es. 1)

L'idea di continuità DIPENDE dalla metrica !!!

$\Rightarrow$ Sia $(\mathbb{R}, d_e)$ spazio metrico.

$\Rightarrow$ le funzioni $f : (\mathbb{R}, d_e) \to (\mathbb{R}, d_e)$ continue sono le tradizionali funzioni continue dell'Analisi 1

$\Rightarrow$ Quali sono le funzioni $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_e)$ continue con $d =$ metrica discreta?

$\Rightarrow$ Qualunque $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_e)$ è continua !!!

Dim.:

$x \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x > 0$ t.c.

$$d(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_e(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ Sia $\delta_x = \frac{1}{2} < 1$

$\Rightarrow \quad d(x,y) < \delta_x \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow d(f(x), f(y)) = 0 < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ Vale $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall f$ funzione

$\Rightarrow$ qualunque $f : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, d_e)$ è continua

q.e.d.

es. 2)

Siano (A, d_A), (B, d_B) spazi metrici. Definisco d_λ su A con $\lambda > 0 \in \mathbb{R}$ t.c.:

$$d_\lambda(x,y) = \lambda \, d_A(x,y)$$

Dimostrare che le funzioni continue $f: A \to B$ sono le stesse sia con d_A che con d_λ su A

$\Rightarrow$ Sia f continua con d_A su A

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x > 0$ t.c. $d_A(x,y) < \delta_x \Rightarrow d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Rightarrow d_\lambda(x,y) = \lambda d_A(x,y) < \lambda \delta_x \Rightarrow d_B(f(x), f(y)) < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Sia $\delta_x' = \lambda \delta_x$, allora si ha f continua in x, e la scelta non dipende da δ_x

$\Rightarrow$ f è continua sia con d_A che con d_λ.

q.e.d.

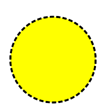
es. 3)

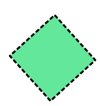
$\exists$ in $\mathbb{R}^2$ un sottoinsieme A aperto rispetto a de e non aperto rispetto alla 1-distanza?

$\Rightarrow$ NO!

Dim:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x,y) \subseteq A$

$\Rightarrow B_\varepsilon((x,y))$ in de sono: 

$\Rightarrow B_\varepsilon((x,y))$ in d sono: 

$\Rightarrow$ Ovunque si riesca a posizionare un $B_\varepsilon((x,y)) \subseteq A$ rispetto a de, si può posizionare un $B_\varepsilon((x,y)) \subseteq A$

rispetto a d (usando la stessa ε!!!) e viceversa!!!

$\Rightarrow$ Data $B_\varepsilon((x,y))$ in d_e, allora $\exists\, B_\varepsilon((x,y))$ in $d \subseteq A$.

$\Rightarrow$ Data $B_\varepsilon((x,y))$ in d, allora $\exists\, B_{\frac{\varepsilon}{2}}((x,y))$ in $d_e \subseteq A$

q.e.d.