es. 4)

Sia $X = [0, +\infty) \subseteq \mathbb{R}$, $\tau(\mathcal{B})$ generata dalla base $\mathcal{B} = \{[0,n) \mid n \in \mathbb{Z}^{>0}\}$. Stabilire chiusura ed interno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$:

$$A_1 = (1,3), \quad A_2 = [0,5], \quad A_3 = [0,\sqrt{5}), \quad A_4 = \mathbb{Q}^{>0}$$

$\Rightarrow$ N.B. $\mathbb{Q}^{>0} = \left\{ \frac{n}{m} \mid m, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \wedge \operatorname{sgn}(n) = \operatorname{sgn}(m) \right\}$

$\Rightarrow$ N.B.

In QUESTO caso (NON SEMPRE) gli elementi di $\mathcal{B}$ sono tutti gli aperti di $\tau(\mathcal{B})$ dato che unendo elementi arbitrari di $\mathcal{B}$ si ottiene ancora un elemento di $\mathcal{B}$!!! (In più, vanno aggiunti $\emptyset$ e X)

$$\Rightarrow \tau(\mathcal{B}) = \{\emptyset, X\} \cup \{[0,n) \mid n \in \mathbb{Z}^{>0}\}$$

$$\Rightarrow \nabla(\mathcal{B}) = \{\emptyset, X\} \cup \{[n, +\infty) \mid n \in \mathbb{Z}^{>0}\}$$

	INTERNO $\mathring{A}_i$	CHIUSURA $\overline{A_i}$
$A_1 = (1,3)$	$\emptyset$	$[1, +\infty)$
$A_2 = [0,5]$	$[0,5)$	$[0,+\infty) = X$
$A_3 = [0,\sqrt{5})$	$[0, \lfloor\sqrt{5}\rfloor) = [0,2)$	$[0,+\infty) = X$
$A_4 = \mathbb{Q}^{>0}$	$\emptyset$	$[0,+\infty) = X$

es. 2)

Dim. che in $\mathbb{R}^n$ la topologia cofinita è meno fine della topologia euclidea

$$\Rightarrow \tau_{cof} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\} \cup \{A \mid C_{\mathbb{R}^n}(A) \text{ è finito}\}$$
$$= \{\emptyset, \mathbb{R}^n\} \cup \{A \mid A = \mathbb{R}^2 \setminus \{a_1, .., a_t\}\}$$

$\Rightarrow$ Dimostro che $A = \mathbb{R}^n \setminus \{a_1, .., a_t\}$ è aperto in τ_e:

mostro che il suo complementare è chiuso

$\Rightarrow C_{\mathbb{R}^n}(A) = \{a_1, \dots, a_t\}$ unione finita di chiusi, quindi è chiuso in τ_e

$\Rightarrow A$ è aperto in τ_e

mostro ora che τ_e possiede aperti che non sono aperti in τ_{cof}

$\Rightarrow$ es. $(0,1) \times (0,1) \in \tau_e$ ma $\notin \tau_{cof}$ (il complementare non è finito)

es. 1)

Determinare il numero di topologie distinte per un insieme di 3 elementi:

$\Rightarrow X = \{a, b, c\}$

1) Topologia banale : $\tau = \{\emptyset, X\}$

2) Topologia discreta : $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$

3) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}\}$

4) $$\left.\begin{array}{l} \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}\}, \ \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\} \\ \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,b\}\}, \ \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{b,c\}\} \\ \tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,c\}\}, \ \tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{b,c\}\} \end{array}\right\} 6$$

5) $$\left.\begin{array}{l} \tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}, \ \tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{a,c\}\} \\ \tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a,b\}\} \end{array}\right\} 3$$

6) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$, ecc. $\}$ 3

7) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$, ecc. $\}$ 3

8) $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}\}$, ecc. $\}$ 6

9) $\tau = \{\emptyset, X, \{a,b\}\}$ ecc. $\}$ 3

$\Rightarrow$ 29 topologie distinte.

es. EXTRA:

Verificare che $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{[x, +\infty) \mid x \in \mathbb{R}\}$ non è una topologia su $\mathbb{R}$

Dim.

1) $\emptyset, X \in \tau$ ✓

2) $[x_1, +\infty) \cap [x_2, +\infty) = [\max\{x_1, x_2\}, +\infty) \in \tau$ ✓

3) $[\frac{1}{n}, +\infty)$ $n \in \mathbb{Z}^{>0} \Rightarrow \bigcup_n [\frac{1}{n}, +\infty) = (0, +\infty) \notin \tau$ ✗

$\Rightarrow \tau$ non è una topologia su $\mathbb{R}$

q.e.d