

# 1 Введение

В неравновесных системах нарушения пространственной и временной устойчивости наблюдаются в задачах биологии, химии, гидродинамики, нелинейной оптики. Стационарные, пространственно-неоднородные структуры возникают в диффузионных системах, в которых коэффициент диффузии активатора значительно меньше коэффициента диффузии ингибитора. В данной работе была исследована модель одномерного брюсселятора, в которой при определенном наборе параметров существует как пространственный колебательный режим (неустойчивость Тьюринга), так и временной (неустойчивость Хопфа).

Автоколебательные системы - это системы, в которых поддерживаются за счет постоянного внешнего воздействия незатухающие колебания, амплитуда которых определяется параметрами системы и не зависит от начальных условий. Этот термин был введен А.А. Андроновым в 1928 году.<sup>[1]</sup>

Механизм неустойчивости Тьюринга в автоколебательных системах с момента его открытия в 1952 году<sup>[2]</sup> широко используется для объяснения структурообразования в системах разной природы <sup>[3]</sup>. Работа Тьюринга преследовала цель показать возможность спонтанного образования диссипативных структур. В этой работе были получены условия, при которых нарушается устойчивость по отношению к возмущениям с определенным волновым числом.

Однако существовал ряд проблем в построении реалистичной модели. <sup>[4,5]</sup>. Одна из них состояла в том, что в основе механизма Тьюринга лежат разные скорости диффузии компонент системы. С одной стороны, не ясно, насколько часто такое явление встречается в природе <sup>[5]</sup>, а с другой — выяснилось, что его трудно реализовать в эксперименте. Например, по этой причине первое экспериментальное наблюдение тьюринговской неустойчивости состоялось только через 40 лет после теоретической работы Тьюринга<sup>[6]</sup>. Ещё одна проблема состояла в том, что для многих автоволновых систем область неустойчивости Тьюринга занимает на

плоскости параметров относительно небольшую площадь<sup>[7,8]</sup>, что затрудняет подбор параметров для наблюдения этого эффекта.

В физике модели диссипативных структур носят конкретный характер, результаты моделирования хорошо сходятся с экспериментом. Теория диссипативных структур вошла в новую науку - синергетику, развиваемую Хакеном. <sup>[9]</sup> Математическая модель диссипативных структур имеет общий вид:

$$\partial x_i / \partial t = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) + D_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial r^2}$$

В настоящее время имеется довольно много моделей диссипативных структур, построенных так, что достигается сходство решения модели с конкретными наблюдаемыми процессами. Несмотря на все разнообразие этих процессов, большинство моделей содержит два уравнения вида:

$$\partial x / \partial t = P(x, y) + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}$$

$$\partial y / \partial t = Q(x, y) + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}$$

Одной из моделей диссипативных структур является модель брюсселятора, предложенная Пригожиным и Лефевром в 1967г.<sup>[10],[11]</sup>

В ней предполагается, что в некоторой тонкой замкнутой трубке протекает автокаталитический процесс с участием веществ А, В, Х, Y, С, R:



Система является открытой, что позволяет удерживать ее вдали от состояния термодинамического равновесия. Это достигается тем, что мы поддерживаем постоянными концентрации веществ А и В (это означает, что любой расход этих веществ может быть моментально компенсирован из окружающей среды).

Поэтому эти концентрации будут управляющими параметрами – изменяя их, мы можем влиять на поведение системы. Х и Y являются промежуточными

веществами, образуемыми в ходе реакций, зависимость их концентраций от времени является целью данного исследования. Вещества R и C являются конечными продуктами; предполагается, что они выводятся из системы и не влияют на кинетику реакций. Помимо концентраций веществ A и B, есть еще ряд величин, характеризующих взаимодействие с окружающей средой. Это константы скорости реакций  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . в случае физико-химической системы они являются функциями температуры и давления. Наиболее важными свойствами рассматриваемой системы являются ее открытость и нелинейность. Система, в которой происходят химические реакции, по своей природе является диссипативной. Нелинейность задает третья из четырех реакций – это тримолекулярная реакция. Она является автокаталитической – из двух молекул вещества X в результате взаимодействия с веществом Y образуются три молекулы того же вещества X. Соответствующие дифференциальные уравнения для исследования промежуточных веществ X и Y выписываются согласно закону действия масс и выглядят следующим образом:

$$\partial X / \partial t = k_1 A - (k_2 B + k_4) X + k_3 X^2 Y$$

$$\partial Y / \partial t = k_2 B X - k_3 X^2 Y$$

Произведем замену переменных в системе:

$$t' = k_4 t$$

$$x' = \sqrt{k_3/k_4} x$$

$$y' = \sqrt{k_3/k_4} y$$

$$A' = \sqrt{k_1^2 k_3/k_4} A$$

$$B' = \sqrt{k_2/k_4} B$$

Система в новых переменных примет вид:

$$\partial X' / \partial t = A' + X'^2 Y' - (B' + 1) X'$$

$$\partial Y'/\partial t = B'X' - X'^2Y'$$

Добавив в систему диффузию, получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned}\partial X/\partial t &= A + X^2Y - (B + 1)X + D_x \frac{\partial^2 X}{\partial r^2} \\ \partial Y/\partial t &= BX - X^2Y + D_y \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2}\end{aligned}$$

Эта модель и будет исследоваться в данной работе.

## 2 Нераспределенная система

Для начала будем исследовать нераспределенный случай:

$$\begin{aligned}dX/dt &= A + X^2Y - (B + 1)X \\ dY/dt &= BX - X^2Y\end{aligned}$$

Строить решение будем методом Рунге-Кутты четвертого порядка.<sup>[12]</sup>

Погрешность метода рассчитана по формуле  $\varepsilon = \frac{U_n - U_{2n}}{2^{p-1} - 1}$  и составляет  $10^{-8}$  на один шаг по времени. Программная реализация алгоритма выполнена на языке C++. Для построения графиков использовалась программа GnuPlot. В программе решения строятся функцией `runge_kutta`.

Ниже приведены некоторые из построенных графиков и фазовых портретов при  $A=1$ :

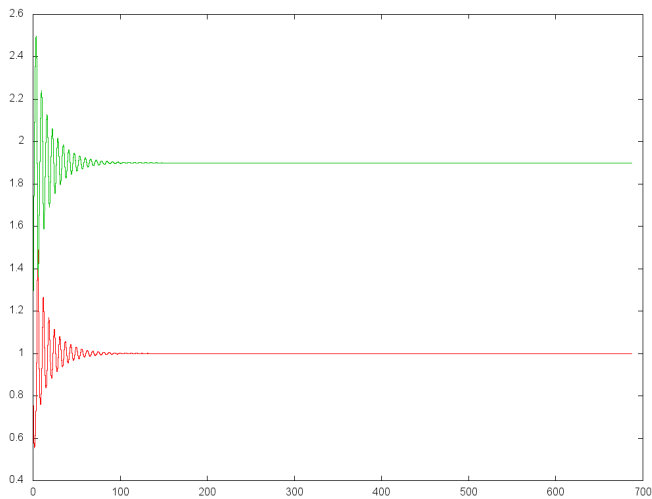


Рис.1 Зависимость от времени переменных X (красный) и Y (зеленый) в модели брюсселятора при  $A = 1, B = 1.9$

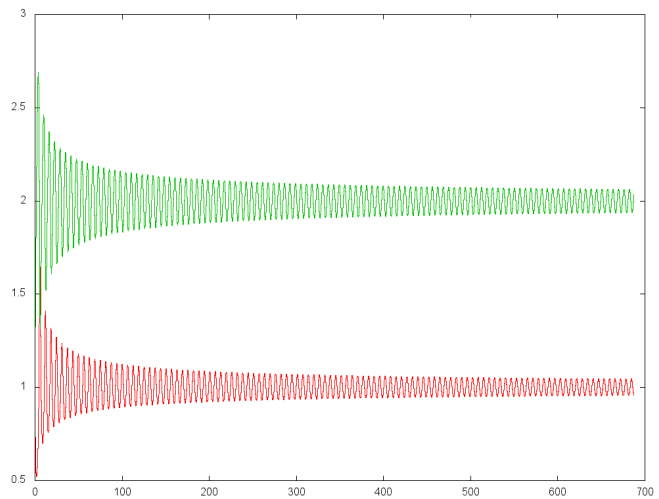


Рис.2 Зависимость от времени переменных X (красный) и Y (зеленый) в модели брюсселятора при  $A = 1, B = 2$

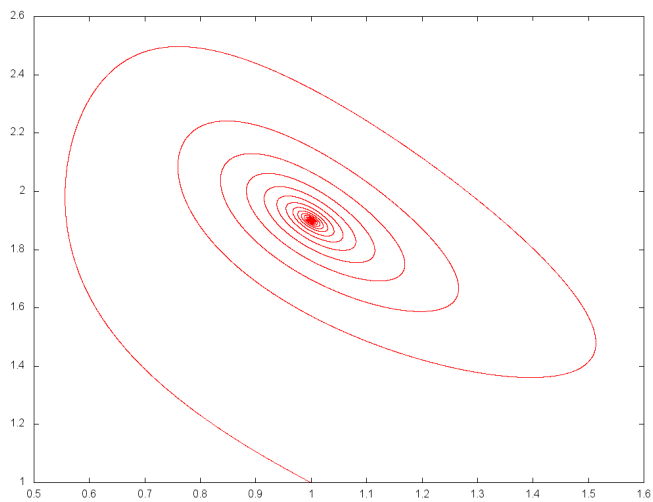


Рис.3 Фазовый портрет брюсселятора при  $A = 1, B = 1.9$   
По горизонтальной оси - переменная X, по вертикальной - Y

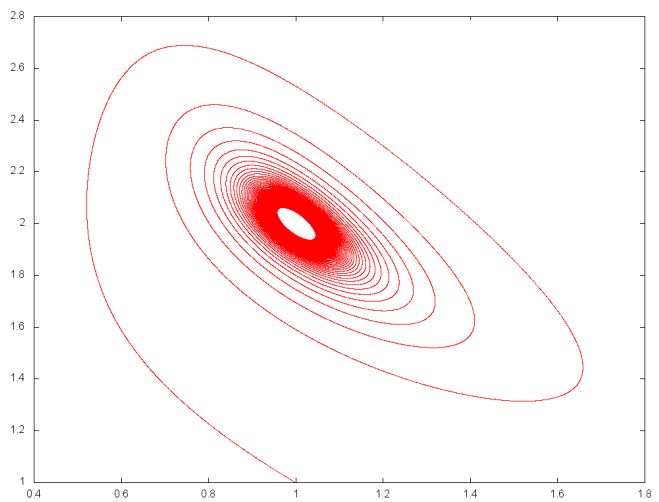


Рис.4 Фазовый портрет брюсселятора при  $A = 1, B = 2$   
По горизонтальной оси - переменная X, по вертикальной - Y

При постоянном параметре A и увеличении параметра B система проходит точку бифуркации в  $B=2.0$ : при  $B < 2.0$  фазовый портрет системы представляет собой фокус, при  $B \geq 2.0$  появляется предельный цикл, радиус которого растет по мере увеличения B. Меняя параметр A с шагом 0.5, ищем точки бифуркации, подбирая параметр B с шагом 0.1. В результате получаем бифуркационную диаграмму процесса. Для построения использовалась программа Microsoft Excel.

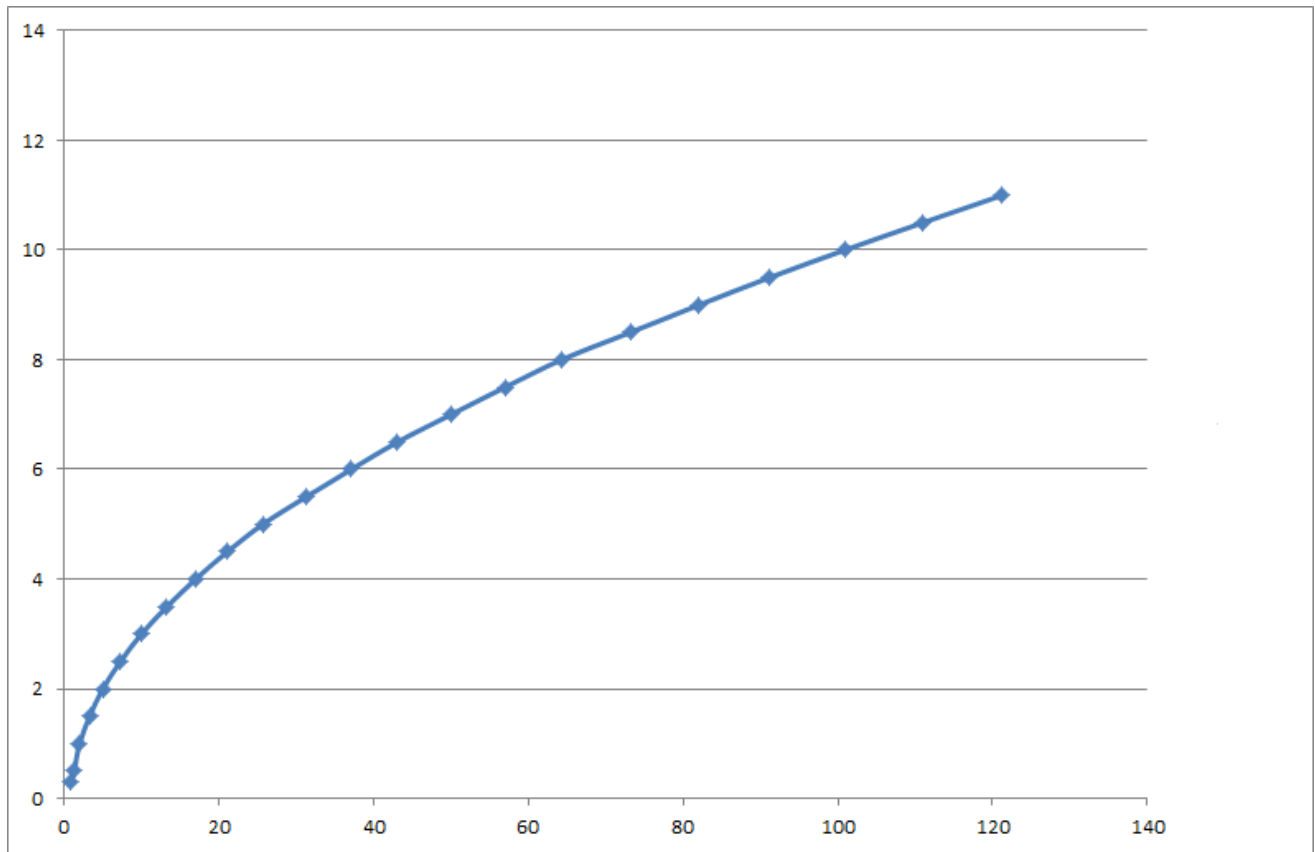


Рис.5 Бифуркационная диаграмма брюсселятора. По вертикальной оси - параметр A, по горизонтальной - B. Точки ниже кривой соответствуют предельному циклу в системе, выше - фокусу.

С расхождением порядка 0.01 построенная диаграмма аппроксимируется зависимостью  $A = \sqrt{B - 1}$

Также размер цикла меняется пропорционально  $\sqrt{B - B_c}$  при постоянном A, что характерно для бифуркации Андронова-Хопфа с мягкой потерей устойчивости.<sup>[13]</sup> Ниже приведен график зависимости амплитуды осцилляций от  $\sqrt{B - 2}$  (A=1):

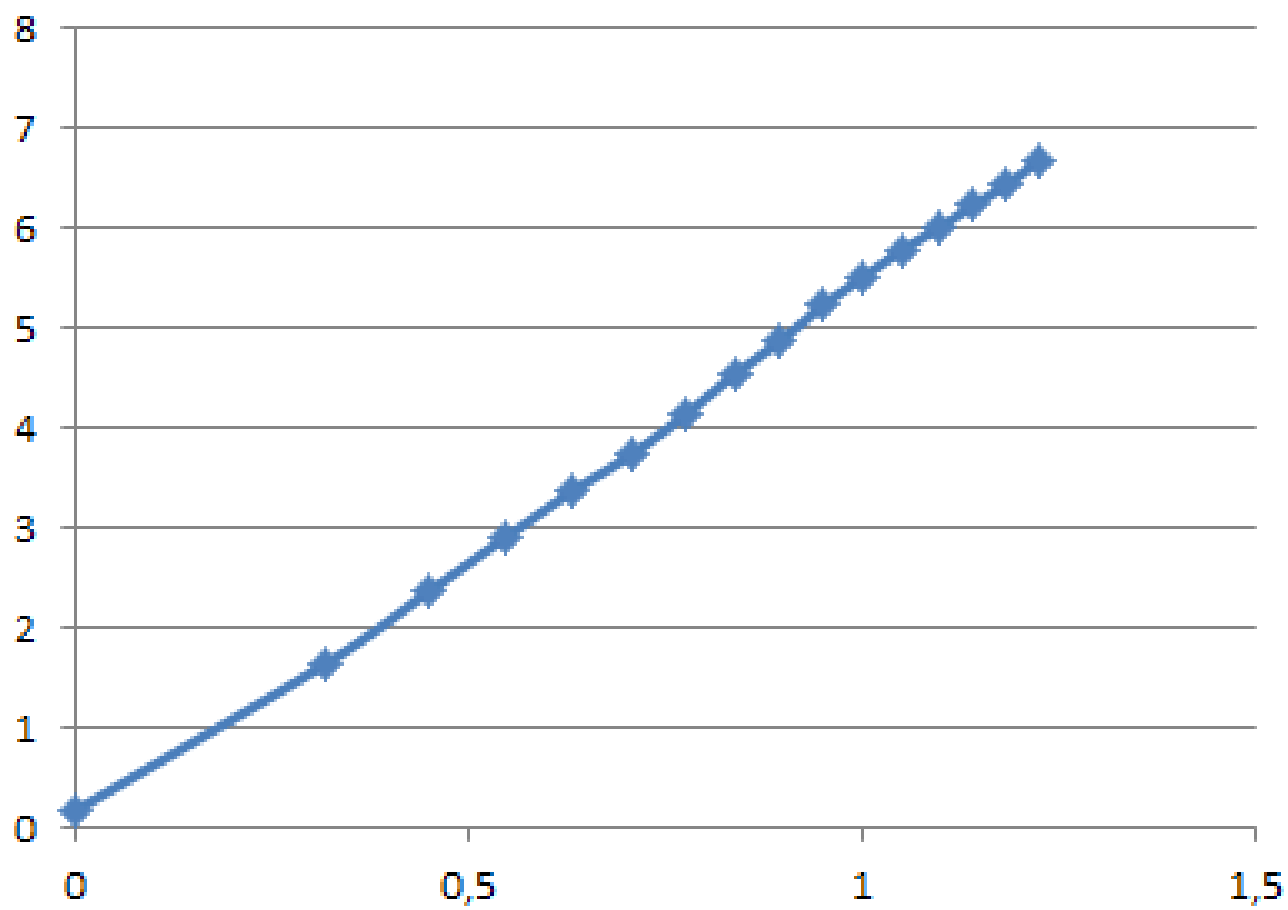


Рис.6 Зависимость амплитуды осцилляций от  $\sqrt{B-2}$  при постоянном параметре  $A=1$

## Математическое исследование системы

Проведем математическое исследование системы.

Для определения типа устойчивости неподвижной точки используют первый метод Ляпунова<sup>[14]</sup>, приведенный ниже.

Найдем стационарную точку:

$$dX/dt = 0, dY/dt = 0 \Rightarrow$$

$$\bar{X} = A, \bar{Y} = B/A$$

Линеаризуем исходную систему уравнений в окрестности этой точки. Вблизи нее:

$$X = \bar{X} + \delta X = A + \delta X$$

$$Y = \bar{Y} + \delta Y = B/A + \delta Y$$

Пусть  $f(X, Y) = A + X^2Y - (B + 1)X$ ,  $g(X, Y) = BX - X^2Y$ . Разложим  $f$  и  $g$  в ряд Тейлора вблизи стационарной точки:

$$f(X, Y) = f(\bar{X}, \bar{Y}) + \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}} \delta X + \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}} \delta Y$$

$$g(X, Y) = g(\bar{X}, \bar{Y}) + \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}} \delta X + \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}} \delta Y$$

Введем обозначения:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial f}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}}, a_{21} = \left. \frac{\partial f}{\partial Y} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}}, a_{12} = \left. \frac{\partial g}{\partial X} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}}, a_{22} = \left. \frac{\partial g}{\partial Y} \right|_{\bar{X}, \bar{Y}}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{X}}{dt} + \frac{d\delta X}{dt} &= f(\bar{X}, \bar{Y}) + a_{11}\delta X + a_{21}\delta Y \\ \frac{d\bar{Y}}{dt} + \frac{d\delta Y}{dt} &= g(\bar{X}, \bar{Y}) + a_{12}\delta X + a_{22}\delta Y \end{aligned}$$

Отсюда получаем линейную систему для возмущения в окрестности неподвижной точки:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta X}{dt} &= a_{11}\delta X + a_{21}\delta Y \\ \frac{d\delta Y}{dt} &= a_{12}\delta X + a_{22}\delta Y \end{aligned}$$



Характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \lambda(A^2 - B + 1) + A^2 = 0$$

Отсюда,

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(A^2 - B + 1) \pm \sqrt{(A^2 - B + 1)^2 - 4A^2}}{2}$$

Видно, что при  $A^2 = B - 1$  действительная часть  $\lambda_{1,2}$  равна 0 (точки бифуркации системы), отрицательна в случае  $A^2 > B - 1$  (устойчивый фокус) и положительна в случае  $A^2 < B - 1$  (неустойчивый фокус), что согласуется с ранее построенной бифуркационной диаграммой.

## Нахождение старшего показателя Ляпунова

Аттракторы некоторых диссипативных динамических систем нечувствительны к малым флуктуациям начальных условий. В системах со странными аттракторами, в свою очередь, флуктуации экспоненциально разрастаются со временем и за конечное время поведение системы становится непредсказуемым и интегральные кривые с течением времени расходятся. Динамические системы, обладающие такой чувствительностью к начальным условиям, называются хаотическими.<sup>[15]</sup>

При исследовании системы естественно рассмотреть среднюю скорость экспоненциального расхождения траекторий:

$$\frac{\ln(d(t)/d(0))}{t}$$

где  $d(t)$ -расхождение траекторий в данный момент времени, а также величину

$$h = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln(d(t)/d(0))}{t}$$

Последняя величина называется энтропией Колмогорова-Синия или старшим показателем Ляпунова.

В двумерных системах показатели Ляпунова  $(-, -)$  соответствуют устойчивой неподвижной точке, а  $(0, -)$  - устойчивому предельному циклу. Определив знак

старшего показателя в конкретной точке диаграммы, тем самым, мы определим характер фазовой траектории.<sup>[15]</sup>

Аналитическое нахождение показателей Ляпунова системы невозможно из-за отсутствия аналитического решения этой системы. Поэтому для нахождения старшего показателя был использован алгоритм Беннеттина, реализованный на языке C++.<sup>[16]</sup> В данном алгоритме предельный цикл системы при заданных параметрах  $A$  и  $B$  делится на заданное число временных отрезков. На каждом из отрезков в начальной точке производится небольшое отклонение от фазовой кривой, которое затем сравнивается с отклонением, получившемся в конце временного промежутка. На каждом промежутке находится коэффициент Ляпунова  $\frac{\ln(d(t)/d(0))}{t}$ , затем получившиеся коэффициенты усредняются. С увеличением времени расчета, результат приближается к значению старшего показателя Ляпунова.

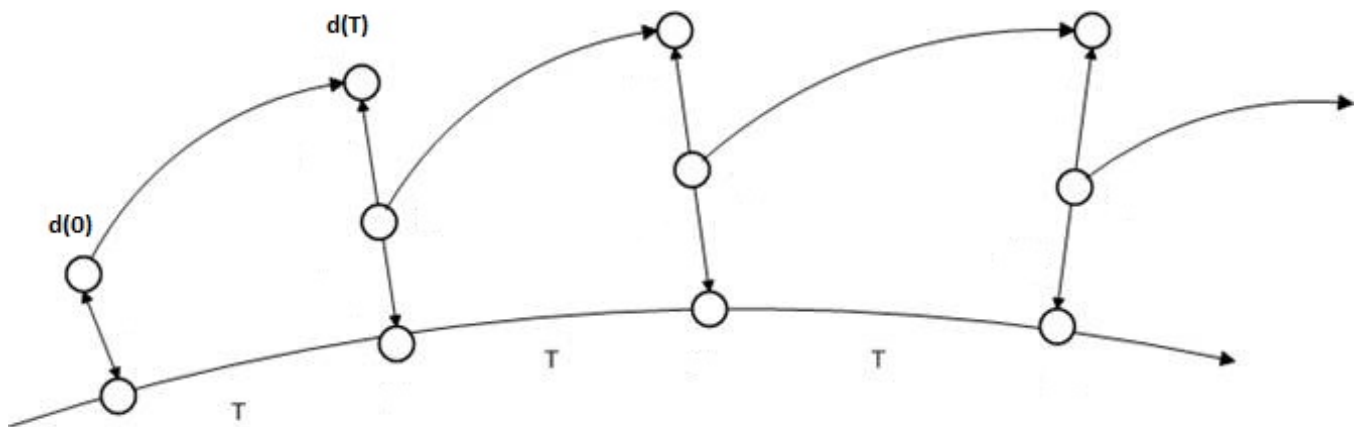


Рис.7 Иллюстрация к алгоритму Беннеттина

На графике ниже показана зависимость старшего показателя Ляпунова от увеличения расчетного времени при  $A=1$ ,  $B=2.5$ , количество пройденных предельных циклов при расчете - 100, число делений одного предельного цикла - 100. Размерность показателя равна единице, деленной на шаг системы.

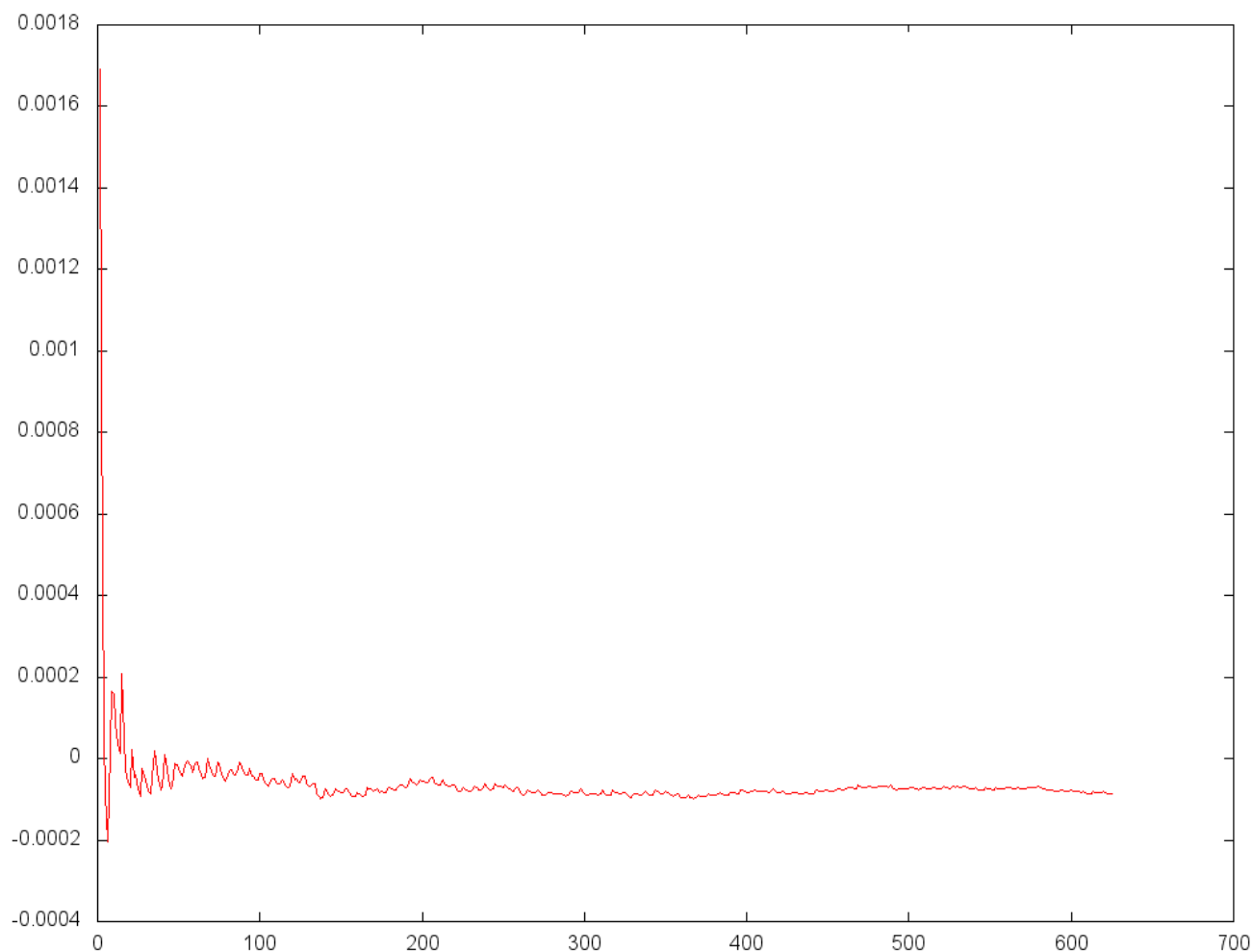


Рис.8 Зависимость старшего показателя Ляпунова от увеличения расчетного времени

Видно, что значение показателя Ляпунова сходится к  $\lambda = 0$  с учетом погрешности метода Рунге-Кутты, рассчитанной выше ( $10^4$  шагов, погрешность на шаг - порядка  $10^{-8}$ ). Проведя расчеты при разном числе делений цикла, получаем результаты того же порядка. Можно утверждать, что старший показатель Ляпунова системы при решениях, соответствующих предельному циклу, равен нулю, что означает, что данная система не обладает хаотической динамикой.

### 3 Распределенная система

Для построения модели распределенного случая будем пользоваться методом Рунге-Кутты четвертого порядка.<sup>[13]</sup> Для решения однородной системы с диффузией использовалась шеститочечная разностная схема

Кранка-Никольсон.<sup>[17]</sup> Решения объединялись с использованием метода разделения по физическим процессам.<sup>[15]</sup>

В итоге разностная схема выглядит следующим образом:

$\frac{U_m^{n+1} - RC_m^n}{\tau} = \frac{a}{2} \left( \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right)$ , где  $RC_m^n$  - промежуточный слой, полученный после действия метода Рунге-Кутты над предыдущим слоем.

Были смоделированы случаи циклических граничных условий и граничных условий с нулевыми потоками. Начальные условия - равновесные значения  $X$  и  $Y$  с добавлением однопроцентного белого шума.

Программная реализация алгоритма выполнена на языке Java. Для построения графиков использовалась программа GnuPlot.

### Математическое исследование системы

Введем переменные, характеризующие малые отклонения от однородного решения:

$$\zeta = X - A$$

$$\eta = Y - B/A$$

. Линеаризуем исходную систему, решение будем искать в виде:

$$\zeta(t, r) = C_1 e^{pt+ikr}$$

$$\eta(t, r) = C_2 e^{pt+ikr}$$

. Получаем дисперсионное уравнение для брюсселятора:

$$(p - B + 1 + k^2 D_\zeta)(p + A^2 + k^2 D_\eta) + BA^2 = 0$$

Как и в точечном случае, знаки действительных частей  $p_1, p_2$  показывают, устойчивым или неустойчивым будет исследуемое стационарное решение. Решение устойчиво в области параметров  $Re p_{1,2} < 0$ . К устойчивому стационарному состоянию переменные могут приближаться колебательным (подкоренное выражение отрицательно, а значит корни  $p_1, p_2$  комплексно сопряженные) или бесколебательным (подкоренное выражение положительно, а значит корни действительные и отрицательные) образом. Неустойчивость седлового типа в системе (неустойчивость Тьюринга<sup>[15],[18]</sup>) возникает, если дисперсионное уравнение имеет два действительных корня разных знаков. Этот случай реализуется при следующих значениях  $k^2$ :

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2D_x D_y} \{ [(B-1)D_x - D_y A^2] \pm \sqrt{[(B-1)D_y - A^2 D_x]^2 - 4A^2 D_x D_y} \}$$

Здесь  $D_\zeta == D_x, D_\eta == D_y$ . Примерное изображение графика зависимости корней дисперсионного уравнения от волнового числа приведено ниже:

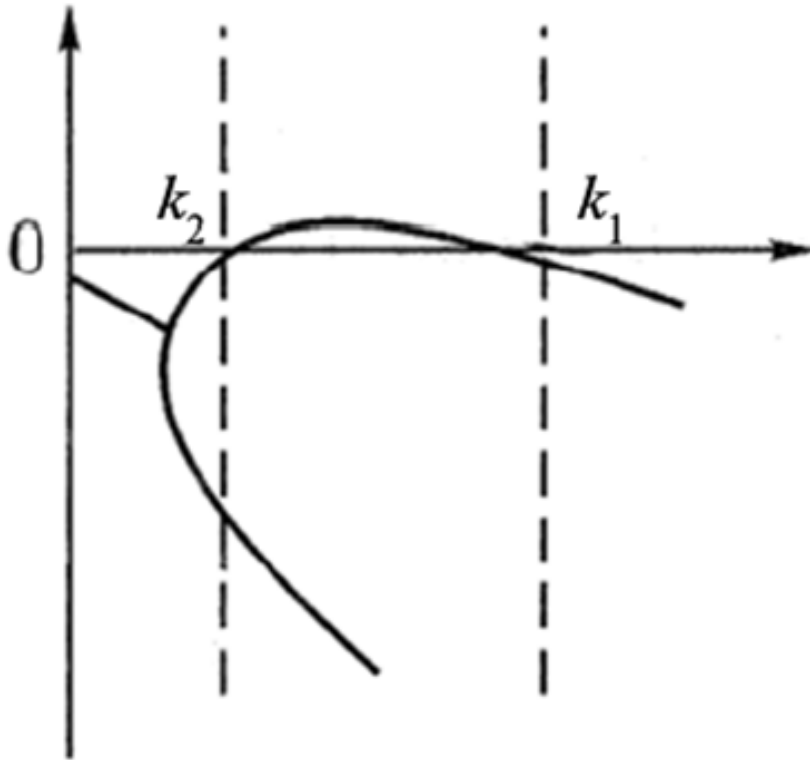


Рис.9 Зависимость корней дисперсионного уравнения от волнового числа

Значения  $B$ , при которых наступает бифуркация устойчивости:

$$B \geq 1, B \leq [1 + A\sqrt{\frac{D_x}{D_y}}]^2$$

В области  $k_1 < k < k_2$  реализуются диссипативные структуры.

В данной системе реализуются следующие типы диссипативных структур:<sup>[19]</sup>

1) При сравнимых коэффициентах диффузии  $D_x, D_y$  возбуждаются гармонические диссипативные структуры.

2) В области сильно различных коэффициентов диффузии возникает пиковая структура. Примеры данных типов ДС приведены ниже:

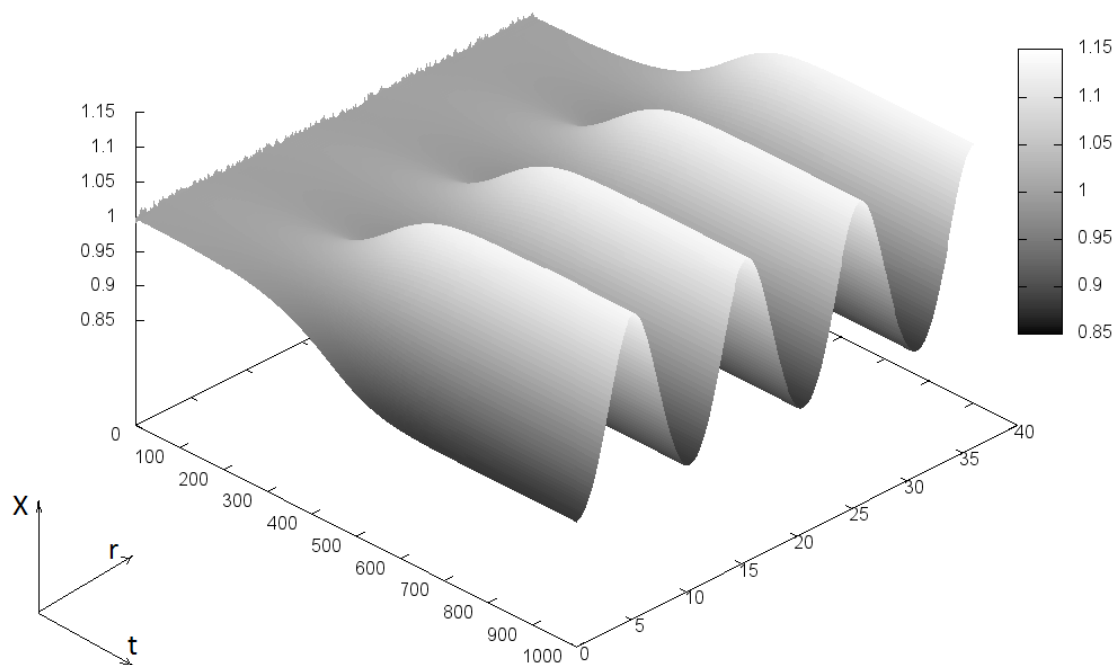


Рис.10 гармоническая ДС в брюсселяторе, граничные условия с нулевыми потоками, параметры системы:  $B = 1.97$   $A = 1$   $L = 36$   
 $D_x = 1$   $D_y = 7$

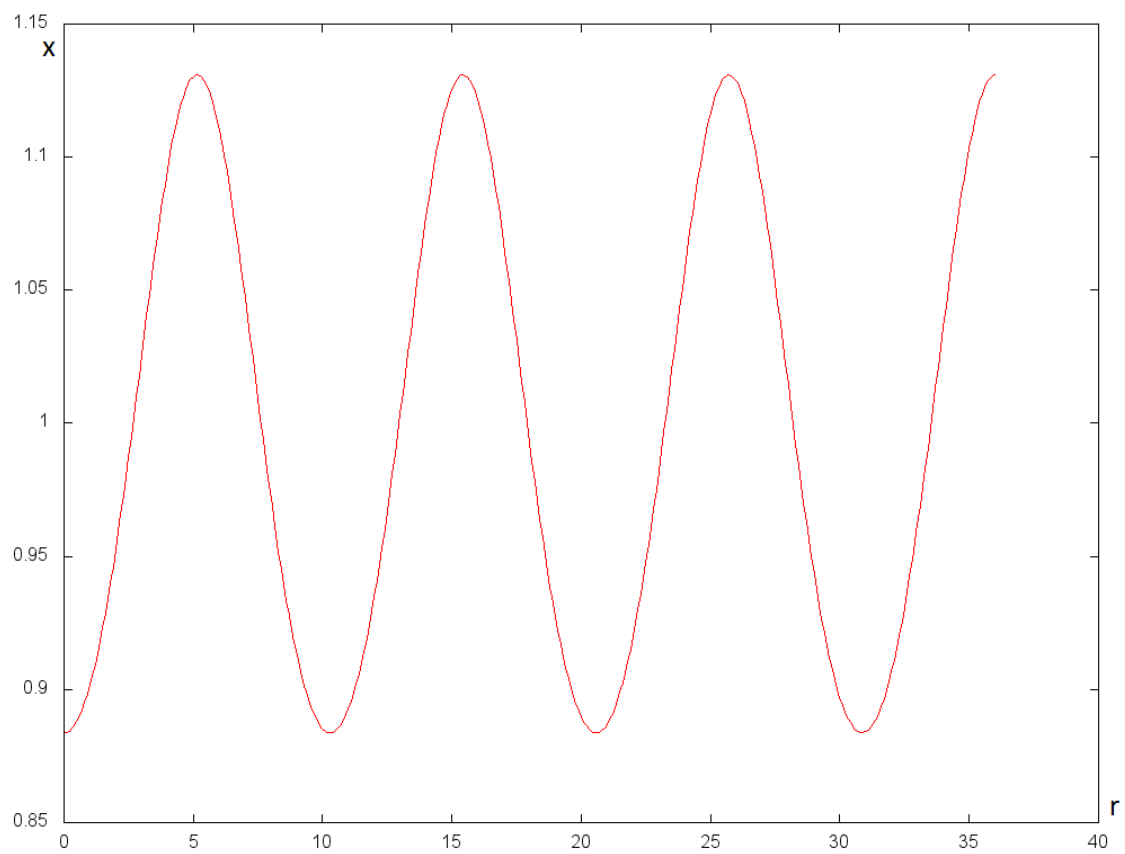


Рис.11 гармоническая ДС в брюсселяторе, граничные условия с нулевыми потоками, параметры системы:  $B = 1.97$   $A = 1$   $L = 36$   
 $D_x = 1$   $D_y = 7$

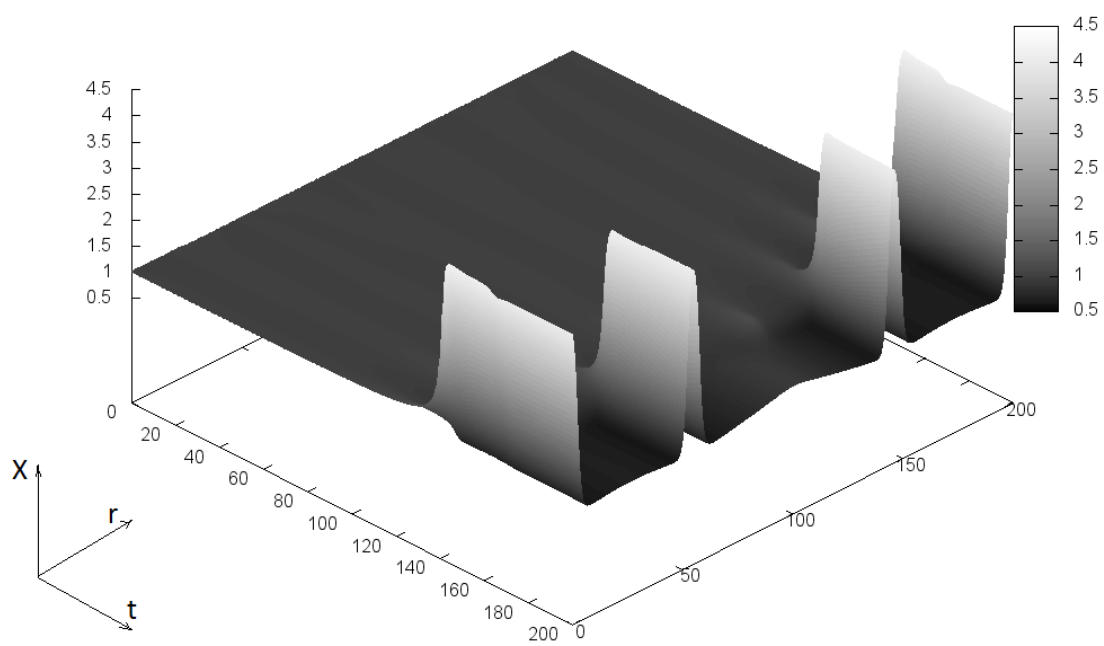


Рис.12 пиковая ДС в брюсселяторе, граничные условия с нулевыми потоками, параметры системы:  $B = 1.2$   $A = 1$   $L = 200$   $D_x = 1$

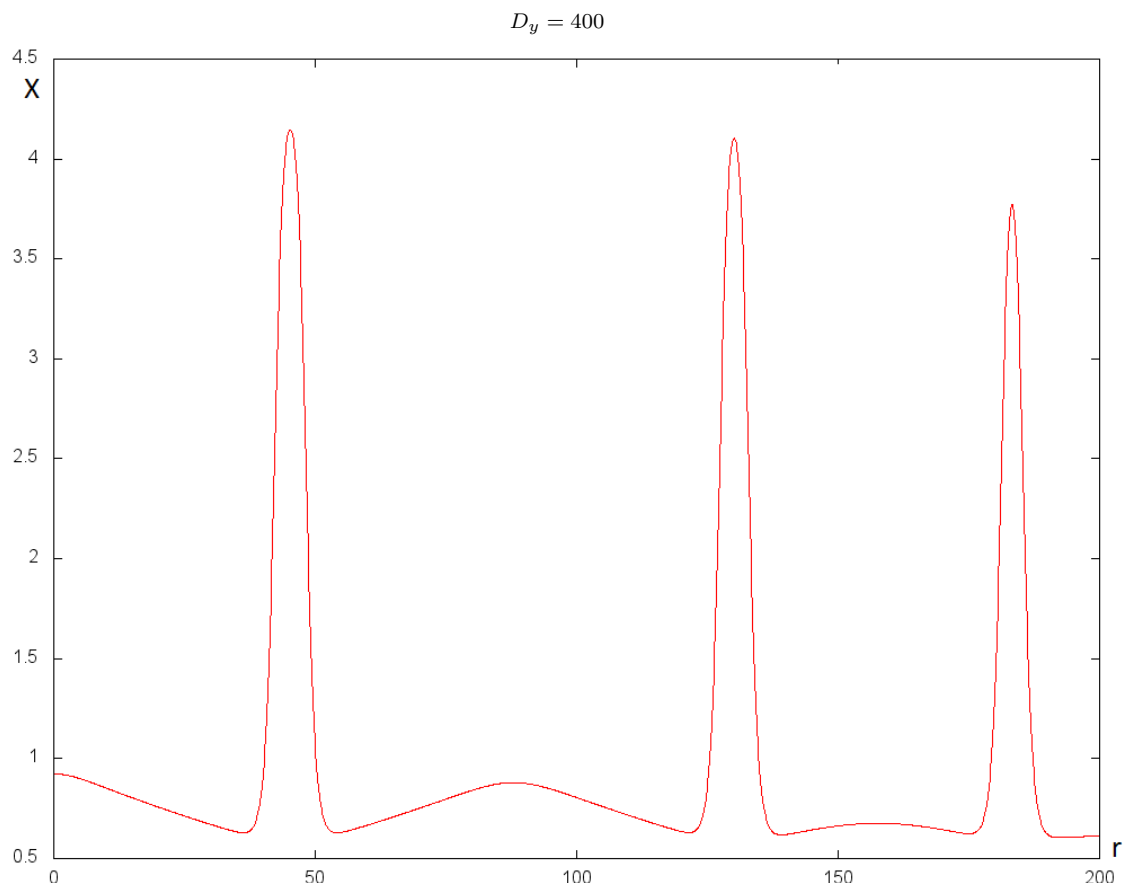


Рис.13 пиковая ДС в брюсселяторе, граничные условия с нулевыми потоками, параметры системы:  $B = 1.2$   $A = 1$   $L = 200$   $D_x = 1$

$D_y = 400$

## Поведение системы при задании различных граничных условий

Рассмотрим, как ведет себя система при различных граничных условиях: условия нулевых потоков и циклическом условии.

### 1. Циклическое граничное условие.

При циклическом граничном условии в системе образуется целое число волн.

Фиксируем концентрации веществ  $A$  и  $B$ . Будем менять параметр  $L$  (длину трубки) при остальных фиксированных параметрах. В различных диапазонах  $L$  можно наблюдать появление новых диссипативных структур. Так, при  $A = 1, B = 1.99, D_x = 1, D_y = 7$  в диапазоне  $L = 26 \div 36$  наблюдаются три волны, в диапазоне  $L = 36 \div 46$  - четыре волны и так далее. Примеры таких



структур можно увидеть ниже:

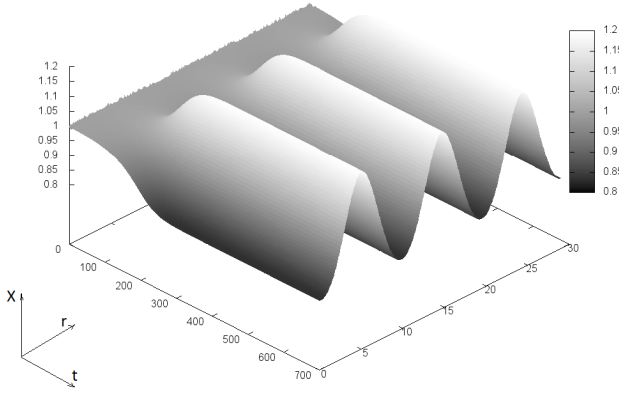


Рис.14  $L = 29$

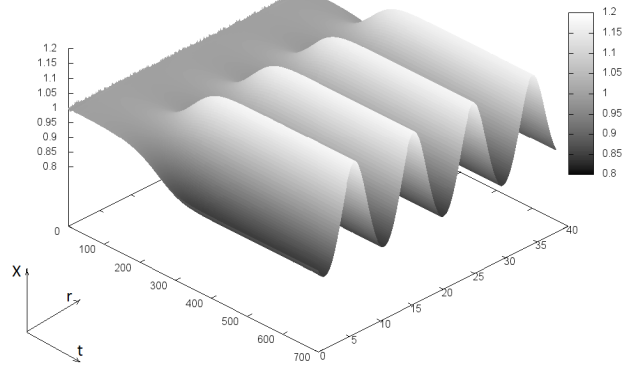


Рис.15  $L = 38$

ДС в брюсселяторе при различных длинах трубки  $L$   
 $A = 1, B = 1.97, D_x = 1, D_y = 7$

Аналогичного появления новых структур можно добиться, фиксируя все параметры системы, кроме концентрации вещества  $B$ . На графиках ниже можно увидеть, как при  $B = 4.6$  появляются 10 волн, а при  $B = 4.99$  - 11 волн.

Фиксированные параметры системы:  $A = 2, D_x = 0.0016, D_y = 0.008, L = 2.65$

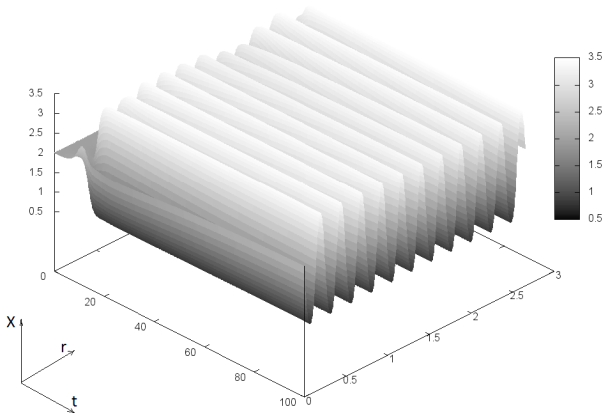


Рис.16  $B = 4.99$

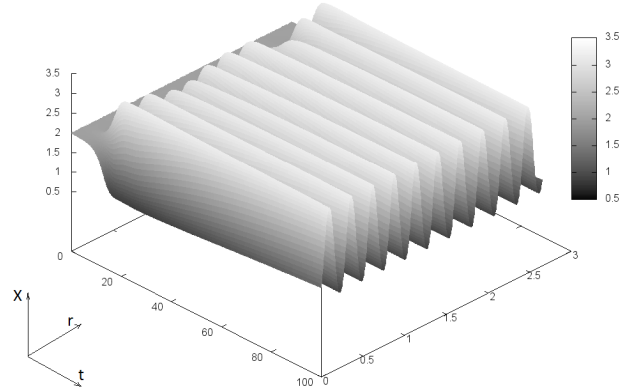


Рис.17  $B = 4.6$

ДС в брюсселяторе при различных параметрах  $B$   
 $A = 2, D_x = 0.0016, D_y = 0.008, L = 2.65$

## 2. Граничное условие нулевых потоков.

При нулевых потоках на концах трубки в системе образуется полуцелое число волн. Фиксируем концентрации веществ  $A$  и  $B$ . Будем снова менять параметр  $L$  (длину трубки) при остальных фиксированных параметрах. В различных

диапазонах  $L$  можно наблюдать аналогичное появление новых диссипативных структур, но с шагом в полволны. Так, при  $A = 1, B = 1.97, D_x = 1, D_y = 7$  в диапазоне  $L = 23 \div 28$  наблюдаются две с половиной волны, в диапазоне  $L = 28 \div 34$  - три волны, в диапазоне  $L = 34 \div 39$  - три с половиной волны и так далее. Примеры таких структур можно увидеть ниже:

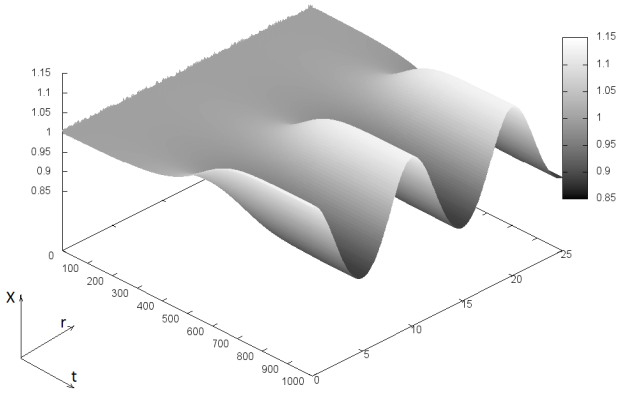


Рис.18  $L = 25$

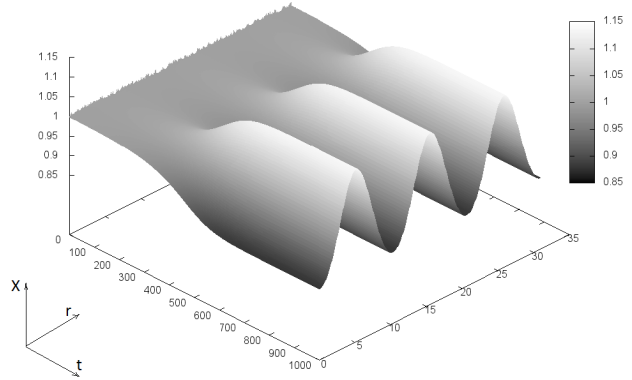


Рис.19  $L = 31$

ДС в брюсселяторе при различных длинах трубки  $L$   
 $A = 1, B = 1.97, D_x = 1, D_y = 7$

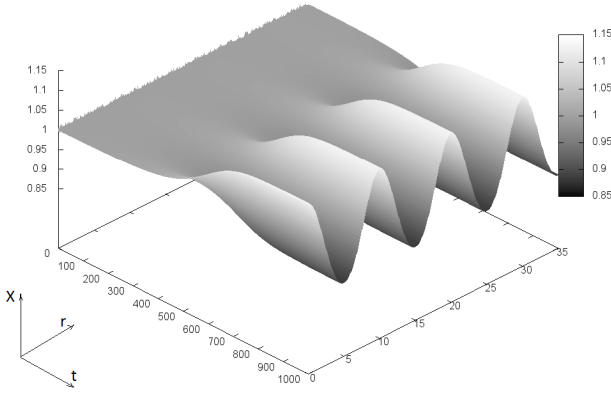


Рис.20  $L = 35$

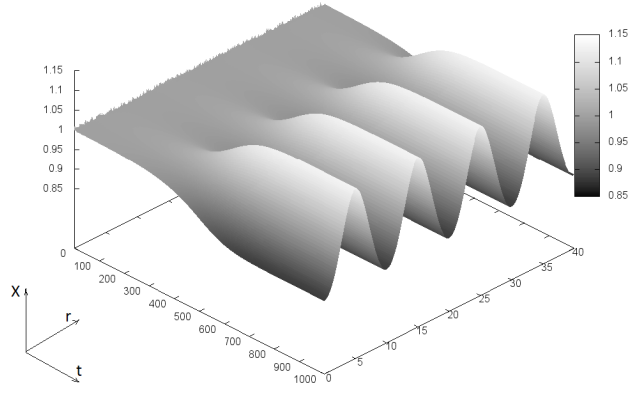


Рис.21  $L = 40$

ДС в брюсселяторе при различных длинах трубки  $L$   
 $A = 1, B = 1.97, D_x = 1, D_y = 7$

Так же, как и в предыдущем случае, добьемся появления новых структур, фиксируя все параметры системы, кроме концентрации вещества  $B$ . Параметры системы те же ( $A = 2, D_x = 0.0016, D_y = 0.008, L = 2.65$ ). Можно увидеть, как при  $B = 4.6$  появляются 10 волн, а при  $B = 4.99$  - 10.5 волн.

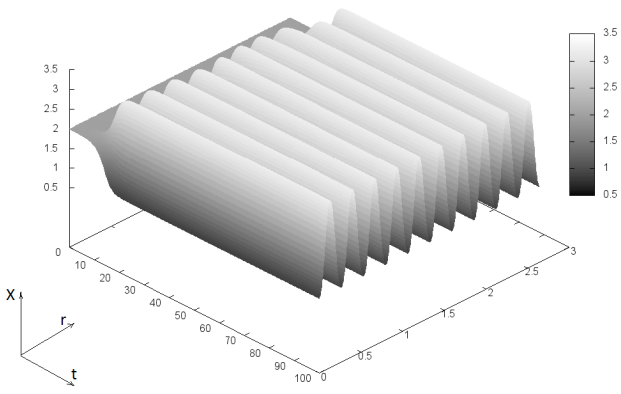


Рис.22  $B = 4.6$

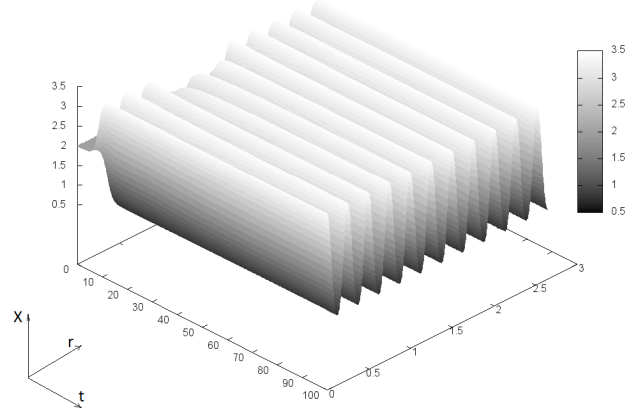


Рис.23  $B = 4.99$

ДС в брюсселяторе при различных параметрах В  
 $A = 2 \quad D_x = 0.0016 \quad D_y = 0.008 \quad L = 2.65$

## 4 Взаимодействие режимов брюсселятора в распределенном случае

Исследуем систему параметров, обеспечивающих наличие в ней как пространственных структур Тьюринга, так и временных структур Хопфа.

Как было показано выше, точка бифуркации Тьюринга соответствует параметру

$B > B_{cr}^T = (1 + \sqrt{D_x/D_y})^2$ , а точка бифуркации Хопфа - параметру

$B > B_{cr}^H = 1 + A^2$ . Точке, в которой  $B = B > B_{cr}^T = B > B_{cr}^H$  соответствуют

параметры системы:  $\sigma = D_x/D_y = \sigma_{cr} = ((\sqrt{1 + A^2} - 1)/A)^2$ .

Отклоняясь от равновесного значения  $\sigma$  и меняя параметр системы В можно наблюдать смену режимов брюсселятора<sup>[20]</sup> ( $\sigma_{cr}/\sigma = 0.87$ ):

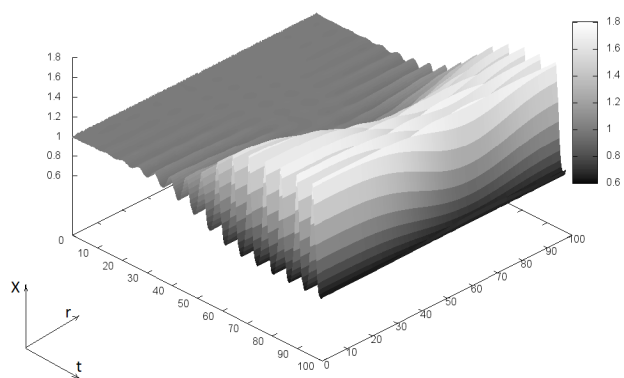


Рис.24  $B = 2.2$

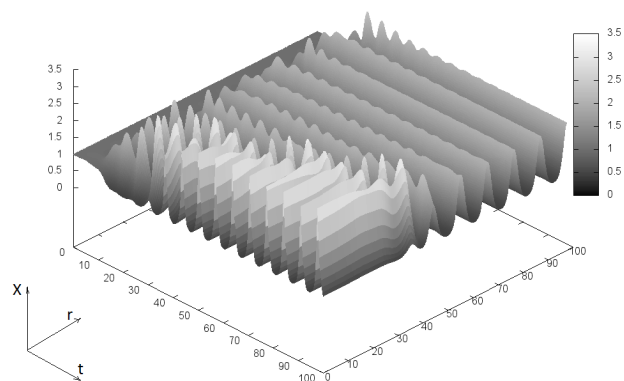


Рис.25  $B = 2.7$

Взаимодействие режимов брюсселяторе при различных параметрах  $B$

$$A = 1, D_x = 1, D_y = 5, L = 100$$

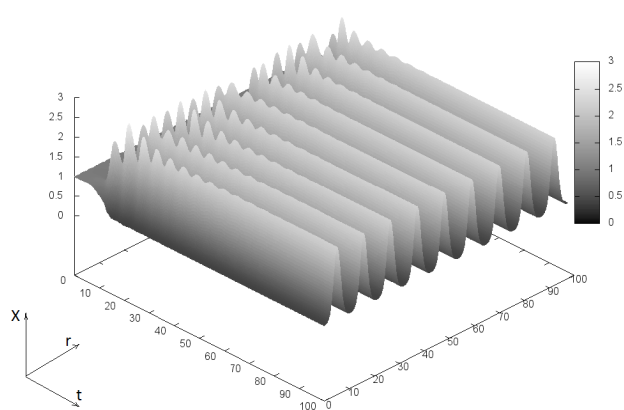


Рис.26  $B = 2.9$

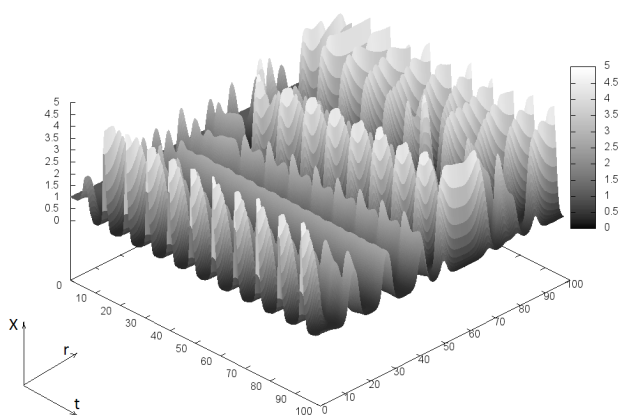


Рис.27  $B = 3.4$

Взаимодействие режимов в брюсселяторе при различных параметрах  $B$

$$A = 1, D_x = 1, D_y = 5, L = 100$$

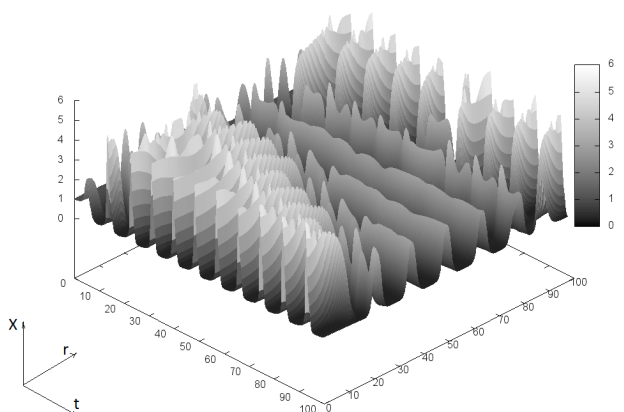


Рис.28  $B = 3.8$

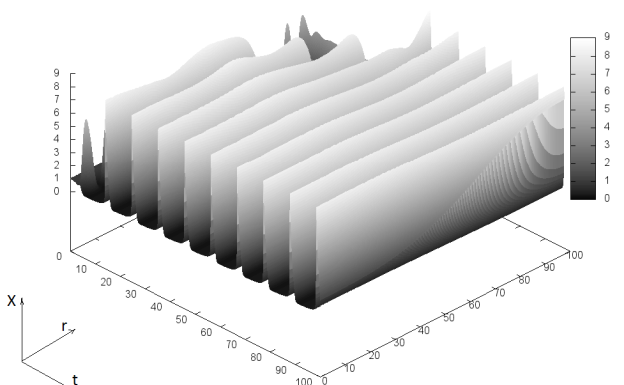


Рис.29  $B = 4.6$

Взаимодействие режимов в брюсселяторе при различных параметрах  $B$

$$A = 1, D_x = 1, D_y = 5, L = 100$$

Таким образом, при небольших изменениях концентрации В вблизи критической точки  $\sigma_{cr}$  можно наблюдать резкие качественные изменения картины.

Примерная диаграмма распределения режимов в зависимости от параметров В и  $\sigma$  приведена ниже:

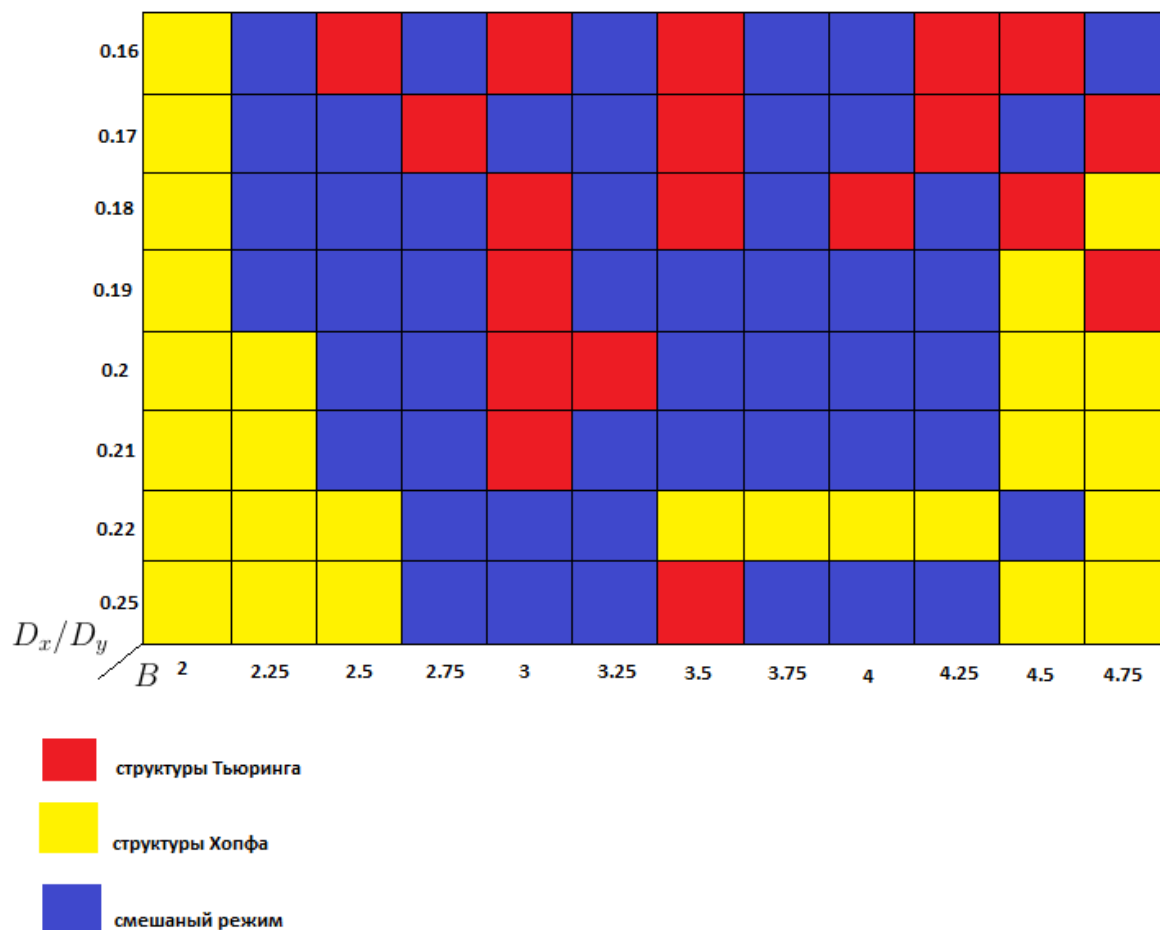


Рис.30 Распределение режимов системы в зависимости от параметров системы

## 5 Заключение

В работе была исследована модель одномерного брюсселятора: построено численное решение модели, проведено аналитическое исследование нераспределенного и распределенного случая, найдены различные режимы возникновения диссипативных структур, рассмотрено поведение диссипативных структур при различных граничных условиях, исследована область параметров, отвечающая режиму взаимодействия пространственных и временных структур брюсселятора.

Получены следующие результаты:

1. Исследован нераспределенный случай модели одномерного брюсселятора: найден старший показатель Ляпунова; показано, что нераспределенный брюсселятор не обладает хаотической динамикой.
2. Исследован распределенный случай модели одномерного брюсселятора: получены структуры Тьюринга, исследовано возникновение новых диссипативных структур при изменении параметров системы (длины трубки, концентрации вещества  $B$ ), показано влияние граничных условий на решение системы.
3. Исследовано взаимодействие пространственных и временных структур в распределенном брюсселяторе, найдены области параметров, соответствующие пространственно-неоднородным, неоднородным по времени и смешанным режимам системы.

## Список литературы

- [1] Andronov A.A. C.R. Acad. Sci. Paris 189 559 (1929)[Андронов А А Собрание трудов (Изд-во АН СССР, 1956) с. 41]
- [2] Turing A. M. // Phil. Trans. R. Soc. B. 1952. Т. 237. С. 37–72.
- [3] Мюррей Д. Д. Математическая биология. Введение. РХД, 2009. Т. 1. С. 776.
- [4] Bonabeau E. // Art. life, The MIT Press. 1997. Т. 3, №3. С. 191–211.
- [5] Nagahara H., Ma Y., Takenaka Y. и др. // Phys. Rev. E. 2009. Т. 80. С. 021906.
- [6] Castets V., Dulos E., Boissonade J., De Kepper P. // Phys. Rev. Lett. 1990. — Jun. Т. 64, № 24. С. 2953–2956.
- [7] Murray J. D. // J. Math. Biol. 1982. Т. 98. С. 134–163.
- [8] Satnoianu R. A., Maini P. K., Menzinger M. // Phys. D. 2001. Т. 160. С. 79–102.
- [9] Хакен Г. Синергетика. - М.: Мир, 1980
- [10] Prigogine I, Lefever R J. Chem. Phys. 48 1695 (1968)
- [11] Пригожин И УФН 131 185 (1980); Prigogine I Science 201 777 (1978)
- [12] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Интернет-Университет Информационных Технологий, 2006
- [13] Ризниченко Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002 с.128
- [14] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков: Издание харьк. мат. об-ва, 1892
- [15] Кузнецов С. П., Динамический хаос (курс лекций). — М: Физматлит, 2001.

- [16] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J. M. // Meccanica. 1980. Т. 15. С. 9–30
- [17] Crank, J.; Nicolson, P. (1947). "A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat conduction type". Proc. Camb. Phil. Soc. 43 (1): 50–67. doi:10.1007/BF02127704
- [18] Рубин А.Б. Биофизика: В 2т. Том 1.М.: Книжный дом "Университет 1999.
- [19] Романовский, Степанова, Чернавский Математическая биофизика. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984
- [20] A. De Wit, D. Lima, G. Dewel, P. Borckmans "Spatiotemporal dynamics near a codimension-two point"PHYSICAL REVIEW. July 1996.