I Teoremi di Sylow vengono usati per cercare dei sottogruppi normali di un gruppo.

Sottogruppo di Sylow = p-sottogruppo massimale di G (ordine p^k)

Se $|G| = p^k q$ con p primo, $k \geq 1$, $q \nmid p$ allora:

1) G possiede p-Sylow
2) P, Q p-Sylow $\Rightarrow \exists a \in G$ t.c. $Q = aPa^{-1}$
3) s_p dei p-Sylow è divisore di q e $s_p \equiv 1 \mod p$

N.B.

N Normale:

$\Rightarrow N = xNx^{-1} \quad \forall x \in G$

S p-Sylow:

$\Rightarrow xSx^{-1}$ è p-Sylow

$\Rightarrow$ se $s_p = 1$, $S = xSx^{-1}$ e quindi S è normale

$\Rightarrow$ se $s_p > 1$, nessun p-Sylow è normale

es. 1)

Dim. che $\nexists$ gruppi semplici (=: gli unici sottogruppi normali sono $\{1\}, G$) di ordine 312

$\Rightarrow$ va mostrato che $\forall G$ gruppo con $|G| = 312$ $\exists S$ normale in G t.c. $S \neq \{1\}$, $S \neq G$

$\Rightarrow |G| = 312 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 \Rightarrow$ se $\exists!$ 2-Sylow $\vee$ se $\exists!$ 3-Sylow $\vee$ se $\exists!$ 13-Sylow, concludiamo.

$\Rightarrow s_{13}$ divisore di $2^3 \cdot 3$ e $s_{13} \equiv 1 \mod 13 \Leftrightarrow s_{13} = 1 + 13k$ quindi si ha:

$$s_{13} \mid 24 \ \wedge \ s_{13} = 1 + 13k$$

$\Rightarrow$ dalla 2 si ottiene $s_{13} = 1, 14, 27$ MA $14, 27, \dots,$ NON DIVIDONO 24 $\Rightarrow s_{13} = 1 \Rightarrow \exists!$ 13-Sylow S $\Rightarrow S$ è normale $\Rightarrow$ se $|G| = 312$, G non è semplice.

q.e.d.

---

es. 2)

Dato G con $|G| = p^2q^2 \neq 36$, $p<q$, p, q primi $\neq 2, 3$.

Dim. che G ha q-Sylow normale

$\Rightarrow$ equivale a dim. che $s_q = 1$. Mostriamo invece che se G NON possiede un unico q-Sylow allora $|G| = 36$

$\Rightarrow$ l'ipotesi è $s_q > 1$ e sappiamo che:

$$\begin{cases} s_q = 1 + kq, & k \geq 1 \\ s_q \mid p^2 \end{cases} \Rightarrow s_q = p, p^2 \Rightarrow 1 + kq = p, p^2$$

$$\Rightarrow p < q < s_q = 1 + \underset{\substack{\uparrow \\ k \geq 1}}{k} q \Rightarrow s_q \neq p \Rightarrow s_q = p^2 = 1 + kq$$

$\Rightarrow kq = p^2 - 1 = (p-1)(p+1) \Rightarrow q \mid (p-1)(p+1)$ MA q primo quindi:

$$\underset{\substack{\downarrow \times \\ \lightning\ (p<q)}}{q \mid p-1} \vee q \mid p+1 \Rightarrow q \mid p+1 \Rightarrow q \leq p+1 \wedge q > p$$

$\Rightarrow q = p+1 \Rightarrow$ gli unici 2 numeri primi consecutivi sono 2, 3

$\Rightarrow p = 2, q = 3 \Rightarrow |G| = 36$

q.e.d.

---

es. 3)

Dim. che ogni gruppo di ordine 105 ha un 5-Sylow normale oppure un 7-Sylow normale

$\Rightarrow |G| = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \Rightarrow$ dobbiamo mostrare che

$s_5 = 1 \vee s_7 = 1$:

$\begin{cases} s_5 = 1 + 5k \\ s_5 \mid 21 \end{cases}$ $\begin{cases} s_7 = 1 + 7h \\ s_7 \mid 15 \end{cases}$

$\Rightarrow s_5 = 1, \cancel{6}, \cancel{11}, \cancel{16}, 21$ $\Rightarrow s_7 = 1, \cancel{8}, 15$

$\Rightarrow s_5 = 1 \vee 21$ $\Rightarrow s_7 = 1 \vee 15$

$\Rightarrow$ se $s_5 = 21 \wedge s_7 = 15$ si ha:

H, K 7-Sylow $\Rightarrow H \cap K = \{1\}$ (tutti gli altri elementi sono distinti) infatti:

$|H| = |K| = 7 \Rightarrow \exists a \in H \setminus K \Rightarrow H \cap K \lneq G$

$\Rightarrow$ per Lagrange si ha:

$\left.\begin{array}{l} \cdot\, |H \cap K| \,\big|\, |H| = 7 \\ \cdot\, |H \cap K| < 7 \end{array}\right\} \Rightarrow |H \cap K| = 1$ (7 è primo)

$\Rightarrow |H \setminus K| = 6 = |K \setminus H|$

$\Rightarrow$ in G ci sono almeno $15 \cdot 6 = 30$ elementi distinti di ordine 7

$\Rightarrow$ in G ci sono almeno $21 \cdot 4 = 84$ elementi distinti di ordine 5

$\Rightarrow 30 + 84 = 114 \leqslant |G| = 105$ $\lightning$

$\Rightarrow$ i 5-Sylow e i 7-Sylow NON possono essere contemporaneamente più di 1, quindi G ha un 5-Sylow normale oppure un 7-Sylow normale

q.e.d.

---

es. 4)

Dim. che $\nexists$ gruppi semplici di ordine 72

$\Rightarrow |G| = 72 = 2^3 \cdot 3^2$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_3 = 1 + 3k \\ s_3 \mid 8 \end{cases}, \quad \begin{cases} s_2 = 1 + 2h \\ s_2 \mid 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s_3 = 1, 4 \qquad\qquad s_2 = 1, 3, 9$$

se $s_3 = 1$, il 3-Sylow è normale ✓

se $s_3 = 4$, ci sono 4 3-Sylow:

sia $P = \{ \text{3-Sylow di } G \} = \{ P_1, P_2, P_3, P_4 \}$

facciamo agire G su P tramite l'azione $G \curvearrowright P$ di coniugio:

$$g \in G \Rightarrow \overrightarrow{t_g}(P_i) = g P_i g^{-1} \subseteq P$$

$\Rightarrow$ tale azione definisce l'omomorfismo tra gruppi $f: G \longrightarrow S_4$. Vogliamo mostrare che f non è iniettiva ($\Rightarrow \operatorname{Ker} f \neq \{1\} \Rightarrow$ dato che $\operatorname{Ker} f \trianglelefteq G$, avremo concluso)

$\Rightarrow$ si ha:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & S_4 \\ G/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, dotted, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ per il Teorema di Omomorfismo $\exists \tilde{f}$ iniettiva

$\Longrightarrow \; G/_{\mathrm{Ker} f} \xrightarrow{\tilde{f}} H = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(\tilde{f}) \subseteq S_4$

$\Longrightarrow$ $\tilde{f}$ è isomorfismo $\Longrightarrow$ $|G/\mathrm{Ker} f| = |H| \,\big|\, |S_4| = 24$

e $\quad |G/\mathrm{Ker} f| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Ker} f|} = \dfrac{72}{|\mathrm{Ker} f|}$

$\Longrightarrow \dfrac{72}{|\mathrm{Ker} f|} \,\Big|\, 24 \Longrightarrow |\mathrm{Ker} f| \geq 3 > 1 \Longrightarrow \mathrm{Ker} f \neq \{1\}$ ed è sottogruppo normale di G.

Verifichiamo ora che $\mathrm{Ker} f \neq G$:

se $\mathrm{Ker} f = G$ allora si avebbe:

$$\begin{aligned} G &\xrightarrow{f} S_4 \\ g &\longmapsto () \end{aligned} \Longrightarrow g P_i g^{-1} = P_i \;\; \forall g \in G \;\; \forall P_i \in P \;\; \lightning$$

Non rispetta il 3° Teorema di Sylow

$\Longrightarrow \mathrm{Ker} f \neq G \,\wedge\, \mathrm{Ker} f \neq \{1\} \,\wedge\, \mathrm{Ker} f \trianglelefteq G$

q.e.d.