线性代数

数据科学

ISEP第一年

2023-2024

第 12 届会议 - 2023 年 12 月 22 日

课程部分基于……请参阅参考资料

大纲

· 线性代数基础 · 特征值分解 · 奇异值分解 (SVD)*

大纲

- 线性代数基础
- 特征值分解
- 奇异值分解 (SVD)*

基本概念

- Rn中的向量是有序的

  n 个实数的集合。

  – 例如 v = (1,6,3,4) 在R4中

  – 列向量：

  – 行向量：

æ ÷ ö1
÷6
÷
÷ø
çç3ç
4
çè

(1 6 3 4)

- m×n矩阵是Rmxn中的对象,具有 m

  行和 n

  列中,每个条目都填充一个（通常)实数：

æçö1 4 78ç6÷
ç ÷ 9 3 2 和 ø

基本概念

向量范数:向量的范数 || || 是向量“长度”的非正式度量。

– p-范数

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

– 通用规范： L1、 L2 （欧几里德）

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

–林菲尼蒂

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

基本概念

我们将使用小写字母表示向量。例如，我们表示向量x及其元素xi 。 · 矢量点（内)积：

$$x^T y \in \mathbb{R} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

如果 u · v=0，||u||2 ≠ 0，||v||2 ≠ 0 à u 和 v正交

如果 u · v=0，||u||2 = 1，||v||2 = 1 à u 和 v 是正交的

· 向量外积：

$$xy^T \in \mathbb{R}^{m\times n} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_my_1 & x_my_2 & \cdots & x_my_n \end{bmatrix}$$

基本概念

我们将使用大写字母表示矩阵。这些元素被称为

“& 。

- 矩阵乘积：

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \qquad B \in \mathbb{R}^{n \times p}$$

$$C = AB \in \mathbb{R}^{m \times p}$$

%

“& = & ” &

#$

例如

A = 哦 啊 11 12 他 乙 = 哦 BB 11 12 他

和 啊 21 22 Ø 和 BB 21 22 Ø

= AB = 哦 父辈们 + + 11 11 12 21 11 12 12 22 他

和 父辈们 + 21 11 22 21 21 12 + 22 22 Ø

基本概念 :特殊矩阵

A

0 0 ÷ ÷ ö

0

æ ç 乙 ÷

0 ç 0 0 和 C ø

对角线 也表示为diag(a,b,c)

æ ö abc 0 ç

de上三角ç

÷ 0 0 f è ø

æ A ö 0 0 bc 0 ç 下 ç ÷

三角ç ÷ def和 ø

æ ö 1 0 0 ç ÷ 0 1 0 ç 和ç ÷

0 0 1 ø

I （单位矩阵）

$$0=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$ 维度 3 的零向量

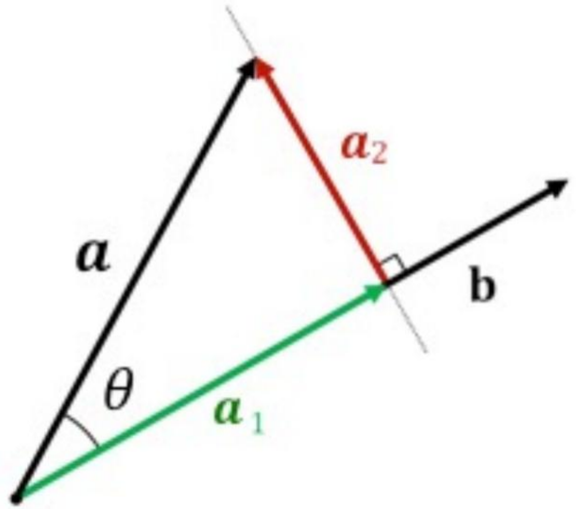
基本概念

~~向量在另一个向量b（不同于零向量)~~上的~~正交投影~~

令 和 为两个向量,使得 ≠ 到 上的投影是由下 ,那么,正交式给出的向量：

= ——— =// // (余弦) ———

// //



是向量之间的角度

基本概念

定义:给定一个nxm矩阵A， A的转置是mxn矩阵,记为AT ,其元素(i,j)对应于A的元素(j,i)

转置:你可以将其视为

– “翻转”行和列

OR

– 在线“反映”向量/矩阵

例如

时间

埃克A ö

ç ÷ (a b) = ÷ 和b ø æ

ö æ

ö ab

时间

ç ö ç ÷ ç = ÷ ç ÷ 和cd 和 ø 和bd

特性:

- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $(A+B)^T = A^T + B^T$

行列式 (1/2)

nxn矩阵A的行列式,表示为det(A)或|A|是一个实数,一些例子:

- 对于 1x1 矩阵 = [ ], det(A) =

- 对于 2x2 矩阵A = 这是 ab_ _ 光盘 e 和 , det(A) = (ad-cb)

- 对于 3x3 矩阵 = [ ] 是:

它(A) = | | - | | + | |

行列式 (2/2)

一般定义：

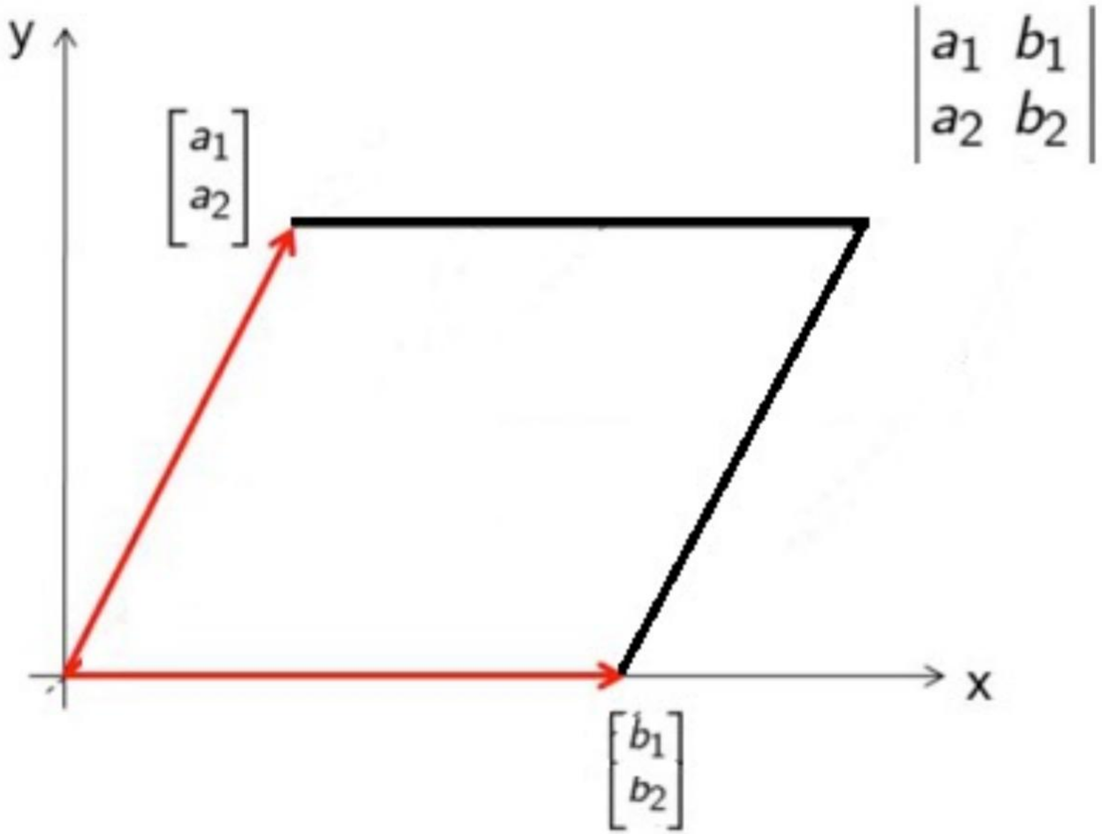
For $n \geq 2$, the **determinant** of an $n \times n$ matrix $A = [a_{ij}]$ is the sum of n terms of the form $\pm a_{1j} \det(A_{1j})$, with plus and minus signs alternating, where the entries $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}$ are from the first row of A. In symbols,

$$\begin{aligned}\det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})\end{aligned}$$

其中子矩阵Aij是通过划掉第 i行和第j列得到的

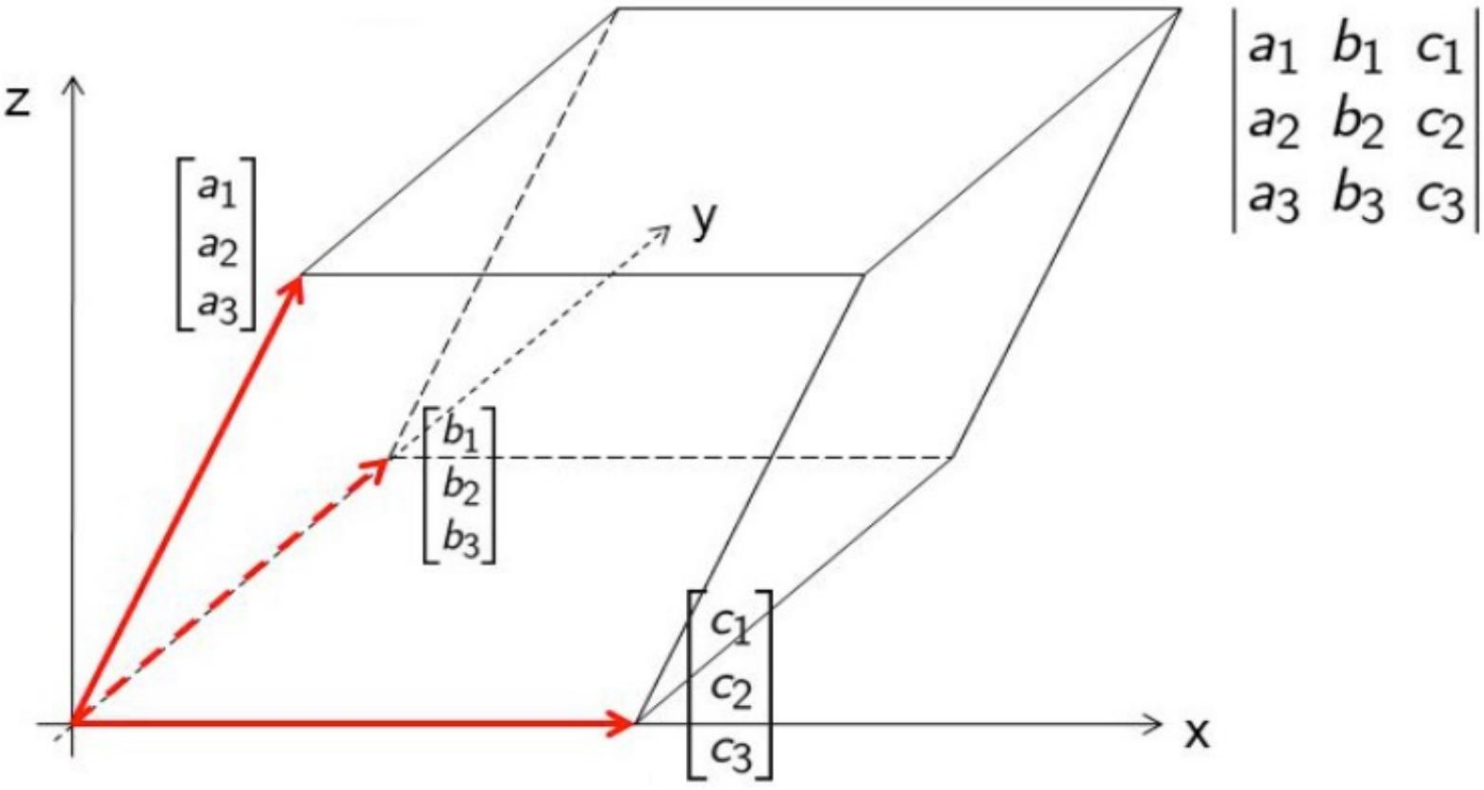
行列式-几何解释

- 对于 2x2 矩阵A， |det(A)|={由下式确定的平行四边形的面积 A的列}



行列式 -几何解释

- 对于 3x3 矩阵A， |det(A)|={由下式确定的平行六面体的体积 A的列}



行列式 -属性

行列式的性质

设A和B是两个nxn矩阵。

·当且仅当det(A) $\neq$ 0时， A是可逆的。

Ø如果存在另一个矩阵A-1 ,则A是可逆的

即A A-1= A-1 A= I

· det(AB)=(det(A))(det(B)) （如果存在）。 · det(AT)= det(A)。 · 如果A是三角形,则det(A)是 A的主对角线上的条目。

线性组合

Given vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ in $\mathbb{R}^n$ and given scalars $c_1, c_2, \ldots, c_p$, the vector $\mathbf{y}$ defined by :

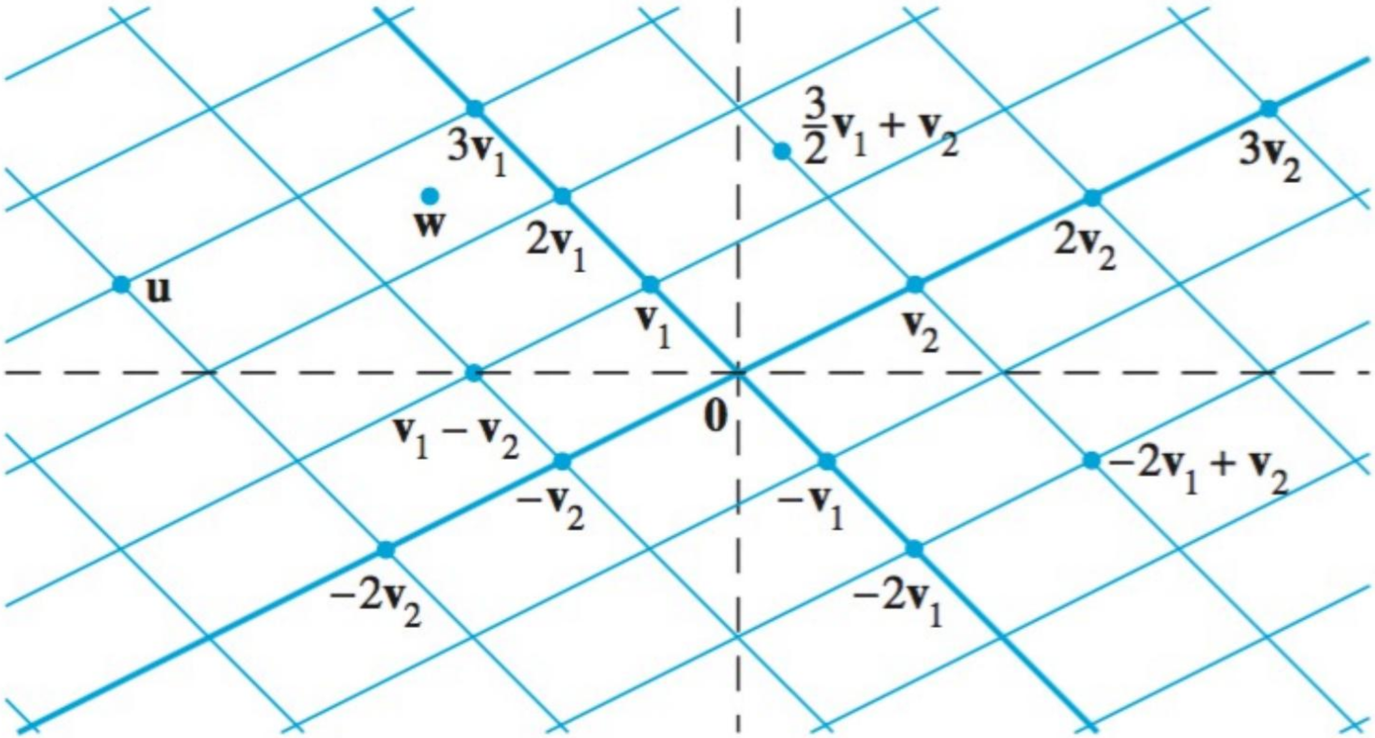
$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \ldots + c_p\mathbf{v}_p$$

is called a **linear combination** of $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_p$ with weights $c_1, c_2, \ldots, c_p$.

- 权重可以是任何实数,包括零。

线性组合示例

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Linear combinations of $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$.

$$\mathbf{u} = 3\mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 \qquad \mathbf{w} = \tfrac{5}{2}\mathbf{v}_1 - \tfrac{1}{2}\mathbf{v}_2$$

线性独立性

- 如果一组向量中没有一个向量可以写成其他向量的线性组合,则它们是线性独立的。

·如果c1v1+···+ckvk = 0 æ ö æ意味着c1=···=ck=0 |向量v1,···,vk是线性无关

÷ ç | |和 ø 和

的| ç ÷ |ç ç ÷ ç ç 丙$_1$ ö ÷ æ ö0 ç÷ 0 ç ÷ 0 和

维维2 3 1 c 2 = ø

| 丙$_3$ ÷ ÷ ø

例如 æ ö ç ç 0 ç 2 3 æ ç 和 ç ÷ 1 3 和 ø 在 ÷ æ ö0 ç ÷ ÷ ç ÷ 0 = ø ç ÷ 0 和 ø 在

当且仅当 (u,v)=(0,0) 时,等式成立,即列是线性无关的。

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad x_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

它们不是线性独立的,因为x3 = −2x1 + x2

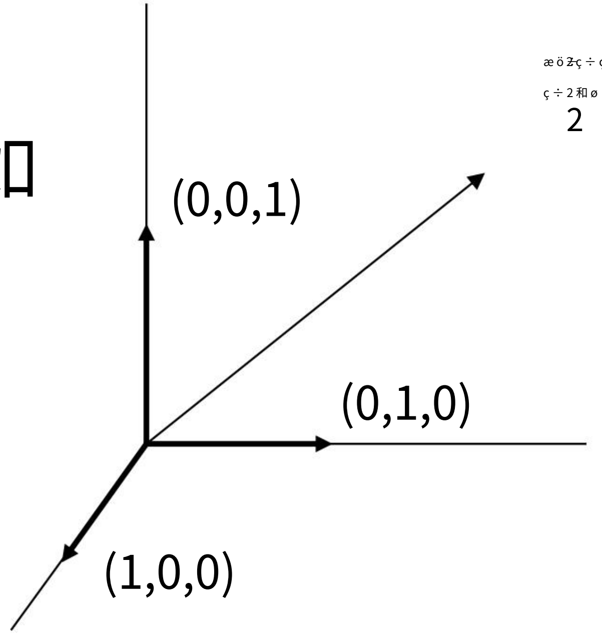
向量空间的跨度

- 如果向量空间中的所有向量都可以表示为一组向量v1,⋯,vk 的线性组合,则 v1,⋯,vk跨越该空间。

- 该集合的基数是向量空间的维数。 æ ö 1 ç ÷ ç ÷ 0 ç ÷ 0 è ø

æ ö 2ç ÷ ç æ ö 0ç ÷ ç æ ö 0ç ÷ ç
ç ÷ 2 和 ø ç ÷ 0 和 ø 0 ç ÷ 1 和 ø
2 = 2 2+ 1 2+

例如



·向量空间V 的基是跨越V 的线性无关向量的最大集合。基也称为线性无关生成集。

矩阵的秩

- rank(A)（m×n 矩阵 A 的秩)为

  线性独立列的最大数量

  =线性独立行的最大数量

  =col(A)的维数

  =行(A)的尺寸

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

- 如果 A 是 n × m,则
  - 等级(A)<= 最小值(m,n)
  - 如果 n=rank(A),则 A 具有完整的行排名
  - 如果 m=rank(A),则 A 具有完整的列排名

矩阵的逆

- 方阵A 的逆矩阵,用A-1表示,是这样的唯一矩阵。

  – AA-1 =A-1A=I （单位矩阵）

- A-1存在当且仅当 det(A) ≠ 0

·如果A-1和B-1存在,则

  – (AB) -1 = B-1A-1,

- (AT)-1 = (A-1)T

·对于正交矩阵

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$$

- 对于对角矩阵

$$\mathbf{D}^{-1} = \mathrm{diag}\{d_1^{-1}, \ldots, d_n^{-1}\}$$

  - 如果 ($ “ ≠ 0 ∀ 。

大纲

- 线性代数基础
- 特征值分解
- 奇异值分解 (SVD)*

特征值和特征向量

·特征向量（对于平方毫米矩阵S）

$$\mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

(右)特征向量特征值

$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m \neq \mathbf{0}$ λ 标量

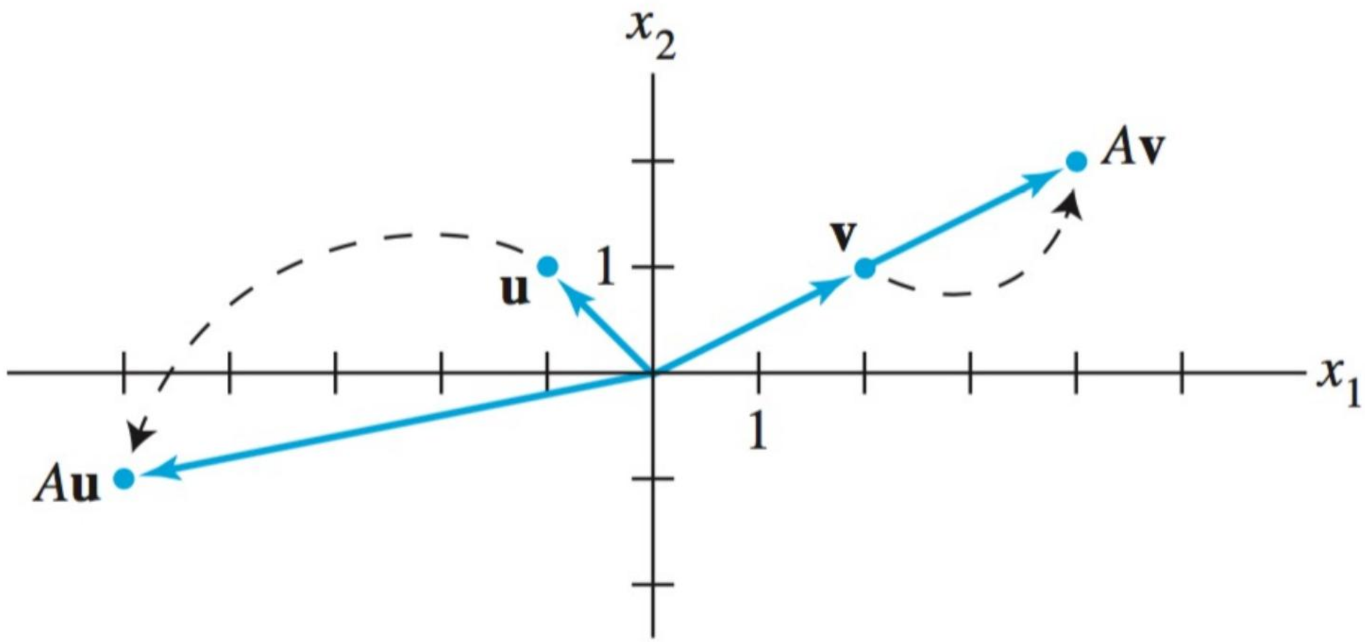
v是与特征值相关的S特征向量 λ

例子

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

特征值和特征向量解释

Let $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, and $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



A仅拉伸或膨胀v.
相反， u不是A的特征向量。

如何计算特征值和特征向量?

如果 λ 是 mxm 矩阵S 的特征值,那么,我们可以找到通过求解方程得到相关的特征向量:

$$(S - \lambda I)\,v = 0。$$

该方程有非零解,如果

$$|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = 0$$

S的方程。它是λ $|\mathbf{S} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ 称为特征方程的 m 阶方程,最多有m 个不同的解。

评论:

- 特征向量是非零向量
- 特征值可以为零,甚至可以为复数。

练习1

以下矩阵的特征值和特征向量是多少?

S = éùë2 1 ê
2 û

解决方案练习1

- 让

S = 这是 2 1 杀了

e 1 2 他 和

- 然后

S - = 我我 这是 2 - 我 1 杀了 0.Th(2)- =我 2 1

e 1 2 - 我 他 和

- 特征值为1 和3。
- 特征向量：

哦 1 他

-1

和 ø

哦 1通 他

道

1

和 ø

代入这些值并求解特征向量。

对称矩阵的情况

对于对称矩阵,不同的特征向量
特征值是正交的

Sv{1,2} = 我{1,2}v{1,2}，　我 ^ 我 酊v1 ˙0 v2 =
1　2

§实对称矩阵的所有特征值都是实数。

§提醒:协方差矩阵是对称的!

对称矩阵的情况

A symmetric $n \times n$ real matrix $\mathbf{A}$ is said to be **positive semi definite** if

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0$$

结果:正半定矩阵的所有特征值都是非负的

$$\underbrace{\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{x}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0}\ \text{then if } \mathbf{S}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \lambda \geq 0$$

§线索:方差矩阵是半正定的

考虑我们的例子

S = éûè2 1 ê
2 û

实对称矩阵

- 特征值 1 和 3 是实数
非负,则S是半正定*。
- 特征向量是正交的:

æ ö 1 ç ÷ ç
÷ 和 -1 ø

æ ö 1 ç ÷
÷ 是 1 ø

*另外,正定汽车的所有特征值都是正的。

对角化

矩阵对角化定理

- 让 $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是一个方阵，m 线性无关的特征向量。

·定理:存在特征分解

$$\mathbf{S} = \mathbf{U} \underbrace{\mathbf{\Lambda}}_{\text{对角线}} \mathbf{U}^{-1}$$

对于不同的特征值来说是唯一的

- U的列是S的特征向量
- 的对角线元素是特征值 $\mathbf{\Lambda}$ $\mathbf{S}$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_m), \quad \lambda_i \geq \lambda_{i+1}$$

对角分解:为什么/如何

让U将特征向量作为列: 这是 你 紫外线 1 ... 在n 和 e

那么， SU可以写成

这是 你 这是 你 这是 你 这是 我 1 你

SU S v ê = 1 ... 在 n = 我 在 1 1 ... 我 在 恩 = 在 1 ... 在 n ... 我 n

e 和 e 和 e 和 e 和

因此SU=U L，或U–1SU= L

并且S=U L U-1。

对角分解 - 示例 (1/2)

记起 S = ê 我2 1 e 1 2 和 ; 我 1 = 1、我 2 = 3.

特征向量ç 哦 1 他 和 -1 ø , 哦 1 他 和 1 ø 形式 在 = 这是 1 1 你 会 e - 1 1 和

反转,我们有 在 - 1 = 是 ù 1/ 2 - 1/ 2 ê e 1/ 2 1/ 2 和

记起
UU–1 =I。

那么， S=U L U–1 = 这是 1 会 e - 1 1 呵呵 1 0 和 e 0 3 1 1 1/ 2 1/ 2 和 e 1/ 2 1/ 2 和

对角分解 - 示例 (2/2)

让我们除以U （并乘以U–1） ,这样它们就是正交的

那么， S= 这是 1/ 2 1/ 2 ù 是 ù 是 1 0 1/ 2 1/ 2 -

e - 1/ 2 1/ 2 和 e 0 3 和 e 1/ 2 1/ 2 和

问 L (Q-1= QT)

方阵Q称为正交矩阵,如果
列（行)向量是正交的。
结果 如果Q正交,则Q-1= QT

对称特征分解

- 如果$\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 是一个对称矩阵：

·定理 :存在一个（唯一的)本征分解 S = QLQ 时间

- 其中Q是正交的：
  - Q-1= QT
  - Q的列是归一化特征向量
  - 列是正交的。
  - 特征值是实数。

大纲

- 线性代数基础
- 特征值分解
- 奇异值分解 (SVD)*

奇异值分解

对于一米 ´ n秩为r的矩阵A存在因式分解

（奇异值分解= SVD)如下：

$$A = USV^{时间}$$

米 ´ 毫米

´ n

V是n ´ n

U的列是AAT 的正交特征向量。

V的列是ATA 的正交特征向量。

AAT的特征值l1 … lr是ATA的特征值。

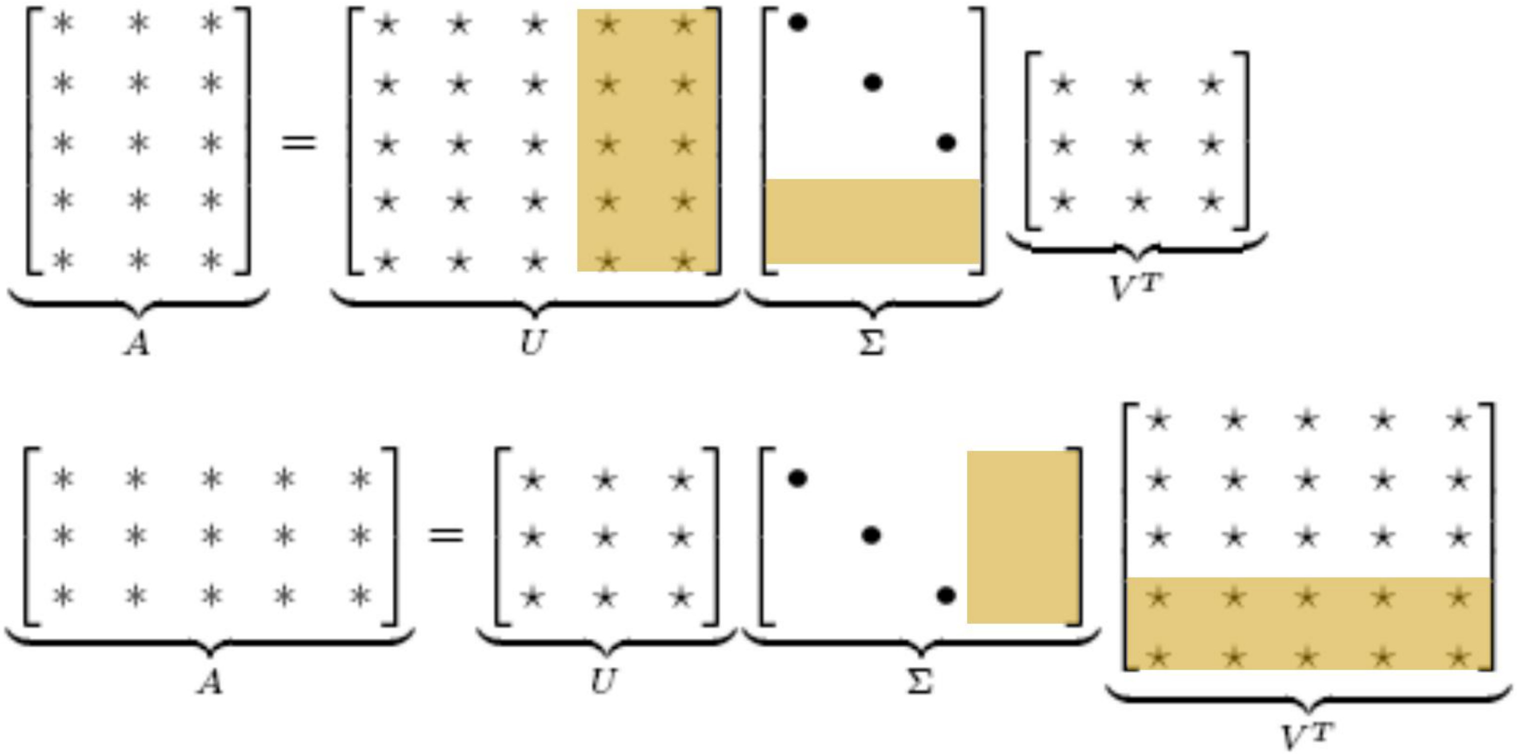
$$s_{我} = \sqrt{我_{我}}$$

$$S = （诊断_1 \ldots s_r）$$

奇异值。

奇异值分解

- SVD 维数和稀疏性说明



奇异值分解示例

é úùê1ú1êê1ú ê

让 A = 0 û 0 1

因此m=3， n=2。其SVD为

0 2 / 6 ú ê ú ù ù 1/ 0 3 é ù

1/ 2 1/ 2 ê ú 0 3 ú ê ú ë 1/ 2 1/ 2 û ú

ê ê 1/ - 1/ 6 1/ 3 ê ú 1/ 3 ê 0 0 ú ú

2 ê ê 1/ 2 1/ 6 ê - -

通常,单数是按降序排列的值。

参考

- David Lay «线性代数及其应用程序»,第五版。出版商:皮尔逊（2011）。

- “线性代数复习” 背诵莱曼·阿科格鲁 (2010)。

- 托马斯·霍夫曼“线性代数背景”。 2018 年 9 月访问https://web.stanford.edu/class/cs276a/handouts/lecture15.pdf