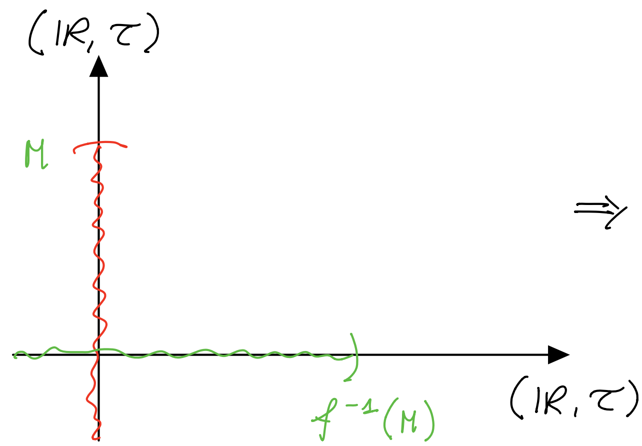
es. 1)

$(\mathbb{R}, \tau)$ con $\tau = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

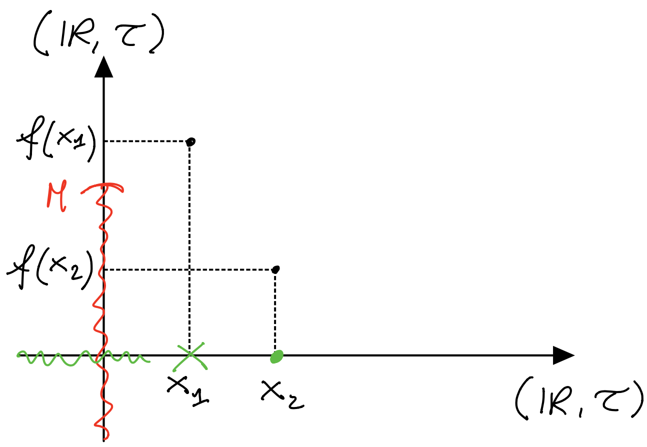
Caratterizzare le funzioni continue da $(\mathbb{R}, \tau)$ in $(\mathbb{R}, \tau)$

$\Rightarrow$ grafichiamo la situazione:



$\Rightarrow$ la controimmagine di una semiretta sinistra deve essere a sua volta una semiretta sinistra, dato che la topologia non cambia.

$\Rightarrow$ se $\exists\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_1) > f(x_2) \wedge x_1 < x_2$ ho un problema, f non può essere continua.



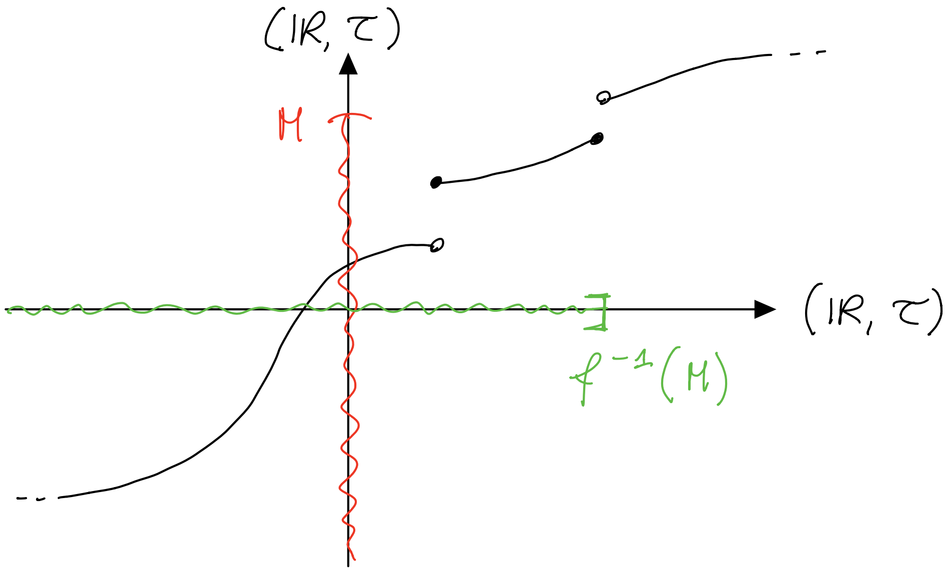
$\Rightarrow$ scegliendo M t.c. $f(x_1) > M > f(x_2)$ allora $f^{-1}(-\infty, M)$ è t.c. $x_2 \in f^{-1}(-\infty, M) \wedge x_1 \notin f^{-1}(-\infty, M)$

$\Rightarrow f^{-1}(-\infty, M) \notin \tau$

$\Rightarrow \forall x_1 < x_2$ deve essere $f(x_1) \leq f(x_2)$ (f deve essere

NON decrescente)

Supponiamo ora che f sia costante oppure che abbia discontinuità a salti:



$\Rightarrow$ In questo caso, $(-\infty, M)$ ha estremo escluso mentre $f^{-1}(-\infty, M)$ ha estremo incluso, quindi non è aperta!!!

$\Rightarrow$ f deve essere continua DA DESTRA !!!

es. 2)

Verificare che i seguenti sottospazi topologici di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ sono tutti omeomorfi tra loro:

$$(0,1), \ (0,2), \ (0,+\infty), \ (-\infty,+\infty)$$

$\Rightarrow$ basta mostrare che $\exists\, f, g, h$ omeomorfismi tra $(0,1)$ e $(0,2)$, tra $(0,+\infty)$ e $(0,1)$ e tra $(-\infty,+\infty)$ e $(0,+\infty)$ rispettivamente, il resto risulta dalle composizioni (omeomorfismi anch'esse)

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} (0,1) \arrow[r, bend right, "f"'] & (0,2) & (0,+\infty) \arrow[ll, bend right, "g"'] & (-\infty,+\infty) \arrow[l, bend right, "h"'] \end{tikzcd}$$

1) $f : (0,1) \longrightarrow (0,2)$ è continua, biiettiva e
$\quad x \longmapsto 2x$ la stessa vale per la sua inversa !!!

2) $g : (0,+\infty) \longrightarrow (0,1)$ è omeomorfismo !!!
$\quad x \longmapsto e^{-x}$

3) $h : (-\infty,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ è omeomorfismo !!!
$\quad x \longmapsto e^{x}$

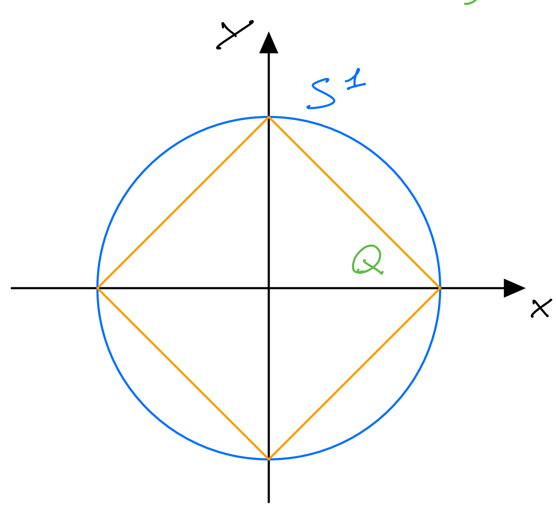
es. 3) Un topologo NON DISTINGUE un tondo da un quadrato:

Siano:

$(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$,

$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| = 1\}$

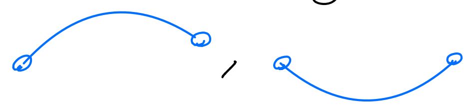
$\Rightarrow$



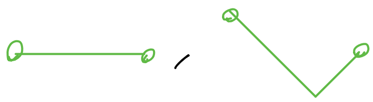
$\Rightarrow$ Verificare che S^1 e Q sono sottospazi omeomorfi di

$(\mathbb{R}^2, \tau_e)$

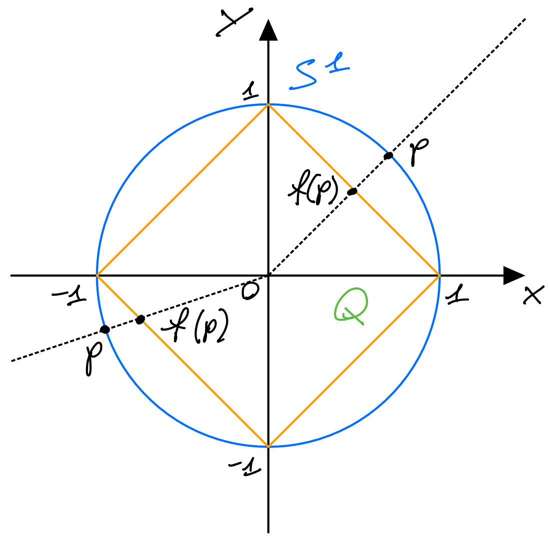
$\Rightarrow$ gli aperti di τ_e indotta su S^1 sono gli archi di circonferenza estremi esclusi



$\Rightarrow$ gli aperti di τ_e indotta su Q sono i seguenti a estremi esclusi (anche a cavallo di un vertice)



$\Rightarrow f : S^1 \longrightarrow Q$



$\Rightarrow$ associo ad ogni punto di S^1 l'unico punto di Q che sta sulla semiretta uscente da $(0,0)$ e passante dal punto di S^1 stesso

$\Rightarrow$ il coefficiente di dilatazione / contrazione è proprio il reciproco della metrica taxi / Manhattan di p da $(0,0)$

$$\Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{1}{|x|+|y|} \cdot (x,y) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|} \right)$$

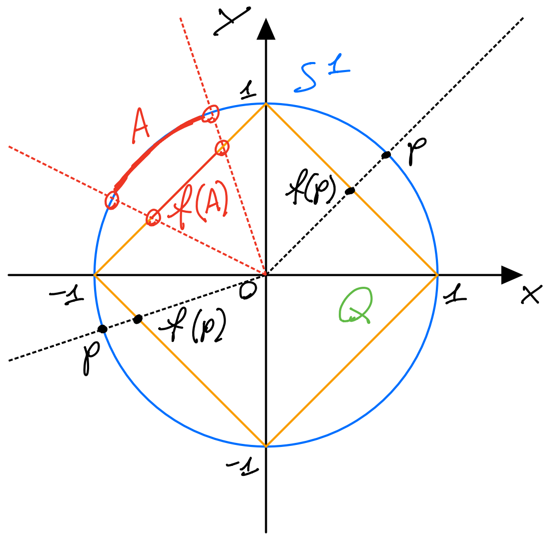
$\Rightarrow$ verifico che $f(x,y) \in Q$:

$$\left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|} \right) \Rightarrow \left| \frac{x}{|x|+|y|} \right| + \left| \frac{y}{|x|+|y|} \right| =$$

$$= \frac{\cancel{|x|+|y|}}{\cancel{|x|+|y|}} = 1 \Rightarrow f(x,y) \in Q$$

$\Rightarrow$ f è sicuramente una biiezione, controllo ora se è continua:

$\Rightarrow$



$\Rightarrow$ f manda aperti in aperti e lo stesso vale per f^{-1}

$\Rightarrow$ f è OMEOMORFISMO tra S^1 e Q !!!