es. 1)

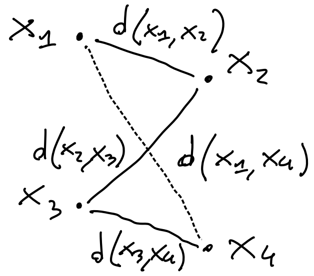
Verificare $\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in (X, d)$ spazio metrico vale la seguente:

$$d(x_1, x_4) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)$$

In quali casi vale l'uguaglianza?

1) Verifico che vale la disuguaglianza:

Sia (X, d):



$$\Rightarrow d(x_1, x_4) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_4)$$

$$\leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + d(x_3, x_4)$$

disuguaglianza triangolare dalla def. di metrica

q.e.d.

2) In quali casi vale l'uguaglianza?

Se d è metrica euclidea, vale l'uguaglianza se sono allineati.

Se d non è la metrica euclidea:

supponiamo d metrica discreta, allora vale se $x_1 = x_2 \land x_3 = x_4$ con $x_1 \neq x_3$ oppure in un'altra combinazione tale che nel piano ci siano solo 2 punti distinti (x_1 e x_4)

es. 2)

Dim. che $d(x,y) = (x-y)^2$ non definisce una metrica su $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Basta dim. che non vale almeno 1 dei 2 assiomi di una metrica

$\Rightarrow$ $(x-y)^2 = 0 \iff x = y$ è vero

$\Rightarrow$ Trovo $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c.

$$d(a,b) + d(a,c) < d(b,c)$$

$\Rightarrow$ $a = 0$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ $d(a,b) = \frac{1}{4}$, $d(a,c) = \frac{1}{4}$

$d(b,c) = 1 > \frac{1}{2} = d(a,b) + d(a,c)$ $\lightning$

q.e.d

es. 3)

Sia de la metrica euclidea su $\mathbb{R}^2$, definisco $d = \lceil de(x,y) \rceil$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^2$. Verificare se d è una metrica

1) $d(x,y) = 0 \overset{?}{\iff} y = x$

$\Rightarrow d(x,y) = \lceil de(x,y) \rceil = 0 \iff de(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓

2) Si ha che: $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil \geqslant \lceil x+y \rceil$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \lceil de(x,y) \rceil + \lceil de(x,z) \rceil \geqslant \lceil de(x,y) + de(x,z) \rceil \geqslant$

$$\lceil d_e(y,z) \rceil = d(y,z) \quad \forall x,y,z \in \mathbb{R}^2$$

q. e. d.

es. 6)

Sia $d: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))$

$$= a|x_2 - x_1| + b|y_2 - y_1| + \lambda(x_2 - x_1) + \mu(y_2 - y_1) + K$$

con $a, b, \lambda, \mu, K \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ Per quali valori di a, b, λ, μ, K si ha che d è una metrica?

$\Rightarrow d((x_1,y_1),(x_1,y_1)) = 0 \Leftrightarrow K = 0$ ✓

$\Rightarrow$ Siano $(x_1, 0), (x_2, 0)$ con $x_1 \neq x_2$, ottengo:

$$d((x_1,0),(x_2,0)) = a|x_2 - x_1| + \lambda(x_2 - x_1)$$

$$d((x_2,0),(x_1,0)) = a|x_1 - x_2| + \lambda(x_1 - x_2)$$

$\Rightarrow$ devono essere uguali quindi:

$$\cancel{a|x_2 - x_1|} + \lambda(x_2 - x_1) = \cancel{a|x_1 - x_2|} + \lambda(x_1 - x_2)$$

$$\Rightarrow \lambda = 0 \quad (x_1 \neq x_2)$$

$\Rightarrow$ analogamente con $(0, y_1), (0, y_2)$ si ottiene $\mu = 0$

$\Rightarrow d(x,y) = a|x_1 - x_2| + b|y_1 - y_2|$

$\Rightarrow$ se $a < 0$ ottengo $d((x_1,0),(x_2,0)) = a \cdot |x_2 - x_1| < 0$ ↯

$\Rightarrow$ se $b<0$ ottengo $d\ldots<0$ ↯

$\Rightarrow$ se $a=0 \vee b=0$ ottengo $d(x,y)=0$ con $x\neq y$ ↯

$\Rightarrow$ deve essere $a,b>0$

$\Rightarrow$ Le condizioni necessarie sono:

$$a,b>0 \wedge \mu,\lambda,k=0$$

$\Rightarrow$ Verifico che d sia una metrica con $a,b>0$ e il resto $=0$

1) $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=0 \Leftrightarrow a|x_2-x_1|+b|y_2-y_1|=0$

con $a,b>0 \Leftrightarrow x_2=x_1 \wedge y_2=y_1$ ✓

2) $a|x_2-x_1|+b|y_2-y_1| + a|x_3-x_1|+b|y_3-y_1|$

$$= a(|x_2-x_1|+|x_3-x_1|)+b(|y_2-y_1|+|y_3-y_1|)$$

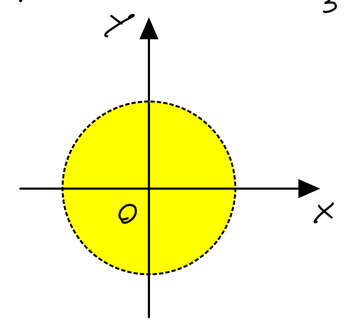
$$\geq a|x_3-x_2|+b|y_3-y_2| = d((x_2,y_2),(x_3,y_3))\ ✓$$

q.e.d.

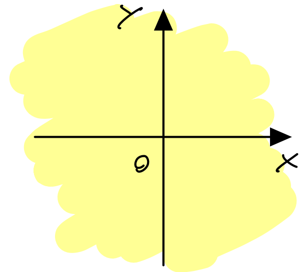
es. 5)

Sia $d: \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ t.c. $d(a,b)=\min\{d_e(a,b),1\}$ con d_e distanza euclidea. Verificare che d è una metrica e rappresentare $B_{\frac{1}{3}}((0,0))$ e $B_2((0,0))$

$\Rightarrow B_{\frac{1}{3}}((0,0))$:



$\Rightarrow B_2((0,0))$:



$\Rightarrow$ Verifico che d è una metrica:

$$d(a,b) = \min\{d_e(a,b), 1\}$$

1) $d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$ ✓

2) $d(a,b) + d(a,c) \geq d(b,c)$?

Caso 1): $d_e(b,c) \geq 1$

$\Rightarrow d(b,c) = 1 \Rightarrow d_e(a,b) + d(a,c) \geq d_e(b,c) \geq 1$

$= d(b,c)$

$\Rightarrow$ Se almeno uno tra $d_e(a,b)$, $d_e(a,b) \geq 1$, concludo

$\Rightarrow$ Se entrambi sono < 1, avrò che:

$d(a,b) = d_e(a,b) \wedge d(a,c) = d_e(a,c)$ e quindi:

$d(a,b) + d(a,c) \geq d_e(b,c) \geq 1 = d(b,c)$ ✓

Caso 2): $d_e(b,c) < 1$

$$\underbrace{d(b,c) = d_e(b,c)}_{<1} \leq d_e(a,b) + d_e(a,c)$$

$\Rightarrow$ Se almeno uno tra $d_e(a,b)$, $d_e(a,b) \geq 1$, concludo

$\Rightarrow$ Se entrambi sono < 1, avrò che:

$d(a,b) = d_e(a,b) \wedge d(a,c) = d_e(a,c)$ e quindi:

$d(b,c) = d_e(b,c) \leq d(a,b) + d(a,c)$ ✓

q.e.d.

es. 4)

Sia $\pi_x : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ t.c. $\pi_x(x,y) = x$. Verificare che π_x è continua rispetto a d_e su $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \pi_x$ continua $\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_x > 0$ t.c.:

$$d_e^{\mathbb{R}^2}((x,y),(a,b)) < \delta_x \Rightarrow d_e^{\mathbb{R}}(x,a) < \varepsilon$$

$\Rightarrow$ sia $\delta_x = \varepsilon > 0 \Rightarrow d_e^{\mathbb{R}^2}((x,y),(a,b)) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$

$\Rightarrow d_e^{\mathbb{R}}(x,a) = |a-x| = \sqrt{(x-a)^2}$

$\Rightarrow d_e^{\mathbb{R}^2}((x,y),(a,b)) \geqslant d_e^{\mathbb{R}}(x,a)$ data che

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \geqslant \sqrt{(x-a)^2} \quad \forall x, y, a, b \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow$ ottengo che:

$$\varepsilon = \delta_x > d_e^{\mathbb{R}^2}((x,y),(a,b)) \geqslant d_e^{\mathbb{R}}(x,a)$$

q.e.d.