

МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА

ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

1. На сколько увеличилась температура идеального одноатомного газа, первоначально имевшего температуру 17°C , если средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул газа в результате нагрева возросла в три раза. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$T_1 = 290 \text{ К}$$

$$\eta = E_2/E_1 = 3$$

Найти:

$$\Delta T = ?$$

Решение:

Запишем выражение для средней энергии поступательного движения ($i = 3$): $E = 3kT/2$.

Тогда, $\eta = E_2/E_1 = T_2/T_1$. Отсюда получим, что $T_2 = \eta T_1$.

Запишем искомую величину:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = T_1(\eta - 1) = 580 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = 580 \text{ К}.$

2. Какова средняя квадратичная скорость движения молекул газа, который занимает объём $1,2 \text{ м}^3$ при давлении 30 кПа ? Масса газа $0,3 \text{ кг}$. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$V = 1,2 \text{ м}^3$$

$$p = 3 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$m = 0,3 \text{ кг}$$

Найти:

$$v_{\text{кв}} = ?$$

Решение:

Запишем выражение для средней квадратичной скорости молекул газа: $v_{\text{кв}} = (3RT/\mu)^{1/2}$. В это выражение входит несколько неизвестных величин. Избавимся от них, воспользовавшись уравнением Менделеева–Клапейрона: $pV = (m/\mu)RT$.

Отсюда, получим $RT/\mu = pV/m$.

Подставим это выражение в формулу для средней квадратичной скорости и произведём расчёты:

$$v_{\text{кв}} = (3pV/m)^{1/2} = (3 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 1,2 / 0,3)^{1/2} = 600 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v_{\text{кв}} = 600 \text{ м/с}.$

3. Некоторое количество водорода находится при температуре 200 К и давлении 400 Па. Газ нагревают до температуры 10^4 К, при которой молекулы водорода практически полностью распадаются на атомы. Определить новое значение давления газа, если его объём и масса остались без изменения. Ответ дать в килопаскалях.

Дано:

$$T_1 = 200 \text{ К}$$

$$p_1 = 400 \text{ Па}$$

$$T_2 = 10^4 \text{ К}$$

$$m = \text{const}$$

$$V = \text{const}$$

Найти:

$$p_2 = ? \text{ (кПа)}$$

Решение:

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний газа:

$$1) \text{ до диссоциации} \quad p_1 V = (m/\mu_1) RT_1,$$

$$2) \text{ после диссоциации} \quad p_2 V = (m/\mu_2) RT_2.$$

Разделив второе уравнение на первое, получим:

$$p_2/p_1 = (\mu_1 \cdot T_2 / \mu_2 \cdot T_1), \quad p_2 = p_1 \cdot (\mu_1 \cdot T_2 / \mu_2 \cdot T_1).$$

Учтём, что молярная масса молекулярного водорода μ_1 в два раза больше, чем молярная масса атомарного водорода μ_2 : $\mu_1/\mu_2 = 2$. В итоге, для искомого давления получим выражение и произведём расчёты:

$$p_2 = 2p_1 \cdot (T_2/T_1) = 2 \cdot 400 \cdot 10^4 / 200 = 4 \cdot 10^4 \text{ Па} = 40 \text{ кПа}.$$

$$\text{Ответ: } p_2 = 40 \text{ кПа}.$$

4. Кислород при давлении 100 кПа и температуре 27 °С занимает объём 5 л. При увеличении давления до 200 кПа объём газа уменьшился на 1 л. Чему равна температура газа в этом состоянии? Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$T_1 = 300 \text{ К}$$

$$V_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p_2 = 2 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$\Delta V = 1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

Найти:

$$T_2 = ?$$

Решение:

Считая количество кислорода неизменным, запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для двух состояний:

$$1) \text{ начальное} \quad p_1 V_1 = (m/\mu) RT_1,$$

$$2) \text{ конечное} \quad p_2 V_2 = (m/\mu) RT_2.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$p_2 V_2 / p_1 V_1 = T_2 / T_1, \quad T_2 = T_1 \cdot (p_2 V_2 / p_1 V_1).$$

Учитывая, что конечный объём кислорода $V_2 = V_1 - \Delta V$, получим окончательно выражение для температуры T_2 и произведём расчёты:

$$\Delta V / p_1 V_1 = 24 \cdot 10^4 / 5 \cdot 10^2 = 480 \text{ К}.$$

$$\text{Ответ: } T_2 = 480 \text{ К}.$$

5. Два баллона соединены тонкой трубкой с краном. В одном баллоне находится $1,5 \text{ м}^3$ азота при давлении 40 Па , в другом – 3 м^3 кислорода при давлении 25 Па . Какое давление установится в баллонах, если открыть кран? Температура газов одинакова и остаётся постоянной. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$V_1 = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p_1 = 40 \text{ Па}$$

$$V_2 = 3 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$$

$$p_2 = 25 \text{ Па}$$

Найти:

$$p = ?$$

Решение:

После того, как будет открыт кран, газы займут весь объём $V_1 + V_2$ обоих баллонов. Поскольку процесс перемешивания газов – изотермический ($T = \text{const}$), то для каждого газа должны выполняться равенства:

$$p_1 V_1 = p'_1 (V_1 + V_2), \quad p_2 V_2 = p'_2 (V_1 + V_2),$$

где p'_1, p'_2 – давления газов после перемешивания (парциальные давления). Из этих равенств найдём парциальные давления газов:

$$p'_1 = p_1 V_1 / (V_1 + V_2), \quad p'_2 = p_2 V_2 / (V_1 + V_2).$$

Согласно закону Дальтона давление смеси газов p равно сумме парциальных давлений газов, входящих в смесь:

$$p = p'_1 + p'_2 = (p_1 V_1 + p_2 V_2) / (V_1 + V_2) = \\ = (40 \cdot 1,5 + 25 \cdot 3) \cdot 10^{-3} / (1,5 + 3) \cdot 10^{-3} = 30 \text{ Па}.$$

Ответ: $p = 30 \text{ Па}$.

6. Под поршнем в цилиндре, площадь основания которого равна $0,01 \text{ м}^2$, находится газ при температуре 280 К и давлении 100 кПа . На поршень положили груз весом 200 Н , вследствие чего поршень опустился. На сколько градусов нужно нагреть газ для того, чтобы поршень вернулся в начальное положение? Массу поршня и трение не учитывать.

Дано:

$$S = 0,01 \text{ м}^2$$

$$T_1 = 280 \text{ К}$$

$$p_1 = 10^5 \text{ Па}$$

$$P = 200 \text{ Н}$$

$$V_2 = V_1 = V$$

Найти:

$$\Delta T = ?$$

Решение:

Поскольку в каждом из случаев, изображённых на рисунке ниже, поршень покоится, мы имеем право записать для них условие статического равновесия поршня: $F_1 = F_0$ и $F_2 = F_0 + P$. Здесь F_0 – сила атмосферного давления, F_1, F_2 – силы, действующие на поршень со стороны газа в цилиндре, в каждом из указанных состояний. Переходя от сил к давлениям, поделим оба уравнения на площадь поршня S :

$$p_1 = F_1 / S = F_0 / S = p_0,$$

$$p_2 = F_2/S = F_0/S + P/S = p_0 + P/S.$$

Здесь p_0 – атмосферное давление, а p_1 , p_2 – давления газа под поршнем в первом и во втором случае.

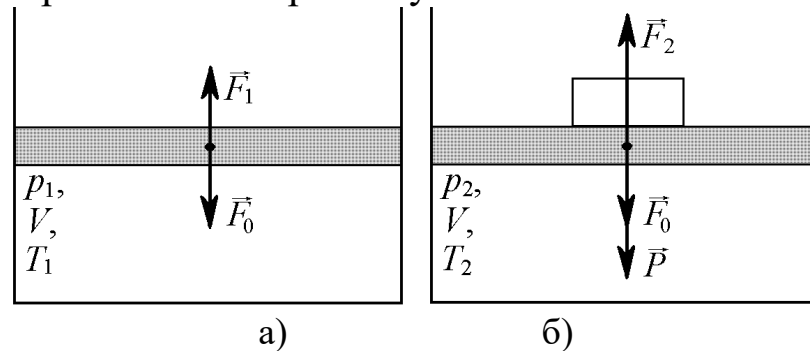


Рисунок – Силы, приложенные к поршню:
а) в начале процесса; б) в конце процесса

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для начального и конечного состояний:

$$p_1 V = (m/\mu)RT_1, \quad p_2 V = (m/\mu)RT_2.$$

Разделив второе уравнение на первое, выразим T_2 :

$$T_2 = T_1 p_2 / p_1.$$

Искомая разность температур $\Delta T = T_2 - T_1 = T_1(p_2 - p_1)/p_1$.

Подставляя выражения для p_1 и p_2 , получим:

$$\Delta T = PT_1/p_1 S = 200 \cdot 280 / 10^5 \cdot 0,01 = 56 \text{ К}.$$

Ответ: $\Delta T = 56 \text{ К}.$

7. Определить плотность смеси 0,028 кг азота и 0,008 кг кислорода, при давлении 83,1 кПа и температуре 127 °С. Ответ дать в единицах СИ.

Дано:

$$m_1 = 0,028 \text{ кг}$$

$$m_2 = 0,008 \text{ кг}$$

$$p = 8,31 \cdot 10^4 \text{ Па}$$

$$T = 400 \text{ К}$$

Найти:

$$\rho = ?$$

Решение:

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов:

$$pV = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT,$$

где μ_1 , μ_2 – молярные массы азота и кислорода.

Поскольку плотность газовой смеси:

$$\rho = (m_1 + m_2)/V, \text{ то выразим из уравнения}$$

Менделеева–Клапейрона объём V и подставим

в выражение для плотности:

$$V = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT/p = (m_1\mu_2 + m_2\mu_1)RT/p\mu_1\mu_2.$$

Окончательное выражение для ρ будет иметь вид:

$$\rho = (m_1 + m_2)p\mu_1\mu_2/(m_1\mu_2 + m_2\mu_1)RT.$$

Проведём расчёты, и получим: $\rho = 0,72 \text{ кг/м}^3$.

Ответ: $\rho = 0,72 \text{ кг/м}^3$.

8. Найти в СИ молярную массу смеси 32 г кислорода и 84 г азота.

Дано:

$$m_1 = 32 \text{ г} = 0,032 \text{ кг}$$

$$m_2 = 84 \text{ г} = 0,084 \text{ кг}$$

$$\mu_1 = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$\mu_2 = 0,028 \text{ кг/моль}$$

Найти:

$$\mu_{см} = ? \quad (\text{кг/моль})$$

Решение:

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона для смеси газов:

$$pV = (m_{см}/\mu_{см})RT = (m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2)RT,$$

где μ_1 , μ_2 – молярные массы азота и кислорода.

Поскольку полная масса газовой смеси:

$$m_{см} = (m_1 + m_2), \text{ то выразим молярную массу}$$

смеси из равенства:

$$m_{см}/\mu_{см} = m_1/\mu_1 + m_2/\mu_2.$$

Окончательное выражение для ρ будет иметь вид:

$$\mu_{см} = (m_1 + m_2)\mu_1\mu_2/(m_1\mu_2 + m_2\mu_1).$$

Проведём расчёты, и получим: $\mu_{см} = 0,029 \text{ кг/моль}$.

Ответ: $\mu_{см} = 0,029 \text{ кг/моль}$.

9. По газопроводной трубе сечением $8,31 \text{ см}^2$ течёт с постоянной скоростью кислород при давлении 400 кПа и температуре 47°С . Через каждое сечение трубы за каждые 10 минут протекает 6 кг газа. Определить в СИ скорость течения.

Дано:

$$S = 8,31 \text{ см}^2 = 8,31 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$$

$$\mu = 0,032 \text{ кг/моль}$$

$$p = 4 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T = 320 \text{ К}$$

$$m = 6 \text{ кг}$$

$$\Delta t = 600 \text{ с}$$

Найти:

$$v = ? \quad (\text{м/с})$$

Решение:

Запишем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = (m/\mu)RT.$$

В данном случае, объём газа определяется как произведение площади сечения трубы на длину трубы (столба газа), которую проходит газ за 10 минут:

$$V = S \cdot L = S \cdot v \cdot \Delta t.$$

Окончательное выражение для скорости течения газа будет иметь вид:

$$pS \cdot v \cdot \Delta t = (m/\mu)RT, \quad v = mRT/(\mu p S \Delta t).$$

Проведём расчёты, и получим:

$$v = 6 \cdot 8,31 \cdot 320 / (0,032 \cdot 4 \cdot 10^5 \cdot 8,31 \cdot 10^{-4} \cdot 600) = 2,5 \text{ м/с}.$$

Ответ: $v = 2,5 \text{ м/с}$.

10. Объём воздушного шара равен $249,3 \text{ м}^3$, масса его оболочки 58 кг. Состояние атмосферы: давление 100 кПа, температура 27°С . Для того, чтобы шар взлетел, включают горелку, и воздух внутри шара начинает нагреваться. При какой температуре нагретого воздуха шар начнёт подниматься? Ответ дать в градусах Цельсия. Молярная масса воздуха равна 29 г/моль.

Дано:

$$V = 249,3 \text{ м}^3$$

$$M = 58 \text{ кг}$$

$$\mu = 0,029 \text{ кг/моль}$$

$$p_a = 1 \cdot 10^5 \text{ Па}$$

$$T_a = 300 \text{ К}$$

Найти:

$$T = ? \quad (^\circ\text{С})$$

Решение:

На воздушный шар будут действовать две силы, направленные в противоположные стороны (см. рисунок): сила тяжести оболочки и воздуха внутри оболочки, сила Архимеда. В момент начала подъема шара эти силы будут уравнивать друг друга:

$$F_A - (M + m) \cdot g = 0, \quad \rho_a g V = (M + m_T) \cdot g.$$

Выразим отсюда массу воздуха внутри оболочки шара:

$$m_T = \rho_a V - M. \quad (1)$$

Для нахождения температуры воздуха внутри оболочки запишем уравнение Менделеева–Клапейрона. Учтем, что давления воздуха внутри и снаружи шара всегда равны:

$$p_a V = (m_T / \mu) \cdot R T, \quad T = p_a V \cdot \mu / (m_T \cdot R). \quad (2)$$

Определим плотность атмосферного воздуха также из уравнения Менделеева–Клапейрона:

$$p_a V = (m / \mu) \cdot R T_a, \quad p_a = (\rho / \mu) \cdot R T_a, \quad \rho_a = p_a \cdot \mu / R T_a. \quad (3)$$

Подставив (1) и (3) в (2), получим:

$$\begin{aligned} T &= p_a V \cdot \mu / (m_T \cdot R) = p_a V \cdot \mu / ((\rho_a V - M) \cdot R) = \\ &= p_a V \cdot \mu / ((p_a V \cdot \mu / R T_a - M) \cdot R) = p_a V \cdot \mu \cdot T_a / (p_a V \cdot \mu - M R T_a). \end{aligned}$$

Проведём расчёты, и получим: $T = 375 \text{ К} = 102^\circ\text{С}$.

Ответ: $T = 102^\circ\text{С}$.