SPAZI DI MISURA E PROBABILITÁ

Def. (σ-algebra):

Sia E un insieme, una famiglia $\mathcal{E}$ di sottoinsiemi di E si dice σ-ALGEBRA se:

1) $E \in \mathcal{E}$
2) $A \in \mathcal{E} \Rightarrow A^C := E \setminus A \in \mathcal{E}$
3) $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathcal{E} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{E}$

Oss.:

Una σ-algebra é chiusa per unioni finite e per intersezioni finite e numerabili.

esempi:

1) $\mathcal{E} = \mathcal{P}(E) = \{A : A \subseteq E\}$
2) E insieme, $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Chiamiamo $\sigma(\mathcal{C})$ la più piccola σ-algebra contenente $\mathcal{C}$:
   - $\sigma(\mathcal{C})$ é σ-algebra
   - $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$
   - $\mathcal{E}$ é σ-algebra con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{E} \Rightarrow \sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{E}$

   $\sigma(\mathcal{C})$ é detta σ-algebra generata da $\mathcal{C}$

   Per mostrare che $\sigma(\mathcal{C})$ esiste, consideriamo $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} := \{\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{C}) : \mathcal{E}$ é σ-algebra $\wedge\ \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}\}$.

   Chiaramente $\mathcal{U}_{\mathcal{C}} \neq \emptyset$ $(\mathcal{P}(\mathcal{C}) \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}})$.

   Definiamo $\mathcal{A} := \bigcap \mathcal{U}_{\mathcal{C}} = \{A \subseteq \mathcal{C} : A \in \mathcal{E} \ \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}\}$.

   Si ha:

1) $C \in \mathcal{C} \Rightarrow C \in \mathcal{A}$ ovvero $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$

2) $\mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{E}$

3) $\mathcal{A}$ è σ-algebra:

- $E \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \Rightarrow E \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$

  $\Rightarrow A^c \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
- $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n$

  $\Rightarrow A_n \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{E} \quad \forall \mathcal{E} \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$

  $\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

Quindi $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$

3) σ-algebra di Borel su $\mathbb{R}^n$:
è la σ-algebra generata dalle palle aperte di $\mathbb{R}^n$ e si denota con $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

<u>esercizio</u>:
Sia E insieme non numerabile, $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$.
Descrivere $\sigma(\mathcal{C})$.

<u>Def.</u> (Spazio misurabile):
Se E è un insieme ed $\mathcal{E}$ è σ-algebra di sottoinsiemi di E, la coppia $(E, \mathcal{E})$ si dice SPAZIO MISURABILE

<u>Def.</u> (Funzione misurabile):
Siano $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ spazi misurabili. Una funzione $f : E \to F$ si dice FUNZIONE MISURABILE

se:

$$\forall B \in \mathcal{F} \text{ si ha } f^{-1}(B) \subseteq \mathcal{E}$$

con $f^{-1}(B) := \{x \in E : f(x) \in B\}$

N.B.

Se $E = \mathbb{R}^n$, sceglieremo SEMPRE $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$

esempi:

1) E insieme, $(F, \mathcal{F})$ spazio misurabile, $f : E \to F$. Qual è la più piccola σ-algebra su E che rende misurabile f? Consideriamo l'insieme $\sigma(f) := \{f^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Notiamo che se $\mathcal{E}$ è σ-algebra di sottoinsiemi di E allora f è misurabile se e solo se $\sigma(f) \subseteq \mathcal{E}$. Inoltre $\sigma(f)$ è essa stessa una σ-algebra ed è quindi la più piccola σ-algebra di E che rende f misurabile.
2) Più in generale, sia $(f_i)_{i \in I}$ famiglia di funzioni $f_i : E \to F$ con E insieme, $(F, \mathcal{F})$ spazio misurabile. La più piccola σ-algebra su E che rende misurabili tutte le f_i è:
$$\sigma(f_i : i \in I) := \{f_i^{-1}(B) : B \in \mathcal{F}, i \in I\}$$
3) Data $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, si ha che:
   - se f è continua, allora è misurabile
   - se $n = 1$ e f è monotona, allora è

misurabile

- se (f_n) è successione di funzioni misurabili, allora (se $\exists$) $\lim\limits_n f_n$, $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, ... sono misurabili.

<u>esercizio</u>:

Siano $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$ spazi misurabili t.c. $\mathcal{F} \in \sigma(\mathcal{C})$ con $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$. Dim. che $f: E \to F$ è misurabile se e solo se si ha:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{E} \quad \forall B \in \mathcal{C}$$

<u>Def.</u> (Insieme misurabile):

Se $(E, \mathcal{E})$ è uno spazio misurabile, gli elementi di $\mathcal{E}$ sono detti INSIEMI MISURABILI

<u>esercizio</u>:

Dati $(E, \mathcal{E})$ spazio misurabile, $A \subseteq E$, dim. la seguente:

$$f = \mathbb{1}_A \text{ è misurabile} \iff A \in \mathcal{E}$$

<u>Def.</u> (Misura, Spazio di misura):

Sia $(E, \mathcal{E})$ spazio misurabile. Una MISURA su $(E, \mathcal{E})$ è una funzione $\nu : \mathcal{E} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ t.c. :

1) $\nu(\emptyset) = 0$

2) $\forall (A_n)_{n \geq 1}$ con A_i disgiunti si ha
$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n)$$

La terna $(E, \mathcal{E}, \nu)$ si dice SPAZIO DI MISURA

Def. (Spazio di probabilità):
Uno SPAZIO DI PROBABILITÀ $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ è uno spazio di misura per cui $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

esempi:

1) Una misura ν su $(E, \mathcal{E})$ si dice discreta se è concentrata su un insieme finito o numerabile, cioè se $\exists N \in \mathcal{E}$ numerabile t.c. $\nu(N^c) = 0$.
Se ν è discreta si definisce $p_\nu : E \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ t.c. $p_\nu(x) := \nu(\{x\})$. Se $A \in \mathcal{E}$ si ha $\nu(A) = \sum_{x \in A} p_\nu(x)$
p_ν è detta densità discreta di ν. Analogamente, se $p : E \to \mathbb{R}^{\geq 0} \cup \{+\infty\}$ è t.c. $\exists N \in \mathcal{E}$ numerabile per cui $p(x) = 0 \quad \forall x \in N^c$ allora possiamo definire $\nu_p(A) := \sum_{x \in A} p(x)$ ed essa è misura discreta
2) Misura di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$:
è l'unica misura λ su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ t.c. valga:
$\lambda\left(\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]\right) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \quad \forall a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$