Def. (Assiomi di Numerabilità):

Dato (X, τ) spazio topologico si ha che:

1) CONDIZIONE PUNTUALE:

(X, τ) rispetta il 1° Assioma di Numerabilità se $\forall x \in X$ x ammette un sistema fondamentale di intorni NUMERABILE.

2) CONDIZIONE GLOBALE:

(X, τ) rispetta il 1° Assioma di Numerabilità se possiede una base di aperti NUMERABILE

Proposizione

Ogni spazio metrico soddisfa il 1° assioma di numerabilità.

Dim.

Dato $x \in X$, prendo come sistema di intorni $B_{\frac{1}{n}}(x)$ con $n \in \mathbb{N}$

Teorema:

Se (X, τ) rispetta il 2° assioma, allora rispetta anche il 1° assioma.

Dim.

(X, τ) ammette $\mathcal{B}$ base di aperti numerabile. Definisco $\forall x \in X$ $\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\} \Rightarrow \mathcal{B}_x$ è numerabile ed è un sistema fondamentale di intorni $\Rightarrow (X, \tau)$ rispetta il 1° assioma di numerabilità.

q.e.d.

N.B.

Non vale il viceversa !!!

CONTROESEMPIO (spazio topologico che rispetta il 1° assioma MA NON il 2° assioma):

$\Rightarrow$ Sia $(X, \tau_{discreta})$ con X infinito NON numerabile (es. $X = \mathbb{R}$). Allora X rispetta il 1° assioma: come sistema di intorni numerabile prendo $\{x\}$ $\forall x \in X$ $(\{x\} \in \tau_{discreta}$ $\forall x \in X)$

$\Rightarrow$ X NON rispetta il 2° assioma:

Qualunque base di aperti di $(X, \tau_{discreta})$ deve contenere tutti gli $\{x\}$ $\forall x \in X$, ma questi sono già un'infinità non numerabile, quindi $\nexists$ base di aperti numerabile per $(X, \tau_{discreta})$