L'Hamiltoniana dell'Oscillatore armonico è:

$$H(q,p) = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} q^2$$

Consideriamo il riscalamento $p = \sqrt{m}\,\tilde{p}$, $q = \frac{1}{\sqrt{m}}\tilde{q}$

$\Rightarrow$ si ottiene l'Hamiltoniana:

$$\tilde{H}(\tilde{q},\tilde{p}) = \frac{1}{2}\left(\tilde{p}^2 + \omega^2 \tilde{q}^2\right)$$

Sia ora l'ulteriore riscalamento $\tilde{p} = \sqrt{\omega}\,\bar{p}$, $\tilde{q} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\bar{q}$

$\Rightarrow$ si ottiene l'Hamiltoniana:

$$\bar{H}(\bar{q},\bar{p}) = \frac{1}{2}\omega\left(\bar{p}^2 + \bar{q}^2\right)$$

Poniamo ora $\bar{q} = \sqrt{2I}\cos\varphi$, $\bar{p} = \sqrt{2I}\sin\varphi$

$\Rightarrow$ si ottiene l'Hamiltoniana:

$$\boxed{K(I) = \omega I}$$

$\Rightarrow$ il campo Hamiltoniano è $X_K = (\omega I, 0)$

$\Rightarrow$ le equazioni di Hamilton sono:

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{I} = \omega$$

$\Rightarrow$ I è I.P. di K e si ha che date le condizioni iniziali $I(0) = I_0$, $\varphi(0) = \varphi_0$ si può integrare facilmente:

$$\boxed{I(t) = I_0, \quad \varphi(t) = \varphi_0 + \omega t}$$

È possibile determinare una trasformazione canonica (non necessariamente simplettomorfismo) che coniughi una Hamiltoniana H in un'altra Hamiltoniana $\tilde{H}$ t.c. che $\tilde{H}$ sia integrabile?

Usando, ad esempio, le funzioni generatrici, si può cercare di coniugare una data Hamiltoniana ad un'altra che dipenda SOLO DAI MOMENTI (e, quindi, t.c. le nuove equazioni di Hamilton siano:

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(p), \quad \dot{p}_i = 0 \quad \forall i = 1, \dots, n)$$

In tal caso TUTTI I NUOVI MOMENTI SONO I.P. INDIPENDENTI ed IN INVOLUZIONE $\Rightarrow$ i loro insiemi di livello contengono le orbite, le quali sono del tipo:

$$\boxed{p_i(t) = p_0^i, \quad q^i(t) = q_0^i + t\,\frac{\partial H}{\partial p^i}(p)}$$

<u>Def.</u> (Campo Hamiltoniano completamente integrabile):
Un sistema Hamiltoniano $(M \subseteq \mathbb{R}^{2n}, H)$ è detto COMPLETAMENTE INTEGRABILE se $\exists$ trasformazione canonica di un aperto invariante $\tilde{M} \subseteq M$ in se che coniughi H ad un'Hamiltoniana dipendente solo dai momenti

<u>Def.</u> (Campo Hamiltoniano integrabile secondo Liouville)
Un sistema Hamiltoniano $(M \subseteq \mathbb{R}^{2n}, H)$ è detto INTEGRABILE SECONDO LIOUVILLE nell'aperto invariante $\tilde{M} \subseteq M$ se $\exists (q,p) = w(\varphi, I)$ simplettomorfismo definito su $\mathbb{T}^n \times B$, $B \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto t.c.:

1) $\tilde{M} \cong w(\mathbb{T}^n \times B)$
2) $K = H \circ w$ è funzione delle sole I

Se applichiamo le tecniche viste in precedenza usando il metodo delle funzioni generatrici di tipo S otteniamo la cosiddetta EQUAZIONE RIDOTTA DI HAMILTON-JAKOBI:

$$\boxed{H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(q,\tilde{p})\right) = h(\tilde{p})}$$

con la condizione di invertibilità $\det D^2_S \neq 0$ in cui S, h sono incognite

Def. (Integrale Completo dell'equazione ridotta):
Si dice INTEGRALE COMPLETO dell'equazione ridotta di Hamilton-Jakobi ogni famiglia di soluzioni

$$\boxed{S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n),\ h(\alpha_1,\dots,\alpha_n)}$$

dipendente da n parametri reali $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ t.c. $\operatorname{Det} D^2 f \neq 0$

Proposizione:
Sia $S(q_1,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $h(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ un integrale completo dell'eq. ridotta di H-J. Allora la funzione generatrice $S(q,\tilde{p})$ (in cui le costanti dell'integrale completo sono considerate come momenti) genera una trasformazione canonica

$$(q,p) = w(\tilde{q},\tilde{p})$$

che muta H in $h(\tilde{p})$.

esempio (Oscillatore armonico):

$H(q,p) = \frac{1}{2}(p^2+\omega^2 q^2) \Rightarrow$ l'eq. di H-J associata è:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 = h$$

$$\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2h - \omega^2 q^2}$$

poniamo $h = \alpha\omega$:

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \pm\sqrt{2\alpha\omega - \omega^2 q^2}$$

$$\Rightarrow S(\alpha,q) = \pm\int_0^q \sqrt{2\alpha\omega - \omega^2 x^2}\, dx$$

Consideriamo il ramo positivo:

$$S(\alpha,q) = \int_0^q \sqrt{2\alpha\omega - \omega^2 x^2}\, dx$$

Essa è funzione generatrice per passare alle coordinate AZIONE-ANGOLO dell'oscillatore armonico:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} = \sqrt{2\alpha\omega - \omega^2 q^2}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \int_0^q \frac{x\, dx}{\sqrt{\frac{2\alpha}{\omega} - x^2}} = \arcsin\left(q\sqrt{\frac{\omega}{2\alpha}}\right)$$

Per inversione e ponendo $\alpha = I$ si ottiene:

$$\boxed{q = \sqrt{\frac{2I}{\omega}}\sin\varphi, \quad p = \sqrt{2\omega I}\cos\varphi}$$

$$\text{con} \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$