CARATTERIZZAZIONE DEI FILTRI DI CONVOL. CAUSALI

DEF. Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, diciamo "supporto" di f la chiusura dell'insieme su cui f è $\neq 0$, ovvero
$$\operatorname{supp} f = \overline{\{t \in \mathbb{R} : f(t) \neq 0\}}.$$

PROP. Un filtro di convoluzione $A: f \to f * h$ è causale se e solo se $\operatorname{supp} h \subseteq [0, +\infty)$.

Dim:

(i) Sia $\operatorname{supp} h \subseteq [0, +\infty)$ e sia $f(t) = 0$ $\forall t \leq t_0$.

Allora $Af(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)\,ds = \int_0^{+\infty} f(t-s)h(s)\,ds$.

Per ogni $t \leq t_0$ e per ogni $s \in [0, +\infty)$, dominio di integrazione, ho $t - s \leq t_0 - s \leq t_0$ (poiché $s \geq 0$).

Da ciò segue $f(t-s) = 0$ e quindi
$$Af(t) = (f * h)(t) = \int_0^{+\infty} f(t-s)h(s)\,ds = 0,$$
dunque il filtro A è causale.

(ii) (limitatamente al caso h continua).

Sia A causale. Per assurdo supponiamo esista $t_0 < 0$ tale che $t_0 \in \operatorname{supp} h$.

Allora sarà $h(t_0) \neq 0$ (oppure $\exists$ successione

$t_n \to t_0$ tale che $h(t_n) \neq 0$, ma tralasciamo questo dettaglio).

Da $0 \neq h(t_0) = h_1(t_0) + i\, h_2(t_0)$ segue che almeno uno tra $h_1(t_0)$ ed $h_2(t_0)$ è $\neq 0$.
Supponiamo sia $h_1(t_0) \neq 0$ (il caso $h_2(t_0) \neq 0$ è analogo).
Sarà quindi $h_1(t_0) > 0$ oppure $h_1(t_0) < 0$.
Supponiamo sia $h_1(t_0) > 0$ (il caso $h_1(t_0) < 0$ è analogo).

Poiché $h(t)$ è continua, lo sarà anche $h_1(t)$.
Possiamo allora applicare il Teorema della permanenza del segno ad h_1 in t_0 e concludere che esiste un intorno di t_0 su cui h_1 è strettamente positiva. Ovvero $\exists\, a, b > 0$ con $a < b$, tali che $-b < t_0 < -a$ ed $h(t) > 0$, $\forall t \in [-b, -a]$.

Consideriamo ora l'input $f(t) = \chi_{[0,\, b-a]}(t)$.
Si ha :

$$A\chi_{[0,b-a]}(t) = (\chi_{[0,b-a]} * h)(t) =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,b-a]}(t-s)\, h(s)\, ds =$$ Vedi (*)

$$\int_{t-(b-a)}^{t} h(s)\, ds =$$ (per $t = -a$)

$$\int_{-b}^{-a} h(s)\, ds > 0$$ poichè $h(s) > 0$ su $[-b, -a]$

Ma $\chi_{[0,b-a]}(t) = 0 \quad \forall t < 0$,
mentre $A\chi_{[0,b-a]}(-a) > 0$ quindi
il filtro A non è causale.

(*) (infatti $\chi_{[0,b-a]}(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \in [0,b-a] \\ 0 & \text{per } t \notin [0,b-a] \end{cases}$

quindi

$$\chi_{[0,b-a]}(t-s) = 1 \quad \text{per}$$

$0 \leq t-s \leq b-a$ ovvero
$s \leq t$ e $t-(b-a) \leq s$ cioè
per $s \in [t-(b-a), t]$.
Mentre per $s \notin [t-(b-a), t]$ si ha

$$\chi_{[0,b-a]}(t-s) = 0$$)