es. 2)

Sia $X = \{(x,y) \mid x \in [0,1], y \in [0,1]\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sia l'ordinamento lessicografico $<_e$ t.c.

$$(x,y) <_e (u,v) \text{ se } (x<u) \vee (x=u \wedge y<v)$$

Sia τ la topologia su X avente come basi la famiglia di aperti tutti gli insiemi:

$$A_{(u_1,v_1),(u_2,v_2)} = \{(x,y) \mid (u_1,v_1) <_e (x,y) <_e (u_2,v_2)\}$$

$$B_{(u_1,v_1)} = \{(x,y) \mid (u_1,v_1) <_e (x,y)\}$$

$$C_{(u_1,v_1)} = \{(x,y) \mid (x,y) <_e (u_1,v_1)\}$$

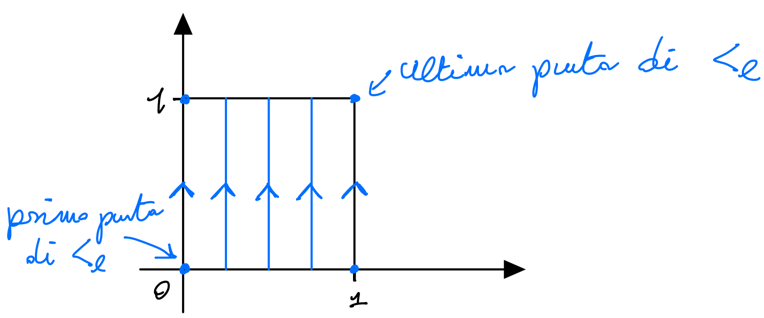
al variare di $(u_1,v_1), (u_2,v_2)$ in X

1) Stabilire se $U_1 = \{(x, \frac{1}{2}) \mid x \in (0,1)\}$ è aperto in (X,τ)

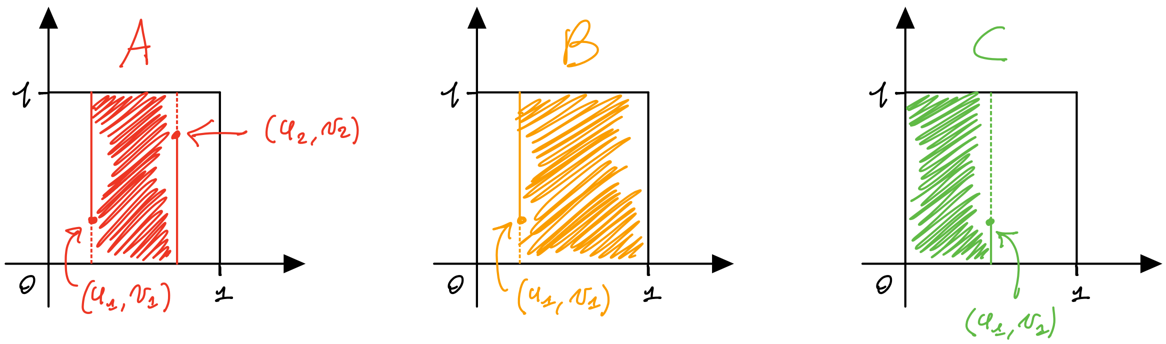
2) Stabilire se $U_2 = \{(\frac{1}{2}, y) \mid y \in [0,1]\}$ è aperto in (X,τ)

3) Stabilire se (X,τ) è connesso e/o connesso per archi

$\Rightarrow$ Rappresentazione di X e $<_e$:



$\Rightarrow$ Rappresento A, B, C:



1) U_1:

Se $(u_1, v_1) \in U_1$ allora dovrebbe $\exists\ \varepsilon > 0$ t.c.

$$(u_1, v_1) \in A_{(u_1, v_1-\varepsilon),(u_1, v_1+\varepsilon)} \subseteq U_1 \quad \lightning \text{ assurdo}$$

$\Rightarrow$ U_1 non è aperto

2) U_2:

U_2 contiene A ma non contiene nessun punto successivo ad A quindi $\nexists$ elemento della base di aperti contenente il punto A e contenuto in U_2

$\Rightarrow$ U_2 non è aperto.

3) $(X, \mathcal{T})$ è connesso e/o connesso per archi?

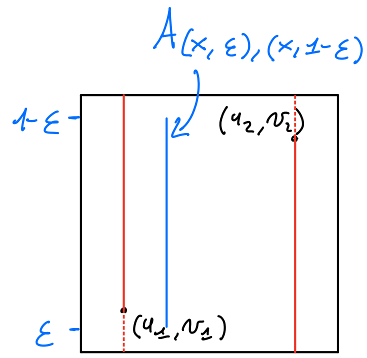
È CONNESSO: ogni componente connessa di ogni aperto della topologia NON può contenere sia l'estremo sup che l'estremo inf (tranne per l'aperto X)

$\Rightarrow$ Se X non fosse connesso allora dovrebbero $\exists A_1, A_2$ t.c.

$$A_1, A_2 \neq \phi \wedge A_1 \cup A_2 = X \wedge A_1 \cap A_2 = \phi$$

$\Rightarrow$ A_1 avrebbe una componente connessa non contenente il suo estremo sup (o inf). Ma A_2 avrebbe una componente connessa contenente il suo estremo inf (o sup)

NON È CONNESSO PER ARCHI :



$\Rightarrow$ Siano $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in X$. Supponiamo che $\exists \alpha$ continua da (u_1, v_1) a (u_2, v_2)

$\Rightarrow$ L'immagine di α contiene tutti i punti compresi tra (u_1, v_1) e (u_2, v_2), infatti:

Sia $(\bar{x}, \bar{y}) \in A_{(u_1,v_1),(u_2,v_2)}$ t.c. $(\bar{x}, \bar{y}) \notin Im(\alpha)$.

$\Rightarrow$ Siano $B_{(\bar{x},\bar{y})}, C_{(\bar{x},\bar{y})}$, ottengo:

$$\underbrace{B_{(\bar{x},\bar{y})} \cap Im(\alpha)}_{\text{aperto}}, \quad \underbrace{C_{(\bar{x},\bar{y})} \cap Im(\alpha)}_{\text{aperto}}$$

$\Rightarrow$ Sono 2 aperti disgiunti non vuoti

$\Rightarrow$ Im (α) NON sarebbe connessa $\lightning$ assurdo:
(α è continua per ipotesi)

$\Rightarrow$ Le controimmagini degli intervalli aperti $A_{(x,\varepsilon),(x,1-\varepsilon)}$ mi da un'infinità non numerabile di aperti di $([0,1], \tau_e)$ disgiunti.

$\Rightarrow$ $\lightning$ assurdo: scelgo un razionale $\neq 0$ in ognuno di essi, allora avrei un'infinità NON numerabile di razionali $\neq 0$, MA i razionali sono numerabili

$\Rightarrow$ X non è connesso per archi.

<u>q.e.d.</u>

es. 1)

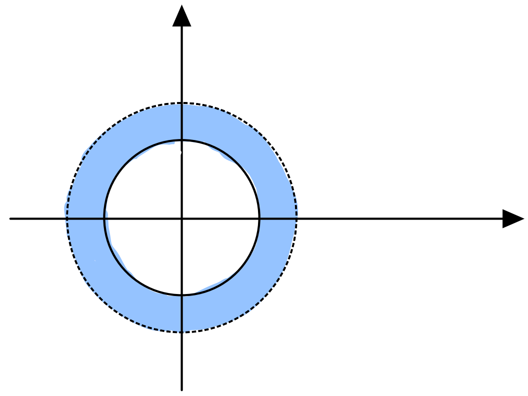
Sia $U_{r_1 r_2} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1^2 \leq x^2+y^2 < r_2^2,\ r_2 > r_1 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Sia $\mathcal{U} = \{U_{r_1, r_2}\}_{r_1, r_2 \in \mathbb{R}}$.

1) Dim. che $\mathcal{U}$ è una base di aperti
2) Determinare $\mathring{[-1,1]\times[-1,1]}$, $\overline{[-1,1]\times[-1,1]}$
3) Fornire, motivando la risposta, un esempio di funzione $f: (\mathbb{R}^2, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$ continua e non costante.
4) Fornire, motivando la risposta, un esempio di funzione $f: (\mathbb{R}^2, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_e)$ continua ma non continua se vista da $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$ in $(\mathbb{R}, \tau_e)$

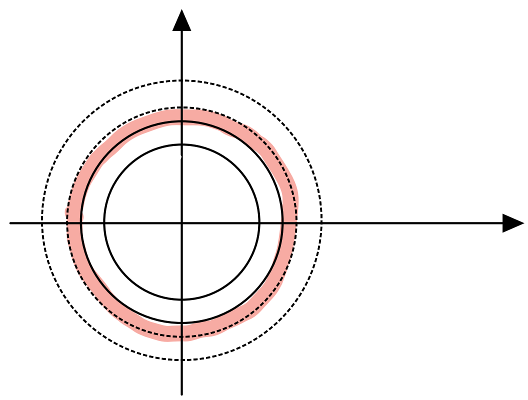
$\Rightarrow$ 1) $\mathcal{U} = \{ r_1^2 \leq x^2+y^2 \leq r_2^2$ con $r_2, r_1 > 0 \}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è famiglia di Tori (ciambelle) in $\mathbb{R}^2$.



$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è ricoprimento? sì: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \exists U_{r_1 r_2} \in \mathcal{U}$ t.c. $(x,y) \in U_{r_1 r_2}$

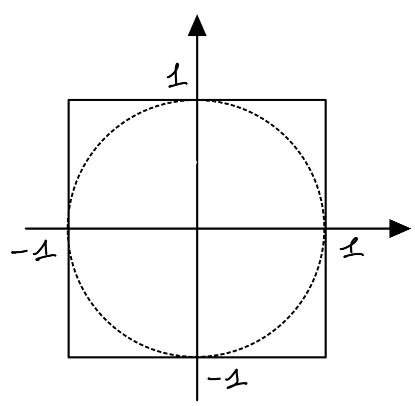
$\Rightarrow$ Siano $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ $\Rightarrow$ sia $(x,y) \in U_1 \cap U_2$ allora $\exists U_3$ t.c. $U_3 = U_{\max\{r_1, r_1'\}, \min\{r_2, r_2'\}}$ contenente (x,y).



$\Rightarrow$ $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$!!!

$\Rightarrow$ $\mathcal{U}$ è base di aperti.

2) $[-1,1] \times [-1,1]$ è:



$\Rightarrow$ $[-1,1] \times [-1,1] \notin \tau(\mathcal{U})$

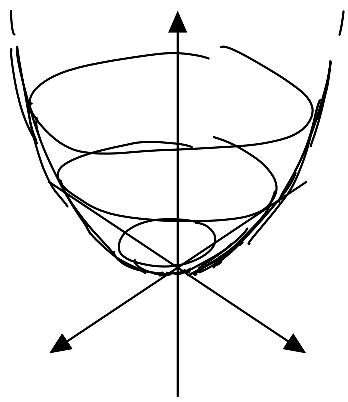
$\Rightarrow$ l'interno è U_{01}

$\Rightarrow$ come sono fatti i chiusi?

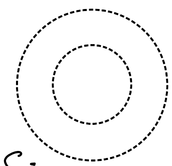
$\Rightarrow$ i chiusi sono i cerchi centrati in $(0,0)$

$\Rightarrow$ la chiusura è $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq \sqrt{2}\}$

3) Sia $f(x,y) = x^2+y^2$

$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow$ per verificare che f è continua è sufficiente verificare che $f^{-1}((a,b)) \in \tau$

$\Rightarrow f^{-1}((a,b)) =$  $\Rightarrow$ tale insieme è aperto in τ? Si.

$\Rightarrow$ f è continua $\wedge$ non costante

4) Sia:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x^2+y^2<1 \\ 0 & \text{se } x^2+y^2 \geq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f^{-1}((a,b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{se } 0<a<b<1 \\ \mathbb{R}^2 & \text{se } a<0<1<b \\ \{x^2+y^2<1\} & \text{se } 0<a<1<b \\ \{x^2+y^2 \geq 1\} & \text{se } a<0<b<1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ sono tutti aperti in τ $\Rightarrow$ f è continua, non costante ma non continua rispetto a $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$