КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ
ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. Груз, висящий на пружине, оттянули вниз и отпустили. За какое время от начала движения груз пройдет путь, равный половине амплитуды. Период колебаний груза равен 2,4 с? Ответ дать в единицах СИ.

<u>Дано:</u>
T = 2,4 с
<u>Найти:</u>
t = ?

Решение:

Запишем закон смещения груза от положения равновесия при гармонических колебаниях: $x(t) = A\sin(\omega t + \varphi_0)$. В начальный момент времени $t = 0$ смещение груза максимально, т.е. $x(0) = A$. Это означает, что $\sin(\varphi_0) = 1$, откуда определяем начальную фазу колебания: $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда закон колебания может быть преобразован:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \pi/2) = A\cos(\omega t).$$

В интересующий нас момент времени смещение груза от положения равновесия $x(t) = A/2$. Из равенства $A/2 = A\cos(\omega t)$ следует, что $\cos(\omega t) = 1/2$, т.е. $\omega t = \pi/3$. Учитывая, что циклическая частота ω связана с периодом колебаний T соотношением $\omega = 2\pi/T$, получаем выражение для времени, за которое груз достигнет указанного положения:

$$t = \pi/3\omega = \pi T/6\pi = T/6 = 2{,}4/6 = 0{,}4 \text{ с}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } t = 0{,}4 \text{ с}}$

2. Полная энергия колебаний груза на пружине равна 0,1 Дж. Определить максимальную силу, действующую на тело в процессе колебаний, если амплитуда колебаний составляет 5 см. Ответ дать в единицах СИ.

<u>Дано:</u>
W = 0,1 Дж
A = 0,05 м
<u>Найти:</u>
F_{max} = ?

Решение:

Возвращающая упругая сила, действующая на тело со стороны пружины, определяется законом Гука: $F_{упр} = -k|x|$. Эта сила максимальна в крайнем положении, когда смещение x от положения равновесия максимально, т.е. $F_{max} = kx_{max} = kA$. Чтобы найти неизвестную жесткость пружины k, запишем выражение для потенциальной энергии пружинного маятника: $W_П = kx/2$. Учтем, что полная энергия колебаний равна максимальному значению потенциальной энергии: $W = W_П$

$_{max} = kA^2/2$, откуда находим $k = 2W/A^2$. Для максимальной силы получаем: $F_{max} = kA = 2W/A$.

Проведём расчёты: $F_{max} = 2\cdot 0{,}1/0{,}05 = 4$ Н.

$\boxed{\text{Ответ: } F_{max} = 4 \text{ Н.}}$

3. Длина одного из математических маятников на 1,5 см больше длины другого. В то время как первый маятник делает 7 колебаний, второй делает на одно колебание больше. Определить в миллисекундах период колебания второго маятника. Принять ускорение свободного падения равным 10 м/с^2.

Дано:
$\Delta l = 0{,}015$ м
$N_1 = 7$
$N_2 = 8$
$g = 10$ м/с^2
Найти:
$T_2 = ?$

Решение:

Период колебаний второго маятника определяется выражением: $T_2 = 2\pi(l_2/g)^{1/2}$, где пока неизвестна длина этого маятника l_2. За одно и то же время t маятники совершают различное число колебаний, поэтому их периоды отличаются:

$T_1 = t/N_1$ и $T_2 = t/N_2$.

Отсюда видно, что $N_2/N_1 = T_1/T_2 = (l_1/l_2)^{1/2}$.

Ясно, что длина первого маятника больше, чем второго: $l_1 = l_2 + \Delta l$.

С учётом этого имеем: $N_2/N_1 = (1 + \Delta l/l_2)^{1/2}$, откуда находим длину второго маятника: $l_2 = \Delta l/[(N_2/N_1)^2 - 1] = 0{,}049$ м.

Теперь стало возможным вычислить период колебаний второго маятника:

$$T_2 = 2\pi(0{,}049/10)^{1/2} = 0{,}14\pi = 0{,}4396 \text{ с} = 439{,}6 \text{ мс}.$$

$\boxed{\text{Ответ: } T_2 = 439{,}6 \text{ мс.}}$

4. Во сколько раз период колебаний математического маятника на некоторой планете больше, чем на Земле, если радиус планеты вдвое меньше радиуса Земли, а их плотности одинаковы?

Дано:
$R/R_x = 2$
$\rho = \rho_x$
Найти:
$T_x/T = ?$

Решение:

Период колебаний математического маятника на Земле вычисляется по формуле $T = 2\pi(l/g)^{1/2}$, а на некоторой планете: $T_x = 2\pi(l/g_x)^{1/2}$. Взяв отношение этих периодов, имеем: $T_x/T = (g/g_x)^{1/2}$. Из динамики известно выражение (2.9) для ускорения свободного падения у поверхности Земли: $g = GM/R^2$, где G – гравитационная постоянная, а M и R – масса и радиус Земли соответственно. Массу Земли можно выразить через ее плотность: $M = \rho V$.

Считая Землю идеальным шаром, находим ее объем: $V = 4\pi R^3/3$.

Итак, на Земле ускорение свободного падения

$$g = G\rho 4\pi R^3/3R^2 = G\rho 4\pi R/3,$$

и, аналогично, на другой планете $g_x = G\rho 4\pi R_x/3$.

Находим отношение $g/g_x = R/R_x$.

Окончательно получаем: $T_x/T = (R/R_x)^{1/2} = (2)^{1/2} = 1{,}41$.

Ответ: $T_x/T = 1{,}41$.

5. Когда груз неподвижно висел на вертикальной пружине, ее удлинение составило 2,5 см. Затем груз оттянули и отпустили, вследствие чего он начал совершать гармонические колебания. Какова циклическая частота колебаний груза. Ответ дать в единицах СИ. Принять ускорение свободного падения равным 10 м/с^2.

Дано:
$\Delta x = 0{,}025$ м
$g = 10$ м/с^2
Найти:
$\omega = ?$

Решение:

Циклическая частота колебаний пружинного маятника определяется выражением: $\omega = 2\pi/T = (k/m)^{1/2}$, где неизвестны ни жесткость пружины k, ни масса груза m. Целесообразно искать сразу отношение этих величин. Для этого надо учесть, что в состоянии статического равновесия сила тяжести $F_т$, действующая на груз со стороны Земли, уравновешивается упругой силой $F_{упр}$, действующей на груз со стороны растянутой пружины: $F_т = F_{упр}$. Подставляя сюда выражения для силы тяжести $F_т = mg$ и для упругой силы $F_{упр} = k\Delta l$, имеем: $mg = k\Delta l$, откуда находим отношение двух величин: $k/m = g/\Delta l$. Таким образом, циклическая частота колебаний груза на пружине

$$\omega = (g/\Delta l)^{1/2} = (10/0{,}025)^{1/2} = 20 \text{ рад/с}.$$

Ответ: $\omega = 20$ рад/с.

6. Колебательный контур с конденсатором емкостью 0,5 мкФ настроен на частоту 600 Гц. Если параллельно этому конденсатору подключить другой конденсатор, то частота колебаний в контуре станет равной 200 Гц. Найти в микрофарадах емкость второго конденсатора.

Дано:
$C_1 = 5\cdot 10^{-5}$ Ф
$\nu_1 = 600$ Гц
$\nu = 200$ Гц
Найти:
$C_2 = ?$ (мкФ)

Решение:

Первоначальная частота ν_1 электрических колебаний в контуре находится по формуле

$$\nu_1 = 1/2\pi(LC_1)^{1/2}.$$

После подключения второго конденсатора с емкостью C_2 частота колебаний изменится: $\nu = 1/2\pi(LC)^{1/2}$, где C – ёмкость получившейся батареи. При параллельном соединении конденсаторов их общая емкость равна $C = C_1 + C_2$, поэтому для частоты имеем: $\nu = 1/2\pi[L(C_1 + C_2)]^{1/2}$. Взяв отношение этих двух частот колебаний, получаем:

$$\nu_1/\nu = [(C_1 + C_2)/C_1]^{1/2} = [1 + C_2/C_1]^{1/2}.$$

Отсюда находим емкость

$$C_2 = C_1\cdot[(\nu_1/\nu)^2 - 1] = 8\cdot C_1 = 4\cdot 10^{-6}\ \Phi = 4\ \text{мкФ}.$$

Ответ: $C_2 = 4$ мкФ.

7. К конденсатору, заряд которого 2,5 нКл, подключили катушку индуктивности. Определить максимальный ток, протекающий через катушку, если частота свободных колебаний образованного контура равна 40 МГц. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$q_{max} = 2{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл
$\nu = 4\cdot 10^7$ Гц
Найти:
$I_{max} = ?$

Решение:

Полная энергия колебаний в контуре со временем не изменяется (потерями на излучение электромагнитных волн как обычно, пренебрегаем). При полной разрядке конденсатора эта энергия полностью переходит в энергию магнитного поля катушки, которая в этот момент максимальна:

$$W_{L\,max} = LI_{max}^2/2.$$

При полной зарядке конденсатора вся энергия контура сосредоточена в энергии электрического поля конденсатора, которая при этом достигает своего максимального значения: $W_{C\,max} = q_{max}^2/2C$.

Итак, по закону сохранения энергии можем записать:

$$W_{L\,max} = W_{C\,max} \text{ или } LI_{max}^2/2 = q_{max}^2/2C,$$

откуда находим $I_{max} = q_{max}/(LC)^{1/2}$. Теперь учтем, что частота свободных колебаний в контуре определяется выражением $\nu = 1/2\pi(LC)^{1/2}$, откуда выражаем $(LC)^{1/2} = 1/2\pi\nu$.

Окончательно для силы максимального тока имеем:

$$I_{max} = q_{max}/(LC)^{1/2} = 2\pi\nu q_{max} = 2\cdot 3{,}14\cdot 4\cdot 10^7\cdot 2{,}5\cdot 10^{-9} = 0{,}628\ \text{А}.$$

Ответ: $I = 0{,}628$ А.

8. При резонансе в колебательном контуре с индуктивностью 20 мГн и электроемкостью 50 мкФ амплитуда тока равна 3 А. Определить амплитуду напряжения на конденсаторе. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$L = 2\cdot10^{-2}$ Гн
$C = 5\cdot10^{-5}$ Ф
$I_{max} = 3$ А
Найти:
$U_{C\,max} = ?$

Решение:

Запишем закон Ома для участка цепи переменного тока, где имеется конденсатор, в терминах амплитудных (максимальных) значений: $I_{max} = U_{C\,max}/X_C$. Здесь величина $X_C = 1/\Omega_{рез}C$ – емкостное сопротивление при резонансной циклической частоте $\Omega_{рез}$ вынуждающей ЭДС. Из этих соотношений находим амплитуду напряжения на конденсаторе: $U_{C\,max} = I_{max}/\Omega_{рез}C$. Теперь учтем, что резонансная циклическая частота $\Omega_{рез}$ совпадает с циклической частотой ω свободных колебаний в контуре:

$$\Omega_{рез} = \omega = 1/(LC)^{1/2}.$$

После указанной подстановки приходим к окончательному результату для амплитуды напряжения на конденсаторе:

$$U_{C\,max} = I_{max}(LC)^{1/2}/C = I_{max}(L/C)^{1/2} = 3\cdot(2\cdot10^{-2}/5\cdot10^{-5})^{1/2} = 60 \text{ В}.$$

Ответ: $U_{C\,max} = 60$ В.

9. В некоторой среде распространяются волны. За время, в течение которого частица среды совершает 140 колебаний, волна распространилась на расстояние 98 метров. Определить длину волны. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:
$N = 140$
$r = 98$ м
Найти:
$\lambda = ?$

Решение:

Длина волны λ может быть найдена из выражения для и скорости распространения волны $v = \lambda\nu$, где ν – частота колебаний в волне. Отсюда имеем: $\lambda = v/\nu$. Теперь необходимо записать формулу для скорости волны как кинематического объекта: $v = r/t$, а также выражение для частоты колебаний: $\nu = N/t$. Итоговое выражение для длины волны выглядит так: $\lambda = r/N$. Простота этого результата наводит на мысль о том, что он может быть получен более простым и наглядным способом. Подставляя численные данные, получим: $\lambda = 98/140 = 0,7$ м.

Ответ: $\lambda = 0,7$ м.

10. Скорость звука в воде равна 1450 м/с. На каком минимальном расстоянии находятся точки, совершающие колебания в противоположных фазах, если частота колебаний равна 725 Гц? Ответ дать в единицах СИ.

<u>Дано:</u>
υ = 1450 м
ν = 725 Гц
<u>Найти:</u>
l = ?

Решение:

Абсолютное значение разности фаз колеблющихся точек, находящихся на расстоянии l друг от друга, определяется выражением $|\Delta\Phi| = kl$, где k – волновое число. Выразим его через частоту колебаний ν и скорость распространения v волны: $k = \omega/v = 2\pi\nu/v$. Итак, $|\Delta\Phi| = 2\pi\nu l/v$, откуда находим расстояние между точками $l = |\Delta\Phi|v/2\pi\nu$. Для точек волны, колеблющихся в противоположных фазах $|\Delta\Phi| = \pi$. В итоге приходим к следующему выражению: $l = v/2\nu$. Расчёт даёт $l = 1450/2\cdot725 = 1$ м.

Ответ: l = 1 м.