es. 4)

$$\varphi(u,v) = (uv,\ vu^2 - v + 1,\ 1 - v) \qquad (u,v) \in \mathbb{R}^2$$

1) determinare i punti regolari di S:

sono i punti che annullano $X_1 \times X_2$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) = (v,\ 2uv,\ 0)$$

$$\Rightarrow X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (u,\ u^2 - 1,\ -1)$$

$$\Rightarrow X_1 \times X_2 = (v,\ 2uv,\ 0) \times (u,\ u^2 - 1,\ -1)$$

$$= \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ v & 2uv & 0 \\ u & u^2 - 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-2uv,\ -(-v),\ v(u^2 - 1) - 2u^2 v\right)$$

$$= \left(-2uv,\ v,\ -v - u^2 v\right)$$

$\Rightarrow$ deve essere:

$$\begin{cases} -2uv = 0 \\ v = 0 \\ -v - u^2 v = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{tutti i punti } (u,0) \in \mathbb{R}^2$$

sono t.c. $S(u,0)$ sia singolare

$\Rightarrow \varphi(u,0) = (0,1,1) \quad \forall u$

$\Rightarrow P = (0,1,1)$ è l'unico punto singolare di S

$\Rightarrow$ Tutti i punti di S eccetto $P = (0,1,1)$ sono punti regolari.

2) Det. $T_p(S)$ $\forall p \in S$ regolare

$\Rightarrow$ sia $p \neq (0,1,1)$. Allora si ha:

$$\Rightarrow T_p(S) = p + \langle X_1, X_2 \rangle$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v \\ 2uv \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u^2-1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \begin{pmatrix} uv \\ u^2v-v+1 \\ 1-v \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} v \\ 2uv \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ u^2-1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$T_p(S) \Rightarrow \begin{cases} x = uv + \alpha \cdot v + \beta \cdot u \\ y = (u^2v - v + 1) + 2\alpha uv + \beta(u^2-1) \\ z = 1 - v - \beta \end{cases} \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \text{ con } v \neq 0$$

3) Verificare che tutti i $T_p(S)$ hanno un punto Q in comune e determinare le coordinate.