SPAZI MISURABILI - ESERCIZI

1) Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, mostrare che é misurabile

Sol:

Basta mostrare che $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\forall A \in \mathcal{C}$ dove $\mathcal{C}$ é una qualunque famiglia di insiemi che genera $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Scegliamo $\mathcal{C} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}$.

Dato $A = (-\infty, x]$, si ha:

$y \in f^{-1}(A) \Rightarrow f(y) \leq x$, se $z < y \Rightarrow f(z) \leq f(y) \leq x$
$\Rightarrow z \in f^{-1}(A) \Rightarrow f^{-1}(A)$ é di una delle seguenti forme:

$$(-\infty, y), \ (-\infty, y], \ \mathbb{R}$$

Tutti e 3 sono intervalli Boreliani $\in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\square$

---

2) Dati E insieme non numerabile, $\mathcal{C} = \{\{x\} : x \in E\}$, descrivere $\sigma(\mathcal{C})$:

Sol:

Considero $\mathcal{A} = \{A \subseteq E : A$ é finito o numerabile $\vee$ A^c é finito o numerabile $\}$, facilmente si ha che $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. Per mostrare che $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$ basta dim. che $\mathcal{A}$ é σ-algebra:

1) $E \in \mathcal{A}$ (ovvio, $E^c = \emptyset$ é finito)
2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (per definizione di $\mathcal{A}$)
3) Dati $(A_n) \subseteq \mathcal{A}$, si ha:

- se almeno 1 degli A_n é t.c. A_n^c é finito o numerabile, $\bigcup_m A_m \supseteq A_n \Rightarrow (\bigcup_m A_m)^c \subseteq A_n^c$ $\Rightarrow \bigcup_m A_m$ é finito o numerabile $\Rightarrow \bigcup_m A_m \in \mathcal{A}$
- se tutti gli A_n sono finiti o numerabili si ha che $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ é finita o numerabile $\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$