Calcolo di R_0 con Next-Gen Matrix

Dato il MODELLO EPIDEMIOLOGICO

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\vec{x}} = f(\vec{x}) \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0 \end{cases}}$$

si calcola l' INDICE DI RIPRODUZIONE BASICO R_0 nel seguente modo:

1) Identificazione delle parti infette della popolazione:
si isolano tutti i compartimenti della popolazione che sono in grado di DIFFONDERE LA MALATTIA (es. esposti, infetti)
$\Rightarrow$ si ottiene quindi un MODELLO CON UN NUMERO DI EQUAZIONI RIDOTTO:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) \\ \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \end{cases}}$$

2) Riscrittura di $\tilde{f}$:
si scrive $\tilde{f}$ in forma matriciale con la seguente formulazione:

$$\boxed{\dot{\tilde{x}} = \tilde{f}(\tilde{x}) = (N - V) \cdot \tilde{x}}$$

con:

$N :=$ matrice corrispondente ai NUOVI CASI

$V :=$ matrice corrispondente ai CASI ESISTENTI

3) Calcolo di R_0:
Si ha:

$$\boxed{R_0 := \rho(N \cdot V^{-1}) := \max_{|\lambda|} \{ \lambda : \lambda \text{ é autovalore di } N \cdot V^{-1} \}}$$

Esempi:

1) Modello SIR:

$$\boxed{\begin{cases} s' = -\beta i s \\ i' = \beta i s - \gamma i \\ r' = \gamma i \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ i compartimenti in grado di diffondere la malattia sono: i

$\Rightarrow i' = \beta i s - \gamma i = (N - V) \cdot i$ con $N = (\beta s)$, $V = (\gamma)$

$\Rightarrow \boxed{R_0 = \rho\left(\frac{\beta s}{\gamma}\right) = \frac{\beta s}{\gamma}}$

2) MODELLO SEIR:

$$\boxed{\begin{cases} s' = -\beta s i \\ e' = \beta s i - \mu e \\ i' = \mu e - \gamma i \\ r' = \gamma i \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ i compartimenti in grado di diffondere la malattia sono: e, i

$$\Rightarrow \begin{cases} e' = -\mu e + \beta s i \\ i' = \mu e - \gamma i \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} e' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu & \beta s \\ \mu & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ -\mu & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \frac{1}{\mu\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \mu & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ \frac{1}{\gamma} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\beta s}{\gamma} & \frac{\beta s}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\lambda - \frac{\beta s}{\gamma}\right)\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \frac{\beta s}{\gamma}, \lambda_2 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{R_0 = \frac{\beta s}{\gamma}}$

3) MODELLO SEIR CON MORTALITÀ:

$$\boxed{\begin{cases} s' = -\beta s i + \lambda - \eta s \\ e' = \beta s i - \mu e - \eta e \\ i' = \mu e - \gamma i - \eta e \\ r' = \gamma i - \eta e \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ i compartimenti in grado di diffondere la malattia sono: e, i

$$\Rightarrow \begin{cases} e' = -\mu e + \beta s i - \eta e \\ i' = \mu e - \gamma i - \eta e \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} e' \\ i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu - \eta & \beta s \\ \mu - \eta & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} 0 & \beta s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \mu+\eta & 0 \\ -\mu+\eta & \gamma \end{pmatrix} \Rightarrow V^{-1} = \frac{1}{(\mu+\eta)\gamma} \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ \mu-\eta & \mu+\eta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow NV^{-1} = \begin{pmatrix} \beta s \frac{\mu-\eta}{(\mu+\eta)\gamma} & \frac{\beta s}{\gamma} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\beta s \frac{\mu-\eta}{(\mu+\eta)\gamma} - \lambda\right)\lambda = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{\beta s}{\gamma}\left(\frac{\mu-\eta}{\mu+\eta}\right), \quad \lambda_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{R_0 = \frac{\beta s}{\gamma}\left(\frac{\mu-\eta}{\mu+\eta}\right)}$$

4) Modello COVID-19:

$$\boxed{\begin{cases} s' = -\gamma_e s e - \gamma_i s i \\ e' = \gamma_e s e + \gamma_i s i - \tau e - \alpha_e e \\ i' = \tau e - \alpha_i i - \phi i \\ r' = \alpha_e e + \alpha_i i \\ m' = \phi i \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ i compartimenti in grado di diffondere la malattia sono: e, i

$$\Rightarrow \begin{cases} e' = \gamma_e s e + \gamma_i s i - \tau e - \alpha_e e \\ i' = \tau e - \alpha_i i - \phi i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_e s - \tau - \alpha_e & \gamma_i s \\ \tau & -\alpha_i - \phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e \\ i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} \gamma_e s & \gamma_i s \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V = \begin{pmatrix} \tau + \alpha_e & 0 \\ -\tau & \alpha_i + \phi \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V^{-1} = \frac{1}{(\tau+\alpha_e)(\alpha_i+\phi)} \begin{pmatrix} \alpha_i + \phi & 0 \\ \tau & \tau + \alpha_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau+\alpha_e} & 0 \\ \frac{\tau}{(\tau+\alpha_e)(\alpha_i+\phi)} & \frac{1}{\alpha_i+\phi} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow NV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_e s}{\tau+\alpha_e} + \frac{\gamma_i \tau s}{(\tau+\alpha_e)(\alpha_i+\phi)} & \frac{\gamma_i s}{\alpha_i+\phi} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_0 = \frac{\gamma_e s}{\tau+\alpha_e} + \frac{\gamma_i \tau s}{(\tau+\alpha_e)(\alpha_i+\phi)}}$$

5) MODELLO COVID-19 CON 2 REGIONI SPAZIALI:

$$\boxed{\begin{cases} s_m' = -\gamma_{cm} s_m i_c - \gamma_{mm} s_m i_m \\ i_m' = \gamma_{cm} s_m i_c + \gamma_{mm} s_m i_m - \alpha i_m \\ r_m' = \alpha i_m \\ s_c' = -\gamma_{mc} s_c i_m - \gamma_{cc} s_c i_c \\ i_c' = \gamma_{mc} s_c i_m + \gamma_{cc} s_c i_c - \alpha i_c \\ r_c' = \alpha i_c \end{cases}}$$

$\Rightarrow$ i compartimenti in grado di diffondere la malattia sono: i_m, i_c

$$\Rightarrow \begin{cases} i_m' = \gamma_{cm} s_m i_c + \gamma_{mm} s_m i_m - \alpha i_m \\ i_c' = \gamma_{mc} s_c i_m + \gamma_{cc} s_c i_c - \alpha i_c \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} i_m' \\ i_c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{mm} s_m - \alpha & \gamma_{cm} s_m \\ \gamma_{mc} s_c & \gamma_{cc} s_c - \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_m \\ i_c \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N = \begin{pmatrix} \gamma_{mm} s_m & \gamma_{cm} s_m \\ \gamma_{mc} s_c & \gamma_{cc} s_c \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow V^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix} \Rightarrow NV^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{mm} s_m \cdot \frac{1}{\alpha} & \gamma_{cm} s_m \cdot \frac{1}{\alpha} \\ \gamma_{mc} s_c \frac{1}{\alpha} & \gamma_{cc} s_c \cdot \frac{1}{\alpha} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{\gamma_{cc} s_c + \gamma_{mm} s_m \pm \sqrt{\gamma_{cc}^2 s_c^2 + \gamma_{mm}^2 s_m^2 - 2\gamma_{cc}\gamma_{mm} s_c s_m + 4\gamma_{cm}\gamma_{mc} s_c s_m}}{2\alpha}$$

$$\Rightarrow \boxed{R_0 = \frac{\gamma_{cc} s_c + \gamma_{mm} s_m + \sqrt{\gamma_{cc}^2 s_c^2 + \gamma_{mm}^2 s_m^2 - 2\gamma_{cc}\gamma_{mm} s_c s_m + 4\gamma_{cm}\gamma_{mc} s_c s_m}}{2\alpha}}$$