{i\theta}$) se si ha:

$$\tau^n e^{in\phi} = \rho e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} \tau^n = \rho \\ n\phi = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

si ottiene quindi la seguente:

FORMULA DI DE-MOIVRE: per le n radici n-sime di $z = \rho e^{i\theta}$

$$\boxed{w_k = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}}$$

con $k = 0, 1, \ldots, n-1$

esempio:

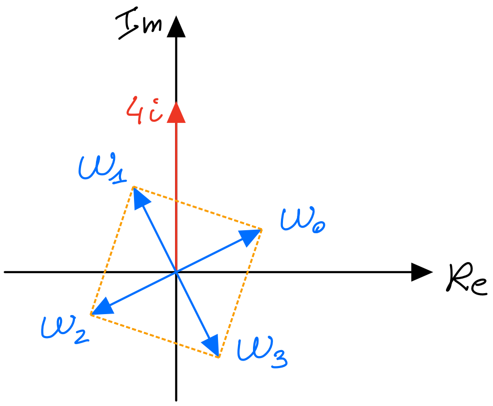
Radici 4e di $z = 4i \Rightarrow z = 4e^{i\frac{\pi}{2}} = w^4$

$\Rightarrow w_0 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$

$\Rightarrow w_1 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{8}}$

$\Rightarrow w_2 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{5\pi}{8}} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{3\pi}{8}}$

$\Rightarrow w_3 = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{8}} = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}$



Come si vede in figura, le 4 radici sono i vertici di un poligono regolare.

Formule per il passaggio da forma cartesiana a forma polare:

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si ha:

1) $\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \geq 0$

2) Per trovare θ distinguiamo 2 formule in base all' intervallo di definizione di θ:

- se $\theta \in (-\pi, \pi]$ si ha:

$$\theta := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a=0,\ b>0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } a=0,\ b<0 \\ \text{NON DEFINITO} & \text{se } a=0=b \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a>0,\ \forall b \in \mathbb{R} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{se } a<0,\ b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)-\pi & \text{se } a<0,\ b<0 \end{cases}$$

- se $\theta \in (0, 2\pi]$ si ha:

$$\theta := \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } a=0,\ b>0 \\ \frac{3\pi}{2} & \text{se } a=0,\ b<0 \\ \text{NON DEFINITO} & \text{se } a=0=b \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a>0,\ b\geq 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+2\pi & \text{se } a<0,\ b<0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{se } a<0,\ \forall b \in \mathbb{R} \end{cases}$$