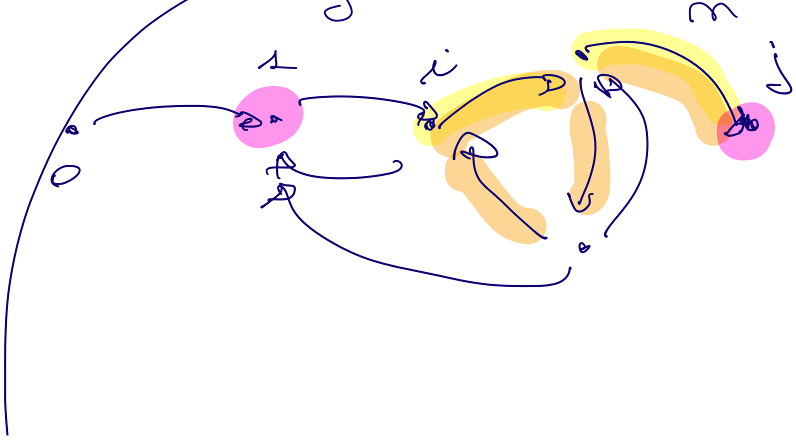
9/11/2022 Lezione 6

Mi scuso: il I foglio di esercizi non era pensato per voi. Ho scambiato i files. In fase di correzione ne terrò conto.

Caratterizziamo i singoli stati della catena.

<u>Def</u> Lo stato j si dice accessibile da i se

$$P_{ij}^{m} > 0 \quad \text{per un qualche } m$$



$\rightarrow (P^n)_{ij}$ e scriviamo $i \rightarrow j$

Def Se $i \rightarrow j$ e $j \rightarrow i$ diciamo che i due stato COMUNICANO $i \leftrightarrow j$

P^n ha come elementi

$P(X_n = j \mid X_0 = i) \quad i, j$

P ha come elemento

$P(X_n = j \mid X_{n-1} = i)$

Es.

$$P = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

$$P^2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}^2 =$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} & \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 & \dots \end{vmatrix}$$

Gli elementi di P e P^2 hanno valori diverse

Relazione di comunicazione

1. $P^0_{ii} = P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$

   i comunica con se stesso

2. Se $i \leftrightarrow j \Rightarrow j \leftrightarrow i$

3. Se $i \leftrightarrow j$ e $j \leftrightarrow k \Rightarrow$
   $i \leftrightarrow k$

Dim

$\exists\, m, n \mid P^m_{ij} > 0,\ P^n_{jk} > 0$

Usiamo eq. Chapman Kolmogorov

$$P^{m+n}_{ik} = \sum_{r=0} P^m_{ir} P^n_{rk} > \underbrace{P^m_{ij}}_{>0}\ \underbrace{P^n_{jk}}_{>0}$$

>0

k è accessibile da i

ripetiamo il ragionamento P^{l+f}_{ki}

↳ i è access. da k

⇒ È una relaz. di equivalenza

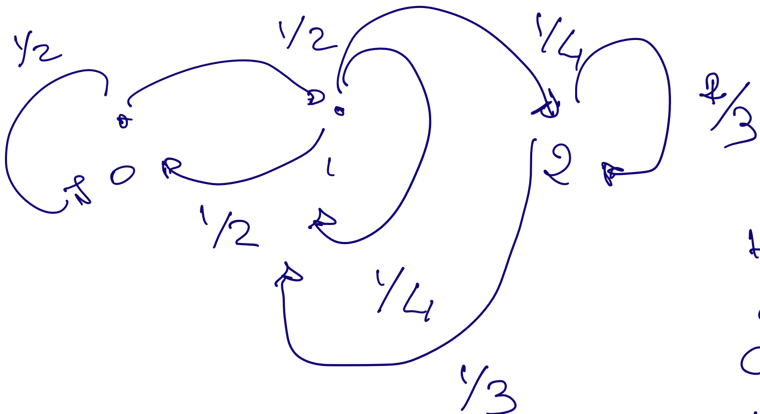
Due classi di stati possono essere:

1. identiche
2. disgiunte

Def Una catena di Markov composta da un'unica classe si dice IRREDUCIBILE

Esempio

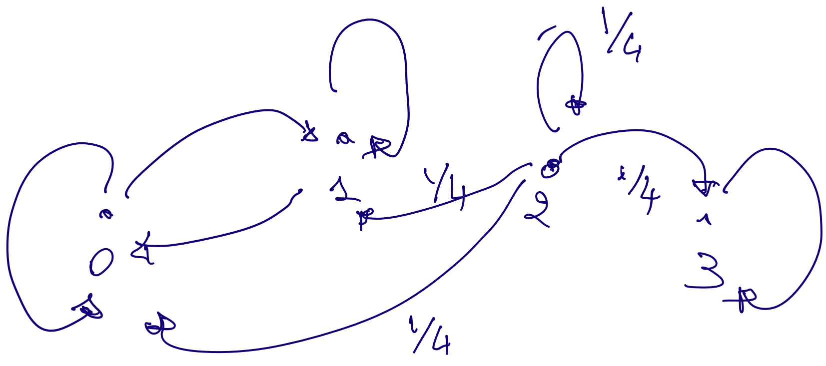
$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \end{vmatrix}$$



Ho 1 sola classe: catena è IRREDUCIBILE

Esempio

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



Ho 3 classi

$\{0,1\}$ $\{2\}$ $\{3\}$

$\{2\}$ → stato transiente

$\{3\}$ → stato assorbente

Se conosco P posso studiare la comunicazione tra gli stati

Ci sono altre probabilità di interesse.

$f_i = P(\text{tornare in } i \mid X_0 = i)$

$$f_i = \begin{cases} 1 & i \text{ è ricorrente} \\ <1 & i \text{ è transiente} \end{cases}$$

Se $f_i = 1$ tornerò con certezza in i e quindi ci torno un n° ∞ di volte

Se i è transiente il numero dei ritorni

$$P(N = n) = f_i^{n-1}(1 - f_i)$$

$\downarrow$ dist. geometrica

Se $f_i = 1$: ci deve essere un legame tra f_i e P (P descrive la catena)

Introduciamo

$$A_n = \begin{cases} 1 & \text{se } X_n = i \\ 0 & \text{se } X_n \neq i \end{cases}$$

$X_0 = i$.

$$\sum_0^\infty A_n = \infty \quad \Rightarrow \quad i \text{ è ricorrente}$$

Calcoliamo

$$E\left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n \;\middle|\; X_0 = i\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} E\left[A_n \mid X_0 = i\right] =$$

A_n è una v.a. di Bernoulli

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$$

<u>Teorema</u> Lo stato i è RICORRENTE ($f_i = 1$) se $\sum_0^\infty P_{ii}^n = \infty$

TRANSIENTE ($f_i < 1$) se $\sum_{0}^{\infty} P_{ii}^{n} < \infty$

Catene con n° finito di stati e gli stati comunicano $\Rightarrow$ tutti gli stati sono ricorrente

<u>Teorema</u> La ricorrenza è una proprietà di classe: se $i \leftrightarrow j$ e i è ricorrente $\Rightarrow$ j è ricorrente

<u>Dim</u> $i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\, m, n \,/$

$$P_{ij}^{m} > 0 \qquad P_{ji}^{n} > 0$$

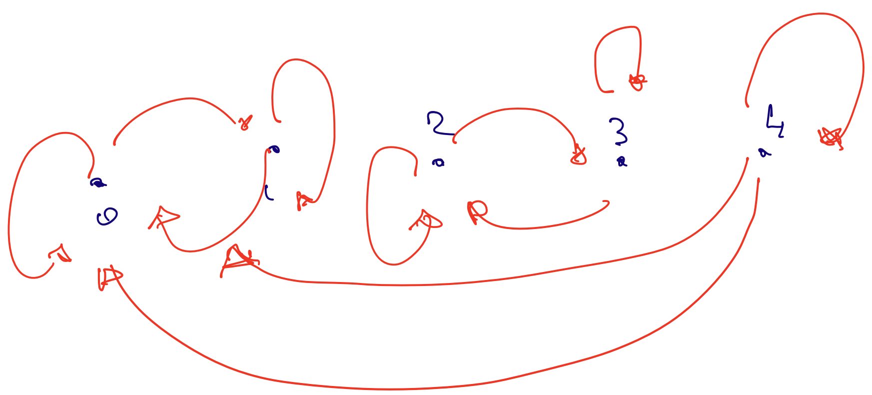
Osserviamo che per $\forall k$ si ha

$$P_{jj}^{m+n+k} \geq \underbrace{P_{ji}^{n}}_{>0} \underbrace{P_{ii}^{k}}_{i \text{ ricorr.}} \underbrace{P_{ij}^{m}}_{>0} > 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} P_{jj}^{m+n+k} > P_{ji}^{n}\, P_{ij}^{m} \underbrace{\sum P_{ii}^{k}}_{=\infty} = \infty$$

Esempio

$$P = \begin{vmatrix} 1/2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \end{vmatrix}$$



$\{0,1\}$ ricorrente

$\{2,3\}$ ricorrente

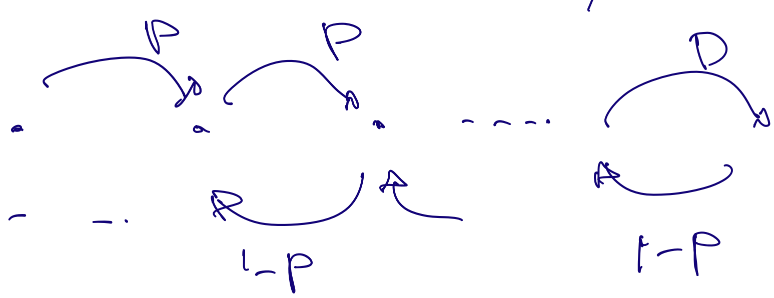
$\{4\}$ transiente

Esempio

Stati: $0, \pm 1, \pm 2, \dots$

n° ∞ di stati possibili

$$P_{i,i+1} = p = 1 - P_{i,i-1}$$



Tutti gli stati comunicano

? $\left\langle \begin{array}{l} \text{trans.} \\ \text{ricorrenti} \end{array} \right.$

Uso il teorema

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{n} \left\langle \begin{array}{ll} = \infty & \text{ricorrenti} \\ < \infty & \text{trans.} \end{array} \right.$$

Studio lo stato "0":

$$\sum_{1}^{\infty} P_{00}^{n} = ?$$

$$P_{00}^{2n+1} = 0$$

(n° dispari di passi non può riportare in 0)

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n =$$

$$= \frac{(2n)!}{n!\,n!} p^n (1-p)^n$$

$$n! \sim n^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi}$$

Formula Stirling

$$a_n \sim b_n \Rightarrow$$

$$\sum a_n < \infty \Leftrightarrow \sum b_n$$

$$P_{00}^{2n} \sim \frac{(2n)^{2n+1/2}\, \cancel{e^{-2n}}\, \cancel{\sqrt{2\pi}}\; p^n (1-p)^n}{n^{n+1/2}\, \cancel{e^{-n}}\, \cancel{\sqrt{2\pi}}\; n^{n+1/2}\, \cancel{e^{-n}}\, \sqrt{2\pi}}$$

$$n^{2n+1}$$

$$= \frac{4^n \cancel{\sqrt{2}}\ \cancel{n^{2n}}\ \cancel{\sqrt{n}}\ p^n (1-p)^n}{\cancel{n^{2n}}\ \sqrt{\cancel{2}\pi}\ \sqrt{n}\ \cancel{\sqrt{n}}} =$$

$$\frac{[(4p)(1-p)]^n}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{n}}$$

$\sum p_{00}^{2n}$ converge se e solo se

$\sum \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi}\ \sqrt{n}}$ converge

Oss. $4p(1-p) \leq 1$ e vale 1 se $p = \frac{1}{2}$

Se $\sum \frac{[4p(1-p)]^n}{\sqrt{\pi n}} < \infty$ 0 è trans. $p \neq \frac{1}{2}$

Se $p = 1/2$ $\quad \sum \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \infty \Rightarrow 0$ è ricorrente

Stati
- ricorrenti
- transienti

Stati ricorrenti
- positivo ricorrente
- nullo ricorrente

Positivo ricorrente: torno nello stato con probab. 1 + l'attesa del tempo ritorno è finita

Nullo ricorrente se torno con prob. 1 allo stato ma con un tempo medio ∞.

Se la catena ha un n° finito di stati comunicanti $\rightarrow$ positivo ricorrente

—

<u>Def.</u> Lo stato i si dice periodico di PERIODO d se

$$P_{ii}^{n} = 0$$

Quando n non è divisibile per d e d è il più grande intero con questa proprietà

Cioè d è

$$MCD \{ n : P(X_n = i \mid X_0 = i) > 0 \}$$

<u>Def.</u> Se $d = 1$ lo stato si dice aperiodico.

OSS La periodicità è una proprietà di classe:

$i \leftrightarrow j$ e i ha periodo d

$\rightarrow j$ ha periodo d

Def Uno stato aperiodico e positivo ricorrente si dice ERGODICO

Def Una catena con tutti gli stati ergodici si dice ergodica.

Cosa capita alle catene quando n diverge.

Es. (previsioni meteo)

$$P^4 = \begin{vmatrix} 0.5749 & 0.4251 \\ 0.5669 & 0.4331 \end{vmatrix}$$

$$P^8 = \begin{vmatrix} 0,572 & 0.428 \\ 0,570 & 0.430 \end{vmatrix}$$

Congettura

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{n} = \pi_j$$

Posso dimostrare e sotto quali ipotesi che $\exists$

$$\lim_{n \to \infty} P_{ij}^{n} = \pi_j$$

$\downarrow$ distribuzione limite

<u>Teorema</u> In una catena di Markov IRREDUCIBILE e ERGODICA (aperiodica e positiva ricorrente)

1. ESISTE $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^{n} = \pi_j$

ed è indipendente da i.

2. π_j è l'unica soluzione non negativa del sistema

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij} \\ \sum \pi_j = 1 \end{cases}$$

$$\pi_i = P(X_\infty = i)$$

<u>Dim</u> Ammettiamo che le π_i esistano

$$P(X_{n+1} = j) = \sum_i \overbrace{P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)}^{P_{ij}} P(X_n = i)$$

$$= \sum_i P_{ij} \, P(X_n = i)$$

Faccio $\lim_{n\to\infty}$

$$\boxed{\pi_j = \sum_i P_{ij}\, \pi_i}$$

$$\sum_j \pi_j = 1 \qquad \{\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_k\}$$

Distrib. limite $\{\pi_j\}_{j=1,\dots,k}$

$$\lim_{n \to \infty} P(X_n = j) = \pi_j$$

Dist. Staz. : Distrib. iniz. che si riproduce nel tempo

Se $X(0)$ è distribuito secondo π_j → anche X_1 lo sarà e anche X_n

Perché x teorema chiesto irreducibilità

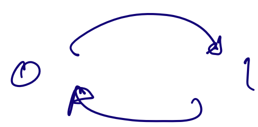
$$P = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2 classi $\{0\}$ $\{1,2\}$

APERIODICITÀ nel teorema

ma se considero

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$



$$\begin{cases} \pi = \pi P \\ \sum \pi_i = 1 \end{cases} \qquad \pi = (\pi_0, \pi_1) = (1/2, 1/2)$$