

ДИНАМИКА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Балласт, какого веса P_B надо сбросить с равномерно спускающегося аэростата, чтобы он начал подниматься с той же скоростью? Вес аэростата с балластом $P = 16$ кН, подъемная сила аэростата $F_{\Pi} = 12$ кН. Силу сопротивления воздуха F_C считать одинаковой при подъеме и при спуске. Ответ дать в СИ.

Дано:

$$P = 16 \text{ кН} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$F_{\Pi} = 12 \text{ кН} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ Н}$$

$$F_C = \text{const}$$

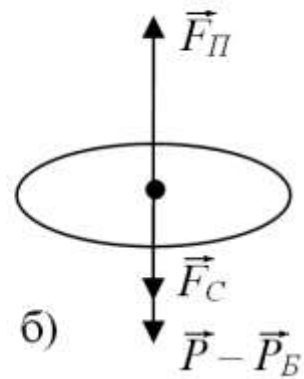
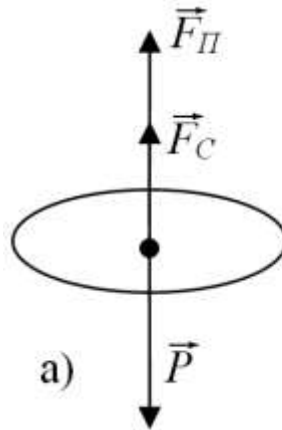
Найти:

$$P_B = ?$$

Решение:

Так как движение равномерное, то по первому закону Ньютона равнодействующая сила равна нулю, т.е.

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0.$$



При спуске аэростата (рис. а) это уравнение принимает вид:

$$F_{\Pi} + F_C - P = 0.$$

Когда балласт был сброшен, и аэростат начал подниматься (рис. б), получим уравнение следующего вида:

$$F_{\Pi} - F_C - (P - P_B) = 0.$$

Сложим оба уравнения, и найдем вес балласта:

$$2F_{\Pi} = 2P - P_B.$$

$$\text{Откуда } P_B = 2P - 2F_{\Pi} = 32000 - 24000 = 8000 = 8 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

Ответ: $P_B = 8 \cdot 10^3 \text{ Н.}$

2. Грузовик массой 5000 кг начинает движение с ускорением $1,5 \text{ м/с}^2$. С каким ускорением будет двигаться грузовик, если после загрузки его масса увеличилась вдвое? Сила тяги мотора постоянна и равна 8000 Н. Ответ дать в СИ.

Дано:

$$m_1 = 5 \cdot 10^3 \text{ кг}$$

$$a_1 = 1,5 \text{ м/с}^2$$

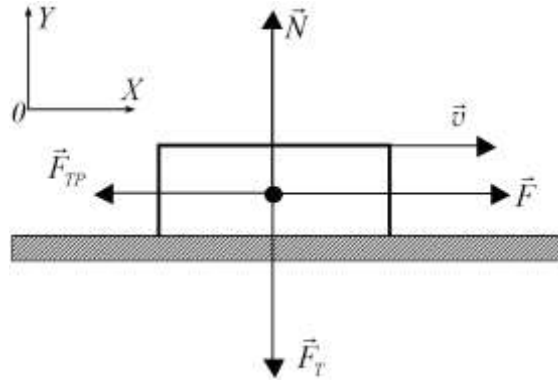
$$F = 8 \cdot 10^3 \text{ Н}$$

$$m_2 = 2m_1$$

Найти:

$$a_2 = ?$$

Решение:



Векторы сил, действующих на грузовик при его движении, изображены на рисунке. Запишем второй закон Ньютона в векторной форме: $\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}$, где вектор равнодействующей силы складывается из четырёх векторов: $\vec{F}_R = \vec{F}_T + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{TP}$.

В проекции на ось Y имеем: $a_Y = \frac{N - F_T}{m} = 0$, следовательно $N = F_T = mg$.

Второй закон Ньютона в проекции на ось X :

$$ma_X = ma = F - F_{TP} = F - \mu N = F - \mu mg.$$

Запишем систему уравнений в проекции на ось X для случаев пустого и загруженного автомобиля:

$$F - \mu m_1 g = m_1 a_1, \quad F - \mu m_2 g = m_2 a_2.$$

$$\text{Из первого уравнения найдём } \mu = \frac{F - m_1 a_1}{m_1 g}.$$

Из первого уравнения вычтем второе, и с учётом ($m_2 = 2m_1$) получим:

$$\mu(m_2 - m_1)g = m_1 a_1 - m_2 a_2, \quad \mu m_1 g = m_1 a_1 - 2m_1 a_2,$$

$$\mu g = a_1 - 2a_2,$$

$$a_2 = \frac{a_1 - \mu g}{2} = \frac{m_1 a_1 - F + m_1 a_1}{2m_1} =$$

$$= a_1 - \frac{F}{2m_1} = 1,5 - \frac{8 \cdot 10^3}{2 \cdot 5 \cdot 10^3} = 0,7 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $a_2 = 0,7 \text{ м/с}^2$.

3. Грузы одинаковой массы ($m_1 = m_2 = 0,5 \text{ кг}$) соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, укрепленный на конце стола

(см. рисунок в решении). Коэффициент трения груза m_2 о стол $\mu = 0,15$. Пренебрегая массой блока и трением в блоке, определить в единицах СИ: а) ускорение, с которым движутся грузы; б) силу натяжения нити.

Дано:

$$m_1 = m_2 = 0,5 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,15$$

Найти:

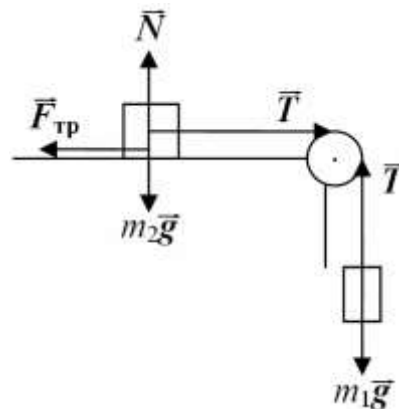
$$a = ?$$

$$T = ?$$

Решение:

По второму закону Ньютона уравнения движения грузов имеют вид:

$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 a = T - \mu m_2 g. \end{cases}$$



Сложим их, и получим

$$m_1 a + m_2 a = m_1 g - \mu m_2 g.$$

Откуда

$$a = \frac{(m_1 - \mu m_2)g}{m_1 + m_2} = \frac{(0,5 - 0,15 \cdot 0,5) \cdot 9,8}{0,5 + 0,5} = 4,17 \text{ м/с}^2;$$

$$T = m_1(g - a) = 0,5(9,8 - 4,17) = 2,82 \text{ Н.}$$

Ответ: $a = 4,17 \text{ м/с}^2$, $T = 2,82 \text{ Н.}$

4. Снаряд массой 5 кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость 300 м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой 3 кг полетел в обратном направлении со скоростью 100 м/с. Определить в СИ скорость второго, меньшего, осколка.

Дано:

$$m = 5 \text{ кг}$$

$$v = 300 \text{ м/с}$$

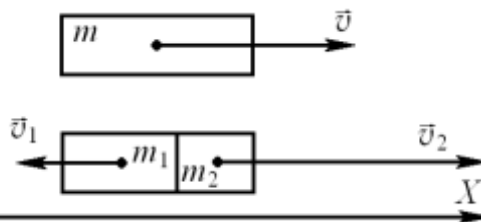
$$m_1 = 3 \text{ кг}$$

$$v_1 = 100 \text{ м/с}$$

Найти:

$$v_2 = ?$$

Решение:



На рисунке изображены ситуации до и после разрыва снаряда. По закону сохранения импульса полный импульс системы до разрыва равен полному импульсу системы после разрыва снаряда: $m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$. Возьмём проекцию на ось X :

$$mv = -m_1v_1 + m_2v_2.$$

Учтём, что $m_2 = m - m_1$. Тогда

$$v_2 = \frac{mv + m_1 v_1}{m_2} = \frac{mv + m_1 v_1}{m - m_1} = \frac{5 \cdot 300 + 3 \cdot 100}{2} = 900 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_2 = 900 \text{ м/с.}$

5. С башни высотой 20 м горизонтально со скоростью 10 м/с брошен камень массой 400 г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить кинетическую и потенциальную энергию камня через 1 с после начала движения. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$H = 20 \text{ м}$

$v_0 = 10 \text{ м/с}$

$m = 0,4 \text{ кг}$

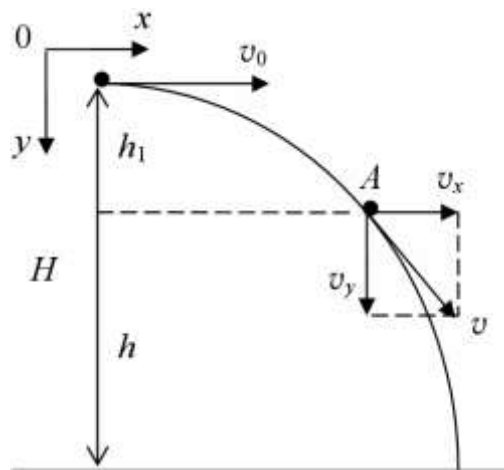
$t = 1 \text{ с}$

Найти:

$E_k = ?$

$E_n = ?$

Решение:



В точке A (см. рисунок) кинетическая и потенциальная энергии будут определяться соответственно мгновенной скоростью v и высотой h в данный момент времени:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}, \quad E_n = mgh,$$

где $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2},$

а высота: $h = H - h_1, \quad h_1 = \frac{gt^2}{2}.$

Тогда $E_k = \frac{m}{2} (v_0^2 + g^2 t^2) = \frac{0,4}{2} (100 + 96,04 \cdot 1) = 39,2 \text{ Дж},$

$$E_n = mg(H - \frac{gt^2}{2}) = 0,4 \cdot 9,8(20 - 4,9) = 59,2 \text{ Дж.}$$

Ответ: $E_k = 39,2 \text{ Дж}, E_n = 59,2 \text{ Дж.}$

6. Автомобиль массой 1,8 т равномерно движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути (см. рисунок в решении). Определить: а) работу (в МДж), совершаемую двигателем автомобиля на пути 5 км, если коэффициент трения

равен 0,1; б) развиваемую двигателем мощность (в кВт), если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин.

Решение:

Дано:

$$m = 1800 \text{ кг}$$

$$h = 3 \text{ м}$$

$$l = 100 \text{ м}$$

$$s = 5000 \text{ м}$$

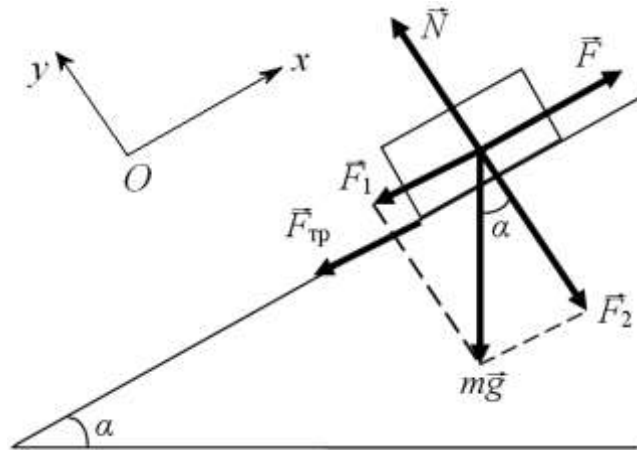
$$\mu = 0,1$$

$$t = 300 \text{ с}$$

Найти:

$$A = ? \text{ (МДж)}$$

$$P = ? \text{ (кВт)}$$



Определим \sin и \cos угла наклона дороги:

$$\sin \alpha = \frac{h}{l} = 0,03, \quad \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \cong 1.$$

Работу можно найти как произведение силы тяги двигателя на проделанный путь: $A = Fs$.

Силу тяги двигателя автомобиля найдём из второго закона Ньютона: $m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}} = m\vec{a} = 0$, т. к. движение равномерное ($a = 0$).

Запишем проекции второго закона Ньютона на координатные оси (см. рис.):

$$\begin{cases} F - F_1 - F_{\text{тр}} = F - mg \sin \alpha - F_{\text{тр}} = 0, \\ N - F_2 = N - mg \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Отсюда:

$$N = mg \cos \alpha, \quad F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha,$$

$$F = mg \sin \alpha + F_{\text{тр}} = mg(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)$$

Тогда работа силы тяги:

$$A = mgs(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) =$$

$$= 1800 \cdot 9,8 \cdot 5000(0,03 + 0,1 \cdot 1) \cong 1,15 \cdot 10^7 \text{ Дж},$$

$$P = \frac{mgs(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{t} =$$

$$= \frac{1800 \cdot 9,8 \cdot 5000(0,03 + 0,1 \cdot 1)}{300} \cong 3,8 \cdot 10^4 \text{ Вт}.$$

Ответ: $A = 11,5 \text{ МДж}$, $P = 38,3 \cdot \text{кВт}$.

7. Диск вращается в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью 3,14 рад/с. На расстоянии 12 см от оси на диске лежит тело. Каким должен быть минимальный коэффициент трения, чтобы тело не соскользнуло с диска? Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с².

Дано:

$$\omega = 3,14 \text{ рад/с}$$

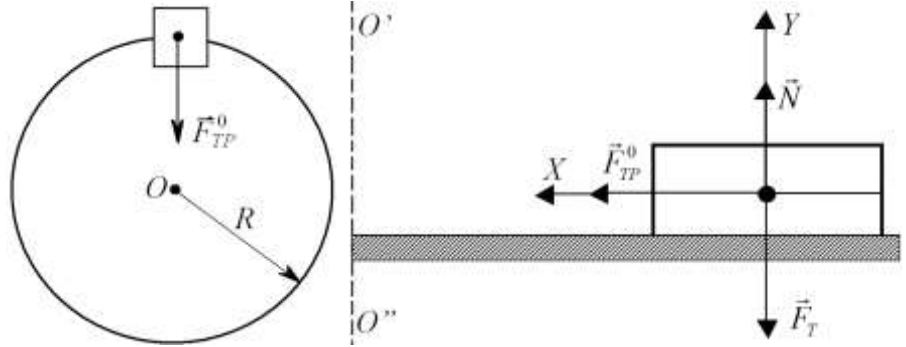
$$R = 0,12 \text{ м}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

Найти:

$$\mu_{\min} = ?$$

Решение:



вид сверху

вид сбоку

На рисунке показаны силы, действующие на тело массой m , вращающееся вместе с диском. Запишем второй закон Ньютона:

$$\vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{TP}^0 = m\vec{a}.$$

Проекция ускорения тела на ось Y равна нулю. Это означает, что сила нормальной реакции по величине равна силе тяжести:

$$F_T = N = mg.$$

В проекции на ось X имеем: $F_{TP}^0 = ma_X$, где a_X – центростремительное ускорение: $a_X = v^2/R = \omega^2 R$. Таким образом, сила трения покоя, направленная к центру вращения и удерживающая тело на диске: $F_{TP}^0 = m\omega^2 R$. Эта сила не должна превышать силу трения скольжения: $F_{TP}^0 \leq F_{TP} = \mu N = \mu mg$.

Тогда приходим к неравенству: $\mu \geq \frac{\omega^2 R}{g}$. Отсюда находим

минимальный коэффициент трения, при котором тело ещё не соскальзывает с диска:

$$\mu_{\min} = \frac{\omega^2 R}{g} = \frac{10 \cdot 0,12}{10} = 0,12.$$

Ответ: $\mu_{\min} = 0,12$.

8. Через реку переброшен выпуклый мост, имеющий форму дуги окружности радиусом 100 м. Через мост необходимо проехать грузовику массой 5 т. При какой минимальной скорости грузовика это возможно? Максимальная нагрузка, которую может выдержать мост, равна 44 кН. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$m = 5000 \text{ кг}$$

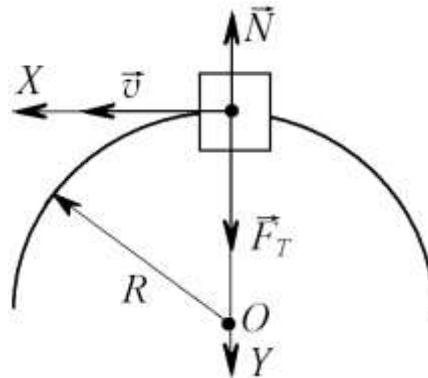
$$R = 100 \text{ м}$$

$$P_{\max} = 44000 \text{ Н}$$

Найти:

$$v_{\min} = ?$$

Решение:



Давление автомобиля на мост при движении с постоянной скоростью v будет максимально на вершине моста (см. рисунок). Запишем второй закон Ньютона в векторном виде: $\vec{F}_T + \vec{N} = m\vec{a}$. В проекции на ось Y он запишется: $F_T - N = ma_Y$, где сила тяжести $F_T = mg$. По третьему закону Ньютона сила нормальной реакции моста N равна весу автомобиля P (силе его давления на мост): $N = P$.

Ускорение автомобиля является центростремительным ускорением при движении по окружности: $a_Y = v^2/R$. Сделав все подстановки, получим: $mg - P = m \frac{v^2}{R}$. Выразим отсюда скорость:

$$v_{\min} = \sqrt{R \left(g - \frac{P_{\max}}{m} \right)} = \sqrt{100 \left(9,8 - \frac{44 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^3} \right)} = 10 \text{ м/с.}$$

Ответ: $v_{\min} = 10 \text{ м/с.}$

9. Пуля массой 10 г вылетела из винтовки со скоростью 1000 м/с, в мишень вошла через 0,2 с со скоростью 600 м/с. Определить среднюю мощность силы сопротивления воздуха полёту пули. Ответ дать в киловаттах.

Дано:

$$m = 10^{-2} \text{ кг}$$

$$v_1 = 1000 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 600 \text{ м/с}$$

$$\Delta t = 0,2 \text{ с}$$

Найти:

$$P_C = ? \text{ (кВт)}$$

Решение:

Мощность силы сопротивления воздуха можно рассчитать, как работу, совершённую этой силой за единицу времени. Учтём, что работа силы сопротивления отрицательна, т.е. приводит к уменьшению кинетической энергии пули:

$$A_C = -(E_{к2} - E_{к1}) = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_2^2}{2} = \frac{m}{2} (v_1^2 - v_2^2).$$

Тогда, искомая мощность:

$$P_C = \frac{A_C}{\Delta t} = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{2\Delta t} = \frac{10^{-2} \cdot (1000^2 - 600^2) \cdot 10^4}{2 \cdot 0,2} = 16 \cdot 10^3 \text{ Вт.}$$

Ответ: $P_C = 16 \text{ кВт.}$

10. Пружина детского пистолета под действием силы 9,8 Н сжалась на 4 см. На какую высоту подлетит пулька массой 1 г при выстреле вертикально вверх? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$F = 9,8 \text{ Н}$$

$$\Delta l = 0,04 \text{ м}$$

$$m = 10^{-3} \text{ кг}$$

Найти:

$$h = ?$$

Решение:

Проследим за превращениями механической энергии в данной ситуации. Потенциальная энергия сжатой пружины $E_{п1}$ при её распрямлении полностью переходит в кинетическую энергию $E_{к1}$ пульки в момент выстрела. По мере подъёма пульки вверх её кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию $E_{п2}$. В наивысшей точке подъёма скорость пульки (и соответственно кинетическая энергия) будет равна нулю, и вся механическая энергия пульки будет равна потенциальной на высоте h . Поскольку в системе действуют только потенциальные силы, то закон сохранения механической энергии можно записать в виде: $E_{п1} = E_{к1} = E_{п2}$.

$$\text{Для потенциальной энергии сжатой пружины: } E_{п1} = \frac{k\Delta l^2}{2}.$$

Жёсткость пружины k найдём из третьего закона Ньютона:

$$F = |F_{ynp}| = k\Delta l, \quad k = \frac{F}{\Delta l}.$$

Тогда,
$$E_{n1} = \frac{F\Delta l}{2} = E_{n2} = mgh.$$

Отсюда,
$$h = \frac{F\Delta l}{2mg} = \frac{9,8 \cdot 4 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8} = 20 \text{ м.}$$

Ответ: $h = 20 \text{ м.}$

11. Тело в форме куба, с ребром 10 см, находится в воде. Нижняя грань куба удалена от поверхности воды на расстояние 1 м. Чему равна сила, действующая со стороны воды на нижнюю грань куба? Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$a = 0,1 \text{ м}$

$h = 1 \text{ м}$

Найти:

$F = ?$

Решение:

Давление p , оказываемое водой на нижнюю грань куба (без учёта атмосферного давления) равно давлению столба жидкости на глубине h : $p = \rho gh$. Здесь ρ – плотность воды, g – ускорение свободного падения. От давления перейдём к силе давления:

$F = pS$, где $S = a^2$ – площадь грани куба.

В итоге, получим: $F = \rho gha^2 = 10^3 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 0,01 = 98 \text{ Н.}$

Ответ: $F = 98 \text{ Н.}$

12. Сила Архимеда уменьшает вес тела, полностью погруженного в воду, в 6 раз. Чему равна плотность вещества, из которого изготовлено это тело? Выталкивающей силой воздуха пренебречь. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$\eta = P/P_B = 6$

Найти:

$\rho_T = ?$

Решение:

Положим тело на неподвижную опору. По третьему закону Ньютона вес тела P (сила давления на опору) равен силе реакции опоры N : $P = N$. Рассмотрим силы, действующие на тело в двух случаях: а) в воздухе; б) в воде (см. рисунок). В первом случае сила реакции опоры равна силе тяжести: $N = F_T$. Во втором случае появляется сила Архимеда F_A , действующая на тело со стороны воды, и условие статического равновесия примет вид: $N_B + F_A = F_T$. При этом, $\eta = P/P_B = N/N_B = F_T/(F_T - F_A)$.

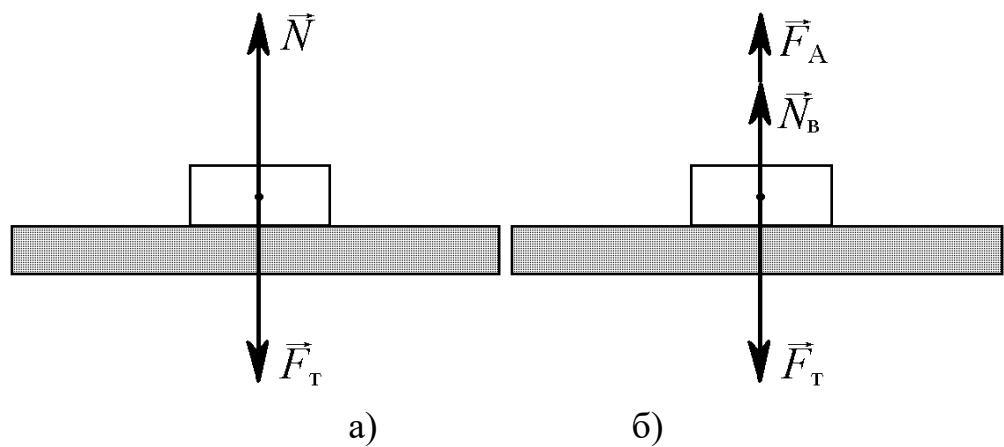


Рисунок – Силы, действующие на тело: а) в воздухе; б) в воде

Выражение для силы тяжести: $F_T = mg = \rho_T Vg$, где V – объём тела. Выражение для силы Архимеда: $F_A = \rho Vg$, где ρ – плотность воды. Подставим их в выражение для η : $\eta = \rho_T Vg / (\rho_T Vg - \rho Vg) = \rho_T / (\rho_T - \rho)$.

Выражая ρ_T , получим: $\rho_T = \eta \rho / (\eta - 1) = 10^3 \cdot 6 / 5 = 1200 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: $\rho_T = 1200 \text{ кг/м}^3$.