PREDIZIONE

<u>Proposizione</u> (Disuguaglianza di Jensen per il V.M.C.):

Date $X \in L^1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convessa t.c. $f(X) \in L^1$, si ha che $\forall \mathcal{F}$ σ-algebra:

$$\boxed{\mathbb{E}(f(X) \mid \mathcal{F}) \geq f(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}))}$$

<u>Teorema</u>:

Sia $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $(\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) < +\infty)$. Allora:

$$\boxed{\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})}$$

<u>Dim.</u>:

Per Jensen si ha:

$$\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{F}) \geq (\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F}))^2$$

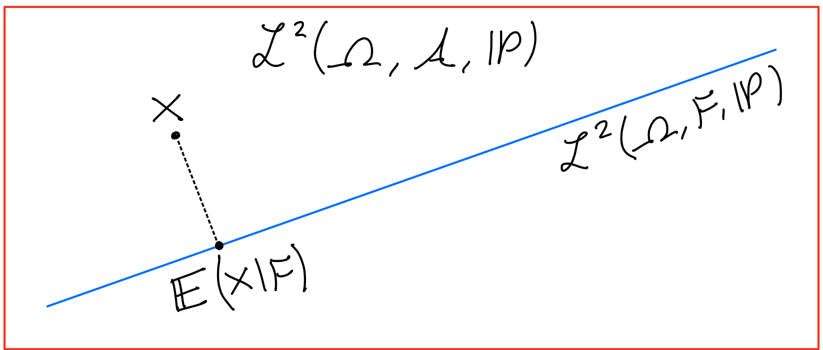
$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})^2) \leq \mathbb{E}(\mathbb{E}(X^2 \mid \mathcal{F})) = \mathbb{E}(X^2) < +\infty$$

$\square$

In un qualunque spazio $\mathcal{L}^2$ è definito il seguente prodotto scalare:

$$\langle X, Y \rangle := \mathbb{E}(XY)$$

Si definisce inoltre $\|X\|_{L^2} := \sqrt{\langle X, Y \rangle}$



Teorema:

Sia $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, allora:

$$\boxed{\|X - Z\|_{L^2} \geq \|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\|}$$

$$\forall Z \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$$

Dim.:

$\|X - Z\|_{L^2}^2 = \mathbb{E}((X-Z)^2) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + \mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - Z)^2) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - Z)^2) + 2\,\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - Z))$

Osservando che $\mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^2) = \|X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\|_{L^2}^2$ e che $\mathbb{E}((\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - Z)^2) \geq 0$, per concludere basta mostrare che $\mathbb{E}(\underbrace{(X - \mathbb{E}(X|\mathcal{F}))}_{U}\underbrace{(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) - Z)}_{V}) = 0$

Notiamo che $V \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathbb{E}(U|\mathcal{F}) = 0$.

Quindi:

$$\mathbb{E}(UV) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(UV|\mathcal{F})) = \mathbb{E}(V\,\mathbb{E}(U|\mathcal{F})) = 0$$

$\square$

Dati $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$, se $A \in \mathcal{A}$ possiamo definire:

$$\boxed{\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})}$$

Chiamiamo ora $\mathbb{P}(A|\mathcal{F}) = Q(A, \omega)$. Notiamo che se $A, B \in \mathcal{A}$ con $A \cap B = \emptyset$, si ha

$$Q(A \cup B, \omega) = Q(A, \omega) + Q(B, \omega)$$

Nonostante $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F})$ sia definito q.c., si vorrebbe definire $Q(A,\omega)$ $\forall A$ evento, $\forall \omega\in\Omega$ t.c.:

$$1)\ A\longmapsto Q(A,\omega) \text{ é una probabilitá}$$
$$\text{e } Q(A,\omega)=\mathbb{E}(\mathbb{1}_A|\mathcal{F}) \text{ q.c. } \forall\omega$$
$$2)\ \omega\longmapsto Q(A,\omega) \text{ é } \mathcal{F}\text{-misurabile } \forall A$$

L'esistenza di tale $Q:\mathcal{A}\times\Omega\longrightarrow[0,1]$ NON é garantita: dipende da $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$

Siano X,Y v.a. ind. e $f(X,Y)\in\mathcal{L}^1$. Calcoliamo $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y)$:

$$\mathbb{E}(f(X,Y)|Y)=\varphi(Y) \quad \text{con} \quad \varphi(y)=\mathbb{E}(f(X,y))$$
$$(y \text{ parametro fissato})$$

Lo mostriamo assumendo X,Y ass. cont.; in tal caso si ha:

$$\varphi(y)=\int f(x,y)f_X(x)\,dx$$

Per verificare che $\mathbb{E}(f(X,Y)|Y)=\varphi(Y)$ dobbiamo mostrare che:

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_A\varphi(Y))=\mathbb{E}(\mathbb{1}_A f(X,Y)) \quad \forall A\in\sigma(Y)$$

$$\Rightarrow A\in\sigma(Y)\Leftrightarrow A=\{Y\in B\}\Rightarrow \mathbb{1}_A=\mathbb{1}_B(y)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(\mathbb{1}_A\varphi(y))=\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(y)\varphi(y))=\int\mathbb{1}_B(y)\varphi(y)f_Y(y)\,dy$$
$$=\iint\mathbb{1}_B(y)f(x,y)\underbrace{f_X(x)f_Y(y)}\,dx\,dy=\mathbb{E}(\mathbb{1}_B(y)f(X,Y))$$
$$=\mathbb{E}(\mathbb{1}_A f(X,Y)) \qquad = f_{X,Y}(x,y) \ (X,Y \text{ indipendenti})$$

Usando tale dimostrazione si deduce che se (X,Y) é un vettore ass. cont. (o discreto) allora:

$$\mathbb{E}\left(g(X,Y) \mid Y \right) = \varphi(Y)$$

con:

$$\varphi(y) = \int g(x,y) \, f_{X|Y}(x|y) \, dx$$

<u>esercizio:</u>

Siano X, Y, Z v.a. reali t.c.:

1) $X \sim Unif(0,1)$

2) $f_{Y|X}(y|x) = \begin{cases} (y-x)\, e^{-(y-x)} & \text{se } y > x,\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

3) $f_{Z|(X,Y)}(z|(x,y)) = \begin{cases} (y-x)\, e^{-z(y-x)} & z>0,\ y > x,\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

a) Calcolare la densità congiunta di (X, Y, Z)

b) " " " di Z

c) " $f_{(X,Y)|Z}((x,y)|z)$

d) " $\mathbb{E}(\sqrt{Y-X} \mid Z)$, $\mathbb{E}(\sqrt{Y-X})$

<u>Sol.:</u>

a) $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = f_{Z|(X,Y)}(z|(x,y))\, f_{X,Y}(x,y)$

$= f_{Z|(X,Y)}(z|(x,y))\, f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$

$= \begin{cases} (y-x)^2\, e^{-(z+1)(y-x)} & z>0,\ y>x,\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

b) $f_Z(z) = \iint f_{X,Y,Z}(x,y,z)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_x^{+\infty} (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} \, dy\, dx$

$\xrightarrow[u \in [0,+\infty)]{u = y-x} = \int_0^{+\infty} u^2 e^{-(z+1)u} \, du = \ldots\ldots = \frac{2}{(z+1)^3} \mathbb{1}_{(0,+\infty)}(z)$

c) $f_{(X,Y)|Z} = \frac{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}{f_Z(z)} = \begin{cases} \frac{(z+1)^3}{2} (y-x)^2 e^{-(z+1)(y-x)} & z>0,\ y>x,\ x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

d) $\mathbb{E}\left(\sqrt{Y-X} \mid Z\right) = \varphi(Z)$ con:

$\varphi(z) = \int \sqrt{y-x}\, f_{(X,Y)|Z}((x,y)|z)\, dx\, dy = \ldots = 8$

ovvero $\mathbb{E}\left(\sqrt{Y-X} \mid Z\right) = 8$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left(\sqrt{Y-X}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\sqrt{Y-X} \mid Z\right)\right) = 8$