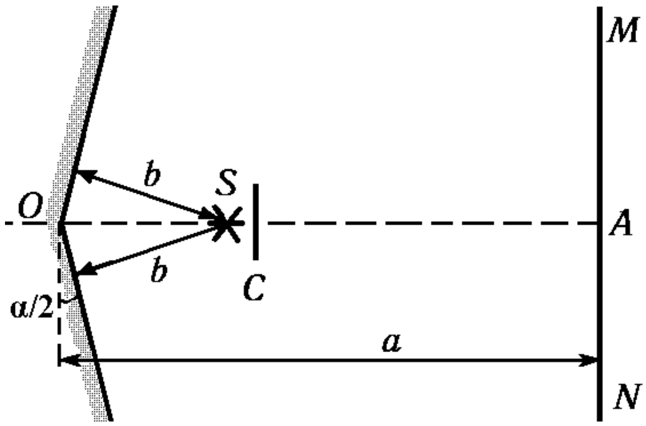
ВОЛНОВАЯ И КВАНТОВАЯ ОПТИКА
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

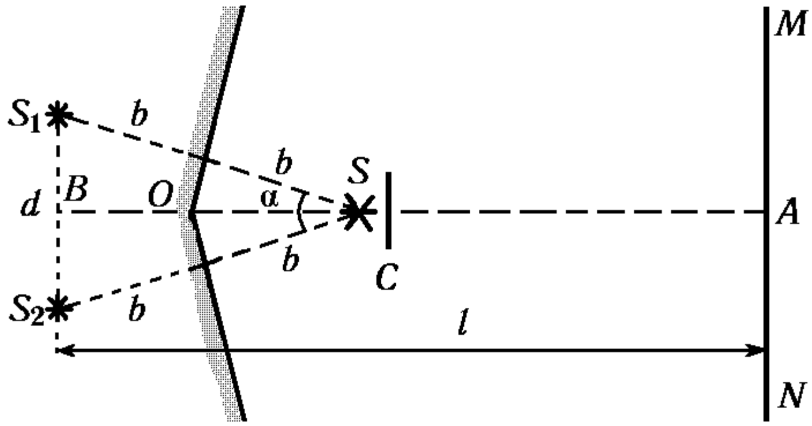
1. Два плоских зеркала образуют между собой малый угол $\alpha = 5\cdot10^{-3}$ рад. На равных расстояниях $b = 10$ см от зеркал расположен монохроматические точечный источник света S. Определите в мм расстояние между двумя соседними интерференционными



полосами на экране MN, расположенном на расстоянии $OA = a = 90$ см от линии пересечения зеркал. Длина световой волны равна $\lambda = 450$ нм. Малый непрозрачный диск C препятствует прямому попаданию света от источника на экран.

Дано:
$a = 0{,}1$ м
$b = 0{,}9$ м
$\lambda = 4{,}5\cdot10^{-7}$ м
$\alpha = 5\cdot10^{-3}$ рад
Найти:
$\Delta x = ?$ (мм)

Решение:



Расстояние между интерференционными полосами можно определить по формуле (1.7): $\Delta x = \dfrac{\lambda l}{d}$, где d – расстояние S_1S_2 между мнимыми изображениями источника света S в плоских зеркалах; l – расстояние от плоскости источников S_1 и S_2 до плоскости экрана MN: $l = a + b$. Расстояние $d = S_1S_2$ определим из треугольника S_1BS:

$$\frac{d}{2} = 2b\sin\frac{\alpha}{2} \approx 2b\frac{\alpha}{2}, \quad d \approx 2b\alpha.$$

Здесь мы учли, что синус малого угла приблизительно равен самому углу в радианах, а косинус – приблизительно равен единице.

Подставим l и d в формулу для Δx, и произведём вычисления:

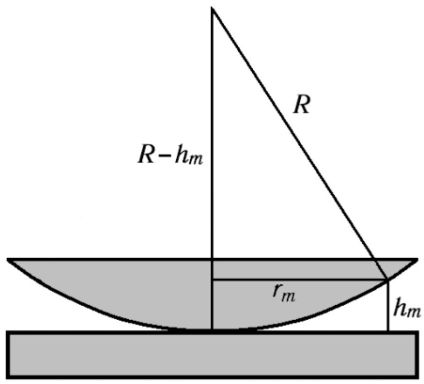
$$\Delta x = \lambda \frac{a+b}{2b\alpha} = 4{,}5 \cdot 10^{-7} \cdot \frac{0{,}1 + 0{,}9}{2 \cdot 0{,}9 \cdot 5 \cdot 10^{-4}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0{,}5 \text{ мм.}$$

Ответ: $\Delta x = 0{,}5$ мм.

2. В установке для наблюдения колец Ньютона пространство между плоско-выпуклой стеклянной линзой и пластиной заполнено водой ($n = 1{,}33$). Свет длиной волны 500 нм падает нормально. Радиус кривизны выпуклой части линзы 1 м. Определить: радиус третьего светлого кольца Ньютона в отраженном свете и толщину клина в том месте, где наблюдается третье светлое кольцо.

Дано:
$n = 1{,}33$
$R = 1$ м
$\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$m = 3$
Найти:
$r_{max3} = ?$
$h_3 = ?$

Решение:



Радиусы светлых колец Ньютона в отражённом свете определяются формулой (1.10):

$$r_m = \sqrt{(2m+1)\frac{\lambda}{2}R}, (m = 0,1,2,\ldots),$$

где m – порядковый номер кольца; R – радиус кривизны выпуклой поверхности линзы. Т.к. нам все величины известны, то сразу произведём вычисления:

$$r_{\max 3} = \sqrt{(2 \cdot 3 + 1)\frac{5 \cdot 10^{-7}}{2} \cdot 1} \approx 1{,}32 \cdot 10^{-3} \text{ м} \approx 1{,}32 \text{ мм.}$$

Определим толщину зазора h_m между выпуклой частью линзы и плоскопараллельной пластиной. По рисунку видно, что мы можем воспользоваться теоремой Пифагора:

$$R = \sqrt{r_m^2 + (R - h_m)^2}, \quad R^2 = r_m^2 + R^2 - 2h_m R + h_m^2$$

$$h_m^2 - 2h_m R + r_m^2 = 0, \qquad h_m^2 - 2h_m R + r_m^2 = 0.$$

Можно найти корни квадратного уравнения, либо использовать следующее приближение. Т.к. $h_m << R$, то h_m^2 можно пренебречь, по сравнению с $2h_m R$. Тогда,

$$- 2h_m R + r_m^2 = 0, \quad h_m = \frac{r_m^2}{2R}.$$

Решая любым из двух способов, мы получим один и тот же числовой ответ:

$$h_3 = \frac{\left(1{,}32 \cdot 10^{-3}\right)^2}{2 \cdot 1} = 8{,}712 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } r_{\max 3} \approx 1{,}32 \cdot 10^{-3} \text{ м; } h_3 = 8{,}712 \cdot 10^{-7} \text{ м.}}$$

3. На дифракционную решётку, имеющую одинаковую ширину непрозрачных промежутков и прозрачных щелей, равную 1200 нм, нормально падает свет с длиной волны 500 нм. Определить наибольший порядок максимума, который наблюдается для данной длины волны.

Дано: $a = b$ $a = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ м $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м Найти: $k_{\max} = ?$

Решение:

Запишем условие максимумов для дифракции света на решётке: $d \cdot \sin\varphi_k = k\lambda$. Величина левой части ограничена, так как максимальное значение функции $\sin\varphi_k = 1$. Следовательно, ограничена по величине и правая часть этого равенства: $d \cdot 1 = k_{\max}\lambda$, откуда $k_{\max} = d/\lambda$. Учитывая, что период дифракционной решётки $d = a + b = 2a$, в итоге получаем:

$$k_{\max} = 2a/\lambda = 2 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{-6} \big/ 5 \cdot 10^{-7} = 4{,}8.$$

Порядок максимума должен быть целым числом. Однако полученное численное значение $k_{\max}$ нельзя округлять в б***о***льшую сторону, чтобы исходное равенство не нарушалось. Отбрасывая дробную часть, получаем окончательный ответ $k_{\max} = 4$.

$$\boxed{\text{Ответ: } k_{\max} = 4.}$$

4. На дифракционную решетку падает нормально поток белого света. В направлении, определяемом углом 30°, для длины волны 450 нм наблюдается максимум пятого порядка. Определить синус угла, в направлении которого для длины волны 600 нм наблюдается максимум третьего порядка.

Дано:
$\varphi_1 = 30°$
$\lambda_1 = 4{,}5\cdot10^{-7}$ м
$k_1 = 5$
$\lambda_2 = 6\cdot10^{-7}$ м
$k_2 = 5$
Найти:
$\sin\varphi_{k2} = ?$

Решение:

Запишем условие максимумов для дифракции на решётке двух световых волн с длинами λ_1 и λ_2:

$$d\cdot\sin\varphi_{k1} = k_1\lambda_1 \qquad \text{и} \qquad d\cdot\sin\varphi_{k2} = k_2\lambda_2.$$

Поделив одно уравнение на другое, получаем отношение:

$$\sin\varphi_{k1}/\sin\varphi_{k2} = k_1\lambda_1/k_2\lambda_2.$$

Отсюда следует выражение для синуса угла, под которым наблюдается максимум с $k_2 = 3$:

$$\sin\varphi_{k2} = \sin\varphi_{k1}\cdot\left(k_2\lambda_2/k_1\lambda_1\right).$$

Численный расчет даёт следующий результат:

$$\sin\varphi_{k2} = 0{,}5\cdot\left(3\cdot6\cdot10^{-7}/5\cdot4{,}5\cdot10^{-7}\right) = 0{,}4.$$

Ответ: $\sin\varphi_{k2} = 0{,}4$.

5. Определить в нм длину волны излучения и импульс фотона, если каждый квант этого излучения обладает энергией 1,5 эВ.

Дано:
$\varepsilon = 1{,}5$ эВ $= 2{,}4\cdot10^{-19}$ Дж
Найти:
$\lambda = ?$ (нм)
$p_ф = ?$

Решение:

Связь энергии фотона с длиной волны излучения определяется формулой (1.17), а с импульсом формулой (1.18):

$$\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}, \qquad p_ф = \frac{\varepsilon}{c}.$$

Выразим λ и произведём вычисления:

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{6{,}6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}}{2{,}4\cdot10^{-19}} = 8{,}75\cdot10^{-7}\text{ м} = 875\text{ нм},$$

$$p_ф = \frac{2{,}4\cdot10^{-19}}{3\cdot10^{8}} = 8\cdot10^{-28}\text{ кг·м/с}.$$

Ответ: $\lambda = 875$ нм, $p_ф = 8\cdot10^{-28}$ кг·м/с.

6. Во сколько раз масса покоя электрона больше массы фотона видимого излучения с длиной волны 660 нм?

<u>Дано:</u> $\lambda = 6{,}6\cdot10^{-7}$ м $m_e = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг <u>Найти:</u> $m_e / m_ф = ?$

Решение:

По определению масса фотона связана с его энергией и длиной волны формулами (1.17) и (1.18):

$$m_ф = \frac{\varepsilon}{c^2} = \frac{h}{\lambda c}.$$

Найдём отношение массы покоя электрона к массе фотона:

$$\frac{m_e}{m_ф} = \frac{\lambda c \cdot m_e}{h}.$$

Воспользуемся табличными данными (Приложение 1) и произведём расчёты:

$$\frac{m_e}{m_ф} = \frac{6{,}6\cdot10^{-7}\cdot3\cdot10^{8}\cdot9{,}1\cdot10^{-31}}{6{,}6\cdot10^{-34}} = 2{,}73\cdot10^{5}$$

$\boxed{\text{Ответ: } m_e / m_ф = 2{,}73\cdot10^{5}.}$

7. Два образца из цезия облучаются светом от двух разных источников света (частота падающих квантов света 600 ТГц и 500 ТГц). Максимальные кинетические энергии фотоэлектронов при этом отличаются в два раза. Определить работу выхода электрона из цезия. Ответ дать в электронвольтах.

<u>Дано:</u> $\nu_1 = 6\cdot10^{14}$ Гц $\nu_2 = 5\cdot10^{14}$ Гц $\eta = T_1/T_2 = 2$ <u>Найти:</u> $A = ?$ (эВ)

Решение:

Запишем уравнение фотоэффекта для двух случаев: $h\nu_1 = A + T_1$ и $h\nu_2 = A + T_2$. Из каждого уравнения находим максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона:

$$T_1 = h\nu_1 - A \quad \text{и} \quad T_2 = h\nu_2 - A.$$

Составив отношение этих энергий, приходим к уравнению относительно неизвестной величины – работы выхода A:

$$\eta = \frac{T_1}{T_2} = \frac{h\nu_1 - A}{h\nu_2 - A}.$$

Решив его, получаем: $$A = \frac{h(\eta\nu_2 - \nu_1)}{(\eta - 1)} = h(2\nu_2 - \nu_1).$$

При вычислениях переводим работу в эВ:

$$A = 6{,}6 \cdot 10^{-34}(2 \cdot 5 - 6) \cdot 10^{14} / 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 1{,}65 \text{ эВ}.$$

Ответ: A = 1,65 эВ.

8. Излучение с частотой 2000 ТГц падает на вещество, для которого частота красной границы фотоэффекта равна 1000 ТГц. Определить максимальную кинетическую энергию фотоэлектронов. Ответ дать в электронвольтах.

$\nu = 2 \cdot 10^{15}$ Гц
$\nu_{кр} = 1 \cdot 10^{15}$ Гц
Найти:
T_{max} = ? (эВ)

Решение:

Для того, чтобы найти максимальную кинетическую энергию фотоэлектрона, одного лишь уравнения фотоэффекта $h\nu = A + T_{max}$ недостаточно. Необходимо учесть, что работа выхода A связана с частотой красной границы соотношением $h\nu_{кр} = A$. Подставив это выражение в уравнение фотоэффекта, получаем:

$$T_{max} = h(\nu - \nu_{кр}).$$

Выполняя вычисления, находим:

$$T_{max} = 6{,}6 \cdot 10^{-34} \cdot (2 - 1) \cdot 10^{15} / 1{,}6 \cdot 10^{-19} = 4{,}125 \text{ эВ}.$$

Ответ: T_{max} = 4,125 эВ.

9. При освещении фотоэлемента светом с длиной волны 500 нм фотоэлектроны полностью задерживаются напряжением 1,125 В. Определить величину задерживающего напряжения при облучении фотоэлемента светом с длиной волны 250 нм. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$\lambda_1 = 5 \cdot 10^{-7}$ м
$U_{з1}$ = 1,125 В
$\lambda_2 = 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ м
Найти:
$U_{з2}$ = ?

Решение:

Запишем формулу Эйнштейна для внешнего фотоэффекта $\dfrac{hc}{\lambda} = A + T_{max}$.

При остановке фотоэлектрона его кинетическая энергия полностью переходит в потенциальную энергию заряда в электрическом поле:

$$T_{max} = eU_з.$$

Таким образом, уравнение фотоэффекта перепишется так:

$$\frac{hc}{\lambda} = A + eU_з.$$

Применим эту формулу для указанных в условии случаев:

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_{з1} \text{ и } \qquad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_{з2}.$$

Вычитая одно уравнение из другого, мы приходим к выражению для напряжения $U_{з2} = U_{з1} + \frac{hc}{e}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right).$

Численный расчет дает следующее значение:

$$U_2 = 1{,}125 + 6{,}6\cdot10^{-34}\cdot3\cdot10^{8}\cdot(4\cdot10^{6} - 2\cdot10^{6})/1{,}6\cdot10^{-19} =$$
$$= 1{,}125 + 2{,}475 = 3{,}6 \text{ В}.$$

Ответ: $U_2 = 3{,}6$ В.

10. Фотон с импульсом $p = 5{,}44\cdot10^{-22}$ кг·м/с рассеялся на покоившемся свободном электроне, в результате чего импульс фотона стал равен $p' = 1{,}36\cdot10^{-22}$ кг·м/с. Определите угол, под которым рассеялся фотон.

Дано:
$p = 5{,}44\cdot10^{-22}$ кг·м/с
$p' = 1{,}36\cdot10^{-22}$ кг·м/с
Найти:
$\theta = ?$

Решение:

Изменение длины волны при эффекте Комптона определяется по формуле (1.22):

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta),$$

где $\lambda_c = 2{,}42\cdot10^{-12}$ м – комптоновская длина волны. Импульсы фотона до и после столкновения равны соответственно:

$$p = \frac{h}{\lambda}, \qquad p' = \frac{h}{\lambda'}.$$

Выражая длины волн и подставляя в первое уравнение, получим:

$$\frac{h}{p'} - \frac{h}{p} = \lambda_c(1 - \cos\theta), \qquad \cos\theta = 1 - \frac{h\cdot(p - p')}{p\cdot p'\cdot\lambda_c}.$$

Подставим числовые данные и произведём вычисления:

$$\cos\theta = 1 - \frac{6{,}6\cdot 10^{-34}\cdot(5{,}44-1{,}36)\cdot 10^{-22}}{5{,}44\cdot 10^{-22}\cdot 1{,}36\cdot 10^{-22}\cdot 2{,}42\cdot 10^{-12}} = $$

$$= 1 - \frac{6{,}6\cdot(5{,}44-1{,}36)}{5{,}44\cdot 1{,}36\cdot 2{,}42} = 1 - 1{,}5 = -0{,}5,$$

$$\theta = \arccos(-0{,}5) = 120^\circ.$$

Ответ: $\cos\theta = 1 - \dfrac{h\cdot(p-p')}{p\cdot p'\cdot\lambda_c}$, $\theta = 120^\circ$

11. Определите энергию (в кэВ), которую рентгеновский фотон передаёт неподвижному электрону при их столкновении, если начальная энергия фотона $\varepsilon = 10$ кэВ, угол рассеяния фотона $\theta = 60^\circ$.

Дано:
$\varepsilon = 10^4$ эВ
$\theta = 60^\circ$
Найти:
$\Delta\varepsilon = ?$ (кэВ)

Решение:

Изменение длины волны при эффекте Комптона определяется по формуле (1.22):

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta) = \lambda_c(1-\cos\theta),$$

где m_e – масса покоя электрона, c – скорость света, h – постоянная Планка (см. приложение 1).

Длина волны фотона до столкновения и после столкновения равна соответственно:

$$\lambda = \frac{hc}{\varepsilon}, \qquad \lambda' = \frac{hc}{(\varepsilon - \Delta\varepsilon)}.$$

Подставляя длины волн в первое уравнение, получим:

$$\frac{hc}{(\varepsilon-\Delta\varepsilon)} - \frac{hc}{\varepsilon} = \frac{h}{m_e c}(1-\cos\theta),\ \Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\left(\varepsilon + \dfrac{m_e c^2}{(1-\cos\theta)}\right)}.$$

Переведём все энергии в электронвольты. Для этого, поделим второе слагаемое в знаменателе на элементарный заряд. После этого, можно подставлять числовые значения и производить расчёты:

$$\Delta\varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{\left(\varepsilon + \dfrac{m_e c^2}{e\cdot(1-\cos\theta)}\right)} = \frac{10^8}{\left(10^4 + \dfrac{9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 9\cdot 10^{16}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot(1-0{,}5)}\right)} = 96{,}7 \text{ эВ}.$$

Ответ: $\Delta\varepsilon \approx 0{,}1$ кэВ

12. Луч лазера мощностью 51 мВт падает на поглощающую поверхность. Определить силу светового давления луча на поверхность. Ответ дать в пиконьютонах.

Дано:
P = 5,1·10^{-2} Вт
Найти:
F = ? (пН)

Решение:

Применяя второй закон Ньютона, заключаем, что сила давления света на поверхность определяется скоростью изменения импульса лазерного излучения: $F = \Delta p/\Delta t$, где Δp – изменение импульса света за время Δt.

Поскольку фотоны полностью поглощаются (конечный импульс равен нулю), для изменения импульса света получаем: $\Delta p = \Delta N \cdot p_ф$, где ΔN – число фотонов с импульсом $p_ф$, приходящих на поглощающую поверхность за время Δt.

Импульс фотона связан с его энергией: $p_ф = \varepsilon/c$. Собирая вместе эти выражения, имеем для силы давления:

$$F = \Delta N \cdot p_ф / \Delta t = \varepsilon\Delta N/(c \cdot \Delta t).$$

Мощность излучения выражается через энергию фотонов:

$$P = \varepsilon\Delta N/\Delta t.$$

Итак, сила светового давления на поглощающую поверхность:

$$F = P/c.$$

Проведём расчёты: F = 5,1·10^{-2}/3·10^{8} = 1,7·10^{-10} Н = 170 пН.

Ответ: F = 170 пН.

13. Монохроматический параллельный пучок фотонов, падающий нормально на чёрную пластинку, оказывает на нее давление 0,4 мкПа. Энергия каждого фотона в пучке 10 эВ, коэффициент поглощения света пластинкой равен 100%. Определить в СИ число фотонов, пролетающих в единицу времени через единицу площади поперечного сечения пучка.

Дано:
P = 0,4 мкПа = 4·10^{-7} Па
ε = 10 эВ = 1,6·10^{-18} Дж
σ = 1 (ρ = 0)
Найти:
$N/(S \cdot t) = n$ =?

Решение:

Воспользуемся формулой (1.23) для давления света, падающего нормально на некоторую поверхность:

$$P = \frac{N \cdot h\nu}{S \cdot t \cdot c}(1+\rho) = \frac{nh\nu}{c}(1+\rho).$$

Выразим n и учтём, что $h\nu = \varepsilon$:

$$n = \frac{Pc}{\varepsilon(1+\rho)}.$$

Произведём вычисления: $n = \frac{4 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{1{,}6 \cdot 10^{-18} \cdot (1+0)} = 7{,}5 \cdot 10^{19}$.

$\boxed{\text{Ответ: } n = 7{,}5 \cdot 10^{19} \text{ фотонов.}}$