es. 1) Classificare tutti i sottogruppi normali di S_3:

$\Rightarrow S_3 = \{(), (1\,2), (1\,3), (2\,3), (1\,2\,3), (1\,3\,2)\}$

Dal Teorema di Lagrange sappiamo che i sottogruppi di S_3 hanno ordine t.c. è divisore di $|S_3| = 3! = 6$

$\Rightarrow$ i sottogruppi di S_3 possono avere ordine 1, 2, 3, 6

$\Rightarrow$ procediamo quindi caso per caso:

- Cardinalità 1: $\{()\}$
- Cardinalità 6: S_3
- Cardinalità 2:

Sicuramente contiene $()$, poi possiamo scegliere a t.c. $a^2 = ()$ (per essere sottogruppo, deve essere chiuso rispetto a $\cdot$)

$\Rightarrow$ a deve essere una permutazione di lunghezza 2, quindi possiamo scegliere tra:

$$(1\,2) \Rightarrow (1\,2)^2 = ()$$
$$(1\,3) \Rightarrow (1\,3)^2 = ()$$
$$(2\,3) \Rightarrow (2\,3)^2 = ()$$

$\Rightarrow$ i sottogruppi di S_3 di cardinalità 2 sono:

$$\{(), (1\,2)\}, \{(), (1\,3)\}, \{(), (2\,3)\}$$

- Cardinalità 3:

Sicuramente contiene $()$, poi possiamo scegliere a t.c. $a^3 = ()$, $a^2 \neq () \neq a$ (ovvero a deve avere ordine 3)

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (1\,2\,3) \\ \Rightarrow (1\,3\,2) \end{array}\right\} \text{generano lo stesso sottogruppo:}$$

$$\{(),\ (1\ 2\ 3),\ (1\ 3\ 2)\}$$

Riassumendo si ha:

$$\begin{tikzcd}
 & & S_3 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{(),(12)\} \arrow[drr] & \{(),(13)\} \arrow[dr] & \{(),(23)\} \arrow[d] & \{(),(123),(132)\} \arrow[dl] \\
 & & \{()\} = \emptyset &
\end{tikzcd}$$

dove $A \longrightarrow B$ indica $B \subseteq A$

Si nota che i 3 sottogruppi di ordine 2 sono tutti ISOMORFI tra loro (ma sono 3 sottogruppi diversi):

$$\{(),(12)\} \cong \{(),(13)\} \cong \{(),(23)\}$$

Ora che abbiamo tutti i sottogruppi di S_3, cerchiamo quali tra loro sono normali:

N è normale in G se $\forall x \in N\ \forall g \in G\ \ gxg^{-1} \in N$

$\Rightarrow$ si verifica immediatamente che $()$, S_3 sono normali in S_3:

1) $g()g^{-1} = gg^{-1} = () \in S_3$ ✓

2) $gxg^{-1} \in S_3\ \ \forall x \in S_3$ ✓

$\Rightarrow$ $\{(),(12)\}$ è normale in S_3?

Data $(123) \in S_3$ si ha:

$$(1\,2\,3)(1\,2)(1\,2\,3)^{-1} = (1\,2\,3)(1\,2)(1\,3\,2) = (2\,3) \notin \{(),(12)\}$$

$\Rightarrow \{(),(1\ 2)\}$ NON è normale in S_3

$\Rightarrow$ analogamente, non sono normali nemmeno gli altri sottogruppi di ordine 2.

$\Rightarrow \{(),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$ è normale in S_3 ?

Dato $\sigma \in S_3$ e $(1\,2\,3) \in N$ calcoliamo:

$$\sigma \cdot (1\,2\,3) \cdot \sigma^{-1} \in N \,?$$

$$\Rightarrow \left(\sigma (1\,2\,3) \sigma^{-1}\right)^3$$
$$= \sigma(1\,2\,3)\sigma^{-1}\sigma(1\,2\,3)\sigma^{-1}\sigma(1\,2\,3)\sigma^{-1}$$
$$= \sigma(1\,2\,3)^3\sigma^{-1} \underset{\substack{\uparrow \\ (1\,2\,3)^3 = ()}}{=} () \in N$$

$\Rightarrow N = \{(),(1\,2\,3),(1\,3\,2)\}$ è normale in S_3

---

es.2) Sia G il gruppo delle Matrici reali 2×2 triangolari superiori con $\det \neq 0$ rispetto al prodotto matriciale. Dato $N = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ dim. che:

1) N è sottogruppo normale in G
2) G/N è abeliano.

$$\Rightarrow G = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in M(\mathbb{R})^{2\times 2} \mid ad \neq 0\right\}$$

1) Siano $B, C \in G$, calcoliamo BC, B^{-1}:

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & h \end{pmatrix} \Rightarrow BC = \begin{pmatrix} ae & af+bh \\ 0 & dh \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

Verifichiamo che N è sottogruppo:

$$AB^{-1} \in N \quad \forall A, B \in N$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow AB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -b+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N \ \checkmark$$

$$\Rightarrow Id \in N \Rightarrow N \text{ sottogruppo di } G \ \checkmark$$

Verifichiamo che N è normale:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow BAB^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & ax+b \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} \\ 0 & \frac{1}{d} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{ax}{d} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in N \Rightarrow N \text{ è normale in } G$$

2) Chi è G/N ?

$$G/N = \{ N \cdot G \mid G \in G \} = \left\{ \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\} \mid ad \neq 0 \right\}$$

$\Rightarrow$ siano $A, B \in G$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e & f \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow A \sim_N B \Leftrightarrow AB^{-1} \in N \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{a}{e} = \frac{d}{h} = 1$

$\Leftrightarrow a = e \wedge d = h$

$\Rightarrow A \sim_N B$ se e solo se A, B hanno la stessa diagonale.

Verifichiamo che G/N è abeliano:

$$\underset{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}}{N G_1} \cdot \underset{\begin{pmatrix} e & f \\ 0 & h \end{pmatrix}}{N G_2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{scegliamo un} \\ \text{rappresentante} \\ \text{furbo.}}}{=} N \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot N \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ N \text{ è normale} \\ \text{in } G}}{=} N \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow N G_1 \cdot N G_2 = \dots = N \begin{pmatrix} ae & 0 \\ 0 & dh \end{pmatrix} = N G_1 \cdot N G_2$$

$\Rightarrow G/N$ è abeliano.

---

es. 3) Si verifichi che $V = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \subseteq S_4$ è sottogruppo normale in S_4, che è abeliano, che non è ciclico.

Notiamo alcune cose:

1) $\sigma \in S_n$, $\tau \in S_n \Rightarrow \tau \sigma \tau^{-1} = \begin{pmatrix} \tau(1) & \dots & \tau(n) \\ \tau(\sigma(1)) & \dots & \tau(\sigma(n)) \end{pmatrix}$

se σ è un ciclo $(\sigma = (a_1 \dots a_r))$ si ha:

$$\tau \sigma \tau^{-1} = (\tau(a_1) \dots \tau(a_r))$$

<u>dim.:</u>

sia σ ciclo $\Rightarrow \tau \sigma \tau^{-1}(\tau(a_1)) = \tau \sigma(a_1) = \tau(a_2)$

$\tau \sigma \tau^{-1}(\tau(a_s)) = \tau(a_1)$ se $s = r$, $\tau(a_{s+1})$ se $s \neq r$

<u>q.e.d.</u>

2) Se G è un gruppo t.c. $\forall x \in G \quad x^2 = 1$, allora G è abeliano.

<u>dim.:</u>

Siano $a, b \in G \Rightarrow a^2 = 1 = b^2 = (ab)^2 = a^2 b^2$

$\Rightarrow (ab)^2 = a^2 b^2 \Rightarrow \cancel{a} b a \cancel{b} = \cancel{a} a b \cancel{b} \Rightarrow ba = ab$

<u>q.e.d</u>

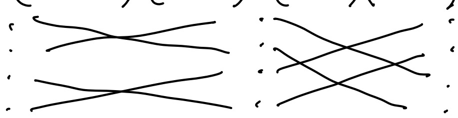
$\Rightarrow V = \{\underbrace{()}_{1}, \underbrace{(12)(34)}_{a}, \underbrace{(13)(24)}_{b}, \underbrace{(14)(23)}_{c}\}$ =: GRUPPO DI KLEIN

1) Verifichiamo che è sottogruppo:

V è finito $\Rightarrow$ V è sottogruppo se:

- $V \neq \emptyset \quad \checkmark$
- $\forall a, b \in V \quad ab \in V$

$\Rightarrow (12)(34)\,(13)(24) = (14)(23) \in V \quad \checkmark$



$\Rightarrow$ per simmetria si ha:

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

2) Verifichiamo che V è normale in S_4:

$\tau \in S_4 \Rightarrow \tau (12)(34) \tau^{-1} \in V$?

$\Rightarrow \tau (12) \tau^{-1} \tau (34) \tau^{-1} = (\tau(1)\,\tau(2))(\tau(3)\,\tau(4))$

prodotto di 2 cicli di lunghezza 2 disgiunti $\in V$!!!

$\Rightarrow \sigma(12)(34)\sigma^{-1} \in V \quad \forall \sigma \in S_4$

$\Rightarrow \sigma \tau \sigma^{-1} \in V \quad \forall \sigma \in S_4, \forall \tau \in V$

$\Rightarrow V$ è normale in G

3) Verifichiamo che V è abeliano:

$\Rightarrow$ segue da 2 $\left(\forall a \in V \quad a^2 = () \right)$

3) Verifichiamo che V NON è ciclico:

V ciclico $\Leftrightarrow \exists a \in V$ t.c. $V = \{(), a, a^2, a^3\}$

$\Rightarrow \forall a \in V \quad a^2 = () \Rightarrow V$ NON è ciclico.