Catene di Markov - Esercizi

1) Sia $(X_n)_{n\geq 0}$ una CM omogenea su E finito, sia F insieme finito, $f: E \to F$. Poniamo $Y_n := f(X_n)$. Assumiamo che $\forall y \in F,\ x \in E$ $\mathbb{P}(f(X_{n+1}) = y \mid X_n = x)$ dipenda da x solo attraverso $f(x)$, ovvero $\exists\, g: F \times F \to [0,1]$ t.c.:

$$\mathbb{P}(f(X_{n+1}) = y \mid X_n = x) = g(f(x), y)$$

Allora Y_n è una CM omogenea con matrice di transizione

$$G = (g(z,y))_{z,y\in F}$$

Sol.:

$$\mathbb{P}(Y_{n+1} = y \mid Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0) = \frac{\mathbb{P}(Y_{n+1} = y, Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0)}{\mathbb{P}(Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0)}$$

$$= \frac{\sum_{x: f(x) = z} \mathbb{P}(Y_{n+1} = y, X_n = x, Y_{n-1} = y_{n-1}, \dots, Y_0 = y_0)}{\mathbb{P}(Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0)}$$

$$\{Y_n = z\} = \bigcup_{\substack{x \in E: \\ f(x) = z}} \{X_n = x\}$$

$$= \frac{\sum_{x: f(x) = z} \mathbb{P}(Y_{n+1} = y \mid X_n = x, \dots, Y_0 = y_0) \cdot \mathbb{P}(X_n = x, \dots, Y_0 = y_0)}{\mathbb{P}(Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0)}$$

$$= \sum_{x: f(x) = z} \frac{\overbrace{\mathbb{P}(Y_{n+1} = y \mid X_n = x)}^{g(z,y)} \cdot \mathbb{P}(X_n = x, \dots, Y_0 = y_0)}{\mathbb{P}(Y_n = z, \dots, Y_0 = y_0)} = g(z,y)$$

Proprietà di Markov generalizzata

e si conclude

$\square$