# Appunti di Analisi Matematica I

**Ettore Forigo**

# Chapter 1

## 1.1 Insiemi Famosi

$\mathbb{N}$ = Numeri Naturali = $\{0, 1, 2, 3, ...\}$
$\mathbb{Z}$ = Numeri Interi
$\mathbb{Q}$ = Numeri Razionali

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Su $\mathbb{Q}$ è definita una relazione d'ordine totale ($\leq$)

Gli insiemi con relazioni d'ordine totale si chiamano totalmente ordinati.

## 1.2 Dimostrazioni

### 1.2.1 Componenti delle Dimostrazioni

I 3 termini seguenti, in ordine di importanza crescente, sono abbastanza sinonimi; cambia solo l'importanza nell'ambito dell'esposizione di una teoria formale:

**Lemma**

**Proposizione**

**Teorema**

Congettura dimostrata.

**Corollario**

Dimostrato a partire da un teorema.

### 1.2.2 Forma dei Teoremi

$A \implies B$

Dove $A$ è detta ipotesi e $B$ è detta tesi.

### 1.2.3 Implicazioni

$P \implies Q$

Dove $P$ è detto antecedente e $Q$ è detto conseguente.

### 1.2.4 Dimostrazione di una Implicazione

Si assume l'antecedente (o premessa) e si dimostra il conseguente.

### 1.2.5 Dimostrazione per Assurdo

Si suppone l'ipotesi e per assurdo si suppone il contrario della tesi, e si trova una contraddizione.

## 1.3 Definizione del Principio di Induzione

$$P(n_0) \land (P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}.\, P(n)$$

Il caso base nell'induzione può essere anche un numero $\neq 0$.

## 1.4 Campo Ordinato dei Razionali

$(\mathbb{Q}, \leq)$ formano un Campo Ordinato.

## 1.5 Definizione di Completezza di un Campo

Un campo totalmente ordinato $(\mathbb{K}, \leq)$ si dice completo se vale il seguente **assioma di completezza** (Assioma di Dedekin):

$$\forall A, B, A \subseteq \mathbb{K}, B \subseteq K, A \neq \varnothing, B \neq \varnothing$$

$$\forall x \in A, \forall y \in B.\, x \leq y \implies \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in A, \forall y \in B.\, x \leq c \leq y$$

$c$ è chiamato elemento separatore tra gli insiemi A e B.

Il campo $(\mathbb{Q}, \leq)$ è totalmente ordinato ma non completo.

## 1.6 Definizione dei Numeri Reali

$\mathbb{R}$ è una estensione di $\mathbb{Q}$ tale che il campo $(\mathbb{R}, \leq)$ è totalmente ordinato e completo.

### 1.6.1 Interpretazione Geometrica

Ogni numero reale può essere univocamente associato ad un punto della retta reale e viceversa

## 1.7 Definizione Numeri Irrazionali

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} =$ Numeri Irrazionali

## 1.8 Definizione di Massimi e Minimi

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \varnothing$

$\exists a \in \mathbb{E} : \forall x \in \mathbb{E}.\, a \leq x \implies a$ è un minimo di $\mathbb{E}$

$\exists b \in \mathbb{E} : \forall x \in \mathbb{E}.\, x \leq b \implies b$ è un massimo di $\mathbb{E}$

$min(\mathbb{E}) = a$
$max(\mathbb{E}) = b$

Esistono insiemi limitati che non ammettono né massimo né minimo.

$\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$

### 1.8.1 Lemma: Unicità di min e max

Se $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ ammette minimo o massimo, allora è unico.

#### Dimostrazione Unicità del Minimo

$a \in \mathbb{E}$, $a' \in \mathbb{E}$

$\forall x \in \mathbb{E}.\, a \leq x \wedge a' \leq x$ per assurdo.

Ponendo $x = a$ ottengo $a' \leq a$
Ponendo $x = a'$ ottengo $a \leq a'$

Siccome devono valere entrambe, $a = a'$. Q.E.D.

## 1.9 Definizione di Maggioranti e Minoranti

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \varnothing$

$a \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di $\mathbb{E}$ se $\forall x \in \mathbb{E}.\, a \leq x$

$b \in \mathbb{R}$ è un **maggiorante** di $\mathbb{E}$ se $\forall x \in \mathbb{E}.\, x \leq b$

**Non sono unici!**

$M(\mathbb{E})$ = **Insieme dei maggioranti** di $\mathbb{E}$
$m(\mathbb{E})$ = **Insieme dei minoranti** di $\mathbb{E}$

## 1.10 Definizione di Insieme Limitato

$E \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \varnothing$

$M(\mathbb{E}) \neq \varnothing \implies \mathbb{E}$ è **superiormente limitato**
$m(\mathbb{E}) \neq \varnothing \implies \mathbb{E}$ è **inferiormente limitato**
$M(\mathbb{E}) \neq \varnothing \wedge m(\mathbb{E}) \neq \varnothing \implies \mathbb{E}$ è **limitato**

## 1.11 Teorema

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \varnothing$

$\mathbb{E}$ è superiormente limitato $\implies M(\mathbb{E})$ ammette minimo (estremo superiore di $\mathbb{E}$)

$\mathbb{E}$ è inferiormente limitato $\implies m(\mathbb{E})$ ammette massimo (estremo inferiore di $\mathbb{E}$)

### 1.11.1 Dimostrazione

$\mathbb{E} \neq \varnothing,\ M(\mathbb{E}) \neq \varnothing$

$\forall x \in \mathbb{E}, y \in M(\mathbb{E}).\, x \leq y$

Quindi per l'assioma di completezza:

$\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{E}, y \in M(\mathbb{E}).\, x \leq c \leq y$

$\forall x \in \mathbb{E}.\, x \leq c \implies c \in M(\mathbb{E})$
$\forall y \in M(\mathbb{E}).\, c \leq y \implies x = min\ M(\mathbb{E})$

## 1.12 Definizione di Estremo Superiore ed Inferiore

$\mathbb{E}$ è superiormente limitato $\implies sup(\mathbb{E}) = sup\ \mathbb{E} = min(M(\mathbb{E}))$

$\mathbb{E}$ è inferiormente limitato $\implies inf(\mathbb{E}) = inf\ \mathbb{E} = max(m(\mathbb{E}))$

### 1.12.1 Proprietà

$sup\ \mathbb{E} \in \mathbb{E} \implies sup\ \mathbb{E} = max\ \mathbb{E}$
$inf\ \mathbb{E} \in \mathbb{E} \implies inf\ \mathbb{E} = min\ \mathbb{E}$
$sup\ \mathbb{E}$ e $inf\ \mathbb{E}$ sono unici.

## 1.13 Caratterizzazione di sup e inf

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \neq \varnothing$, $\mathbb{E}$ superiormente limitato

N.d.r.
Tutti gli $\varepsilon$ nelle definizioni e dimostrazioni sono da considerarsi $\in \mathbb{R}$ salvo diversamente specificato.

### 1.13.1 Caratterizzazione di sup

$\iota = sup\ \mathbb{E} \iff \forall x \in \mathbb{E} : x \leq \iota \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{E} : x > \iota - \varepsilon$

### 1.13.2 Caratterizzazione di inf

$\iota = inf\ \mathbb{E} \iff \forall x \in \mathbb{E} : \iota \leq x \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in \mathbb{E} : x < \iota + \varepsilon$

## 1.14 Definizione di $\overline{\mathbb{R}}$

Insieme dei numeri reali estesi:
$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

### 1.14.1 Relazione d'ordine $\leq$ e le operazioni somma e prodotto su $\overline{\mathbb{R}}$

**Relazione $\leq$**

$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \leq +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

### 1.14.2 Somma

$\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty$
$\forall x \in \mathbb{R} : x + (-\infty) = -\infty$

### 1.14.3 Prodotto

$\forall x > 0, x \in \mathbb{R}$
$x \cdot (+\infty) = +\infty$
$x \cdot (-\infty) = -\infty$

$\forall x < 0,\ x \in \mathbb{R}$
$x \cdot (+\infty) = -\infty$
$x \cdot (-\infty) = +\infty$

N.B.
Non sono definite le operazioni:
$0 \cdot (\pm\infty)$, $+\infty - \infty$

## 1.15 Intervalli

$I \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \forall x, y \in I : x < z < y \implies z \in I$
$I$ è un detto **intervallo**.

$a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$

### 1.15.1 Intervallo aperto di estremi $a$ e $b$

$(a, b) = ]a, b[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\right\}$

### 1.15.2 Intervallo semi-aperto a destra di estremi $a$ e $b$

$[a, b) = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\right\}$

### 1.15.3 Intervallo semi-aperto a sinistra di estremi $a$ e $b$

$(a, b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\right\}$

### 1.15.4 Intervallo chiuso di estremi $a$ e $b$

$[a, b] = \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\right\}$

### 1.15.5

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \neq \varnothing$, $M(\mathbb{E}) = \varnothing$
$sup\ \mathbb{E} = +\infty$

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$, $\mathbb{E} \neq \varnothing$, $m(\mathbb{E}) = \varnothing$
$inf\ \mathbb{E} = -\infty$

## 1.16 Funzioni

Una funzione è definita da una terna $(f, A, B)$ dove:

$A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $B \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$
$f$ è una legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa univocamente un elemento $f(x) \in B$.

Notazione:
$A = dom(f)$ (dominio di $f$)
$B = codom(f)$ (codominio di $f$)

Si scrive: $f : A \to B$

N.B.
Il codominio $B$ non è determinato univocamente da $f$.
Se $B$ è codominio di $f$ e $B \subseteq C$ allora anche $C$ è codominio di $f$.

Due funzioni $f_1 : A_1 \to \mathbb{R}$ e $f_2 : A_2 \to \mathbb{R}$
sono uguali $\iff A_1 = A_2 \wedge \forall x \in A_1 = A_2 : f_1(x) = f_2(x)$

### 1.16.1 Definizione di Insieme Immagine

$f : A \to B$
$im(f) = f[A] = \mathrm{Im} f = \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$

$im(f) \subseteq codom(f)$

### 1.16.2 Definizione di Iniettività

Una funzione da $A$ a $B$ si dice **iniettiva** se:

$$\forall x, x' \in A.\, f(x) = f(x') \implies x = x'$$

### 1.16.3 Definizione di Suriettività

$im(f) = codom(f)$

**Interpretazione Geometrica**

$\forall y_0 \in codom(f)$ la retta $y = y_0$ interseca il grafico di $f$ in almeno un punto.

Equivalentemente:
$\forall y \in codom(f)$
$f^{-1}(y) \neq \varnothing$

Se $f : A \to B$ non è suriettiva si può rendere suriettiva restringendo il suo codominio alla sua immagine (Troncatura).

Si può restringere anche il dominio per rendere la funzione iniettiva (Restrizione).

### 1.16.4 Definizione di Biiettività

Una funzione si dice **biiettiva** (o biiezione, o anche corrispondenza 1 a 1 o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

## 1.17 Definizione di Invertibilità

$\forall y \in B\ \exists! x \in A : y = f(x) \implies f : A \to B$ è **invertibile**.

$f : A \to B$ è invertibile $\implies f^{-1} : im(f) \to dom(f)$ è la funzione inversa di f.

$\forall y \in (B = im(f)) : y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$

Osservazione:

$\forall y \in im(f) : y = f(f^{-1}(y))$

$f$ è invertibile $\iff f$ è biiettiva

Il grafico della funzione inversa:
$graf(f^{-1})$
$= \left\{(y, x) \in B \times A : x = f^{-1}(y)\right\}$
$= \{(y, x) \in B \times A : y = f(x)\}$
$= \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in graf(f)\}$

$(y, x) \in graf(f^{-1}) \iff (x, y) \in graf(f)$

$graf(f^{-1})$ è simmetrico di $graf(f)$ rispetto alla retta $y = x$

## 1.18 Definizione di Restrizione

$f : A \to B$, $E \subseteq A$

$f|_E : E \to B$
$f|_E(x) = f(x)\ \forall x \in E$

$f|_E$ è chiamata **restrizione** di $f$ ad $E$.

Una funzione non iniettiva si può rendere iniettiva considerandone opportune restrizioni.

## 1.19 Proprietà della Composizione di Funzioni

Se $f$ è invertibile, allora:

$$\forall x \in dom(f).\, (f^{-1} \circ f)(x) = x$$
$$\forall x \in im(f).\, (f \circ f^{-1})(x) = x$$
$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

## 1.20 Nozioni di Topologia in $\mathbb{R}$

Il valore del limite di una funzione può andare oltre il dominio della funzione, ma bisogna definire delle condizioni.

### 1.20.1 Definizione di Intorno

Dato $x_0 \in \mathbb{R}$ e dato $r > 0$

$$I_r(x_0) = (x_0 - r, x_0 + r)$$

È chiamato l'**intorno** di centro $x_0$ e raggio $r$.

Nota:
$x_0$ è detto "x con zero"

### 1.20.2 Definizione di Intorno di Infinito

Sia $x_0 \in \{-\infty, +\infty\}$ e sia $a \in \mathbb{R}$, si chiama:

$(a, +\infty)$ **intorno di infinito** di estremo inferiore a
$(-\infty, a)$ **intorno di meno infinito** di estremo superiore a

### 1.20.3 Definizione di Punto Interno di un Insieme

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(x_0) \subseteq A \implies x_0 \text{ è } \textbf{punto interno} \text{ di } A$$

### 1.20.4 Definizione di Punto di Accumulazione

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0.\, I_\varepsilon(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq 0 \implies x_0 \text{ è } \textbf{punto di accumulazione} \text{ di } A$$

Notazione:
p.a. di $A$ = punto di accumulazione di $A$

Osservazioni:
La definizione di punto di accumulazione non richiede che $x_0 \in A$
Ogni punto interno è anche un punto di accumulazione.

### 1.20.5 Definizione di Punto Isolato

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\exists \varepsilon > 0 : I_\varepsilon(x_0) \cap A = \{x_0\} \implies x_0 \text{ è un } \textbf{punto isolato} \text{ di } A$$

### 1.20.6 Definizione di Punto Aderente

$x_0$ è un punto di accumulazione di $A \vee x_0$ è un punto isolato di $A \implies x_0$ è un **punto aderente** ad $A$

### 1.20.7 Definizione di Parte Interna

$A \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathring{A} = \{x \in A : x \text{ è un punto interno di } A\}$$

### 1.20.8 Definizione di Chiusura

$A \subseteq \mathbb{R}$

$$\overline{A} = \{x \in A : x \text{ aderente ad } A\}$$

N.B.
$\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$

### 1.20.9 Definizione di Frontiera

$A \subseteq \mathbb{R}$

$$\partial A = \overline{A} \setminus \mathring{A} = \left\{ x \in \overline{A} : x \notin \mathring{A} \right\}$$

### 1.20.10 Definizione di Insieme Aperto

$A \subseteq \mathbb{R}$

$A = \mathring{A} \implies A$ è **aperto** (contiene solo punti interni)

### 1.20.11 Definizione di Insieme Chiuso

$A = \overline{A} \implies A$ è **chiuso**

# Chapter 2

# Limiti

## 2.1 Definizione di Limite

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ punto di accumulazione di $A$, $f : A \to \mathbb{R}$

$f$ converge a $L \in \mathbb{R}$ per $x$ che tende ad $x_0$ scritto:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0 . \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\} . |f(x) - L| < \varepsilon$$

N.d.r.
Tutti i $\delta$ nelle definizioni e dimostrazioni sono da considerarsi $\in \mathbb{R}$ salvo diversamente specificato.

Osservazioni:
La definizione non richiede che $x_0 \in A$
Anche se $x_0 \in dom(f) = A$ il valore della funzione in questo punto non ha nessuna influenza sul valore del limite.
$x_0$ deve essere un p.a. di $A$ perché x deve potersi avvicinare a $x_0$ indefinitamente rimanendo in $A = dom(f)$.

## 2.2 Estensione della Definizione del Limite

Estensione della definizione di:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

nei casi in cui $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$ e/o $L \in \{+\infty, -\infty\}$

N.d.r.
Tutte le definizioni possono essere riscritte equivalentemente sostituendo l'intorno di $\pm$ infinito $I_{\pm\infty}(a)$ dove compaiono gli intervalli $(a, +\infty)$ e $(-\infty, a)$.

### 2.2.1 $x_0 \in \mathbb{R},\ L \in \{+\infty, -\infty\}$

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ p.a. di $A$

$L = +\infty$

Si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} = +\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}). f(x) > M$

$f$ diverge positivamente per $x \to x_0$

$L = -\infty$

Si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} = -\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}). f(x) < M$

$f$ diverge negativamente per $x \to x_0$

### 2.2.2 $x_0 \in \{+\infty, -\infty\},\ L \in \mathbb{R}$

$f : [R, +\infty) \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} = L$ se:

$\forall \varepsilon > 0. \exists a > R : \forall x \in (a, +\infty). |f(x) - L| < \varepsilon$

$f : (-\infty, R] \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} = L$ se:

$\forall \varepsilon > 0. \exists a < R : \forall x \in (-\infty, a). |f(x) - L| < \varepsilon$

$|f(x) - L| < \varepsilon \iff f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon) = I_\varepsilon(L)$

### 2.2.3 $x_0 \in \{+\infty, -\infty\}$, $L \in \{+\infty, -\infty\}$

$x_0 = +\infty,\ L = +\infty,\ f : [R, +\infty) \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists a > R : \forall x \in (a, +\infty). f(x) > M$

$x_0 = +\infty,\ L = -\infty,\ f : [R, +\infty) \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists a > R : \forall x \in (a, +\infty). f(x) < M$

$x_0 = -\infty,\ L = +\infty,\ f : (-\infty, R] \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists a < R : \forall x \in (-\infty, a). f(x) > M$

$x_0 = -\infty,\ L = -\infty,\ f : (-\infty, R] \to \mathbb{R},\ R \in \mathbb{R}$

Si scrive $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ se:

$\forall M \in \mathbb{R}. \exists a < R : \forall x \in (-\infty, a). f(x) < M$

## 2.3 Definizione Disuguaglianza Triangolare

$\forall a, b \in \mathbb{R}. |a + b| \leq |a| + |b|$

$\forall x \in \mathbb{R}. x \leq |x| \wedge -x \leq |x|$

## 2.4 Teorema di Unicità del Limite

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A$

Supponendo che esistano due limiti $L \in \mathbb{R}$ e $L' \in \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e contemporaneamente $\lim_{x \to x_0} f(x) = L'$.

Allora $L = L'$

### 2.4.1 Dimostrazione

Sia $\varepsilon > 0$ arbitrario.
Supponendo per assurdo che estano due limiti $L$ ed $L'$, con $L \neq L'$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \implies \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in I_{\delta 1}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L' \implies \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in I_{\delta 2}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, |f(x) - L'| < \varepsilon$$

$I_{min(a,b)}(x_0) \subseteq I_{max(a,b)}(x_0)$

Equivalentemente:

$I_a(x_0) \cap I_b(x_0) = I_{min(a,b)}(x_0)$

Ponendo $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$, nel risultante intorno:

$$I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$$

valgono entrambe le definizioni dei limiti:

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$
$$|f(x) - L'| < \varepsilon$$

La differenza assoluta è commutativa, quindi la prima si può riscrivere come:

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).$$

$$|L - f(x)| < \varepsilon$$

e applicando la disuguaglianza triangolare si ottiene:

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).$$

$$|L - L'| = |L - f(x) + f(x) - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'|$$

Viste le disuguaglianze:

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).$$

$|f(x) - L| < \varepsilon$
$|f(x) - L'| < \varepsilon$

e dato che:

$a \geq 0$, $b \geq 0$, $c > 0$
$a < c \wedge b < c \implies a + b < 2c$

è sicuramente vero che:

$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$.

$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| < 2\varepsilon$

Dunque $\forall \varepsilon > 0$ si ha:

$0 \leq |L - L'| < 2\varepsilon \implies |L - L'| = 0$
$|L - L'| = 0 \implies L = L'$

C.V.D.

## 2.5 Algebra dei Limiti

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, $L, M \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $x_0$ è un p.a. di $A$ e:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$
$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = M$

Allora le seguenti identità:
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = L + M$
$\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = L \cdot M$
$\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$

valgono in assenza di forme indeterminate ($\infty - \infty, 0 \cdot (\pm\infty), \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$)

### 2.5.1 Caso Particolare di $\lim\limits_{x \to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) = \frac{L}{M}$

Supponendo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0 \wedge \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$

Allora valgono le seguenti regole:

Se $\exists\delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, g(x) > 0$ allora:

$\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) =$

$+\infty$ se $L > 0$
$-\infty$ se $L < 0$

Se $\exists\delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, g(x) < 0$ allora:

$\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)}) =$

$-\infty$ se $L > 0$
$+\infty$ se $L < 0$

Se la funzione cambia segno in ogni intorno di $x_0$, ovvero:
$\forall\delta > 0.\, \exists x_1, x_2 \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \overline{\{x_0\}}) : g(x_1)g(x_2) < 0$ allora:

$\lim\limits_{x\to x_0} (\frac{f(x)}{g(x)})$ non esiste

## 2.6 Teorema della Permanenza del Segno

$A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A$, $f : A \to \mathbb{R}$

Suppongo che:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L \neq 0$

allora $\exists\delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, f(x)$ ha lo stesso segno di $L$.

### 2.6.1 Dimostrazione

Supponendo che $L > 0$ si pone nella definizione di $\lim\limits_{x\to x_0} = L$ $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$.

Quindi $\exists\delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, |f(x) - L| < \frac{L}{2} \iff f(x) \in (\frac{L}{2}, \frac{3L}{2}) \implies f(x) > 0$

Q.E.D.

## 2.7 Teorema del confronto

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ p.a. di $A$.

Supponendo che:

$$\forall x \in A.\, f(x) \leq g(x)$$

Se i limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = M$$

esistono e sono finiti, allora $L \leq M$

### 2.7.1 Dimostrazione

Supponendo per assurdo che $L > M$ si considera la funzione $f(x) - g(x)$ in $A$ e si osserva che:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x)) = L - M > 0$$

Quindi per il teorema della permanenza del segno:

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, f(x) - g(x) > 0$$

Contraddizione con l'ipotesi! Q.E.D.

#### Attenzione

Da $f(x) < g(x)$ non segue che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) < \lim_{x \to x_0} g(x)$$

## 2.8 Teorema dei Due Carabinieri

$f, g, h : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ p.a. di $A$.

Supponendo che:

$$\forall x \in A.\, h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \implies \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

### 2.8.1 Dimostrazione

$\varepsilon$ arbitrario.

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = L \implies \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in I_{\delta_1}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, |h(x) - L| < \varepsilon$$
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = L \implies \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in I_{\delta_2}(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}).\, |g(x) - L| < \varepsilon$$

Ponendo $\delta = min(\delta_1, \delta_2)$ si ha che:

$$\forall x \in I_\delta(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\})$$

valgono:

$$f(x) - L \leq g(x) - L < \varepsilon$$
$$f(x) - L \geq h(x) - L \geq -|h(x) - L| > -\varepsilon$$

Che implicano:

$$-\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon \iff |f(x) - L| < \varepsilon$$

Q.E.D.

### 2.8.2 Corollario

$f, g : A \to \mathbb{R}$, $x_0$ p.a. di $A$.

Supponendo che:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

la funzione $g$ è limitata in $A$, cioè:
$\exists M \in R : \forall x \in A.\, |g(x)| \leq M$

Allora:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$$

**Dimostrazione**

Siccome $\forall x \in A.\, |g(x)| \leq M$ si ha che:

$$\forall x \in A.\, 0 \leq |f(x)g(x)| \leq M\,|f(x)|$$

Applico il teorema dei due carabinieri con $h(x) = 0$ e $g(x) = M\,|f(x)|$.

Si ha $\lim_{x\to x_0} M\,|f(x)| = M \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

$\lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0$

Quindi:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)g(x)| = 0 \text{ da cui la tesi.}$$

Q.E.D

## 2.9 Limiti Unilaterali

### 2.9.1 Limite Destro

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (x_0, +\infty)$

$f$ ammette **limite destro** in $x_0$, scritto:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A. |f(x) - L| < \varepsilon$$

N.B.

Se $A = (a, b)$ allora $b$ è un p.a. di $A$, ma non è un p.a. di $A \cap (b, +\infty) = \varnothing$

### 2.9.2 Limite Sinistro

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (-\infty, x_0)$

$f$ ammette **limite sinistro** in $x_0$, scritto:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \in \mathbb{R}$$

se:

$$\forall \varepsilon > 0. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A. |f(x) - L| < \varepsilon$$

### 2.9.3 Caso $L \in \{+\infty, -\infty\}$

**Limite Destro**

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (x_0, +\infty)$

Si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A. f(x) > M$$

Analogamente, si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall m \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A. f(x) < m$$

### 2.9.4 Limite Sinistro

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (-\infty, x_0)$

Si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$$

se:

$$\forall M \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A. f(x) > M$$

Analogamente si scrive:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$$

se:

$$\forall m \in \mathbb{R}. \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A. f(x) < m$$

### 2.9.5 Legame con il Limite

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$

Allora $f$ ammette limite per $x \to x_0$ se e solo se:

$$\exists \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+ \in \overline{\mathbb{R}}$$
$$\exists \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^- \in \overline{\mathbb{R}}$$

$$L^+ = L^-$$

In tal caso:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L^+ = L^-$$

N.B.
Il teorema implica che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ **non esiste** se:}$$

Almeno uno fra:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

non esiste, oppure se:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

## 2.10 Funzioni Monotone

Si dice che $f : A \to \mathbb{R}$ è:

**Crescente** in $A$ se:

$$\forall x, y \in A.\, x < y \implies f(x) \leq f(y)$$

**Decrescente** in $A$ se:

$$\forall x, y \in A.\, x < y \implies f(x) \geq f(y)$$

**Strettamente Crescente** in $A$ se:

$$\forall x, y \in A.\, x < y \implies f(x) < f(y)$$

**Strettamente Decrescente** in $A$ se:

$$\forall x, y \in A.\, x < y \implies f(x) > f(y)$$

N.B.
$f$ è strettamente monotona $\implies$ $f$ è iniettiva

$f$ è crescente e decrescente $\Longrightarrow$ $f$ è costante

### 2.10.1 Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$

$f$ è crescente in $A$ $\Longrightarrow$ $f$ ammette in $x_0$ entrambi i limiti unilaterali e vale:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = inf\ \{f(x) : x > x_0, x \in A\}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = sup\ \{f(x) : x < x_0, x \in A\}$$

**Dimostrazione**

$l = inf\ \{f(x) : x > x_0, x \in A\}$

Quindi:

$\forall x > x_0, x \in A.\, l \leq f(x)$

$\forall \varepsilon > 0.\, \exists x_\varepsilon > x_0, x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon) < l + \varepsilon$

$\varepsilon > 0$, ponendo $\delta = x_\varepsilon - x_0 > 0$ allora:

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap A = (x_0, x_\varepsilon) \cap A.$

$$0 \leq f(x) - l \leq f(x_\varepsilon) - l < \varepsilon$$

$f$ è crescente, quindi:

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l$$

$L = sup\ \{f(x) : x < x_0; x \in A\}$

Quindi:

$$\forall x < x_0, x \in A.\, f(x) \leq L$$

$$\forall \varepsilon > 0.\, \exists x_\varepsilon < x_0, x_\varepsilon \in A : f(x_\varepsilon) > L - \varepsilon$$

$\varepsilon > 0$, ponendo $\delta = x_0 - x_\varepsilon > 0$ allora:

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap A = (x_\varepsilon, x_0) \cap A.$

$$0 \leq L - f(x) \leq L - f(x_\varepsilon) < \varepsilon$$

$f$ è crescente, quindi:

$$x_\varepsilon < x \implies f(x_\varepsilon) < f(x)$$

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$$

Q.E.D.

N.B.
$L$ e $l$ possono essere diversi.

### 2.10.2 Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ p.a. di $A \cap (x_0, +\infty)$ e di $A \cap (-\infty, x_0)$

$f$ è decrescente in $A \implies f$ ammette in $x_0$ entrambi i limiti unilaterali e vale:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = sup\ \{f(x) : x > x_0, x \in A\}$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = inf\ \{f(x) : x < x_0, x \in A\}$$

"La monotonia è madre dei limiti unilaterali"

## 2.11 Limiti Notevoli

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{sin(ax)}{x} = a$

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} = a$

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{log(1+ax)}{x} = a$

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \lim\limits_{x \to 0} \frac{(1+x)^a-1}{x} = a$

$\forall a \in \mathbb{R}.\ \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{a}{x})^x = e^a$

$e =$ costante di Eulero.

## 2.12 Limiti di Funzioni Composte

$f : A \to B \subseteq \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$$

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = L$$

$$\exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) \neq y_0$$

$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L$