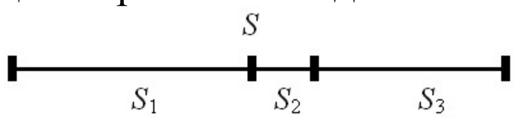
КИНЕМАТИКА
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Автомобиль проехал половину пути со скоростью $v_1 = 60$ км/ч. Половину оставшегося времени движения он ехал со скоростью $v_2 = 15$ км/ч, а последний участок пути – со скоростью $v_3 = 45$ км/ч. Чему равна средняя скорость автомобиля на всем пути? Ответ дать в км/ч.

<u>Дано:</u>
$v_1 = 60$ км/ч
$v_2 = 15$ км/ч
$v_3 = 45$ км/ч
$S_1 = S/2$
$t_2 = t_3$
<u>Найти:</u>
$v_{ср} = ?$

Решение:

Т.к. ответ в задаче требуется дать в км/ч, то перевод единиц измерения в СИ делать не будем.



Представим себе весь путь S в виде отрезка прямой (см. рисунок). Весь путь можно разбить на три отрезка: $S = S_1 + S_2 + S_3$.

По определению средней скорости:

$$v_{ср} = \frac{S}{t} = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

где t_1, t_2, t_3 – соответственно время, за которое были пройдены участки пути S_1, S_2, S_3:

$$S_1 = v_1 \cdot t_1, \qquad S_2 = v_2 \cdot t_2, \qquad S_3 = v_3 \cdot t_3.$$

Из условия известно, что $S_1 = S_2 + S_3 = S/2$, а $t_2 = t_3$. Отсюда получаем:

$$v_1 \cdot t_1 = v_2 \cdot t_2 + v_3 \cdot t_2 = (v_2 + v_3) \cdot t_2, \qquad t_2 = \frac{v_1}{(v_2 + v_3)} \cdot t_1.$$

$$S = 2S_1 = 2v_1 \cdot t_1,$$

$$t = t_1 + 2t_2 = t_1 + 2\frac{v_1}{(v_2 + v_3)} \cdot t_1 = \frac{2v_1 + v_2 + v_3}{v_2 + v_3} \cdot t_1.$$

В итоге, подставляя получившиеся выражения для S и t в формулу средней скорости, получим:

$$v_{ср} = \frac{2v_1 \cdot t_1}{\frac{2v_1 + v_2 + v_3}{v_2 + v_3} \cdot t_1} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3} = 40 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $v_{ср} = 40$ км/ч

2. Моторная лодка проходит расстояние между двумя пунктами А и В по течению реки за время t_1 = 3 ч, а плот – за время t = 12 ч. Сколько времени t_2 затратит моторная лодка на обратный путь? Ответ дать в часах.

Дано:
$t_1 = 3$ ч
$t = 12$ ч
Найти:
$t_2 = ?$

Решение:

Обозначим расстояние между пунктами A и B через s, скорость моторной лодки относительно воды v, скорость течения реки (т.е. скорость плота) u. Тогда

$$t = \frac{s}{u}, \qquad t_1 = \frac{s}{v+u}.$$

Отсюда $\quad s = ut, \qquad v = u\left(\frac{t}{t_1} - 1\right).$

Обратный путь у лодки займет время:

$$t_2 = \frac{s}{v-u} = \frac{u \cdot t \cdot t_1}{u(t-t_1) - ut_1} = \frac{t \cdot t_1}{t - 2t_1} = 6 \text{ ч}.$$

Полученное решение имеет смысл лишь при $t > 2t_1$ (т.е. при $v > u$).

Ответ: $t_2 = 6$ ч

3. Крейсер движется по прямому курсу в неподвижной воде с постоянной скоростью 54 км/ч. Катер, имеющий скорость 72 км/ч, проходит расстояние от кормы крейсера до его носа и обратно за 40 с. Найти длину крейсера в единицах СИ.

Дано:
$v_1 = 54$ км/ч = 15 м/с
$v_2 = 72$ км/ч = 20 м/с
$t = 40$ с
Найти:
$L = ?$

Решение:

Для упрощения решения задачи выберем систему отсчёта, связанную с крейсером. Тогда движение катера по ходу крейсера (от кормы до носа) будет происходить со скоростью $u' = v_2 - v_1$ за время $t_1 = L/u'$, а в обратную сторону со скоростью $u'' = v_2 + v_1$ за время $t_2 = L/u''$.

Тогда весь путь туда и обратно будет проделан за время:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{(v_2 - v_1)} + \frac{L}{(v_2 + v_1)} = \frac{2Lv_2}{(v_2^2 - v_1^2)}.$$

Откуда, выражая L, получаем: $L = \dfrac{(v_2^2 - v_1^2)}{2v_2} t = 175$ м.

Ответ: $L = 175$ м

4. За 2 с прямолинейного равноускоренного движения тело прошло 20 м, увеличив свою скорость в 3 раза. Определите в СИ конечную скорость тела.

Дано:
$l = 20$ м
$v = 3v_0$
$t = 2$ с
Найти:
$v = ?$

Решение:

Запишем основное уравнение кинематики поступательного движения:

$$S(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1) \qquad\qquad v(t) = v_0 + at. \quad (2)$$

Учтём, что $v = 3v_0$, $S = 20$ м, $t = 2$ с. Выразим из (2) ускорение, подставим в (1) и найдём v_0:

$$at = v(t) - v_0,\ a = \frac{3v_0 - v_0}{t} = 2\frac{v_0}{t} \to (1)$$

$$S(t) = v_0 t + \frac{2v_0 \cdot t^2}{t \cdot 2} = v_0 t + v_0 t = 2v_0 t, \qquad v_0 = \frac{S(t)}{2t}.$$

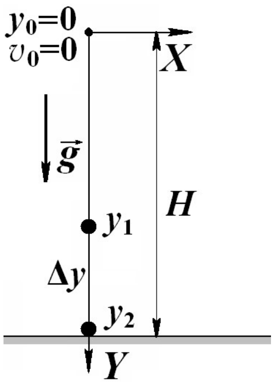
Тогда конечная скорость: $v(t) = 3v_0 = \dfrac{3S(t)}{2t} = \dfrac{3 \cdot 20}{2 \cdot 2} = 15$ м/с.

Ответ: $v = 15$ м/с

5. Свободно падающее тело с начальной скоростью, равной нулю, за последнюю секунду своего движения переместилось по вертикали на 45 м. Сколько времени и с какой высоты падало тело? Ответ дать в СИ.

Дано:
$\Delta y = 45$ м
$\Delta t = 1$ с
Найти:
$t = ?$
$H = ?$

Решение:



Направим ось OY вертикально вниз, начало координат расположим на высоте H от поверхности Земли (рисунок). Заметим, что высота, отсчитываемая от поверхности Земли, – величина всегда положительная. В нашем случае высота, с которой падает тело, равна значению координаты тела, находящегося, на поверхности Земли в выбранной системе отсчета.

Уравнение зависимости координаты тела от времени имеет вид:

$$y = \frac{gt^2}{2}.$$

Т. к. $\Delta y = y_2 - y_1$, то

$$\Delta y = \frac{gt^2}{2} - \frac{g(t-\Delta t)^2}{2} = \frac{2gt\Delta t - g\Delta t^2}{2} = \frac{g\Delta t(2t-\Delta t)}{2}.$$

Выразив полное время падения, получим:

$$t = \frac{2\Delta y}{2g\Delta t} + \frac{\Delta t}{2} = \frac{2\Delta y + g\Delta t^2}{2g\Delta t} = 5 \text{ с}.$$

Высоту, с которой упало тело, можно найти по формуле:

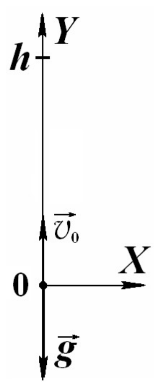
$$H = y = \frac{gt^2}{2} = 122{,}5 \text{ м}$$

Ответ: $t = 5$ с, $H = 122{,}5$ м.

6. Из ружья произведен выстрел вертикально вверх. Начальная скорость пули $v_0 = 49$ м/с. Какова максимальная высота полета пули и время ее движения до этой высоты? Найти путь и скорость пули через 10 с после выстрела. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в СИ.

Дано:
$v_0 = 49$ м/с
$t = 10$ с
Найти:
$t_{max} = ?$
$h = ?$
$S = ?$
$v = ?$

Решение:



Начало координат выберем в точке, совпадающей с положением пули в момент вылета из ствола ружья, ось OY укажем в направлении ее движения (рисунок). Движение пули происходит с ускорением 9,8 м/с^2, направленным вертикально вниз. Тогда координата пули и проекция ее скорости на ось OY в произвольный момент времени t соответственно равны:

$$y(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad v(t) = v_0 - gt. \qquad (1)$$

Время полета пули до верхней точки траектории определим из условия, что скорость в ней равна нулю: $0 = v_0 - gt_{max}$. Отсюда $t_{max} = v_0/g = 49/9{,}8 = 5$ с.

Такое же время пуля падала вниз, т.е. за 10 с своего движения пуля вернется в исходную точку. В этом легко убедиться, если в первом уравнении системы (1) положить координату $y = 0$ и найти соответствующие моменты времени:

$$0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad 0 = t\left(v_0 - \frac{gt}{2}\right), \quad t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{2v_0}{g} = 10\,\text{с}.$$

Таким образом, пуля пребывает в этой точке дважды: первый раз в момент выстрела, двигаясь вверх, и второй раз – в момент падения на Землю. Скорость пули v момент времени t определим, подставив значение t во второе уравнение системы (1):

$$v(t) = v_0 - gt = 49 - 9{,}8 \cdot 10 = -49 \text{ м/с}.$$

Знак «минус» свидетельствует о том, что направление вектора скорости противоположно направлению оси OY. Заметим, что модуль скорости пули в момент падения равен модулю начальной скорости пули при выстреле.

Максимальную высоту подъема пули найдем, подставив значение t_{max}, в первое уравнение системы (1):

$$h = y(t) = v_0 t_{max} - \frac{g t_{max}^2}{2} = v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{g v_0^2}{2g^2} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{49^2}{2 \cdot 9{,}8} = 122{,}5 \text{ м}.$$

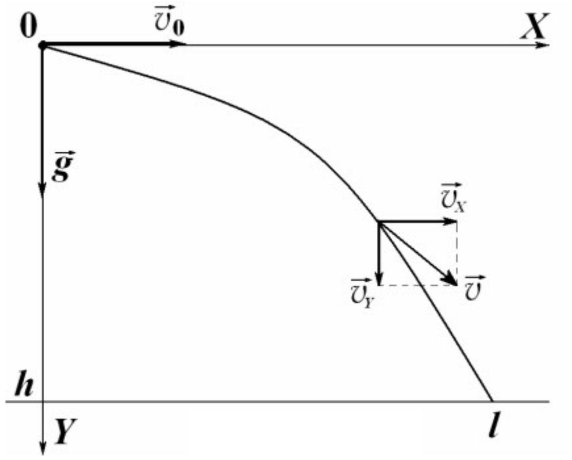
Путь, пройденный пулей за время t, равен удвоенной высоте подъёма h, т.е. $S = 2h = 2 \cdot 122{,}5 = 245$ м.

Ответ: $t_{max} = 5$ с, $h = 122{,}5$ м, $S = 245$ м, $v = -49$ м/с.

7. С вышки в горизонтальном направлении бросили камень, который через 2 секунды приземлился со скоростью 25 м/с. На каком расстоянии от основания вышки упал камень? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$t = 2$ с
$v = 25$ м/с
$g = 10$ м/с^2
Найти:
$l = ?$

Решение:



Движение тела, брошенного горизонтально с некоторой высоты, было рассмотрено ранее.

1) Горизонтальное перемещение происходит с постоянной скоростью $v_x = v_0$. За время падения камень проходит горизонтальный путь $l = v_x \cdot t$.

2) По вертикали движение камня равноускоренное с ускорением g, с нулевой начальной скоростью $v_{0y} = 0$. За время падения камень набирает вертикальную скорость: $v_y = v_{0y} + gt = gt$.

3) Т.к. нам известна полная скорость $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$, то мы можем найти v_x:

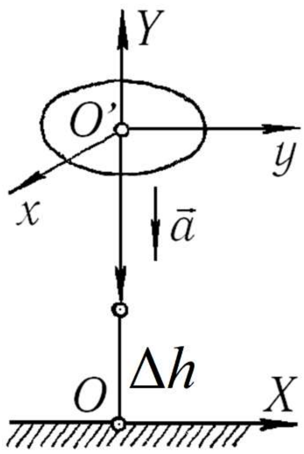
$v_x = \sqrt{v^2 - v_y^2} = \sqrt{v^2 - (gt)^2}$. В итоге, $l = t\sqrt{v^2 - (gt)^2} = 30$ м.

Ответ: $l = 30$ м.

8. Вертолет начал снижаться вертикально с ускорением 0,2 м/с^2. Лопасть винта вертолета имеет длину 5 м и совершает вращение вокруг оси с частотой 300 с$^{-1}$. Определить число оборотов лопасти за время снижении вертолета на 40 м.

Дано:
$a = 0{,}2$ м/с^2
$n = 300$ с$^{-1}$
$l = 5$ м
$\Delta h = 40$ м
Найти:
$N = ?$

Решение:



Неподвижную систему отсчёта свяжем с Землёй, а ось OY направим вертикально вверх вдоль траектории вертолета. Подвижную систему отсчета свяжем с осью винта вертолета так, чтобы вращение лопасти происходило в плоскости $xO'y$. В подвижной системе отсчета траекторией конца лопасти вертолета является окружность, что дает основание применять уравнение движения точки по окружности, т.е. $\varphi = \omega t = 2\pi nt$, где φ – угол поворота лопасти за время t, n — частота вращения.

Число оборотов N лопасти винта вертолета можно найти по формуле $N = \varphi/2\pi$ или

$$N = nt. \qquad (1)$$

Относительно неподвижной системы отсчета траектория конца лопасти – винтовая линия, однако движение самого вертолета прямолинейное равноускоренное. Уравнение зависимости перемещения от времени для этого движения имеет вид (в скалярной форме):

$$-\Delta h = -\frac{at^2}{2}, \qquad \Delta h = \frac{at^2}{2}.$$

Откуда время снижения вертолета $t = \sqrt{\frac{2\Delta h}{a}}$. Подставив значение t в формулу (1), получим

$$N = n\sqrt{\frac{2\Delta h}{a}} = 300\sqrt{\frac{2 \cdot 40}{0{,}2}} = 6000 \text{ оборотов.}$$

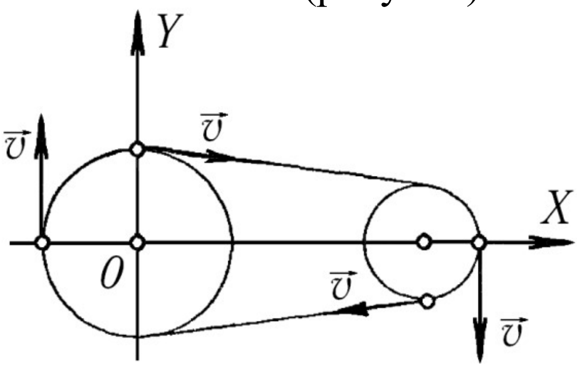
Ответ: $N = 6000$ оборотов.

9. Вал двигателя автомобиля вращается с угловой скоростью 180 рад/с. Определить в СИ линейную скорость ремня и угловую скорость шкива вентилятора автомобиля, если диаметр на валу двигателя 9 см, а вентилятора – 6 см. Сравнить периоды обращения и центростремительные ускорения периферийных точек каждого шкива.

Дано:
$\omega_д = 180$ рад/с
$d_Д = 9$ см $= 9 \cdot 10^{-2}$ м
$d_в = 6$ см $= 6 \cdot 10^{-2}$ м
Найти:
$\upsilon_в = ?$
$\omega_в = ?$
$T_д/T_в = ?$
$a_д/a_в = ?$

Решение:

Систему отсчета OXY свяжем с валом двигателя так, чтобы вращение шкивов происходило в плоскости OXY (рисунок).



Если проскальзывание ремня по поверхности шкива отсутствует, то все точки ремня и периферийные точки обоих шкивов обладают одинаковыми по модулю скоростями υ. Используя эту особенность, а также связь линейной скорости с угловой скоростью, получаем:

$$\upsilon_в = \upsilon = \omega_д \cdot R_д = \omega_д \cdot d_д/2 = 180 \cdot 4{,}5 \cdot 10^{-2} = 8{,}1 \text{ м/с};$$

$$\omega_в = \upsilon_в/R_в = 2\upsilon_в/d_в = 2 \cdot 8{,}1/6 \cdot 10^{-2} = 270 \text{ рад/с}.$$

Так как, $\omega_д = 2\pi/T_д$, $\omega_в = 2\pi/T_в$, то разделив второе равенство на первое, получим: $T_д/T_в = \omega_в/\omega_д = 1{,}5$.

Центростремительное ускорение определяется по формуле $a_n = \upsilon^2/R$. Тогда $a_д/a_в = d_в/d_д = 1/1{,}5 = 0{,}67$.

Ответ: $\upsilon_в = 8{,}1$ м/с, $\omega_в = 270$ рад/с, $T_д/T_в = 1{,}5$, $a_д/a_в = 0{,}67$.

10. Спутник Земли движется по круговой орбите на высоте h = 117,3 км над поверхностью и облетает Землю за время T = 97 мин. Найти скорость v спутника и ускорение свободного падения g_h, на этой высоте. Радиус Земли принять равным 6370 км. Ответ дать в СИ.

Дано:
h = 117,3 км = $1{,}173 \cdot 10^5$ м
$R_з$ = 6370 км = $6{,}37 \cdot 10^6$ м
T = 97 мин = $5{,}82 \cdot 10^3$ с
Найти:
v = ?
g_h = ?

Решение:

Зная период вращения T спутника, находим его угловую скорость: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Радиус орбиты: $R = R_з + h$. Отсюда находим скорость:

$$v = \omega R = 2\pi(R_з + h)/T = 7000 \text{ м/с},$$

и нормальное ускорение:

$$a_n = \omega^2 R = 4\pi^2(R_з + h)/T^2 = 7{,}55 \text{ м/с}^2.$$

Поскольку спутник вращается равномерно, нормальное ускорение совпадает с полным, которое и есть ускорение свободного падения g_h, на этой высоте.

Ответ: v = 7000 м/с, $g_h = a_n$ = 7,55 м/с^2.