es. 3)

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t \sin t), \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Stabilire se γ è immersione

$\Rightarrow$ immersione = immersione locale + iniettiva

$\Rightarrow$ punti singolari:

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t + t \cos t)$$

$\Rightarrow \nexists\, t \in \mathbb{R}$ t.c. $\dot{\gamma}(t) = \vec{0} \Rightarrow \gamma$ è immersione

$\Rightarrow$ Iniettività:

$$\begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ \sin t_1 = \sin t_2 \\ t_1 \sin t_1 = t_2 \sin t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos t_1 = \cos t_2 \\ t_1 \sin t_2 = t_2 \sin t_2 \end{cases}$$

$\Rightarrow t_1 = t_2 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ MA allora dovrebbe essere $k = 0$ affinché (2) sia soddisfatta $\lightning$

$\Rightarrow \gamma$ non è iniettiva $\Rightarrow \gamma$ non è immersione.

2) Determinare $\vec{T}$ in $P = (1, 0, 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \\ t \sin t = 0 \end{cases} \Rightarrow t = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \vec{T}(t) = \frac{\dot{\gamma}}{\|\dot{\gamma}\|} = \frac{(-\sin t, \cos t, \sin t + t \cos t)}{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \cos t \sin t}}$$

$\Rightarrow$ in $t = 2k\pi$ si ha:

$$\vec{T}(2k\pi) = \frac{(0, 1, 2k\pi)}{\sqrt{1 + 4k^2\pi^2}}$$

3) Determinare, se $\exists$, i punti in cui si ha $K_{T_{MAX}}, K_{T_{MIN}}$.

es. 4)

Sia $\varphi(u,v) = (u^2+v, u\cos v, u\sin v)$ con: $u>0, v\in\mathbb{R}$.

1) Determinare i punti regolari

$\Rightarrow X_1 = (2u, \cos v, \sin v)$

$\Rightarrow X_2 = (1, -u\sin v, u\cos v)$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = \det\begin{pmatrix} i & j & k \\ 2u & \cos v & \sin v \\ 1 & -u\sin v & u\cos v \end{pmatrix}$$

$$= (u, -(2u^2\cos v - \sin v), -2u^2\sin v - \cos v)$$

$$= (u, \sin v - 2u^2\cos v, -2u^2\sin v - \cos v)$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} u = 0 \\ \sin v - 2u^2\cos v = 0 \\ -2u^2\sin v - \cos v = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin v = 0 \\ -\cos v = 0 \end{cases} \quad ⚡$$

$\Rightarrow \nexists$ punti singolari $\Rightarrow \varphi$ è superficie regolare.

2) Determinare la 1ª forma quadratica fondamentale:

$g_{11} = X_1 \cdot X_1 = 4u^2 + 1$

$g_{12} = g_{21} = X_1 \cdot X_2 = 2u$

$g_{22} = X_2 \cdot X_2 = 1 + u^2$

$$\Rightarrow (4u^2+1)\,du^2 + 4u\,du\,dv + (1+u^2)\,dv^2$$

3) Classificare i punti per $v=0$ in ellittici,