es. 1)

Dire se i seguenti spazi sono connessi o no:

1) $(\mathbb{Q}, \tau_e)$ NON è connesso:

$\mathbb{Q}$ non è intervallo: $\forall x, y \in \mathbb{Q}\ \exists \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ t.c.

$x < \alpha < y$ con $\alpha \notin \mathbb{Q}$

2) $(X, \tau_{discreta})$: quali sono i suoi sottoinsiemi connessi?

$\{x\} \subseteq X$ è connesso $\forall x \in X$

se $Y \subseteq X$ è t.c. $|Y| \geq 2$ allora:

$y \in Y \Rightarrow Y = \{y\} \cup \complement_Y(\{y\})$

$\Rightarrow \{y\}, Y \setminus \{y\}$ sono aperti disgiunti non banali

$\Rightarrow Y$ non è connesso.

3) (X, τ_{banale}): quali sono i suoi sottoinsiemi connessi?

$\tau_{banale} = \{\phi, X\} \Rightarrow \forall Y \subseteq X$ si ha:

$\nexists A_1, A_2$ disgiunti non banali t.c. $Y = A_1 \cup A_2$

$\Rightarrow \forall Y \subseteq X$, Y è connesso.

4) (X, τ_{cof}) con X infinito, quali sono i suoi sottoinsiemi connessi?

Mostro che $Y \subseteq X$ è connesso $\Leftrightarrow$ Y è infinito oppure $Y = \{x\}$ con $x \in X$

$\Leftarrow$ $Y = \{x\}$ ovvio, Y infinito è connesso perché $\nexists A_1, A_2$ disgiunti non banali.

$\Rightarrow$ Mostro che se Y è finito allora non è connesso.

$\Rightarrow Y$ finito $\Rightarrow Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ con $\{y_1\} \in \tau_{cof}$:

$\{y_1\} = Y \cap (X \setminus \{y_2, \dots, y_n\})$. Anche $\{y_2, \dots, y_n\} \in \tau_{cof}$:

$\{y_2, \dots, y_n\} = Y \cap (X \setminus \{y_1\}) \Rightarrow Y$ non è connesso.

q.e.d.

es. 2)

Siano $(\mathbb{R}, \tau_e)$, $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ con $\mathcal{B} = \{[a,b) \mid a<b\}$

Dim. che i 2 spazi non sono omeomorfi

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$ è connesso, dimostro che $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ non è connesso:

Siano $A_1 = (-\infty, a)$, $A_2 = [a, +\infty) \in \tau(\mathcal{B})$

$\Rightarrow A_1 \cap A_2 = \emptyset \wedge A_1 \cup A_2 = \mathbb{R} \Rightarrow (\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ non è connesso $\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$ e $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ non sono omeomorfi.

q.e.d.