8/11/2022 Lezione 5

$X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10}$ $T = 1, \dots, 10$

$P(X_1 = x_1, \dots, X_{10} = x_{10}) = ?$

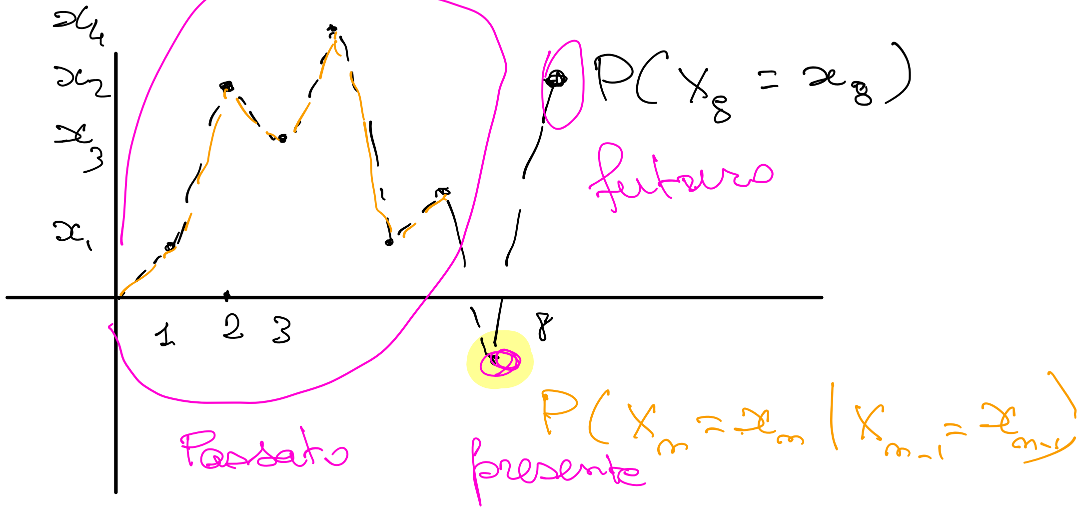
Se indip. $= \prod_{i=1}^{10} P(X_i = x_i)$

Se non sono indip.

Ipotesi Markoviana

$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1)$

$= P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$



$$P(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1})$$

$$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) = P_{ij}$$

Evoluzione di tipo temporalmente

Cioè evoluzione segue le stesse legge qualunque sia il tempo iniziale.

- Data la matrice $P = [P_{ij}]$ e la distribuz. posso scrivere la distribuz. congiunte?

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \cdots & P_{0k} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & \cdots & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ P_{n0} & & & & P_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 1. & P_{ij} \geq 0 \\ 2. & \sum_j P_{ij} = 1 \end{cases}$$

Catene temp. omogenee

Teorema: Per una catena di Markov posso scrivere TUTTE le distribuzioni finito dimensionali se conosco

1. La distribuz. iniziale
2. La matrice di transizione

Dim

x induzione

$n = 1$

$$P(X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \overbrace{P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0)}^{P_{i_1 i_0}} \cdot P(X_0 = i_0)$$

è vero

Ammetto vero per $n-1$ e mostro per n

$$P(X_n = i_n, \dots, X_0 = i) =$$

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) \cdot$$

$$P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0)$$

$$\overset{\{Markov\}}{=} P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot$$

$$P(X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) =$$

$$P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot$$

$$P(X_{n-1} = x_{n-1} \mid X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0)$$

$$P(X_{n-2} = x_{n-2}, \dots, X_0 = x_0)$$

$$= P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) \cdot P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2})$$

$$\dots \quad P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) P(X_0 = i_0)$$

Si dice catena di Markov un processo stocastico a tempo discreto e spazio degli stati discreto che gode delle proprietà di Markov.

<u>Esempio</u> Previsioni del tempo

Il tempo di domani dipende solo dal tempo di oggi

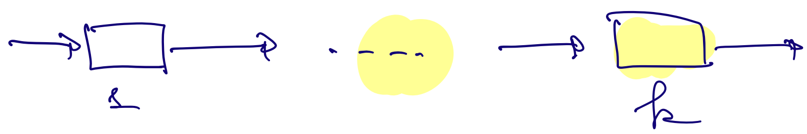
oggi	domani	Prob.
piove	piove	α
non piove	piove	β

$$P = \begin{vmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow$ "0" pioggia

$\Rightarrow$ "1" sole

Esempio Un canale di trasmissione è composto da k stadi



In ogni stadio il bit può venire distorto con prob. $(1-p)$

$X_n = \{$ bit che entra nello stadio $n \}$

$n = 1, \dots, k$

$\{X_n\}$ è una catena di Markov ?

Sì

$$P = \begin{vmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{vmatrix}$$

Stato "0"

Stato "1"

<u>Esempio</u> Previsioni del tempo

Tempo di un giorno dipende dai 2 giorni precedenti

IERI	OGGI	DOMANI	Prob.
Piog.	Piog.	Piog.	0.7
Sole	Piog.	Piog.	0.5
Piog.	Sole	Piog.	0.4
Sole	Sole	Piog.	0.2

X_n : stato al tempo n

$\{X_n\}$ NON è una C. M.

Aumento il n° degli stati

$\{Y_n\}$

		ieri	oggi
$Y_n = 0$	se	piog.	piog.
$Y_n = 1$		S	P
$Y_n = 2$		P	S
$Y_n = 3$		S	S

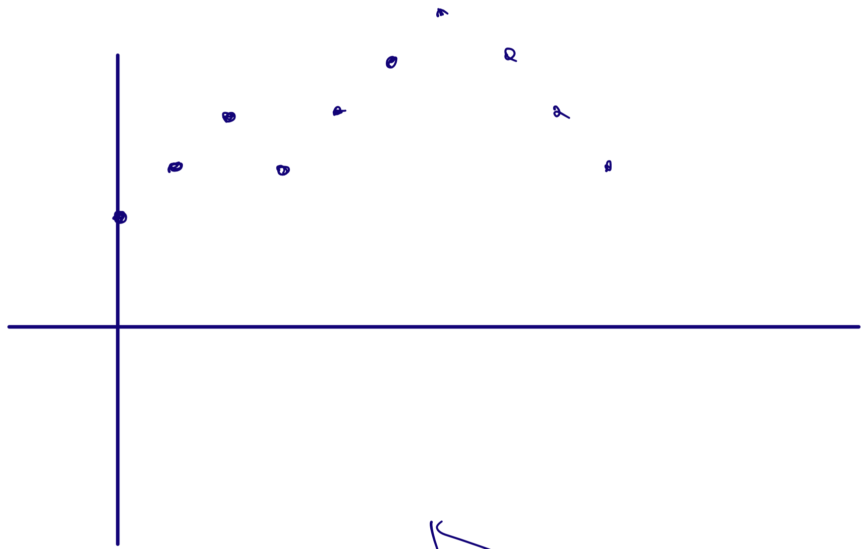
$$P = \begin{vmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0 & 0.8 \end{vmatrix}$$

CAMMINO CASUALE
(Random Walk)

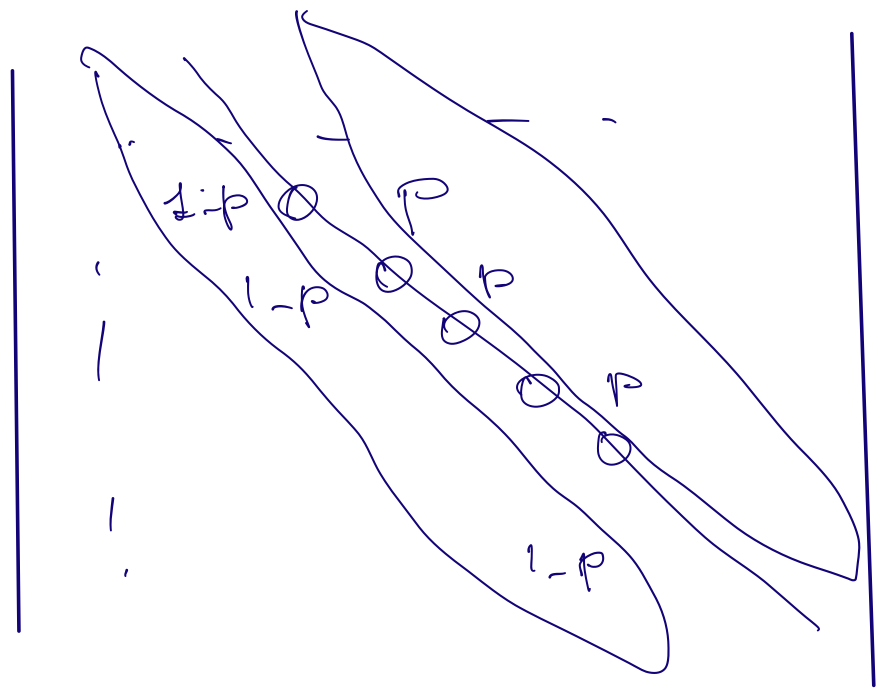
$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$$

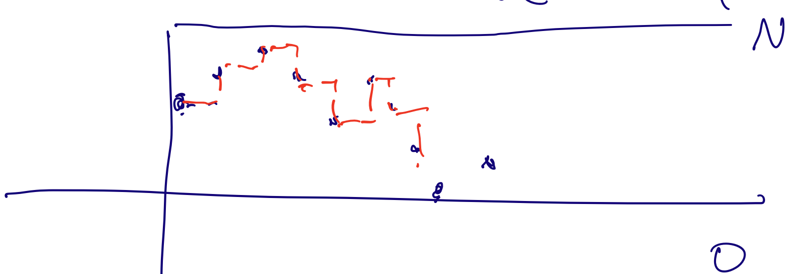
$$i = 0, \pm 1, \ldots$$



P =

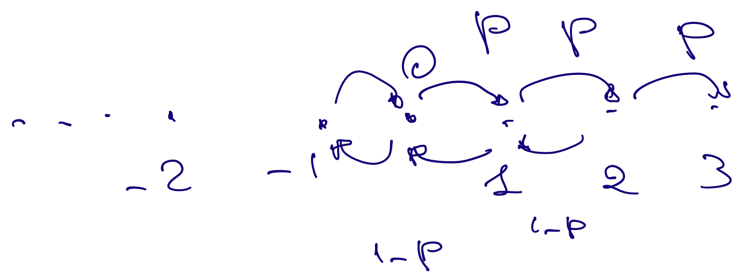


Cammino casuale tra (0, N)



Cammino assorb.

$$P = \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & & & N \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & & \cdots & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$



$\{X_n\}$ $\qquad X_n = X_{n-1} + \xi_{n-1}$

$\{\xi_i\}$ v.a. i.i.d

$P(\xi_i = 1) = p = 1 - P(\xi_i = -1)$

Evoluzione della catena a lungo termine

$$P(X_n = i)$$

$$P_{ij} = P(X_n = j \mid X_{n-1} = i) \quad \forall i,j \quad n \geq 1$$

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$$

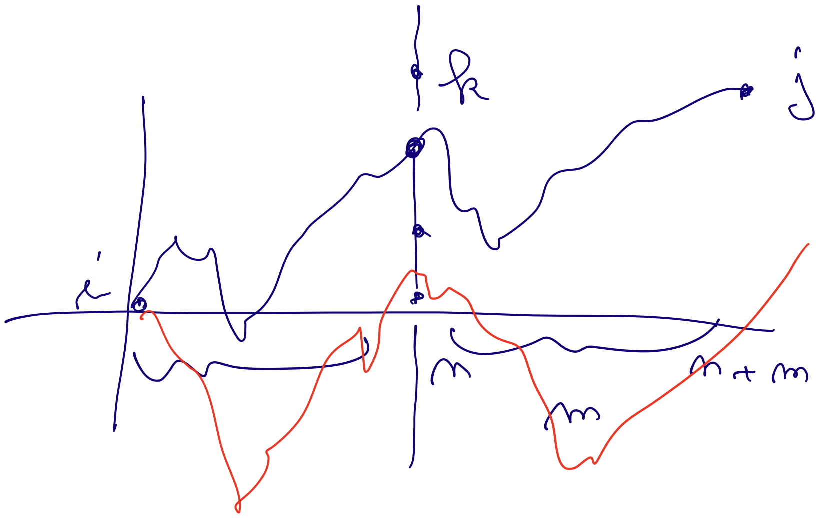
$$P_{ij}^{(1)} = P_{ij}$$

legame tra P_{ij} e P_{ij}^{n}

<u>Teorema</u> (Chapman-Kolmogorov)

Per una catena di Markov a tempo omogeneo si ha

$$P_{ij}^{(n+m)} = \sum_k \underbrace{P_{ik}^{(n)}}_{(P^{(n)})_{ik}} P_{kj}^{(m)}$$



Dim

$$P^{(n+m)}_{ij} = P(X_{n+m}=j \mid X_0=i) =$$

P. tot.

$$= \sum_k P(X_{n+m}=j,\ X_n=k \mid X_0=i)$$

$$= \sum_k P(X_{n+m}=j \mid X_n=k,\ X_0=i) \cdot P(X_n=k \mid X_0=i)$$

Markov

$$= \sum_k \overbrace{P(X_{n+m}=j \mid X_n=k)}^{P^{(m)}_{kj}} \underbrace{P(X_n=k \mid X_0=i)}_{(n)}$$

P_{ik}

$$= \sum_k P_{kj}^{(m)} P_{ik}^{(n)}$$

$$P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$$

$n = 1 \qquad m = 1$

$$P^{(2)} = P^{(1)} P^{(1)} = P . P = P^2$$

$$P^{(3)} = P^{(2)} P^{(1)} = P^3$$

$$\hookrightarrow \quad P(X_n = j \mid X_0 = i) = (P^m)_{ij}$$

$$P_{ij}^m$$