

# Appunti di Analisi Matematica I

Ettore Forigo



# Chapter 1

## 1

### 1.1 Definizione del Principio di Induzione

$$(P(n_0) \wedge P(n) \implies P(n+1)) \implies \forall n \in \mathbb{N}. P(n)$$

( $\implies$  ha precedenza su  $\wedge$ )

Il caso base nell'induzione può essere anche un numero  $\neq 0$ .

### 1.2 Insiemi Famosi

$\mathbb{N}$  = Numeri Naturali =  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$  = Numeri Interi

$\mathbb{Q}$  = Numeri Razionali

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Su  $\mathbb{Q}$  è definita una relazione d'ordine totale ( $\leq$ )

Gli insiemi con relazioni d'ordine totale si chiamano totalmente ordinati.

### 1.3 Campo Ordinato dei Razionali

$(\mathbb{Q}, \leq)$  formano un Campo Ordinato.

### 1.4 Definizione di Completezza di un Campo

Un campo totalmente ordinato  $(\mathbb{K}, \leq)$  si dice completo se vale il seguente **assioma di completezza** (Assioma di Dedekind):

$$\forall A, B, A \subseteq \mathbb{K}, B \subseteq K, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$$

$$\forall x \in A, \forall y \in B. x \leq y \implies \exists c \in \mathbb{K} : \forall x \in A, \forall y \in B. x \leq c \leq y$$

Chiamiamo  $c$  elemento separatore tra gli insiemi  $A$  e  $B$ .

Il campo  $(\mathbb{Q}, \leq)$  è totalmente ordinato ma non completo.

## 1.5 Definizione dei Numeri Reali

$\mathbb{R}$  è una estensione di  $\mathbb{Q}$  tale che il campo  $(\mathbb{R}, \leq)$  è totalmente ordinato e completo.

### 1.5.1 Interpretazione Geometrica

Ogni numero reale può essere univocamente associato ad un punto della retta reale e viceversa

## 1.6 Definizione Numeri Irrazionali

$$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \text{Numeri Irrazionali}$$

## 1.7 Definizione di Massimi e Minimi

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \emptyset$$

$$\exists a \in \mathbb{E} : \forall x \in \mathbb{E}. a \leq x \implies a \text{ è un minimo di } \mathbb{E}$$

$$\exists b \in \mathbb{E} : \forall x \in \mathbb{E}. x \leq b \implies b \text{ è un massimo di } \mathbb{E}$$

$$\min(\mathbb{E}) = a$$

$$\max(\mathbb{E}) = b$$

Esistono insiemi limitati che non ammettono né massimo né minimo.

$$\mathbb{E} = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$$

### 1.7.1 Lemma: Unicità di min e max

Se  $\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$  ammette minimo o massimo, allora è unico.

## 1.8 Definizione di Maggioranti e Minoranti

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \emptyset$$

$a \in \mathbb{R}$  è un maggiorante di  $\mathbb{E}$  se  $\forall x \in \mathbb{E}. a \leq x$

$b \in \mathbb{R}$  è un maggiorante di  $\mathbb{E}$  se  $\forall x \in \mathbb{E}. x \leq b$

**Non sono unici!**

$M(\mathbb{E})$  = Insieme dei maggioranti di  $\mathbb{E}$

$m(\mathbb{E})$  = Insieme dei minoranti di  $\mathbb{E}$

## 1.9 Definizione di Insieme Limitato

$$E \subseteq \mathbb{R}, E \neq \emptyset$$

$M(\mathbb{E}) \neq \emptyset \implies \mathbb{E}$  è superiormente limitato

$m(\mathbb{E}) \neq \emptyset \implies \mathbb{E}$  è inferiormente limitato

$M(\mathbb{E}) \neq \emptyset \wedge m(\mathbb{E}) \neq \emptyset \implies \mathbb{E}$  è limitato

## 1.10 Teorema

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \emptyset$$

$\mathbb{E}$  è superiormente limitato  $\implies M(\mathbb{E})$  ammette minimo (estremo superiore di  $\mathbb{E}$ )

$\mathbb{E}$  è inferiormente limitato  $\implies m(\mathbb{E})$  ammette massimo (estremo inferiore di  $\mathbb{E}$ )

## 1.11 Definizione di Estremo Superiore ed Inferiore

$\mathbb{E}$  è superiormente limitato  $\implies \sup(\mathbb{E}) = \sup \mathbb{E} = \min(M(\mathbb{E}))$

$\mathbb{E}$  è inferiormente limitato  $\implies \inf(\mathbb{E}) = \inf \mathbb{E} = \max(m(\mathbb{E}))$

### 1.11.1 Proprietà

$\sup \mathbb{E} \in \mathbb{E} \implies \sup \mathbb{E} = \max \mathbb{E}$

$\inf \mathbb{E} \in \mathbb{E} \implies \inf \mathbb{E} = \min \mathbb{E}$

$\sup \mathbb{E}$  e  $\inf \mathbb{E}$  sono unici.

## 1.12 Caratterizzazione di sup e inf

$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{E} \neq \emptyset$ ,  $\mathbb{E}$  superiormente limitato

### 1.12.1 Caratterizzazione di sup

$$\iota = \sup \mathbb{E} \iff \forall x \in \mathbb{E} : x \leq \iota \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{E} : x > \iota - \varepsilon$$

### 1.12.2 Caratterizzazione di inf

$$\iota = \inf \mathbb{E} \iff \forall x \in \mathbb{E} : \iota \leq x \wedge \forall \varepsilon > 0 \exists x \in \mathbb{E} : x < \iota + \varepsilon$$

## 1.13 Definizione di $\bar{\mathbb{R}}$

Insieme dei numeri reali estesi:

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

### 1.13.1 Relazione d'ordine $\leq$ e le operazioni somma e prodotto su $\bar{\mathbb{R}}$

**Relazione  $\leq$**

$$\forall x \in \bar{\mathbb{R}} : -\infty \leq x \leq +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$$

### 1.13.2 Somma

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + \infty = +\infty$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : x + (-\infty) = -\infty$$

### 1.13.3 Prodotto

$$\forall x > 0, x \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\forall x < 0, x \in \mathbb{R}$$

$$x \cdot (+\infty) = -\infty$$

$$x \cdot (-\infty) = +\infty$$

N.B.

Non sono definite le operazioni:

$$0 \cdot (\pm\infty), +\infty - \infty$$

## 1.14 Intervalli

$I \subseteq \bar{\mathbb{R}} : \forall x, y \in I : x < z < y \implies z \in I$   
 $I$  è un detto intervallo.

$$a, b \in \bar{\mathbb{R}}, a < b$$

### 1.14.1 Intervallo aperto di estremi $a$ e $b$

$$(a, b) = ]a, b[ = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a < x < b\}$$

### 1.14.2 Intervallo semi-aperto a destra di estremi $a$ e $b$

$$[a, b) = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}$$

### 1.14.3 Intervallo semi-aperto a sinistra di estremi $a$ e $b$

$$(a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}$$

### 1.14.4 Intervallo chiuso di estremi $a$ e $b$

$$[a, b] = \{x \in \bar{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}$$

### 1.14.5

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \emptyset, M(\mathbb{E}) = \emptyset \\ \sup \mathbb{E} = +\infty$$

$$\mathbb{E} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{E} \neq \emptyset, m(\mathbb{E}) = \emptyset \\ \inf \mathbb{E} = -\infty$$

## 1.15 Funzioni

Una funzione è definita da una terna  $(f, A, B)$  dove:

$A \subseteq \bar{\mathbb{R}}, B \subseteq \bar{\mathbb{R}}, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$   
 $f$  è una legge che ad ogni elemento  $x \in A$  associa univocamente un elemento  $f(x) \in B$ .

Notazione:

$A = \text{dom}(f)$  (dominio di  $f$ )

$B = \text{codom}(f)$  (codominio di  $f$ )

Si scrive:  $f : A \rightarrow B$

N.B.

Il codominio  $B$  non è determinato univocamente da  $f$ .

Se  $B$  è codominio di  $f$  e  $B \subseteq C$  allora anche  $C$  è codominio di  $f$ .

Due funzioni  $f_1 : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$  e  $f_2 : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$

sono uguali  $\iff A_1 = A_2 \wedge \forall x \in A_1 = A_2 : f_1(x) = f_2(x)$

### 1.15.1 Definizione di Insieme Immagine

$f : A \rightarrow B$

$\text{im}(f) = f[A] = \text{Im}f = \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$

$\text{im}(f) \subseteq \text{codom}(f)$

### 1.15.2 Definizione di Iniettività

Una funzione da  $A$  a  $B$  si dice **iniettiva** se:

$$\forall x, x' \in A. f(x) = f(x') \implies x = x'$$

### 1.15.3 Definizione di Suriettività

$\text{im}(f) = \text{codom}(f)$

### Interpretazione Geometrica

$\forall y_0 \in \text{codom}(f)$  la retta  $y = y_0$  interseca il grafico di  $f$  in almeno un punto.

Equivalentemente:

$$\forall y \in \text{codom}(f)$$

$$f^{-1}(y) \neq \emptyset$$

Se  $f : A \rightarrow B$  non è suriettiva si può rendere suriettiva restringendo il suo codominio alla sua immagine (Troncatura).

Si può restringere anche il dominio per rendere la funzione iniettiva (Restrizione).



### 1.15.4 Definizione di Biiettività

Una funzione si dice **biiettiva** (o biiezione, o anche corrispondenza 1 a 1 o biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva.

## 1.16 Definizione di Invertibilità

$\forall y \in B \exists! x \in A : y = f(x) \implies f : A \rightarrow B$  è invertibile.

$f : A \rightarrow B$  è invertibile  $\implies f^{-1} : im(f) \rightarrow dom(f)$  è la funzione inversa di  $f$ .

$$\forall y \in (B = im(f)) : y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

Osservazione:

$$\forall y \in im(f) : y = f(f^{-1}(y))$$

$$f \text{ è invertibile} \iff f \text{ è biiettiva}$$

Il grafico della funzione inversa:

$$\begin{aligned} graf(f^{-1}) &= \{(y, x) \in B \times A : x = f^{-1}(y)\} \\ &= \{(y, x) \in B \times A : y = f(x)\} \\ &= \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in graf(f)\} \end{aligned}$$

$$(y, x) \in graf(f^{-1}) \iff (x, y) \in graf(f)$$

$graf(f^{-1})$  è simmetrico di  $graf(f)$  rispetto alla retta  $y = x$

## 1.17 Definizione di Restrizione

$$f : A \rightarrow B, E \subseteq A$$

$$\begin{aligned} f|_E : E &\rightarrow B \\ f|_E(x) &= f(x) \quad \forall x \in E \end{aligned}$$

$f|_E$  è chiamata restrizione di  $f$  ad  $E$ .

Una funzione non iniettiva si può rendere iniettiva considerandone opportune restrizioni.