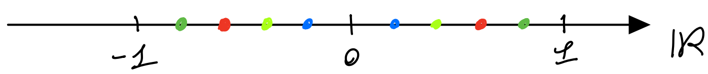
es. 1)

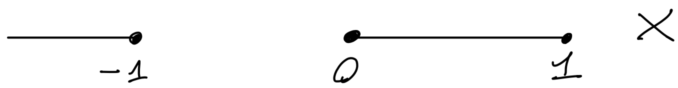
Sia $\sim$ su $[-1,1]$ t.c. :

$$x \sim y \iff x = y \vee (y = -x,\ x \neq 1, -1)$$

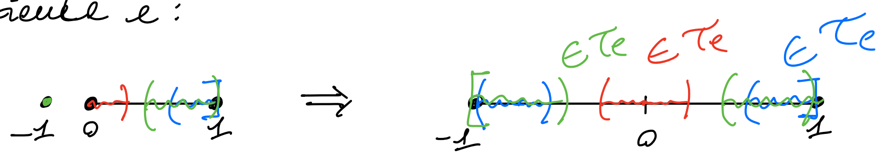
Considerare $X = [-1,1]/_{\sim}$. X è compatto, connesso, T_2, T_1 ?

$\Rightarrow X$:



$\Rightarrow$ 

$\Rightarrow \tau_{\text{quoziente}}$ è :



$\Rightarrow X$ è compatto ?

$[-1,1]$ compatto $\Rightarrow X$ compatto (π continua e suriettiva)

$\Rightarrow X$ è connesso ?

$[-1,1]$ connesso $\Rightarrow \pi$ continua e suriettiva $\Rightarrow X$ connesso.

$\Rightarrow X$ è T_1, T_2 ?

è T_2 ? $-1, 1$ sono sempre separabili, MA NON CON APERTI DISGIUNTI $\Rightarrow X$ non è T_2

è T_1 ? Si, $\forall x,y \in X\ \exists A_1, A_2 \in \tau_{\text{quoziente}}$ t.c. $x \in A_1 \wedge y \in A_2$ ✓

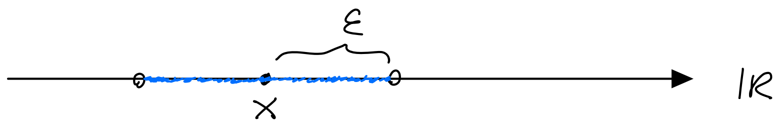
es. 2)

Sia $U(x,\varepsilon) = \{ y \in \mathbb{Q} \mid x-\varepsilon < y < x+\varepsilon,\ \varepsilon > 0 \} \cup \{x\} \subseteq \mathbb{R}$.

Consideriamo $\tau = \{ A \mid \forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. } U(x,\varepsilon) \subseteq A \} \cup \{\emptyset\}$.

1) Verificare che τ è topologia su $\mathbb{R}$:

$U(x,\varepsilon)$ sono fatti così:



1) $\emptyset \in \tau$ ✓ $\mathbb{R} \in \tau$ dato che $\forall x \in \mathbb{R}$

$\exists\, U(x,\varepsilon)$ t.c. $x \in U(x,\varepsilon) \subseteq A \in \tau$.

2) $A_1, A_2 \in \tau \Rightarrow \exists\, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ t.c. $U(x,\varepsilon_1) \subseteq A_1,\ U(x,\varepsilon_2) \subseteq A_2$.

$\Rightarrow U(x,\varepsilon_1) \cap U(x,\varepsilon_2) \subseteq A_1 \cap A_2 \neq \emptyset \quad \forall x \in A_1 \cap A_2$

$\Rightarrow \forall x \in A_3 = A_1 \cap A_2$ prendo $\min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ ✓

3) $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U(x,\varepsilon_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i \quad \forall x \in A_i$

$\Rightarrow \bigcup_i A_i \in \tau$ ✓

2) $[0,1]$ è chiuso in τ?

$\Rightarrow$ controllo se $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1])$ è aperto

$\Rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}}([0,1]) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \in \tau$???

$\Rightarrow$ sì: $\forall x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)\ \exists\, U(x,\varepsilon)$ t.c.

$\exists A \in \tau$ t.c. $U(x,\varepsilon) \subseteq A \Rightarrow (-\infty,0) \cup (1,+\infty) \in \tau$

$\Rightarrow [0,1]$ è chiuso.

3) $[0,1]$ è compatto?

$\Rightarrow$ Sia $\mathcal{R}$ ricoprimento aperto di $[0,1]$ formato da aperti del tipo $U(x, \varepsilon)$

$\Rightarrow \forall \bar{x} \in [0,1] \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \exists! \, U(\bar{x}, \varepsilon)$ t.c. $\bar{x} \in U(\bar{x}, \varepsilon)$

$\Rightarrow$ ci sono infiniti irrazionali in $[0,1]$

$\Rightarrow \nexists$ sottoricoprimento di $\mathcal{R}$. $\Rightarrow [0,1]$ non è compatto.

es. 3)

$\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ con $\gamma(t) = (e^{2t}, at, -2e^{t})$

$a \in \mathbb{R}$

1) Stabilire per quali $a \in \mathbb{R}$ γ è regolare / biregolare

$\Rightarrow \dot{\gamma} = (2e^{2t}, a, -2e^{t}) \neq \vec{0} \quad \forall t, \forall a \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ddot{\gamma} = (4e^{2t}, 0, -2e^{t})$

$\Rightarrow \gamma$ è regolare $\forall a \in \mathbb{R}, \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow K(t) = \dfrac{\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|}{\|\dot{\gamma}\|^3} \Rightarrow$ dipende da $\|\dot{\gamma} \times \ddot{\gamma}\|$

$$\Rightarrow \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 2e^{2t} & a & -2e^{t} \\ 4e^{2t} & 0 & -2e^{t} \end{pmatrix}$$

$$= (-2ae^{t}, -(-4e^{3t} + 8e^{3t}), -a\,4e^{2t})$$

$$= (-2ae^{t}, -4e^{3t}, -a\,4e^{2t})$$

$\Rightarrow$ dovrebbe essere $\sqrt{4a^2e^{2t} + 16e^{6t} + a^2 16 e^{4t}} = 0$

$\lightning$

$\Rightarrow \gamma$ è biregolare $\forall a \in \mathbb{R} \ \forall t \in [0,1]$

2) Posto $a = 1$, calcolare $K(t)$, $\tau(t)$

$$\Rightarrow \quad K(t) = \frac{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|}{\|\dot\gamma\|^3}$$

$$\Rightarrow \|\dot\gamma \times \ddot\gamma\| = \sqrt{4e^{2t} + 16e^{6t} + 16e^{4t}}$$

$$= 2e^{t}\sqrt{1 + 4e^{4t} + 4e^{2t}}$$

$$= 2e^{t}(1+2e^{2t})$$

$$\Rightarrow \|\dot\gamma\|^3 = \left(\sqrt{4e^{4t}+1+4e^{2t}}\right)^3 = (1+2e^{2t})^3$$

$$\Rightarrow \quad K(t) = \frac{2e^{t}}{(1+2e^{2t})^2}$$

$$\Rightarrow \quad \tau(t) = \frac{(\dot\gamma \times \ddot\gamma)\cdot \dddot\gamma}{\|\dot\gamma \times \ddot\gamma\|^2}$$

$$\Rightarrow \dddot\gamma = (8e^{2t}, 0, -2e^{t})$$

$$\Rightarrow (\dot\gamma \times \ddot\gamma)\cdot\dddot\gamma = \det\begin{pmatrix}\dot\gamma\\ \ddot\gamma\\ \dddot\gamma\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2e^{2t} & 1 & -2e^{t} \\ 4e^{2t} & 0 & -2e^{t} \\ 8e^{2t} & 0 & -2e^{t}\end{pmatrix}$$

$$= -\left(-8e^{3t} + 16e^{3t}\right)$$

$$= -8e^{3t}$$

$$\Rightarrow \tau(t) = -\frac{{}^{2}\cancel{8}e^{\cancel{3}t}}{{}_{1}\cancel{4}\cancel{e^{2t}}(1+2e^{2t})^2} = -\frac{e^{t}}{(1+2e^{2t})^2}$$

3) Per $a=1$, calcolare la lunghezza della curva:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\dot\gamma(t)\|\,dt = \int_0^1 1 + 2e^{2t}\,dt = \left[t + e^{2t}\right]_0^1$$

$$= 1 + e^2 - 1 = e^2$$

es. 4) Sia S con $\varphi(u,v) = (u, v, u^2 \sin v)$

con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

1) Determinare i punti singolari di S:

$$X_1 = (1, 0, 2u \sin v), \quad X_2 = (0, 1, u^2 \cos v)$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u\sin v \\ 0 & 1 & u^2 \cos v \end{pmatrix}$$

$$= (-2u \sin v, -(u^2 \cos v), 1)$$

$$= (-2u \sin v, -u^2 \cos v, 1)$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} -2u \sin v = 0 \\ -u^2 \cos v = 0 \\ 1 = 0 \end{cases} \quad \lightning \Rightarrow \text{ S è superficie regolare}$$

($\nexists$ punti singolari di S)

2) Verificare che l'asse y è contenuto in S

$\Rightarrow$ l'asse y si ha per valori $(0, y, 0)$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v \neq 0 \\ u^2 \sin v = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

i punti $(0, v)$ con $v \neq 0$ stanno in S e contengono l'asse y.

3) Calcolare la 1ª forma quadratica fondamentale:

$$X_1 = (1, 0, 2u \sin v), \quad X_2 = (0, 1, u^2 \cos v)$$

$$g_{11} = X_1 \cdot X_1 = 1 + 4u^2 \sin^2 u$$

$$g_{12} = X_1 \cdot X_2 = 2u^3 \sin v \cos v$$

$$g_{22} = 1 + u^4 \cos^2 v$$

$\Rightarrow$ la 1ª forma quadratica è:

$$(1 + 4u^2 \sin^2 u)\, du^2 + 4u^3 \sin v \cos v \, du dv + (1 + u^4 \cos^2 v)\, dv^2$$

4) Determinare sulla curva di S ottenuta ponendo $u = 2$ i punti in cui K_s di S è max.

$$\Rightarrow K_s = \frac{l}{g}$$

$$\Rightarrow X_{11} = (0, 0, 2 \sin v), \quad X_{12} = (0, 0, 2u \cos v)$$

$$X_{22} = (0, 0, -u^2 \sin v)$$

$$\Rightarrow g = g_{11} g_{22} - g_{12}^2 = (1 + 4u^2 \sin^2 v)(1 + u^4 \cos^2 v) - (2u^3 \sin v \cos v)^2$$

$$= 1 + u^4 \cos^2 v + 4u^2 \sin^2 v + 4u^6 \cancel{\sin^2} v \cos^2 v - 4u^6 \cancel{\sin^2} v \cos^2 v$$

$$= 1 + u^4 \cos^2 v + 4u^2 \sin^2 v$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} X_{11} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \sin v \\ 1 & 0 & 2u \sin v \\ 0 & 1 & u^2 \cos v \end{pmatrix} = 2u \sin v$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} X_{12} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2u \cos v \\ 1 & 0 & 2u \sin v \\ 0 & 1 & u^2 \cos v \end{pmatrix} = 2u \cos v$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} X_{22} \\ X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u^2 \sin v \\ 1 & 0 & 2u \sin v \\ 0 & 1 & u^2 \cos v \end{pmatrix} = -u^2 \sin v$$

$$\Rightarrow \ell = \frac{2u\sin v}{\sqrt{g}} \cdot \frac{(-u^2\sin v)}{\sqrt{g}} - \frac{(2u\cos v)^2}{g}$$

$$= -\frac{2u^3\sin^2 v - 2u^2\cos^2 v}{g}$$

$$\Rightarrow K_S = \frac{\ell}{g} = -\frac{2u^3\sin^2 v - 2u^2\cos^2 v}{g^2}$$

$$\Rightarrow K_S = \frac{2u^2\cos^2 v - 2u^3\sin^2 v}{(1+u^4\cos^2 v + 4u^2\sin^2 v)^2}$$

$u=2$

$$= \frac{8\cos^2 v - 16\sin^2 v}{(1+16\cos^2 v + 16\sin^2 v)^2}$$

$$= \frac{8(1-\sin^2 v) - 16\sin^2 v}{(1+16)^2}$$

$$= \frac{8 - 24\sin^2 v}{289} \Rightarrow \text{il massimo è per } \sin^2 v = 0$$

$\Rightarrow v = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow (2, 2k\pi),\ k\in\mathbb{Z}$ sono i punti sulla curva di S con $u=2$ con K_S massima.