Module CT.2407
Chaîne de Transmission Numérique

Lina Mroueh

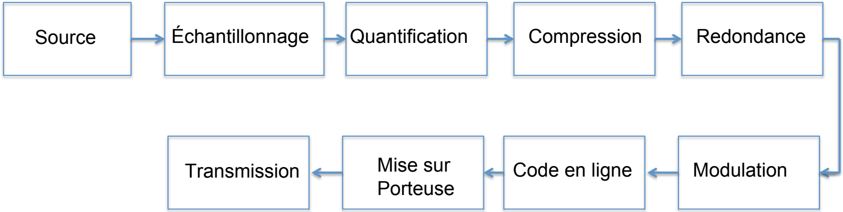
lina.mroueh@isep.fr

Institut Supérieur d'Electronique de Paris - Module CT.2407

Objectifs du cours

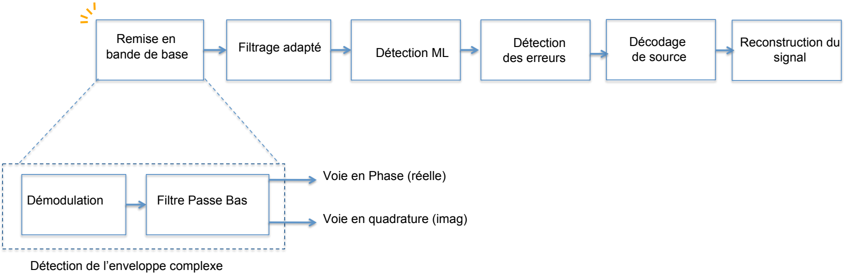
- Modélisation de la transmission numérique.
- Avoir un aperçu général sur la chaîne de transmission numérique.
- Établissement du lien entre le signal émis et le signal reçu lors d'une communication.

Emetteur



Source
Échantillonnage
Quantification
Compression
Redondance
Modulation
Code en ligne
Mise sur Porteuse
Transmission

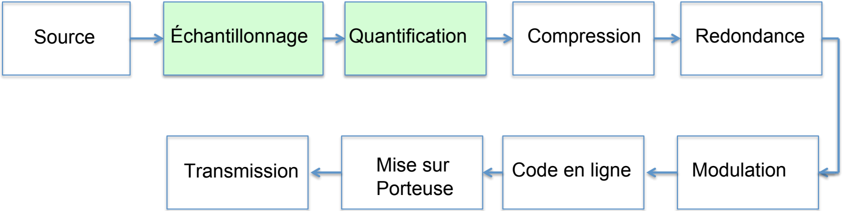
Récepteur


Remise en bande de base
Filtrage adapté
Détection ML
Détection des erreurs
Décodage de source
Reconstruction du signal
Démodulation
Filtre Passe Bas
Voie en Phase (réelle)
Voie en quadrature (imag)
Détection de l'enveloppe complexe

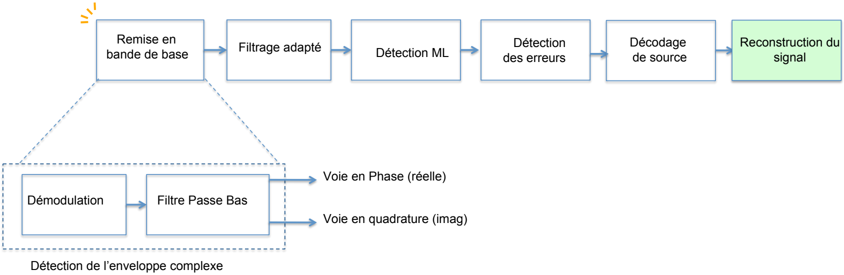
Part I

Numérisation et Quantification

Emetteur


Source
Échantillonnage
Quantification
Compression
Redondance
Modulation
Code en ligne
Mise sur Porteuse
Transmission

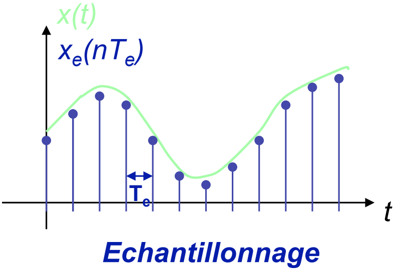
Récepteur


Remise en bande de base
Filtrage adapté
Détection ML
Détection des erreurs
Décodage de source
Reconstruction du signal
Démodulation
Filtre Passe Bas
Voie en Phase (réelle)
Voie en quadrature (imag)
Détection de l'enveloppe complexe

Numérisation d'un signal (1/)

Un signal analogique est numérisé en deux étapes:

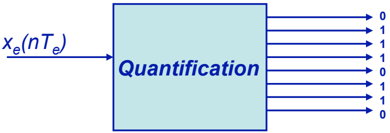
- **L'échantillonnage:**
  On prélève du signal analogique $x_a(t)$ des échantillons à des instants régulièrement espacés avec une période T_e ou une fréquence d'échantillonnage $F_e = \frac{1}{T_e}$. Le signal obtenu est discret.



Numérisation d'un signal (2/)

- **La quantification:**

on définit une grille de valeurs discrètes et on approxime chaque échantillon par l'une de ces valeurs discrètes. Chaque niveau de quantification est codé par un nombre entier sur b bits.



Echantillonnage: spectre d'un signal discret (1/)

- Le signal discret s'écrit:

$$x_e(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_e(nT_e)\delta(t - nT_e) = x_a(t) \star \sum_k \delta(t - kT_e)$$

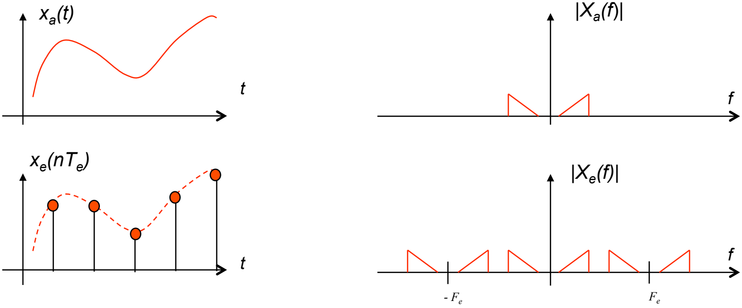
- La TF d'un signal discret $x_e(nT_e)$ est:

$$X_e(f) = \mathrm{FT}\{x_e(t)\} = \frac{1}{T_e} \sum_{n \in \mathbb{Z}} X_a\big(f - \frac{n}{T_e}\big)$$

- Le spectre d'un signal échantillonné est une fonction périodique de période $F_e = \frac{1}{T_e}$.

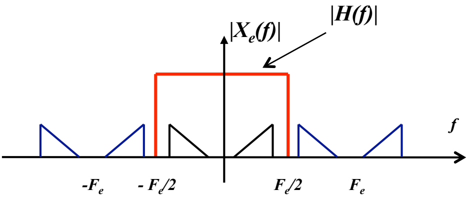
Echantillonnage: spectre d'un signal discret (2/)

- Le spectre d'un signal discret est la répétition du spectre du signal analogique autour des multiples de F_e



Echantillonnage: choix de la période d'échantillonnage

- Pour retrouver le spectre analogique à partir du spectre discret, il faudra isoler le spectre en bande de base en utilisant le filtre rectangle $H(f)$.



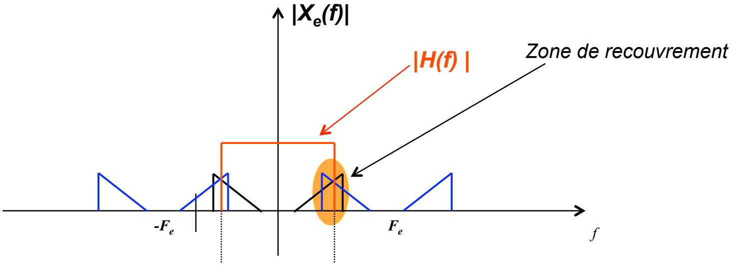
Theorem (Théorème de Shannon)

Un signal $x_a(t)$ qui ne comporte pas de composantes à des fréquences supérieures ou égales à une valeur f_{max} est entièrement déterminé par la suite de ses valeurs à des instants régulièrement espacés d'une durée

$$T_e \leq \frac{1}{2f_{max}}.$$

Echantillonnage: recouvrement de spectre

- Si le nombre d'échantillons n'est pas suffisant càd $T_e \geq \frac{1}{2f_{\text{max}}}$, le spectre du signal échantillonné se replie et aura un recouvrement de spectre.



Echantillonnage: reconstruction du signal

- Connaissant seulement la suite des échantillons prélevés à des instants nT_e avec T_e vérifiant le théorème de Shannon

  On peut **interpoler** la valeur du signal à n'importe quel instant t utilisant la relation:

$$\boxed{\hat{x}_a(t) \approx \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_e(nT_e)\,\mathrm{sinc}\left(\pi\left(\frac{t}{Te} - n\right)\right)}$$

Quantification

- Les échantillons sont approximés par une valeur multiple du pas de quantification q.
- Cette valeur discrète est codée par un nombre entier représenté sur b bits.
- Il y a donc $N_q = 2^b$ niveaux de quantification.
- Le pas de quantification

$$\boxed{q = \frac{\max_n x_e(nT_e) - \min_n x_e(nT_e)}{N_q - 1}.}$$

- La valeur quantifiée

$$\boxed{x_q(nT_e) = \text{valeur arrondie}\left(\frac{x_e(nT_e)}{q}\right) \times q.}$$

Erreur de la quantification

- A chaque instant nT_e, la valeur échantillonnée s'écrit en fonction de la valeur quantifié:

$$x_e(nT_e) = x_q(nT_e) + e(nT_e)$$

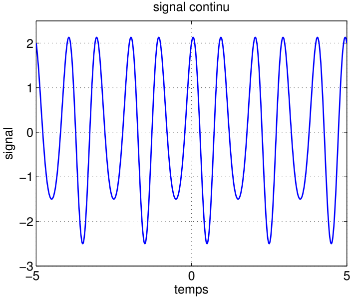
avec e est une erreur de quantification aléatoire uniformément répartie sur $[-\frac{q}{2}; +\frac{q}{2}]$.

- La puissance de l'erreur de quantification est alors:

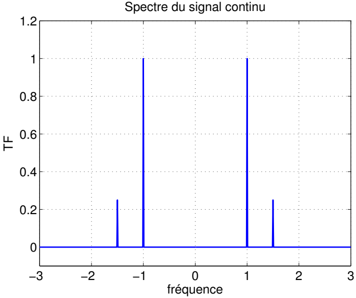
$$\boxed{P_e(\text{Watt}) = \frac{q^2}{12}.}$$

Exemple de numérisation d'un signal continu (1/)

- Signal continu $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + B\sin(2\pi f_1 t)$, avec $A = 2$, $B = 0.5$, $f_0 = 1$ et $f_1 = 1.5$.



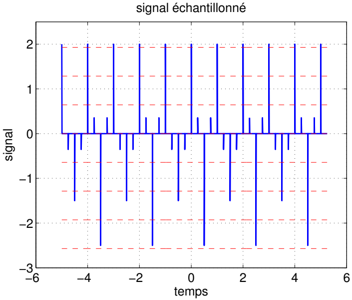
Signal continu



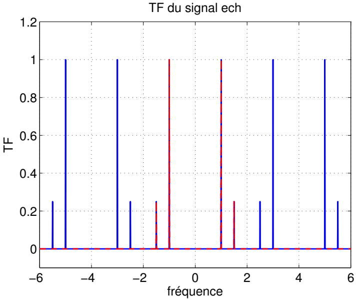
Spectre du signal

Exemple de numérisation: Echantillonnage (2/)

- Période d'échantillonnage $T_e = 0.25$ s et $F_e = 4$ Hz.



Signal échantillonné



Spectre qui se répète autour de $F_e = 4$ Hz.

Exemple de numérisation: Quantification sur $b = 3$ bits (3/)

- Pour $b = 3$, le nombre de niveaux de quantification est $N_q = 2^b = 8$.

- Le pas de quantification $q = 0.65$

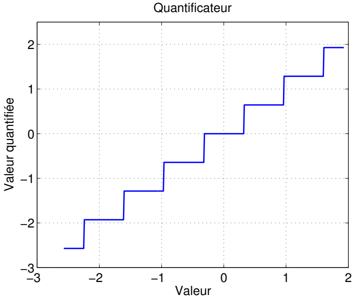
- Grille de quantification $N_1, \ldots, N_8$ tel que:

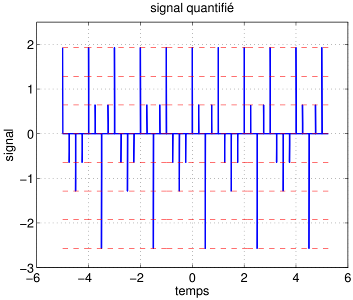
$$N_{k+5} = kq$$

  avec $k = -4, -3, \ldots, +3$.

- Puissance de l'erreur de quantification: $P = \frac{q^2}{12} = 0.034$ watt ou -15 dB

Exemple de numérisation: Quantification (4/)



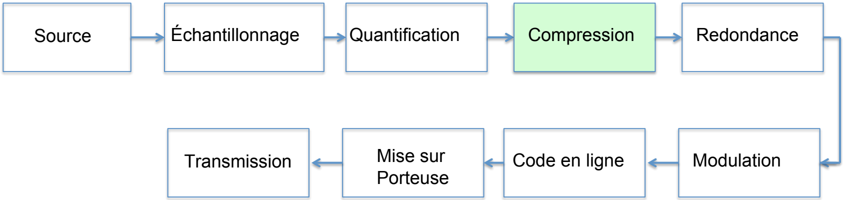


☞ Signal quantifié: $N_8, N_4, N_3, N_4, N_8, N_6, N_1, \ldots$

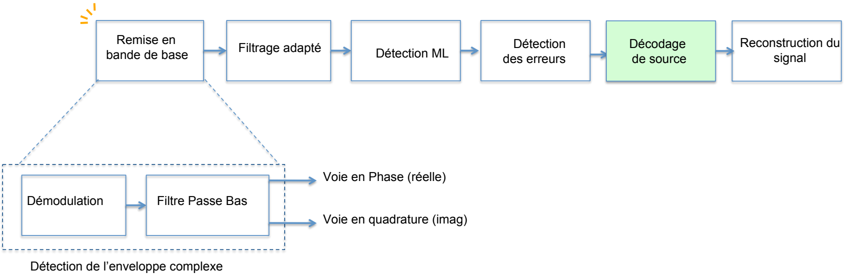
Part II

Compression des données

Emetteur


Source
Échantillonnage
Quantification
Compression
Redondance
Modulation
Code en ligne
Mise sur Porteuse
Transmission

Récepteur


Remise en bande de base
Filtrage adapté
Détection ML
Détection des erreurs
Décodage de source
Reconstruction du signal
Démodulation
Filtre Passe Bas
Voie en Phase (réelle)
Voie en quadrature (imag)
Détection de l'enveloppe complexe

Codage de source

- La compression des données ou le codage de source est le processus permettant d'encoder les informations en utilisant un nombre de bits minimal.

- La compression réduit les coûts d'utilisation des ressources de stockage de données comme les disques durs ou bien la bande passante de transmission.

- Exemple de codage de source: Fano-Shannon coding, Huffman coding, Arithmetic coding, vector coding, ...

- Le principe de compression est simple: Si la probabilité d'occurrence d'une valeur quantifiée est élevée, cette valeur doit être codée avec un nombre minimal de bits.

Notions sur l'entropie (1/)

- Soit X une variable aléatoire discrète qui prend des valeurs dans un ensemble fini $\mathcal{A} = \{x_1, \ldots, x_M\}$ avec une probabilité $p(x_i) = \text{Prob}\{X = x_i\}$.

- La fonction $h(x)$ mesure le **degré de surprise** sur la réalisation de l'événement $X = x$

$$h(x) = \log_2 \frac{1}{p(x)}.$$

- Si $p(x) = 0 \Rightarrow h(x) \to \infty$: La réalisation d'un événement irréalisable est **très surprenante**.

- If $p(x) = 1 \Rightarrow h(x) \to 0$: La réalisation d'un événement réalisable n'est **pas du tout surprenante**.

Notions sur l'entropie (2/)

- **Entropie**: L'entropie est définie par la moyenne sur toutes les valeurs x_i telle que:

$$H(X) = \mathbb{E}\left[h(x)\right] = \sum_{i=1}^{M} p(x_i) \log_2 \frac{1}{p(x_i)}.$$

- Cette quantité mesure la valeur moyenne sur le **degré de surprise** ou bien **l'incertitude d'information** sur la réalisation de X.

- La variable aléatoire uniforme est la variable qui possède la plus grande entropie parmi toutes les variables aléatoires.

- Pour une variable uniforme discrète X qui prend M valeurs, l'entropie est égale à $\log_2 M$ et,

$$H(x) \leq \log_2 M \quad \forall p(x).$$

Taux de codage moyen et entropie

- Soit S une source pouvant générer M symboles $x_1, x_2, \ldots, x_M$ avec une probabilité $p_1, p_2, \ldots, p_M$. Chaque symbole x_i est codé avec un vecteur c_i de bits de longueur ℓ_i.

- Le débit moyen est,

$$R = \sum_{i=1}^{M} p_i \ell_i.$$

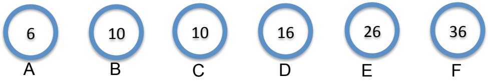
- **Borne sur R**: Le débit moyen est encadré par

$$H \leq R \leq H + 1$$

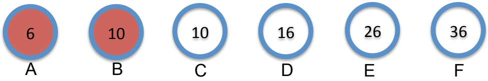
- **Objectif principal**: Compresser les informations afin d'obtenir le plus petit débit R possible.

Algorithme de Huffman: Différentes étapes (1/)

- **Etape 0:** Ordonner par ordre croissant les différents caractères suivant leurs occurrences.



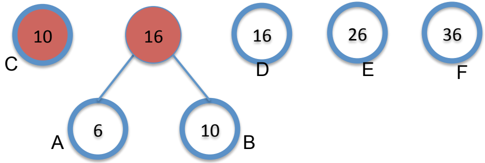
- **Etape 1:** Choisir les deux noeuds ayant la plus faible occurrence.



Algorithme de Huffman: Différentes étapes (2/)

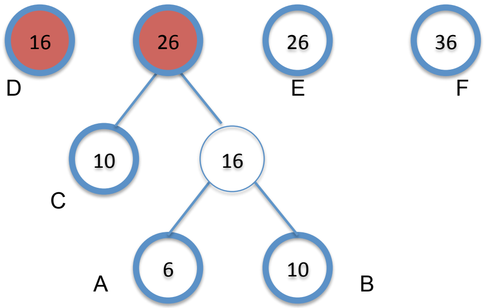
- **Etape 2:** Former le noeud parent en additionnant l'occurrence des deux noeuds avec la plus faible occurrence.

  Le noeud parent remplace les noeuds fils. Répéter Etape 0 et 1.



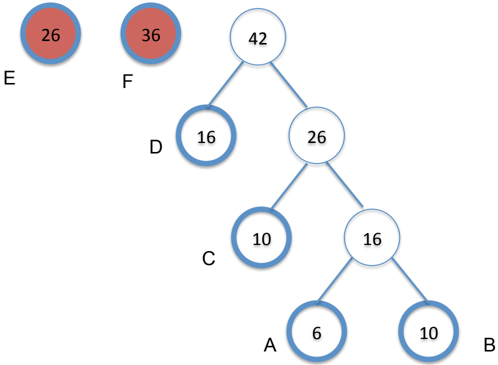
Algorithme de Huffman: Différentes étapes (3/)

- Répéter Etape 2 et puis Etapes 0 et 1



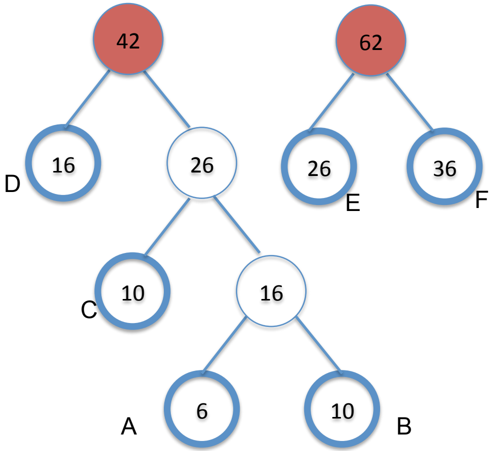
Algorithme de Huffman: Différentes étapes (4/)

- Répéter Etape 2 et puis Etapes 0 et 1



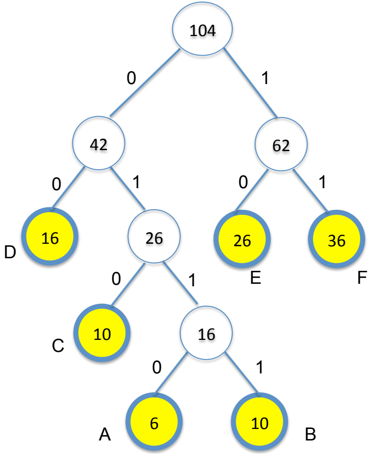
Algorithme de Huffman: Différentes étapes (5/)

- Répéter Etape 2 et puis Etapes 0 et 1



Algorithme de Huffman: Différentes étapes (6/)

- **Etape 3:** Annotation de l'arbre: Gauche $\rightarrow$ 0 et Droite $\rightarrow$ 1.
  A $\rightarrow$ 0110; B $\rightarrow$ 0111; C $\rightarrow$ 010; D $\rightarrow$ 00; E $\rightarrow$ 10; F $\rightarrow$ 11



Rate, Entropie et Codage Uniforme (1/)

- L'entropie $H = \sum_{n=1}^{6} p_i \log_2 \frac{1}{p_n}$ avec p_n est la probabilité d'occurrence de la n$^{\text{ième}}$ lettre:

$$p_n = \frac{\text{nb occurrence de la lettre n}}{\text{nb total d'occurrence}}$$

  Dans ce cas, $H = 2.333$.

- Un codage uniforme utilise le même nombre de bits pour représenter chaque caractère indépendamment de son occurrence.

  Pour $M = 6$ caractères différents, on a besoin de $\lceil \log_2 M \rceil$ bits par caractère soit 3 bits/caractère.

- Pour le codage de Huffman, plus la probabilité d'occurrence du caractère est élevée, plus la longueur de la séquence binaire est faible.

  Par exemple, 2 bits sont utilisés pour représenter la lettre F qui est très fréquente alors qu'on se permet de représenter la lettre A qui n'est pas très fréquente par 4 bits.

Rate, Entropie et Codage Uniforme (2/)

Niveaux	Occurrence	Uniforme	$\ell_{i,\text{uniforme}}$	Huffman	$\ell_{i,\text{Huffman}}$
A	6	000	3	0110	4
B	10	001	3	0111	4
C	10	010	3	010	3
D	16	011	3	00	2
E	26	100	3	10	2
F	36	101	3	11	2
Total	**104**		**312**		**250**
Taux			**3**		**2.4**

Rate, Entropie et Codage Uniforme (3/)

- La longueur totale de la chaîne pour le code uniforme est:

$$\ell_{\text{uniforme}} = 6 \times 3 + 10 \times 3 + 10 \times 3 + 16 \times 3 + 26 \times 3 + 36 \times 3 = 312 \text{ bits}$$

- Le taux de codage uniforme est le nombre de bits moyen par caractère:

$$R_{\text{uniforme}} = \frac{\ell_{\text{uniforme}}}{\text{Total de caractère}} = \frac{312}{104} = 3 \text{ bits/caractère}$$

- La longueur totale de la chaîne pour le code de Huffman est:

$$\ell_{\text{Huffman}} = 6 \times 4 + 10 \times 4 + 10 \times 3 + 16 \times 2 + 26 \times 2 + 36 \times 2 = 250 \text{ bits}$$

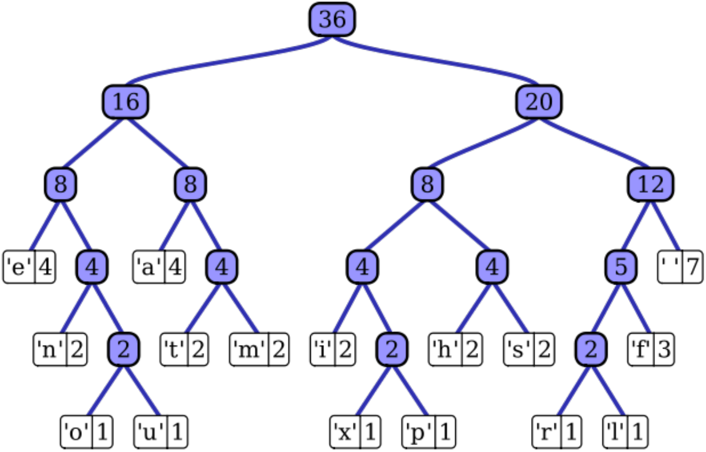
  La même information est représentée mais avec un nombre de bits comprimés.

- Le taux de codage de Huffman est le nombre de bits moyen par caractère:

$$R_{\text{Huffman}} = \frac{\ell_{\text{Huffman}}}{\text{Total de caractère}} = \frac{250}{104} = 2.4 \text{ bits/caractère}$$

- Dans les deux cas, $H = 2.33 \leq R \leq H + 1 = 3.333$

Huffman coding: exemple (1/)



codage de Huffman appliqué à la phrase: "this is an example of a huffman tree".

Huffman coding: exemple (2/)

- Les symboles seront ainsi codés par,

Occurrence	Lettre	$\rightarrow$	Code Huffman	longueur
1	*o*	$\rightarrow$	00110	5
1	*u*	$\rightarrow$	00111	5
1	*x*	$\rightarrow$	10010	5
1	*p*	$\rightarrow$	10011	5
1	*r*	$\rightarrow$	11000	5
1	*l*	$\rightarrow$	11001	5
2	*n*	$\rightarrow$	0010	4
2	*t*	$\rightarrow$	0110	4
2	*m*	$\rightarrow$	0111	4
2	*i*	$\rightarrow$	1000	4
2	*h*	$\rightarrow$	1010	4
2	*s*	$\rightarrow$	1011	4
3	*f*	$\rightarrow$	1101	4
4	*e*	$\rightarrow$	000	3
4	*a*	$\rightarrow$	010	3
7	$' \; '$	$\rightarrow$	111	3

Huffman coding: exemple (3/)

- La longueur de la séquence codée est

$$\ell_{\text{Huffman}} = 6 \times 5 + 6 \times 4 \times 2 + 3 \times 4 + 2 \times 4 \times 3 + 7 \times 3 = 135\text{bits}$$

Le taux de codage de source est le nombre moyen de bits par lettre:

$$R = \frac{135}{36} = 3.75$$

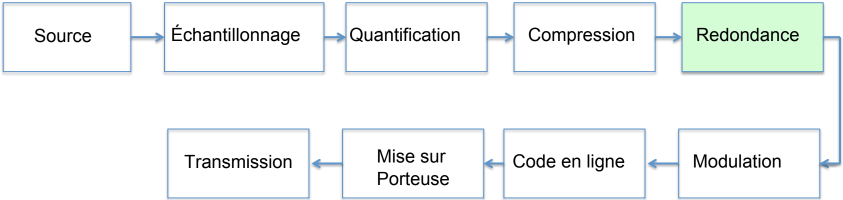
- On a 16 lettres différentes en total. Un codage uniforme utilise 4 bits / lettre. La longueur est:

$$\ell_{\text{uniforme}} = 36 \times 4 = 144\text{bits} > \ell_{\text{Huffman}}$$

Part III

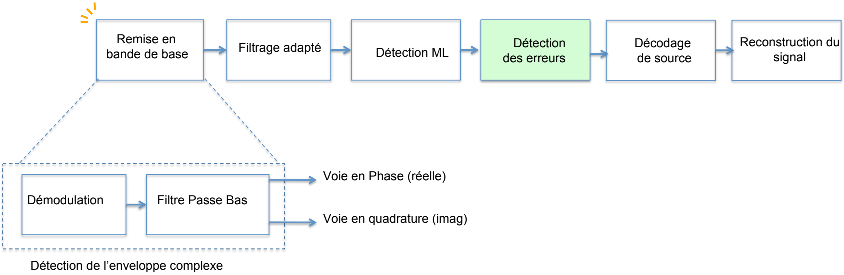
Redondance et protection

Emetteur



Source
Échantillonnage
Quantification
Compression
Redondance
Modulation
Code en ligne
Mise sur Porteuse
Transmission

Récepteur


Remise en bande de base
Filtrage adapté
Détection ML
Détection des erreurs
Décodage de source
Reconstruction du signal
Démodulation
Filtre Passe Bas
Voie en Phase (réelle)
Voie en quadrature (imag)
Détection de l'enveloppe complexe

Chaîne de transmission

- L'entrée de l'encodeur est un flux de bits $\underline{I}$ de longueur k. Cet encodeur rajoute de la redondance à ce flux de données et génère un flux de bits $\underline{X}$ de longueur $n \geq k$.

- Le taux de codage est
$$R = \frac{k}{n} \leq 1$$

- La probabilité d'erreur est la probabilité que le message transmis soit différent du message décodé,
$$P_e = \text{Prob}\{\underline{I} \neq \underline{J}\}.$$

Théorème de Shannon

- **Théorème de Shannon** (1948):

  Sur un canal sans fil de capacité C (b/s/Hz), il est possible de transmettre d'une façon fiable un débit $R < C$ en utilisant des codes correcteurs d'erreur qui minimisent la probabilité d'erreur.

- Exemples de codes correcteurs d'erreur:

  code de répétition, codes de parité, codes en blocs, codes convolutionnels, turbo codes, LDPC codes, ...

- **Représentation générale**:

  Un schéma de codage est représenté par $\mathcal{C}(n, k)$,

$$(b_1, b_2, \ldots, b_k) \rightarrow (c_1, c_2, \ldots, c_n), \quad b_i, c_j \in \{0, 1\}.$$

Propriétés: Algèbre linéaire

- Le **poids de Hamming** d'un vecteur binaire x est, $w_{\mathrm{H}}(x)$ est égal au nombre des bits non-nuls.

  Exemple: $w_{\mathrm{H}}(0101011) = 4$.

- La **distance de Hamming** entre deux vecteurs binaires x et y est,

  $$d_{\mathrm{H}}(x, y) = w_{\mathrm{H}}(x \oplus y),$$

  avec $\oplus$ est la somme binaire

  Exemple: $d_{\mathrm{H}}(0101011, 1101011) = w_{\mathrm{H}}(1000000) = 1$.

- Sur un canal binaire symétrique, la distance de Hamming représente le nombre de bits erronés.

Codage de canal: caractéristiques générales (1/)

- Dans la liste de tous les mots de codes possibles $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ de longueur 2^n, il existe seulement 2^k mot de codes qui représente l'information.

- Les $2^n - 2^k$ mots de codes restants sont utilisés pour corriger ou bien pour détecter les erreurs.

- Le code correcteur d'erreur est caractérisé par d_{min} qui est la **distance de Hamming minimale** entre tous les mots de codes.

- Le code correcteur d'erreur a une capacité limitée de correction.

Codage de canal: distance minimale (3/)

- On appelle code la liste des 2^k combinaisons autorisés sur n bits. Le code est appelé aussi dictionnaire des mots de code.

- La distance minimale d'un code linéaire est définie par:

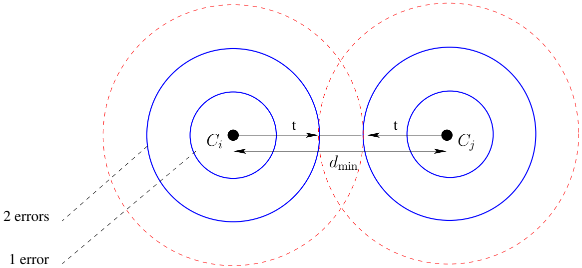
$$\begin{aligned} d_{\min} &= \min_{(x \neq y) \in \text{Code}} d_{\mathbb{H}}(x, y) \\ &= \min_{(x \neq y) \in \text{Code}} \omega_{\mathbb{H}}(x \oplus y) \\ &= \min_{(z \neq 0) \in \text{code}} \omega_{\mathbb{H}}(z). \end{aligned}$$

  On rappelle que pour un code linéaire, si $x \in$ Code et $y \in$ Code, alors $(x \oplus y) \in$ Code.

- Connaissant le dictionnaire des mots codés, il suffit de trouver le poids de Hamming de chaque mot de code. La distance minimale est alors:

$$\boxed{d_{\min} = \min_{(z \neq 0) \in \text{code}} \omega_{\mathbb{H}}(z).}$$

Codage de canal: caractéristiques générales (3/)



Le code corrige t erreurs si et seulement si $d_{\text{min}} \geq 2t + 1$.

- **Capacité de correction**

$$\boxed{t = \left\lfloor \frac{d_{\text{min}} - 1}{2} \right\rfloor \text{ erreurs}}$$

- **Capacité de détection**

$$\boxed{d = d_{\text{min}} - 1 \text{erreurs}}$$

Codes intuitifs: Répétition et Parité

- Codes de répétition: $\mathcal{C}_r(4, 1, d_{\min})$

$$
\begin{array}{ccc}
0 & \to & 0000 \\
1 & \to & 1111
\end{array}
$$

- Code de parité: $\mathcal{C}_p(4, 3, d_{\min})$

$$
\begin{array}{ccc}
000 & \to & 000\textcolor{blue}{0} \\
001 & \to & 001\textcolor{blue}{1} \\
010 & \to & 010\textcolor{blue}{1} \\
011 & \to & 011\textcolor{blue}{0} \\
100 & \to & 100\textcolor{blue}{1} \\
101 & \to & 101\textcolor{blue}{0} \\
110 & \to & 110\textcolor{blue}{0} \\
111 & \to & 111\textcolor{blue}{1}
\end{array}
$$

Codes intuitifs: Répétition et Parité

✎ Trouver le taux de codage R, d_{min} ainsi que la capacité de correction et détection des deux codes $\mathcal{C}_r$ and $\mathcal{C}_p$.

- Taux de codage: $R_{\text{répétition}} = \frac{1}{4}$ et $R_{\text{parité}} = \frac{3}{4}$.
- Distance de Hamming minimale: $d_{\text{min,rép}} = 4$ et $d_{\text{min,parité}} = 2$.
- Le code de répétition corrige 1 erreur et détecte 3 erreurs. Le code de parité corrige 0 erreur et détecte 1 erreur.

Code de Hamming

- Le code de Hamming génère pour 4 bits d'entrée 7 bits tel que:

$$(b_0, b_1, b_2, b_3) \rightarrow (b_0, b_1, b_2, b_3, b_0 \oplus b_1 \oplus b_2, b_1 \oplus b_2 \oplus b_3, b_0 \oplus b_1 \oplus b_3)$$

- **Hamming code:**

0000	$\rightarrow$	0000000	1000	$\rightarrow$	1000101
0001	$\rightarrow$	0001011	1001	$\rightarrow$	1001110
0010	$\rightarrow$	0010110	1010	$\rightarrow$	1010011
0011	$\rightarrow$	0011101	1011	$\rightarrow$	1011000
0100	$\rightarrow$	0100111	1100	$\rightarrow$	1100010
0101	$\rightarrow$	0101100	1101	$\rightarrow$	1101001
0110	$\rightarrow$	0110001	1110	$\rightarrow$	1110100
0111	$\rightarrow$	0111010	1111	$\rightarrow$	1111111

Code de Hamming (2/)

✎ Vérifier que le dictionnaire du code correspond bien à la définition du code de Hamming. Trouver le taux de codage R, d_{min} ainsi que la capacité de correction et détection.

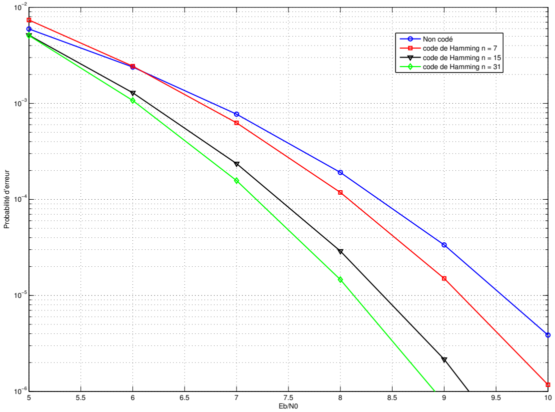
Décodage des codes linéaires en blocs

Recherche exhaustive:

- Les codes linéaires en blocs corrige $t = \lfloor \frac{d_{\text{min}}-1}{2} \rfloor$ erreurs.
- Etape 1: Vérifier si le mot reçu $\underline{y}$ appartient au code.
- Etape 2: Si non, trouver dans la liste de tous les mots de codes possibles celui qui est la distance de Hamming la plus petite avec $\underline{y}$, càd,

$$C_i^* = \arg\min_{C_i \in \mathcal{C}} d_H(C_i, \underline{y})$$

Taux d'erreur binaire

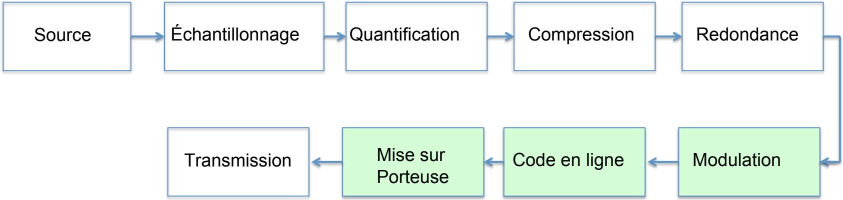


- La probabilité d'erreur diminue avec la longueur du code.

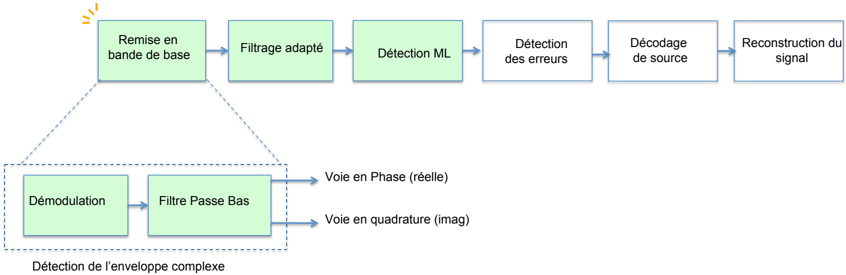
Part IV

Modulation mono-porteuse et démodulation

Emetteur


Source
Échantillonnage
Quantification
Compression
Redondance
Modulation
Code en ligne
Mise sur Porteuse
Transmission

Récepteur



Remise en bande de base
Filtrage adapté
Détection ML
Détection des erreurs
Décodage de source
Reconstruction du signal
Démodulation
Filtre Passe Bas
Voie en Phase (réelle)
Voie en quadrature (imag)
Détection de l'enveloppe complexe

Objectifs

- Emetteur - Modulation:

  Association d'une représentation physique à un message binaire.

  Différents types de modulation.

- Le signal modulé est transmis via une onde électromagnétique de pulsation $\omega_0 = 2\pi f_0$ avec f_0 est la fréquence porteuse de l'onde.

- Récepteur - Démodulation

  Retrouver le message binaire à partir du signal bruité modulé reçu.

Modulation numérique

- Le message binaire produit par une source d'information est une suite des 0 et 1.

- La modulation consiste à associer au message binaire un signal sinusoïdal continu dans le temps, ayant un spectre fini et centré autour d'une porteuse f_0.

- Pour une modulation numérique, un symbole d'information digital correspond à la variation du signal sinusoïdal sur une durée T.

- Un symbole digital se différencie d'un autre par trois critères: l'amplitude, la phase et la fréquence. Ce qui définit les trois types de modulation et les modulations hybrides.

Débit binaire et vitesse de modulation

- Le débit binaire D_b (b/s) est le nombre de bits transmis pendant une seconde, soit

$$\boxed{D_b = \frac{1}{T_b}}$$

avec T_b est le temps nécessaire pour transmettre un bit.

- On associe à chaque un paquet de q bits un symbole d'information de durée

$$T = qT_b.$$

- Le débit symbole ou bien la vitesse de la modulation, se mesure en **bauds** est,

$$\boxed{R = \frac{1}{T} = \frac{D_b}{q} = \frac{D_b}{\log_2 M}}.$$

Différents types de modulation et Terminologie

- **Modulation linéaire:**
  - Modulation d'amplitude: Binary Phase Shift Keying (BPSK),
    Pulse Amplitude Modulation (PAM).
  - Modulation de phase: Phase Shift Keying (PSK).
  - Modulation à quadrature d'amplitude: Quadratic Amplitude Modulation (QAM)
- **Modulation non linéaire:** Modulation de fréquence.
  - Frequency Shift keying (FSK).
  - Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM).

Différents types de modulations linéaires

1. Modulation BPSK
2. Modulation PAM
3. Modulation PSK
4. Modulation QAM

Différents types de modulation

Modulation BPSK ou PAM-2: définition

- BPSK = Binary Phase Shift Keying
  PAM-2 = modulation par Impulsion en Amplitude .

- 1 symbole d'information = 1 bit $\Rightarrow T = T_b$.

- Cette modulation associe à chaque bit a_k un symbole digital transmis entre kT et $(k+1)T$:

$$
\begin{array}{lcl}
a_k = 0 & \rightarrow & s_k(t) = -\cos(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t + \pi) \\
a_k = 1 & \rightarrow & s_k(t) = +\cos(2\pi f_0 t) = \cos(2\pi f_0 t + 0)
\end{array}
$$

- Le symbole module pour $kT \leq t \leq (k+1)T$ est tel que:

$$
\begin{aligned}
s_k(t) &= (2a_k - 1)\cos(2\pi f_0 t), && \leftarrow \text{Mod d'amplitude} \\
&= \cos(2\pi f_0 t + \pi(a_k - 1)), && \leftarrow \text{Mod de phase}
\end{aligned}
$$

Modulation PAM: variation d'amplitude

- On désigne par $\underline{h(t)}$ la fonction rectangle égale à $\underline{1}$ si $\underline{t \in [0, T]}$. d'où:

$$s_k(t) = \underbrace{(2a_k - 1)}_{\text{Amplitude}} \times \cos(2\pi f_0 t) h(t - kT).$$

- Signal modulé:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times \underbrace{\sum_k (2a_k - 1) h(t - kT)}_{x_b(t)}$$

avec $x_b(t)$ est le signal associé au message binaire en bande de base.

- On peut réécrire le message:

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times x_b(t)}$$

Modulation BPSK: variation de phase

- Identiquement, on peut distinguer les deux symboles correspondants à 0 et 1 grâce aux deux différentes phases 0 et π tel que:

$$s_k(t) = \cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_k\right) h(t - kT).$$

avec

$$\varphi_k(t) = \pi(a_k - 1)$$

- On peut réécrire le message:

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times x_b(t)}$$

avec

$$\boxed{x_b(t) = \sum_k (-1)^{a_k - 1} h(t - kT)}$$

est le signal associé au message binaire en bande de base.

Densité spectrale du signal modulé

- La Densité Spectrale de Puissance (DSP) du signal modulé en BPSK est:

$$\boxed{S_x(f) = \frac{1}{2}\Big(S_{x_b}(f+f_0) + S_{x_b}(f-f_0)\Big).}$$

- Le signal $x_b(t)$ est un signal pseudo-aléatoire dont la DSP est déterminée par la Formule de Benett et dépend du filtre de mise en forme utilisé.

- Pour le signal pseudo-aléatoire rectangulaire:

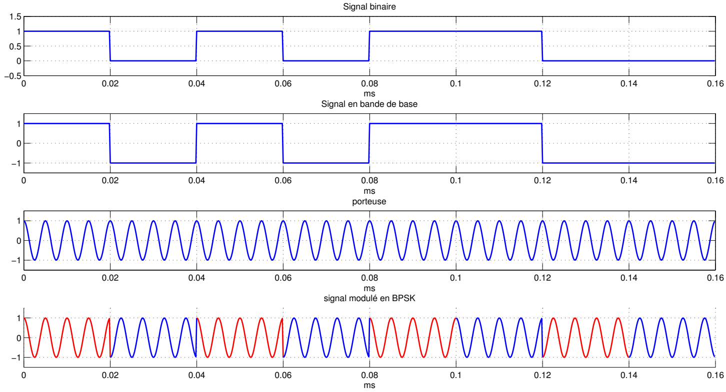
$$S_{x_b}(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(\pi f T).$$

- La majorité de l'énergie de ce signal est contenue dans le lobe principal. Le spectre de ce signal est illimité. Un filtre passe bas doit être utilisé pour limiter l'encombrement spectral.

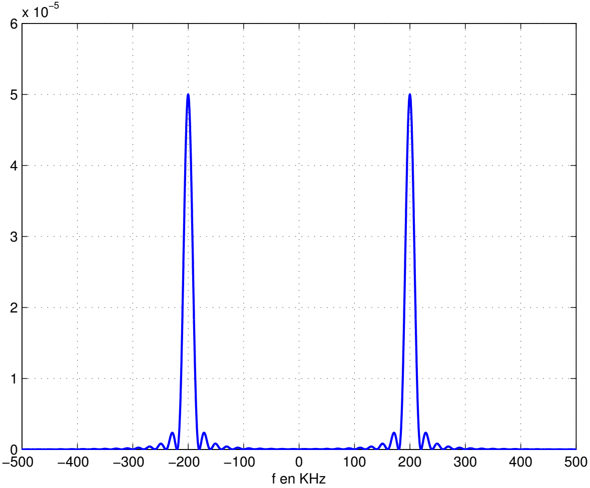
Exemple de modulation BPSK (1/)

- Chaque bit a une durée de 0.02 ms.
- Le débit binaire est $D_b = 50$ kbps.
- Lea fréquence porteuse est $f_0 = 200$ KHz.
- Un symbole d'information = 1 bit d'information. D'où $T = T_b = 0.02$ms.

Exemple de modulation BPSK (2/)



Exemple de modulation BPSK (3/)



Démodulation cohérente du signal BPSK (1/)

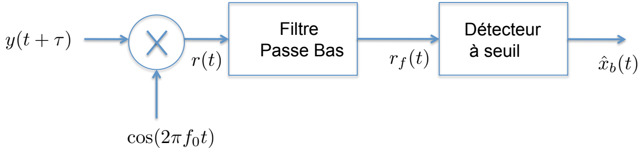
- Le but de la démodulation est de retrouver le signal en bande de base $x_b(t)$.
- Le message est reçu sur un canal bruité sans dispersion avec un retard de τ.

$$y(t) = \alpha x(t-\tau) + \text{bruit}$$

- Réception cohérente: Le décalage τ est connu

$$y(t+\tau) = \alpha x(t) + \underbrace{n(t)}_{\text{bruit}}$$

- Le schéma bloc du démodulateur est:



Démodulation cohérente du signal BPSK (2/)

- On multiplie le signal reçu par la porteuse $\cos(2\pi f_0 t)$:

$$\begin{aligned} r(t) = y(t+\tau)\cos(2\pi f_0 t) &= \alpha \cos^2(2\pi f_0 t) x_b(t) + b(t) \\ &= \frac{\alpha}{2}\Big(x_b(t) + x_b(t)\cos(4\pi f_0 t)\Big) + b(t) \end{aligned}$$

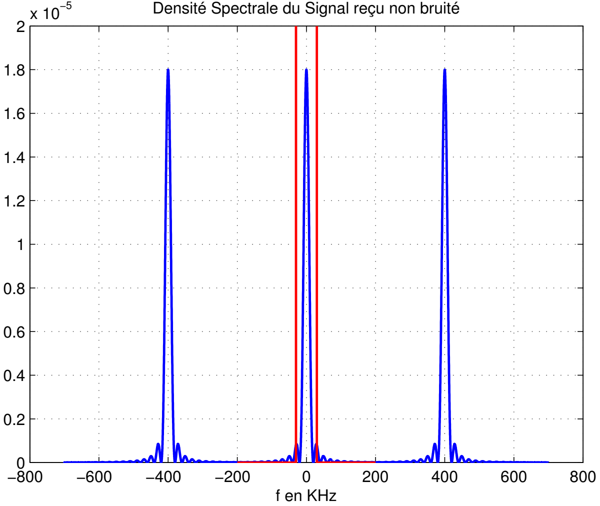
- La TF est alors

$$\mathrm{FT}\left\{r(t)\right\} = \frac{\alpha}{2} X_b(f) + \underbrace{\frac{\alpha}{4} X_b(f-2f_0) + \frac{\alpha}{4} X_b(f+2f_0)}_{\text{Elimination par filtrage}} + B(f)$$

- On utilise un filtre passe-bas pour éliminer les harmoniques autour de $2f_0$:

$$r_f(t) = \frac{\alpha}{2} x_b(t) + b_f(t)$$

DSP après démodulation



Estimation des symboles transmis (1/)

- En présence d'un bruit Gaussien normalisé, la règle de décision est:

$$\hat{x}_b = \begin{cases} +1 & \text{si } r_f > 0 \\ -1 & \text{si } r_f < 0 \end{cases}$$

Différents types de modulation

1. Modulation BPSK
2. Modulation PAM
3. Modulation PSK
4. Modulation QAM

Caractérisation de la modulation PAM (1/)

- Les bits sont regroupés par des paquets de q bits. Chaque série de q bits est représentée par des amplitudes E_i régulièrement espacées.

- La durée d'un symbole MAP est:
$$T = qT_b.$$

- Le symbole d'information correspondant aux bits transmis pendant une durée qT_b est alors:
$$s(t) = A_k \cos(2\pi f_0 t) \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$
avec
$$A_k \in \Big\{ -(M-1), -(M-3), \ldots, -1, +1, \ldots, +(M-3), +(M-1) \Big\} = \mathcal{A}$$
et $M = 2^q$.

Caractérisation de la modulation PAM (2/)

- Le signal modulé avec une modulation MAP de taille $M = 2^q$ est:

$$\boxed{x(t) = \cos(2\pi f_0 t) \times x_b(t)}$$

avec

$$x_b(t) = \sum_k A_k h(t - kT)$$

est le signal en bande de base dont les amplitudes A_k sont

$$A_k \in \Big\{ -(M-1), -(M-3), \ldots, -1, +1, \ldots, +(M-3), +(M-1) \Big\} = \mathcal{A}.$$

et $h(t)$ est la fonction rectangle égale à 1 pour $t \in [0, T]$.

Exemple de modulation MAP-4 (1/)

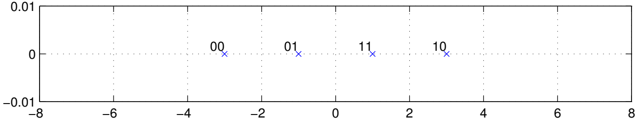
- Un symbole d'information = 2 bits d'information. Pour un débit binaire de 50 kb/s, le temps binaire est $T_b = 0.02$ ms et la durée d'un symbole est $T = 2T_b = 0.04$ms.

- Le signal est modulé autour d'une porteuse $f_0 = 200$ KHz.

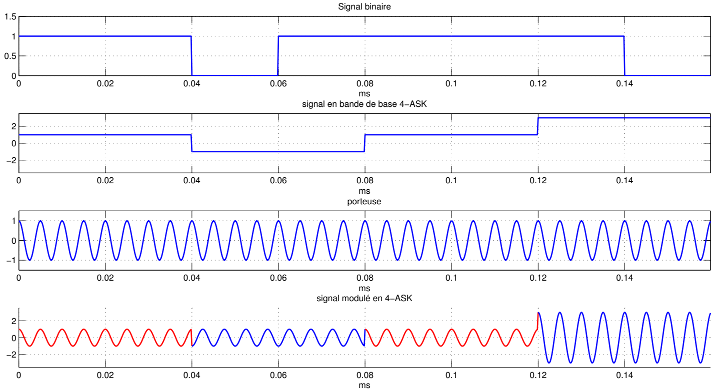
- Sur une durée de 0.04 ms, le symbole d'information est tel que:

$$\begin{array}{lcl} 00 & \rightarrow & s_k(t) = -3\cos(2\pi f_0 t) \\ 01 & \rightarrow & s_k(t) = -1\cos(2\pi f_0 t) \\ 11 & \rightarrow & s_k(t) = +1\cos(2\pi f_0 t) \\ 10 & \rightarrow & s_k(t) = +3\cos(2\pi f_0 t) \end{array}$$

- Constellation MAP-4:



Exemple de modulation MAP-4 (2/)



Codage de Gray

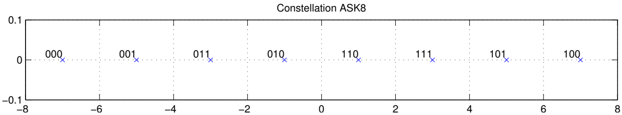
- Codage de Gray $\Rightarrow$1 seul bit change entre deux amplitudes adjacentes.
- Exemple de codage de Gray pour une MAP-8:

message	Amplitude
000	-7
001	-5
011	-3
010	-1
110	$+1$
111	$+3$
101	$+5$
100	$+7$

- Ce choix minimise le taux d'erreur par élément binaire.

Constellation MAP-8

- L'ensemble de toutes les valeurs des amplitudes possibles d'une modulation MAP s'appelle constellation $\mathcal{A}$.



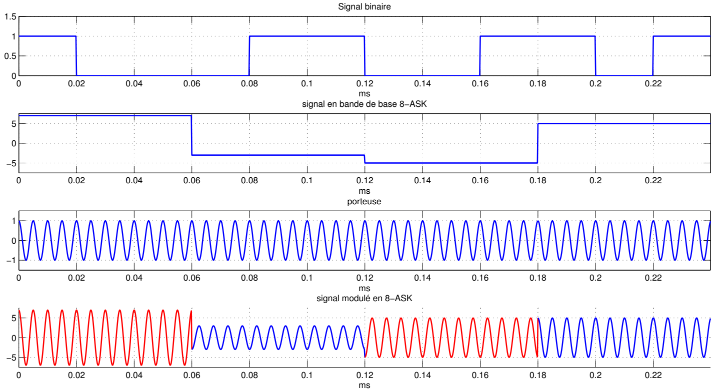
Constellation MAP-8

- L'énergie moyenne par symbole est alors:

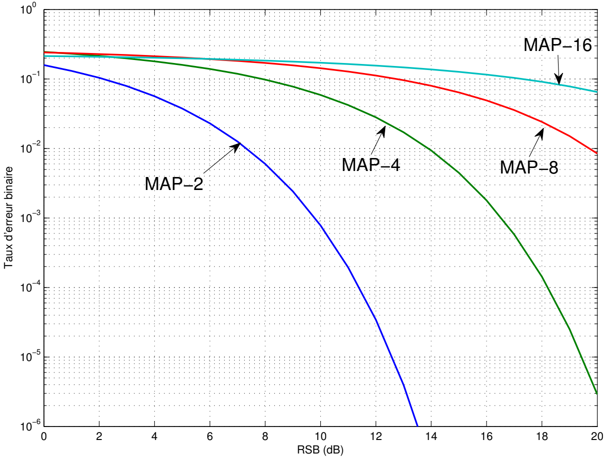
$$E_s = \frac{2}{M}\left(1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots (M-1)^2\right) = \frac{M^2-1}{3}$$

- Exemple: énergie MAP-8: Es = 21; MAP-4: Es = 5

Exemple de modulation MAP-8



Probabilité d'erreur



Différents types de modulation

Caractérisation de la modulation PSK (1/)

- Les bits sont regroupés par des paquets de q bits. Chaque série de q bits est représentée par une phase φ_i uniformément répartie entre 0 et 2π.

- La durée d'un symbole MAP est:
$$T = qT_b.$$

- Le symbole d'information correspondant au bits transmis pendant une durée qT_b est alors:
$$s(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \varphi_k) \qquad kT \leq t \leq (k+1)T$$
avec
$$\varphi_k = \varphi_0 + \theta_k; \qquad \theta_k \in \left\{0, \frac{2\pi}{M}, \ldots, \frac{2\pi(M-1)}{M}\right\} = \mathcal{A}$$
et $M = 2^q$.

Caractérisation de la modulation (2/)

- Le symbole d'information entre kT et $(k+1)T$ s'écrit:

$$s_k(t) = \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k) h(t - kT)$$

avec $h(t)$ est la fonction rectangle égale à 1 pour $t \in [0, T]$.

- Le signal modulé avec une modulation PSK de taille $M = 2^q$ est:

$$\boxed{x(t) = \sum_k s_k(t) = \text{Réel}\left\{x_b(t) e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

avec

$$x_b(t) = A \sum_k e^{j\varphi_k} h(t - kT) = x_p(t) + jx_q(t).$$

est le signal en bande de base appelé enveloppe complexe ayant une partie réelle $x_p(t)$ dite en phase et une partie imaginaire $x_q(t)$ dite en quadrature de phase.

Exemple de modulation PSK-4 (1/)

- Un symbole d'information = 2 bit d'information. Pour un débit de 50 kb/s, la durée d'un symbole est $T = 2T_b = 0.04$ms.

- Le signal est modulé autour d'une porteuse de $f_0 = 100$ kHz.

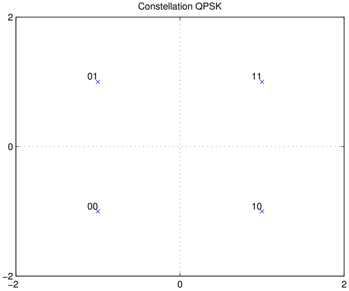
- Sur une durée de 0.04 ms, le symbole d'information est tel que:

$$\begin{aligned}
00 \quad &\rightarrow \quad s_k(t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{5\pi}{4}) \\
01 \quad &\rightarrow \quad s_k(t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{3\pi}{4}) \\
11 \quad &\rightarrow \quad s_k(t) = \cos(2\pi f_0 t + \frac{\pi}{4}) \\
10 \quad &\rightarrow \quad s_k(t) = \cos(2\pi f_0 t - \frac{\pi}{4})
\end{aligned}$$

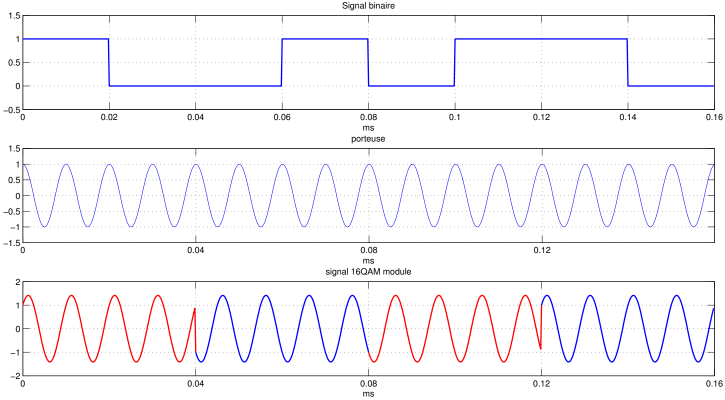
Exemple de modulation PSK-4 (2/)

- L’ensemble de toutes les phases possibles d’une modulation PSK s’appelle constellation.

- Représentation de la constellation PSK-4



Exemple de modulation PSK-4 (3/)



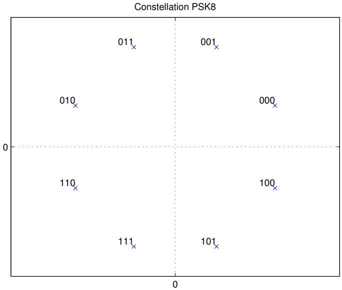
Modulation PSK8: Codage de Gray

- Codage de Gray $\Rightarrow$1 seul bit change entre deux phases adjacentes.
- Exemple de codage de Gray pour une PSK-8 avec $\varphi_0 = \frac{\pi}{8}$:

message	Phase
000	φ_0
001	$\varphi_0 + \frac{\pi}{4}$
011	$\varphi_0 + \frac{\pi}{2}$
010	$\varphi_0 + \frac{3\pi}{4}$
110	$\varphi_0 + \pi$
111	$\varphi_0 + \frac{5\pi}{4}$
101	$\varphi_0 + \frac{3\pi}{2}$
100	$\varphi_0 + \frac{7\pi}{4}$

- Ce choix minimise le taux d'erreur par élément binaire.

Constellation PSK8



Constellation PSK-8

- L'énergie moyenne par symbole est alors:

$$E_s = 1$$

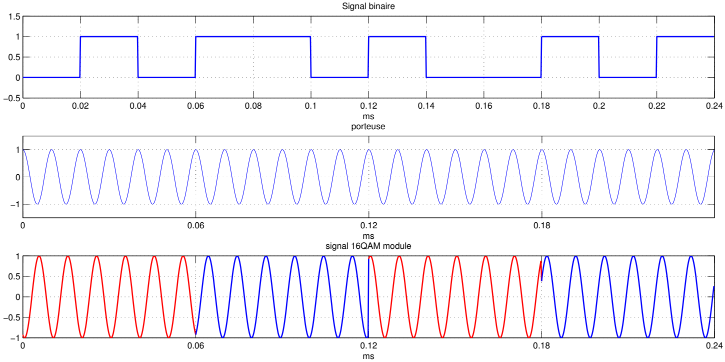
Exemple de modulation PSK-8 (1/)

- Un symbole d'information = 3 bits d'information. Pour un débit binaire de 50 kb/s, la durée d'un symbole est $T = 3T_b = 0.06$ms.

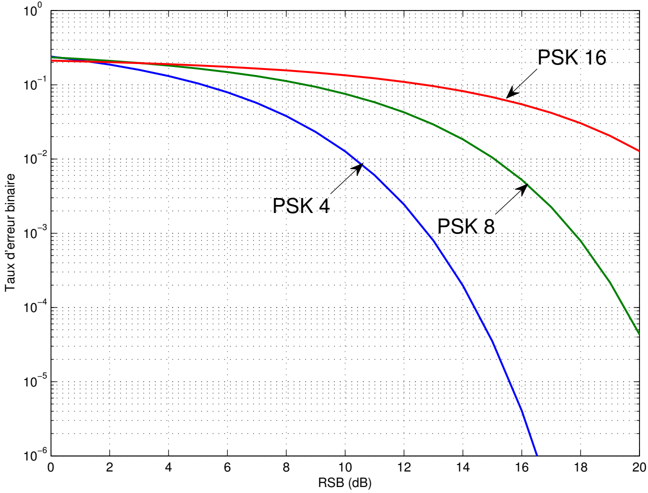
- Le signal est modulé autour d'une porteuse de $f_0 = 100$ KHz.

- Sur une durée de 0.06 ms, le symbole d'information est $\cos(2\pi f_0 t + \varphi_k)$ avec φ_k est la phase correspondante à l'association de 3 bits.

Exemple de modulation PSK-8 (2/)



Probabilité d'erreur PSK-M



Différents types de modulation

Caractérisation de la modulation (1/)

- Les bits sont regroupés par des paquets de q^2 bits.

  La modulation QAM est l'association de 2 modulations PAM à $M = 2^{q^2}$ points chacune dont une est en phase et l'autre est en quadrature de phase.

- La durée d'un symbole QAM est:
$$T = q^2 T_b.$$

- Le signal modulé par une QAM est:
$$x(t) = x_p(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_q(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

  avec $x_p(t)$ est le signal en phase modulé par une PAM et $x_q(t)$ est le signal en quadrature de phase modulé par une PAM.

Caractérisation de la modulation (2/)

- Le signal modulé avec une modulation QAM de taille $M = 2^{q^2}$ est:

$$\boxed{x(t) = \text{Réel}\left\{x_b(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

avec

$$x_b(t) = x_p(t) + jx_q(t).$$

est le signal en bande de base appelé enveloppe complexe

ayant une partie réelle $x_p(t)$ dite en phase et une partie imaginaire $x_q(t)$ dite en quadrature de phase.

Caractérisation de la modulation (3/)

- Les symboles appartenant à une constellation QAM se différencient par leurs amplitudes et leurs phases
$$s_k = A_k e^{j\varphi_k}$$

- Le signal modulé par une QAM s'écrit alors:

$$\boxed{\begin{array}{rcl} x(t) & = & \text{Réel}\left\{x_b(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\} \\ & = & \sum_k A_k \cos(2\pi f_0 t + \varphi_k)h(t-kT) \end{array}}$$

Constellation QAM-4: Codage de Gray

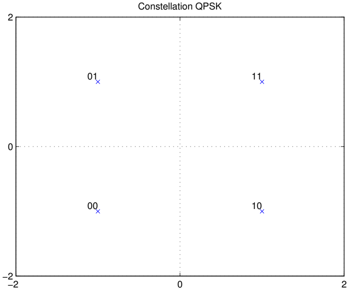
- Codage de Gray $\Rightarrow$1 seul bit change entre deux phases adjacentes.
- Exemple de codage de Gray pour une QAM-4:

message	$x_p + ix_q$
00	$-1 - 1i$
01	$-1 + 1i$
11	$1 + 1i$
10	$1 - 1i$

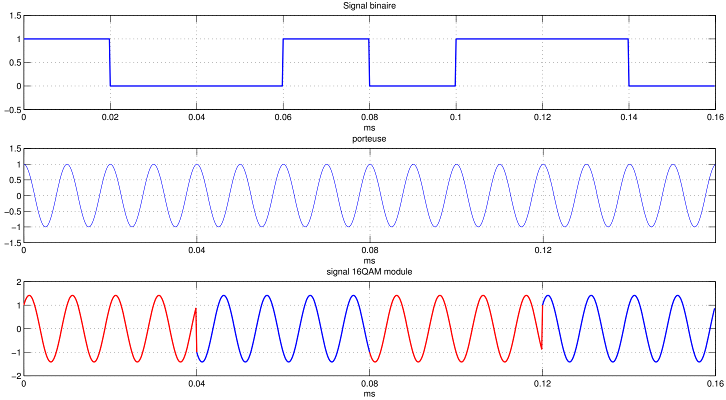
- Ce choix minimise le taux d'erreur par élément binaire.

Exemple de modulation QAM-4 (1/)

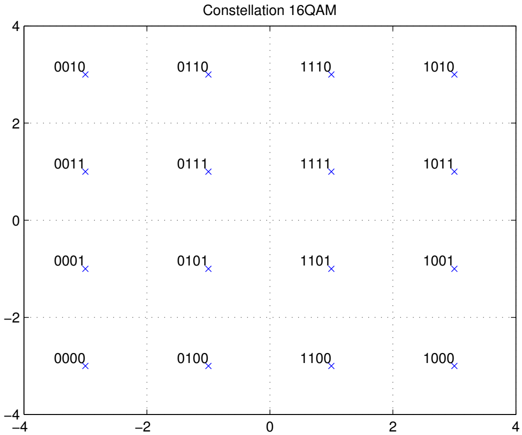
- Représentation de la constellation QAM-4 = PSK-4



Exemple de modulation QAM-4 (2/)



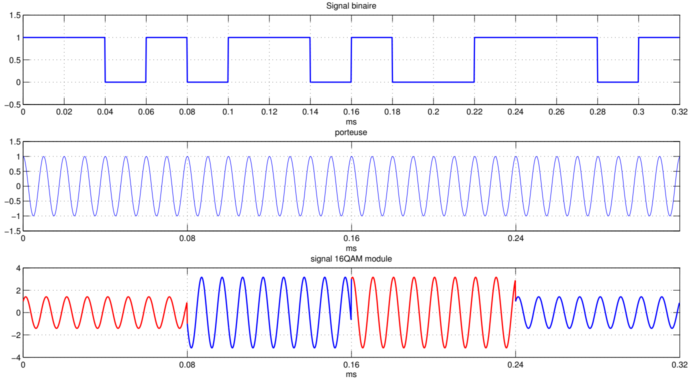
Constellation 16QAM



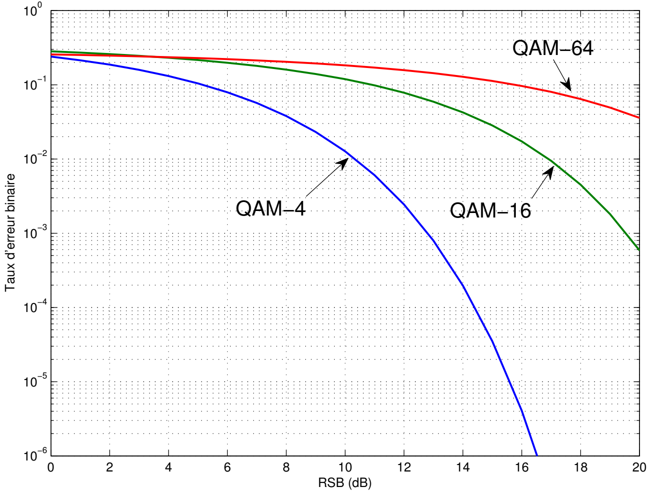
- L'énergie moyenne par symbole est alors la moyenne des amplitudes carrés = 10.

Exemple de modulation 16QAM

- Un symbole d'information = 4 bit d'information. D'où $T = 4T_b = 0.08$ms; $f_0 = 100$ kHz



Probabilité d’erreur d’une M-QAM



Part V

Modulation multi-porteuse

Définition de la modulation OFDM I

- La modulation Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM) transmet un paquet de N symboles d'information $s_1, s_2, \ldots, s_N$ appartenant à une constellation de durée $T_{\text{OFDM}} = NT_s$ avec T_s la durée d'un symbole dans la bande B.

- La modulation OFDM consiste à diviser la bande totale de fréquence de largeur B en N sous bandes qui se chevauchent tout en restant séparables.

- Chaque sous-bande est centrée autour d'une fréquence appelée sous-porteuse f_k et contient un symbole s_k.

- La largeur de chaque sous-bande est $\frac{2}{NT_s}$.

Définition de la modulation OFDM II

- Le spectre total du signal OFDM est la somme des spectres des signaux des sous-bandes.

- Les sous-bandes sont dites orthogonales si et seulement si pour une sous-porteuse f_k donnée, le spectre de toutes les autres sous-bandes est égal à zéro en f_k.

- Une condition nécessaire et suffisante pour l'orthogonalité des sous-bandes avec un filtre rectangulaire est

$$\boxed{f_{k+1} - f_k = \frac{n}{NT_s} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*.}$$

Définition de la modulation OFDM III

- Le spectre d'un signal OFDM en bande de base contenant des informations s_k sur les porteuses f_k est alors:

$$\boxed{S_{\text{OFDM}}(f) = \sum_{k=1}^{N} s_k \operatorname{sinc}\left[\pi(f - f_k)NT_s\right]}$$

avec $f_{k+1} - f_k = \frac{1}{NT_s}$.

- Le message temporel correspondant au signal OFDM en bande de base est alors

$$\boxed{x_{\text{OFDM}}(t) = \text{FT}^{-1}(S_{\text{OFDM}}(f)) = \sum_{k=1}^{N} s_k e^{j2\pi f_k t} \operatorname{rect}(t - NT_s).}$$

Ce message n'est autre que la transformée de Fourier rapide inverse des symboles d'informations.

Définition de la modulation OFDM IV

- Les symboles s_k appartenant à une constellation donnée sont appelés symboles fréquentiels et sont obtenus en calculant les valeurs du spectre sur les sous-porteuses.

- Le signal OFDM modulé autour d'une fréquence porteuse f_0 est:

$$\boxed{x_{f_0,\text{OFDM}}(t) = \mathcal{R}e\left\{x_{\text{OFDM}}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

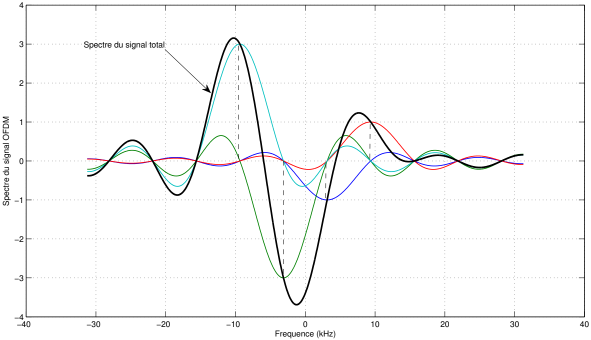
dont le spectre est:

$$\boxed{S_{f_0,\text{OFDM}} = \frac{1}{4}\left(S_{\text{OFDM}}(f - f_0) + S_{\text{OFDM}}(-f - f_0)\right).}$$

- Inconvénient: Nécessité d'une synchronisation parfaite. Délai de traitement = NT_s.

Exemple

- On considère le spectre d'un signal modulé avec une modulation OFDM. Chaque sous-porteuse contient un symbole d'information modulé avec une ASK-4. La durée d'un symbole est 0.04 ms.



✎ Trouver les symboles envoyés.

Part VI

Unités et notions de télécom

Unités et Notions de Télécom

1. Unités de Télécom
2. Le rapport signal à bruit
3. Bande passante d'un système
4. Débit d'un système de Télécom

Unités et Notions de Télécom

Unités de Télécom: dB, dBm (1/)

- En watt, la puissance reçue est:

$$P_r(\text{Watt}) = \alpha P_t(\text{Watt})$$

avec α est le coefficient d'atténuation sans unité.

- La puissance en dB est:

$$P(dB) = 10\log_{10} P((\text{Watt}))$$

- La puissance en dBm est:

$$\boxed{P(dBm) = 10\log_{10} P((\text{mW})) = P(dB) + 30.}$$

Unités de Télécom: dB, dBm (2/)

- Le dB est aussi utilisé pour les gains

$$G(dB) = 10\log_{10}(\alpha)$$

☞ Attention le dBm est une unité de puissance et non pas de Gain!!!

- Les deux relations sont correctes

$$P_r(dBm) = G(dB) + P_t(dBm).$$

ou

$$P_r(dBm) = G(dB) + P_t(dBm).$$

Unités et Notions de Télécom

Le rapport signal à bruit

- Le rapport signal à bruit (RSB) ou Signal to Noise Ratio (SNR) mesure le niveau du signal reçu par rapport à celui du bruit.

- Le rapport signal à bruit est un coefficient sans unité:

$$\mathrm{SNR} = \frac{P_r(W)}{P_{\text{bruit}}(W)} = \frac{P_r(mW)}{P_{\text{bruit}}(mW)}.$$

- Le SNR est souvent exprimé en dB:

$$\begin{aligned}\mathrm{SNR}(dB) &= P_r(dBm) - P_{\text{bruit}}(dBm) \\ &= P_r(dB) - P_{\text{bruit}}(dB).\end{aligned}$$

Le rapport signal à bruit plus interférence

- La réutilisation de la même fréquence porteuse induit des interférences; Par exemple, le WiFi et le bluetooth utilisent la même fréquence porteuse 2.4 GHz.
- Le rapport signal à bruit plus interférence (RSBI) ou Signal to Noise and Interference Ratio (SINR) mesure le niveau du signal reçu par rapport à celui du bruit plus interférence.
- Le rapport signal à bruit plus interférence est un coefficient sans unité:

$$\mathrm{SINR} = \frac{P_r(W)}{P_{\mathrm{bruit}}(W) + I(W)} = \frac{P_r(mW)}{P_{\mathrm{bruit}}(mW) + I(mW)}$$

- Le SINR est souvent exprimé en dB:

$$\begin{aligned} \mathrm{SINR}(dB) &= P_r(dBm) - 10\log_{10}\left(P_{\mathrm{bruit}}(mW) + I(mW)\right) \\ &= P_r(dB) - 10\log_{10}\left(P_{\mathrm{bruit}}(W) + I(W)\right). \end{aligned}$$

Bande passante d’un système

- Lors de la propagation d’un signal, le milieu () se comporte comme un filtre.

- La bande passante (anglais bandwidth) est l’intervalle de fréquences dans lequel l’affaiblissement du signal est inférieur à une valeur spécifiée.

- Exemple de bande passante:

  Bande passante d’un câble coaxial: 10 MHz

  Bande passante d’une fibre optique: quelques MHz à plusieurs GHz

  Bande passante attribuée par l’ARCEP à un opérateur pour le déploiement du LTE: 5 MHz

Unités et Notions de Télécom

Débit d'un système de Télécom

- Le débit d'un système de Télécom est défini par le nombre des bits envoyés pendant une seconde bits/s.

- Le débit dépend du rapport signal à bruit: Plus le rapport SNR est élevé, plus le débit est élevé.

- Le débit théorique sur un canal Gaussien bruité est donné par la capacité de Shannon:

$$\boxed{C = W \times \log_2(1 + \mathrm{SNR})}$$

  avec SNR est le rapport sans unité et non pas celui en dB et W est la largeur de bande passante.

- L'efficacité spectrale est le débit normalisé par la bande passante et elle est exprimée en bit/s/Hz.

Débit d'un système de Télécom