es. 1)

Dire per ciascuno dei seguenti spazi topologici, se sono compatti o no:

1) (X, τ) con $|X| < +\infty$:

$\Rightarrow$ ogni ricoprimento aperto è finito

$\Rightarrow$ ogni ricoprimento aperto è anche sottoricoprimento finito.

$\Rightarrow$ X è compatto.

2) $(X, \tau_{discreta})$ con X infinito:

$\Rightarrow$ sia $R = \{\{x\} \mid x \in X\} \subseteq \tau_{discreta}$

$\Rightarrow$ R è un ricoprimento e non ammette un sottoricoprimento finito (se tolgo anche solo un $\{x\}$ NON è più un ricoprimento aperto di X)

$\Rightarrow$ X NON è compatto.

3) (X, τ_{banale}) con X arbitrario:

$\Rightarrow$ L'unico ricoprimento aperto possibile è $R = \{X\}$

$\Rightarrow$ R è finito ed è lui stesso un sottoricoprimento finito

$\Rightarrow$ X è compatto

4) (X, τ_{cof}) con X infinito

$\Rightarrow$ gli aperti sono $X \setminus \{x_1, \dots, x_t\}$ al variare di x_i

$\Rightarrow$ sia R ricoprimento aperto di (X, τ_{cof}).

$\Rightarrow$ scelgo un aperto di R, $A = X \setminus \{x_1, \dots, x_t\} \in R$

$\Rightarrow$ $\{A\}$ NON è un sottoricoprimento finito, MA affinché lo diventi basta che riesca a coprire i t punti mancanti!

$\Rightarrow \forall x_i \quad i = 1, \dots, t$ sia $A_i \in \mathcal{R}$ t.c. $x_i \in A_i$

$\Rightarrow \{A, A_1, \dots, A_t\}$ è sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$

$\Rightarrow X$ è compatto.

5) $(\mathbb{R}, \tau_e)$:

$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{R} = \{(n - \varepsilon, n + 1 + \varepsilon) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ con $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ fissato

$\Rightarrow$ i punti della forma $n + \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, appartengono ad un unico aperto in $\mathcal{R}$

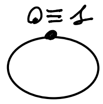
$\Rightarrow \nexists$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$

$\Rightarrow (\mathbb{R}, \tau_e)$ non è compatto.

es. 2):

Sia $([0,1], \tau_e)$. Mostrare che $X/\sim$ è omeomorfo a S^1 con:

$$x \sim y \iff x = y \ \vee \ (x,y) = (0,1)$$

$\Rightarrow X/\sim$ è $0 \equiv 1$  $\Rightarrow$ prendo $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$

e $\tilde{f} : X/\sim \to S^1$ biunivoca e continua.

$\Rightarrow f(0) = f(1)$, $[0,1]$ compatto quindi $X/\sim$ è compatto e S^1 è T_2

$\Rightarrow \tilde{f}$ è omeomorfismo tra $X/\sim$ e S^1.

q.e.d.

es. 3)

Siano:

$(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y - 2xy + x + 1 = 0\}$,

$Y = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$

Stabilire se X, Y sono omeomorfi con τ indotta da τ_e su $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ X è un'ellisse, Y è un iperbole

$\Rightarrow$ X è compatto, Y non lo è (X è chiusa e limitata, Y è chiusa MA NON limitata)

$\Rightarrow$ X e Y non sono omeomorfi.

es. 4)

Sia $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$ con $\mathcal{B} = \{U(x,\varepsilon) \mid x \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\}$,

$U(x,\varepsilon) = \{y \in \mathbb{Q} \mid x - \varepsilon < y < x + \varepsilon\} \cup \{x\}$

1) $[0,1]$ è chiuso in $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$?

2) $[0,1]$ è compatto in $(\mathbb{R}, \tau(\mathcal{B}))$?

$$\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \overset{???}{\in} \tau(\mathcal{B})$$

$\Rightarrow$ $\forall x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ $\exists\, \varepsilon_x > 0$ t.c.

$(x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \subseteq (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$\Rightarrow$ a maggior ragione $\left(\left((x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x) \cap \mathbb{Q}\right) \cup \{x\}\right) \subseteq (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$

$\Rightarrow$ $U(x, \varepsilon_x) \in \mathcal{B} \Rightarrow (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \in \tau(\mathcal{B})$

$\Rightarrow$ $[0,1] \in \mathcal{T}$

$\Rightarrow$ $[0,1]$ è compatto? NON POSSO applicare Heine-Borel perché $\tau(\mathcal{B}) \neq \tau_e$.

$\Rightarrow$ sia $\mathcal{R} = \{ U(x, \frac{1}{2}) \mid x \in [0,1] \}$, mostro che $\nexists$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$ per $[0,1]$

$\Rightarrow$ ogni irrazionale è coperto solo da 1 elemento in $\mathcal{R}$, e gli irrazionali in $[0,1]$ sono infiniti

$\Rightarrow$ $\nexists$ sottoricoprimento finito di $\mathcal{R}$ per $[0,1]$

$\Rightarrow$ $[0,1]$ non è compatto.