

Un'introduzione elementare agli strumenti matematici per lo studio dei segnali acustici

Paolo Boggiatto, Evanthia Carypis e Alessandro Oliaro
Dipartimento di Matematica, Università di Torino

(17 Ottobre 2017)

Indice

1	Introduzione	2
1.1	I segnali e loro definizione	2
1.2	Classificazione dei segnali	4
2	La serie e la trasformata di Fourier	9
2.1	La serie di Fourier	9
2.2	La trasformata di Fourier	12
2.3	Il principio di indeterminazione	18
2.4	Limiti della trasformata di Fourier	21
3	La trasformata di Gabor	23
3.1	La partitura musicale	30
3.2	Applicazioni: analisi, elaborazione e ricostruzione di segnali .	33
3.3	Conclusione	36
4	Appendice	37
4.1	I Numeri Complessi	37
4.2	Gli Integrali impropri	39

Capitolo 1

Introduzione

Quando ascoltiamo un brano musicale il nostro orecchio riesce a percepire senza difficoltà la sequenza di suoni che lo compongono, distinguendone le caratteristiche principali. Un musicista è in grado di trasformare ciò che sente in una partitura musicale. Tuttavia, non è necessario essere esperti per saper identificare suoni acuti, gravi, ritmi e melodie. Esiste un metodo matematico per simulare il lavoro svolto dal nostro orecchio e costruire un analogo della partitura musicale? In queste note vogliamo mostrare come sia possibile fare ciò, usando alcuni strumenti della cosiddetta “Analisi Armonica”. Questa è una branca della matematica che si occupa dello studio dei segnali tramite rappresentazioni di funzioni intese come sovrapposizione di onde fondamentali, dette anche *armoniche*, e rappresenta un potente strumento per lo studio di fenomeni dinamici di qualunque natura, trovando numerose applicazioni in aree come l’ingegneria e la fisica, o in campi di impiego di interesse industriale (vibrazioni, diagnostica di impianti industriali, analisi del rumore, ecc.). Tra gli strumenti dell’Analisi Armonica presenteremo, in particolare, la serie di Fourier, la trasformata di Fourier e la trasformata di Gabor che, come vedremo, permetteranno di rispondere affermativamente alla nostra domanda, fornendo una matematizzazione del processo di riconoscimento dei suoni svolto dal nostro apparato uditivo. Per rendere comprensibili i concetti che introdurremo, integriamo la descrizione degli argomenti con parecchi disegni, ottenuti utilizzando i pacchetti grafici del software Maple.

1.1 I segnali e loro definizione

Cerchiamo di capire che cosa indichiamo col termine di *segnale* a partire da un esempio. Consideriamo il dialogo tra due persone: la comunicazione ora-

le sappiamo che avviene per mezzo della trasmissione di un *segnale acustico* da “chi parla” a “chi ascolta”. Il segnale viene generato tramite il sistema di *produzione della voce*, costituito dall’insieme di organi quali la lingua, le corde vocali, i polmoni, ecc., grazie al quale chi parla induce una variazione nella pressione dell’aria: tale variazione costituisce il “segnale acustico” propriamente detto. Ci si propone di rappresentare in modo matematico quanto espresso.

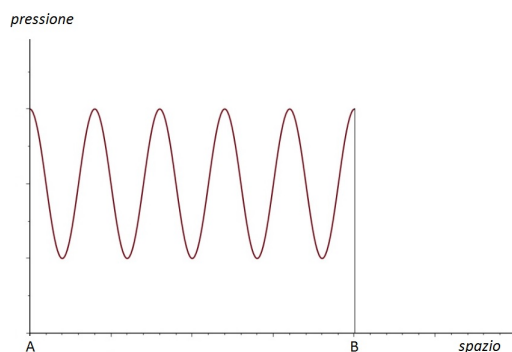


Figura 1.1: Esempio di segnale.

Se una persona che si trova in un punto A dello spazio “parla”, la variazione della pressione dell’aria prodotta in A si propaga in un’*onda* che, partendo da A , si dirige in ogni direzione. Supponiamo che in un punto B dello spazio sia situato un ascoltatore. Poiché siamo interessati solo ai punti A e B , possiamo considerare solo la parte di onda che si sposta lungo il segmento spaziale che unisce A con B . Come mostrato in Figura 1.1, riportiamo il segmento $[A, B]$ sull’asse delle ascisse (per comodità facciamo coincidere A con l’origine degli assi cartesiani). In corrispondenza di ogni punto x del segmento $[A, B]$ riportiamo nelle ordinate la pressione dell’aria in un istante di tempo fissato ottenendo il grafico della Figura 1.1. Si osservi inoltre che una *traslazione* verso l’alto o verso il basso del grafico corrisponderebbe a una situazione fisica di maggior e o minore livello di pressione base (cioè in assenza di segnale) e sarebbe sostanzialmente irrilevante ai fini dell’analisi del segnale per la quale sono di interesse solo le variazioni della pressione.

Il concetto di *funzione* reale di variabile reale risulta dunque uno strumento matematico naturale per la rappresentazione di segnali acustici e rappresenteremo quindi tali segnali tramite funzioni del tipo

$$\begin{aligned} f : X \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow Y \subseteq \mathbb{R} \\ x &\mapsto y = f(x), \end{aligned}$$

dove X è il dominio della funzione f , Y il codominio e sono entrambi sottoinsiemi di \mathbb{R} .

Il concetto di funzione si adatta peraltro più in generale alla maggior parte delle tipologie di segnale che si incontrano nelle svariate situazioni della realtà. Infatti, per quanto la natura fisica da cui sono generati possa essere molto diversa, i segnali hanno una caratteristica di base comune: essi associano una certa informazione al modo di variare di una grandezza fisica.

⁽¹⁾

Inoltre, la variabile x può assumere diversi significati, a seconda della prospettiva che consideriamo. Per chiarire le idee, torniamo all'esempio iniziale. Fissiamo un punto s_0 del segmento $[A, B]$ e, cambiando “prospettiva”, proponiamoci di rappresentare il segnale “visto” da s_0 allo scorrere del tempo. Siamo condotti allora ad un grafico di tipo tempo-pressione come in Figura 1.2.

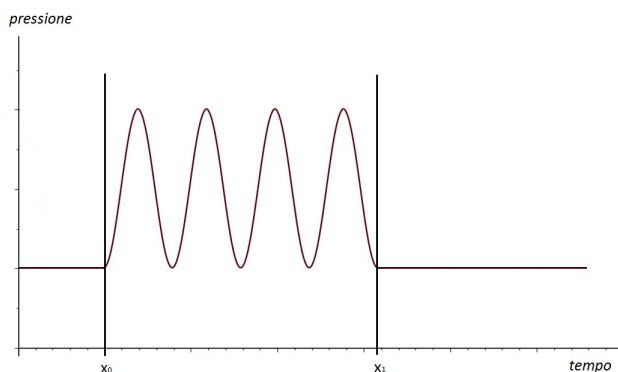


Figura 1.2: Segnale $f(x)$ su un piano di tipo tempo-pressione.

Sarà questa la prospettiva che assumeremo per la rappresentazione dei segnali nei seguenti paragrafi.

1.2 Classificazione dei segnali

Nello studio dei segnali è utile ricorrere ad una sorta di classificazione, basata sull'osservazione di caratteristiche comuni che distinguono alcune funzioni da altre. La prima suddivisione, diciamo la più naturale, è quella che separa

¹Sebbene noi ci occuperemo solo di segnali reali di una variabile reale è spesso utile estendere il concetto di segnale a dimensioni superiori, ad esempio è facile rendersi conto come per la rappresentazione dei livelli di grigio di immagini in bianco e nero sia naturale

i segnali *periodici* dai segnali *non periodici*. Precisamente abbiamo quanto segue.

- **Segnali periodici:** sono quei segnali il cui andamento si ripete dopo un determinato intervallo di tempo detto *periodo* e che indichiamo con T . Matematicamente, ciò si esprime dicendo che ogni volta che si trasla verso destra o verso sinistra di un intervallo di ampiezza proprio T , si vede che il grafico coincide esattamente con quello di partenza, ovvero, in formula,

$$f(x) = f(x + T).$$

L'inverso della durata del periodo viene detto *frequenza fondamentale* e si indica con ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{T}.$$

Come vedremo nel seguito, i segnali periodici vengono studiati tramite l'uso della cosiddetta *serie di Fourier*.

- **Segnali non periodici:** sono segnali il cui andamento non rispetta alcun tipo di regolarità e per cui non si riesce ad individuare un periodo T . Per il loro studio è necessario uno strumento potente chiamato *trasformata di Fourier*, a cui dedichiamo un paragrafo nel seguito.

La suddivisione appena vista non risulta l'unica possibile, anzi, essa può essere fatta rientrare in un contesto ancora più generale, in quanto vi sono numerose altre proprietà che qualificano i segnali e portano a opportune distinzioni tra le varie funzioni. Precisamente, individuiamo due tipologie di classificazione:

- (1) **classificazione fenomenologica:** avviene sulla base dell'andamento temporale del segnale, ovvero come esso appare;
- (2) **classificazione morfologica:** avviene sulla base delle caratteristiche del *dominio* in cui varia x e del *codominio*, cioè l'insieme definito da $f(x)$.

Descriviamo separatamente queste due suddivisioni.

Classificazione fenomenologica. In tale contesto i segnali si distinguono ulteriormente in

- *segnali deterministici:* sono segnali noti a priori e per il loro studio si utilizzano i classici metodi dell'analisi matematica. Essi si suddividono poi ancora in

l'utilizzo di funzioni del tipo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

- *segnali periodici*;
- *segnali non periodici*;
- *segnali aleatori*: non sono noti a priori, per studiarli sono necessari metodi utilizzati in statistica.

Classificazione morfologica. Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, un segnale è una funzione f della variabile indipendente tempo x . Tale classificazione avviene sulla base delle caratteristiche del

- *dominio*: precisamente distinguiamo i segnali in
 - *segnali continui*: funzioni che hanno come dominio tutto l'asse \mathbb{R} dei numeri reali;
 - *segnali discreti*: funzioni che hanno come dominio l'insieme dei numeri interi \mathbb{Z} .
- *codominio*: distinguiamo i segnali in
 - *segnali ad ampiezza continua*: hanno come codominio l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali;
 - *segnali ad ampiezza discreta*: hanno come codominio un insieme finito (o infinito numerabile).

All'interno delle classificazioni fornite si potrebbero considerare altre sotto-suddivisioni, in base alle caratteristiche prese in esame. Tuttavia, in queste note, ci basta la prima distinzione data, per cui ci focalizziamo sui segnali periodici e su quelli non periodici. Più precisamente, vediamo come essi si possano caratterizzare in base a determinate grandezze fisiche, quali:

- *altezza*: ovvero la frequenza di un segnale. Per segnali acustici, alle alte frequenze corrispondono suoni acuti ed alle basse frequenze suoni gravi;
- *intensità*: ovvero l'ampiezza. Per segnali acustici ciò corrisponde a quello che nel linguaggio comune è detto “volume” del suono;
- *durata*: ovvero l'intervallo di tempo in cui è presente il segnale.

In base ad esse possiamo dare la seguente definizione.

Definizione 1. Si dice che ad un segnale $f(x)$ corrisponde la *frequenza pura* ω_0 se e solo se il segnale è del tipo

$$f(x) = A \cos(2\pi\omega_0(x - b)) + K,$$

con

- A *ampiezza* delle oscillazioni;
- ω_0 la *frequenza*, ovvero il numero di oscillazioni nell'unità di tempo;
- b la traslazione orizzontale o fase;
- K la traslazione verticale

In tal caso, il segnale $f(x)$ è un **segnale periodico**.

Osservazione 2. Nella definizione abbiamo usato la funzione *coseno*, ma sarebbe stato esattamente lo stesso considerare la funzione *seno*. Si ricordi, infatti, la formula trigonometrica

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \theta.$$

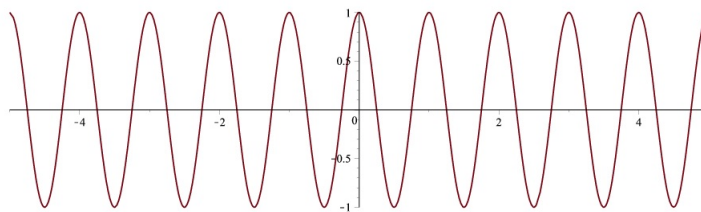
Come vedremo in seguito, un segnale può essere decomposto in una somma o un integrale di funzioni armoniche. In particolare, per lo studio dei segnali periodici si fa riferimento alla serie di Fourier, che approssima qualunque funzione periodica tramite somme di seni e coseni. Mentre per le funzioni non periodiche si ricorre alla trasformata di Fourier, definita tramite un integrale (per una breve descrizione intuitiva di integrale si veda l'Appendice). In entrambi i casi, l'insieme delle frequenze delle armoniche contenute nel segnale di partenza, le relative ampiezze e fasi costituiscono il cosiddetto *contenuto in frequenza* del segnale.

Ciò che distingue i segnali periodici da quelli non periodici è chiaramente legato alla frequenza. Per le funzioni periodiche esistono due modi per calcolare la frequenza. Il primo consiste nel fissare un intervallo di tempo, contare il numero di occorrenze dell'evento che si ripete in tale intervallo e dividere quindi il risultato di tale conteggio per l'ampiezza dell'intervallo di tempo. Il secondo metodo, invece, è quello di misurare l'intervallo di tempo tra gli istanti iniziali di due eventi successivi, ovvero il periodo T e, quindi, calcolare la frequenza come grandezza reciproca di questa durata:

$$\omega = \frac{1}{T}.$$

Per chiarire le idee, si pensi al classico esempio

$$f(x) = \cos(2\pi x)$$



In questo caso $A = 1$, $b = 0$, $K = 0$ e $T = 1$. Pertanto il segnale in esame ha frequenza ω pari a 1.

Tuttavia, un segnale come quello dell'esempio, in realtà non esiste, perché esso sarebbe un segnale “eterno”, senza inizio né fine. Mentre in natura esistono segnali come:

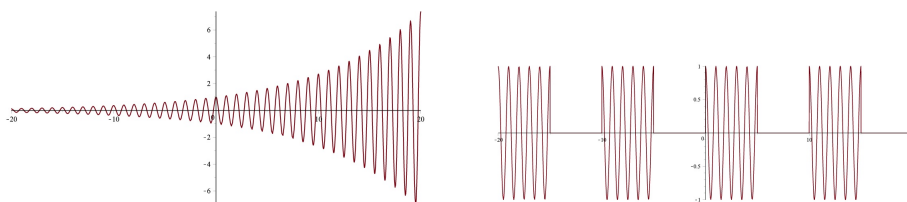


Figura 1.3: Esempi di segnali di durata limitata nel tempo, come si verifica in natura.

Alle funzioni appena viste non si applica più la formula $\omega = 1/T$, poiché non sono funzioni periodiche di periodo T . Tuttavia il nostro orecchio associa ancora ad esse una certa frequenza ω . Come trovare allora un sostituto per la formula $\omega = 1/T$? Vedremo che, per segnali non necessariamente periodici, ciò che sostituisce il concetto di frequenza $\omega = 1/T$ è legato alla *trasformata di Fourier*, che fornisce l'intensità corrispondente ad ogni singola frequenza $\omega \in \mathbb{R}$ contenuta nel segnale di partenza.

Capitolo 2

La serie e la trasformata di Fourier

2.1 La serie di Fourier

Intorno al 1800 il matematico **Joseph Fourier**¹, studiando la propagazione del calore, intuì che qualsiasi funzione $f(x)$ può essere sviluppata, in un intervallo di lunghezza 2π , mediante una combinazione lineare di funzioni goniometriche (seni e coseni) del tipo:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos(x) + \dots + a_k \cos(kx) + \dots + b_1 \sin(x) + \dots + b_k \sin(kx) + \dots,$$

dove a_k e b_k sono opportuni coefficienti. Il suo lavoro, contenuto nel trattato *Théorie Analytique de la Chaleur* del 1822, venne poi formalizzato in modo più rigoroso da due matematici tedeschi, **Bernhard Riemann** e **Lejeune Dirichlet**. Quest'ultimo osservò che molti fenomeni fisici erano di tipo “periodico”: le pulsazioni cardiache, gli impulsi elettrici, la trasmissione delle onde, le oscillazioni di un pendolo, etc. In particolare, si rese conto

¹Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) matematico e fisico francese, conosciuto per la sua famosa trasformata e per la sua legge sulla conduzione del calore. Partecipò alla Rivoluzione francese. Studiò all'École Normale Supérieure, e divenne professore alla École Polytechnique nel 1797. Fourier partecipò alla campagna d'Egitto di Napoleone nel 1798 e ricoprì un importante ruolo di diplomatico in quel paese. Al ritorno in Francia fu nominato prefetto dell'Isère. I suoi esperimenti sulla propagazione del calore, pubblicati nel 1822 in *Teoria analitica del calore*, gli consentirono di modellizzare l'evoluzione della temperatura per mezzo di serie trigonometriche.

(https://it.wikipedia.org/wiki/Jean_Baptiste_Joseph_Fourier)

che per molti tipi di onde vale il cosiddetto *principio di sovrapposizione* per cui se in un determinato punto dello spazio transitano due o più onde, lo spostamento di una particella che si trova in quel punto è dato semplicemente dalla somma degli spostamenti che le onde, singolarmente, le conferiscono agendo da sole. In tal modo è possibile analizzare un fenomeno ondulatorio, anche molto complesso, attraverso una combinazione di moti ondulatori più semplici.



(a) Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830).



(b) Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859).



(c) Bernhard Riemann (1826-1866).

Formalmente vale la seguente definizione.

Definizione 3. Sia $f(x)$ un segnale periodico di periodo $T > 0$. Allora la **serie di Fourier** ad esso associata è una somma infinita di sinusoidi e cosinusoidi (dette anche *armoniche elementari*) di frequenze multiple della frequenza fondamentale $\omega_0 = 1/T$ e tramite tale serie possiamo esprimere il segnale:

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(2k\pi\omega_0 x) + b_k \sin(2k\pi\omega_0 x)). \quad (2.1)$$

I numeri a_k e b_k , sono detti **coefficienti di Fourier** e sono legati alla funzione $f(x)$ dalle formule

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \cos(2k\pi\omega_0 x) dx, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) \sin(2k\pi\omega_0 x) dx, \quad (2.2)$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Intuitivamente a_k , comparando nella (2.1) come coefficiente della funzione pari $\cos(2k\pi\omega_0 x)$, indica “quanto” della frequenza $k\omega_0$ è presente nel segnale in modo simmetrico rispetto all’asse verticale $x = 0$; analogamente

b_k , essendo nella (2.1) coefficiente della funzione dispari $\sin(2k\pi\omega_0x)$, indica “quanto” della frequenza $k\omega_0$ è presente nel segnale in modo simmetrico rispetto all’origine.

È quindi facile convincersi che se la funzione $f(x)$ in esame è una funzione pari, il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione seno ed è una funzione di soli coseni:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2k\pi\omega_0x)$$

Se invece $f(x)$ è dispari, il suo sviluppo in serie di Fourier non contiene la funzione coseno ed è una funzione di soli seni:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(2k\pi\omega_0x).$$

Osservazione 4. La definizione di serie di Fourier di un segnale $f(x)$ che abbiamo dato nasconde tuttavia qualche “insidia” matematica su cui abbiamo sorvolato. Innanzitutto notiamo che non per tutte le funzioni definite sull’intervallo $[-T/2, T/2]$ gli integrali che forniscono i coefficienti di Fourier a_k e b_k esistono finiti; dovremmo quindi limitarci a segnali $f(x)$ per cui a_k e b_k sono ben definiti. In secondo luogo, anche quando ciò accade, una somma di infiniti termini come quella a secondo membro della (2.1) necessiterebbe di una definizione rigorosa che non abbiamo dato. Infine chi assicura che, anche quando primo e secondo membro della (2.1) siano ben definiti, siano anche uguali? Tutto ciò è effettivamente tema di una vasta letteratura matematica su cui non ci addentriamo. Ci basta sapere che, sotto ipotesi abbastanza generali da poter includere la maggior parte dei segnali significativi dal punto di vista applicativo, gli integrali in (2.2) sono ben definiti e l’uguaglianza (2.1) verificata.

Come si è visto dalle (2.2), i coefficienti di Fourier a_k e b_k sono definiti da integrali estesi all’intervallo $[-T/2, T/2]$. Essi “esplorano” quindi la funzione $f(x)$ solo su tale intervallo. D’altra parte se la funzione $f(x)$, come si è supposto, ha periodo T , ciò è sufficiente in quanto al fuori di tale intervallo essa si ripete “uguale”.

Il contenuto in frequenze del segnale viene poi espresso dalle successioni dei valori a_k e b_k ed il segnale stesso viene ricostruito tramite la sua serie di Fourier (2.1) che è costituita da una somma di funzioni seno e coseno con frequenze multiple della fondamentale, moltiplicate per i coefficienti a_k e b_k .

Tuttavia, come visto alla fine del Capitolo 1, i segnali periodici sono un’astrazione, benchè utilissima, della realtà. Essi infatti, ripetendosi “uguali”

ad ogni periodo, rappresentano un fenomeno che non ha inizio né fine nel tempo. Ad esempio la funzione $f(x) = \cos(2\pi x)$ rappresenta un segnale “eterno” di frequenza 1. È chiaro che nessun segnale naturale può essere di questo tipo.

Inoltre osserviamo che non è detto che ogni volta che si sommano due o più segnali periodici, ciò che si ottiene sia ancora una funzione periodica. Si consideri, ad esempio, il segnale definito da

$$f(x) = \sin(2\pi\omega_1 x) + \sin(2\pi\sqrt{2}\omega_1 x),$$

cioè definito dalla somma di due funzioni periodiche con frequenze “pure” ω_1 e $\sqrt{2}\omega_1$.

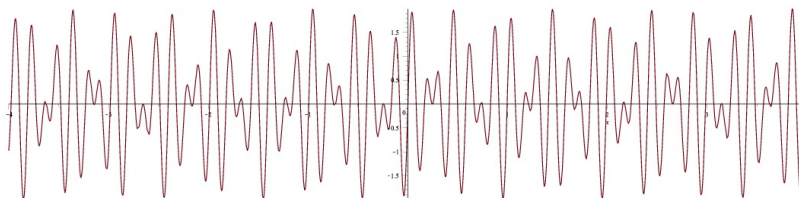


Figura 2.1: $f(t) = \sin(2\pi\omega_1 t) + \sin(2\pi\sqrt{2}\omega_1 t)$ con frequenze pure ω_1 e $\sqrt{2}\omega_1$.

Per quanto a prima vista il grafico faccia pensare che il segnale sia di tipo periodico, in realtà, un’osservazione più precisa mostra che la funzione ottenuta non è periodica. Un segnale di questo tipo, in cui compaiono frequenze non commensurabili (ovvero che non posseggono minimo comune multiplo), non può essere rappresentato come serie di Fourier.

Per poter analizzare segnali definiti su \mathbb{R} non periodici occorre un diverso strumento matematico: la *trasformata di Fourier* che, come vedremo nel prossimo paragrafo, costituisce, in un certo senso, una versione “continua” della serie di Fourier.

Ricordiamo comunque che in queste note ci limitiamo ad una descrizione qualitativa e rimandiamo, ad esempio, a [1] e [3] per una trattazione più avanzata sia della serie che della trasformata di Fourier.

2.2 La trasformata di Fourier

Abbiamo visto che per un segnale $f(x)$ i coefficienti di Fourier a_k e b_k ($k \in \mathbb{N}$) che compaiono nella serie di Fourier forniscono informazioni sul-

la presenza nell'intervallo $[-T/2, T/2]$ di frequenze $\omega = k/T$, multiple cioè della frequenza fondamentale $1/T$.

Immaginiamo ora di considerare valori $T > 0$ sempre più grandi. Ciò significa che analizzeremo il segnale $f(x)$ su un intervallo sempre più ampio; molto intuitivamente, se potessimo far tendere T a più infinito, il segnale verrà analizzato su tutto l'asse reale.

Contemporaneamente i valori delle frequenze considerate saranno k/T ($k \in \mathbb{N}$) e cioè costituiranno un campionamento tanto più fitto quanto più T è grande. Al limite per T tendente all'infinito tenderemo ad avere una variabile “frequenza” ω che varia nel continuo invece che il campionamento discreto di frequenze k/T .

Lo strumento matematico che realizza questo passaggio al continuo è la *trasformata di Fourier*.

Definizione 5. Dato un segnale $f(x)$, la sua **trasformata di Fourier** ha la seguente espressione

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx. \quad (2.3)$$

(si veda l'Appendice per il significato di integrale esteso a tutto l'asse reale e per l'esponenziale complesso $e^{-2\pi i \omega x}$).

Sotto il simbolo di integrale troviamo il segnale originario $f(x)$, funzione del tempo, che viene *trasformato* in $\hat{f}(\omega)$ la quale, come si vede, non è più una funzione temporale, ma è una funzione dipendente da ω e, pertanto, è definita sul dominio delle frequenze.

Come i coefficienti a_k e b_k indicavano nella serie di Fourier la “quantità” di frequenza k/T presente nel segnale, così ora il valore $\hat{f}(\omega)$ (o meglio il suo modulo $|\hat{f}(\omega)|$) indica la “quantità” di frequenza ω presente nel segnale.

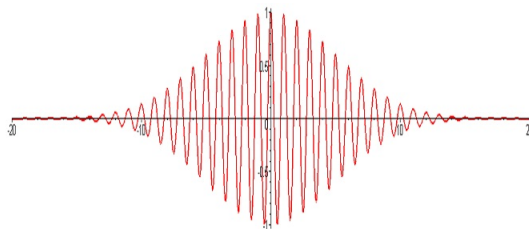
In altre parole la trasformata di Fourier, fatto fondamentale in teoria dei segnali, è in grado di *riconoscere le frequenze presenti nel segnale*. La sua applicazione è un'operazione che fa passare da una rappresentazione del segnale $f(x)$ in funzione del tempo x ad una sua rappresentazione $\hat{f}(\omega)$ in funzione delle frequenze ω .

Notiamo tuttavia che a causa della presenza dell'esponenziale complesso $e^{-2\pi i \omega x}$ nella (2.3), la funzione $\hat{f}(\omega)$ assume in generale valori complessi anche quando il segnale $f(x)$ è una funzione reale. Utilizzando la formula di Eulero, $\hat{f}(\omega)$ può essere espressa attraverso la parte reale e immaginaria:

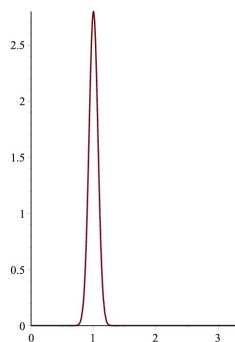
$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega x} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} [\cos(2\pi \omega x) - i \sin(2\pi \omega x)] f(x) dx.$$

In essa si osserva come $f(x)$ venga ancora “analizzata” in base a seni e coseni ma, a differenza del caso della serie di Fourier in cui si considerano solo frequenze multiple di quella fondamentale, in tale contesto ω può assumere qualsiasi valore. Vediamo in un semplice esempio come ciò avviene.

Esempio 1. Consideriamo il segnale “smorzato” $f(x) = e^{-x^2} \cos(2\pi x)$ di frequenza 1.



Applicando ad $f(x)$ la trasformata di Fourier otteniamo per $\hat{f}(\omega)$ il seguente grafico (per $\omega \geq 0$):



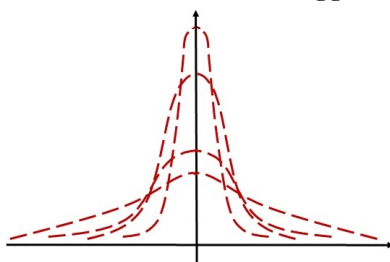
Il picco in corrispondenza della frequenza $\omega = 1$ segnala che il segnale $f(x)$ contiene “essenzialmente” la frequenza 1: la trasformata di Fourier ha effettivamente riconosciuto la presenza di questa frequenza anche se la funzione $f(x)$ non era periodica!

Come spieghiamo tuttavia la forma a campana del grafico? Ce ne occuperemo con il prossimo esempio ma prima è necessaria qualche osservazione.

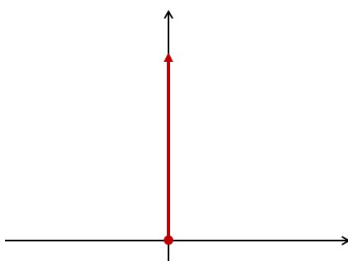
Osservazione 6. Mettiamo in evidenza che in questo particolare caso la funzione $\hat{f}(\omega)$ ottenuta è a valori reali per cui abbiamo potuto disegnarne il grafico senza problemi. Nel caso in cui $\hat{f}(\omega)$ assuma valori complessi, la scelta più naturale sarà quella di considerare il grafico di $|\hat{f}(\omega)|$ perdendo tuttavia parte dell’informazione contenuta nel segnale.

Osservazione 7. Come la serie, anche la trasformata di Fourier non è ben definita per ogni funzione da \mathbb{R} in \mathbb{C} ma occorre specificare condizioni, su cui non ci soffermeremo, che garantiscano l’esistenza dell’integrale

che compare nella sua definizione. È tuttavia possibile, e fondamentale anche dal punto di vista applicativo, estendere la definizione di trasformata di Fourier ad oggetti matematici più generali delle funzioni. Si tratta delle *distribuzioni* le quali possono essere definite come *limiti in senso opportuno* di funzioni. La loro definizione matematica rigorosa esula dagli scopi di queste note e ci limitiamo quindi a darne un'idea molto intuitiva in un caso particolare. Abbandonando per un momento i segnali, si pensi ad esempio, a distribuzioni di densità di massa (o di carica elettrica) lineare via via sempre più concentrate in un punto, supponiamo l'origine, rappresentate dalle curve tratteggiate nella figura seguente:



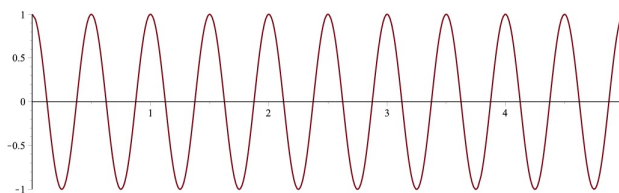
È intuitivo immaginare che esse avranno come limite una distribuzione tutta concentrata nell'origine (in fisica *massa (o carica) puntuale*). Tale distribuzione di densità, che si potrebbe dimostrare non essere una funzione, appartiene in effetti ad una più ampia classe di oggetti matematici detti appunto *distribuzioni*. Essa prende il nome di *Delta di Dirac*, si indica con il simbolo δ , e viene rappresentata con una “freccia” verticale:



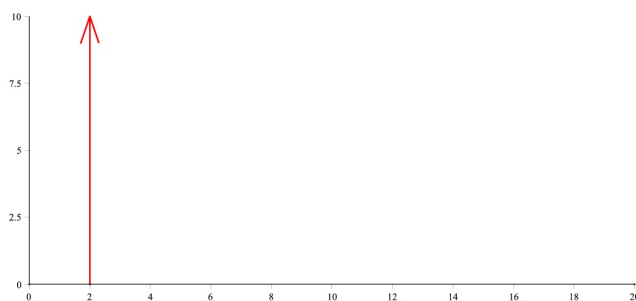
L'insieme delle *distribuzioni* è molto vasto e la delta di Dirac non è che un esempio, ma per i nostri scopi ciò è sufficiente.

Torniamo ora ai segnali:

Esempio 2. Consideriamo la funzione coseno $f(x) = \cos(4\pi x)$ che rappresenta una frequenza pura $\omega = 2$.

Figura 2.2: $f(x) = \cos(4\pi x)$.

Come si comporta la trasformata di Fourier applicata a questo segnale? Ciò che si ottiene è rappresentato dal seguente grafico:

Figura 2.3: Trasformata di Fourier della funzione $f(x) = \cos(4\pi x)$, relativa alle frequenze positive.

Siamo in un caso in cui la trasformata di Fourier non è più una funzione ma una distribuzione, in particolare una traslazione della *delta di Dirac* che viene ad essere “centrata” esattamente in corrispondenza della frequenza $\omega = 2$ contenuta nel segnale.

Ciò indica che tutto il contenuto in frequenza del segnale è concentrato nel solo punto $\omega = 2$, in altre parole il segnale contiene unicamente la frequenza pura $\omega = 2$. Per contro possiamo ora interpretare la forma a “campana” della trasformata ottenuta nell’Esempio 1. La presenza di uno smorzamento del segnale aveva infatti “deturpato” la frequenza pura $\omega = 1$ che pur ancora riscontrabile veniva indicata non come unica ma come punto di massimo di una “campana” di frequenze centrate attorno al valore 1.

Tutto quanto visto finora riguarda segnali contenenti una sola frequenza dominante. La maggior parte dei segnali reali tuttavia contiene più frequenze sovrapposte (immaginiamo ad esempio gli accordi musicali). Come si comporta la trasformata di Fourier di segnali di questo tipo? È in grado di distinguere le varie frequenze dominanti e segnalarle? In altre parole la

trasformata di un accordo musicale è in grado di risalire alle singole note che lo compongono?

Consideriamo il seguente segnale:

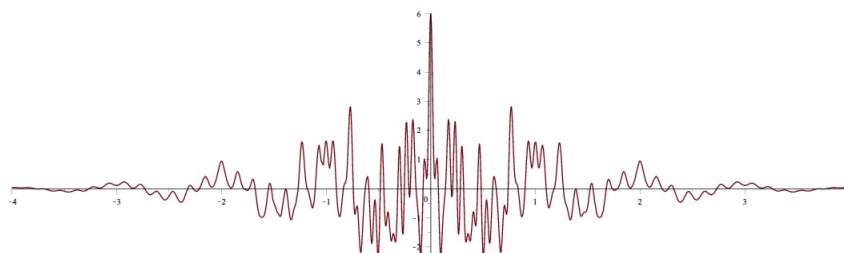


Figura 2.4: Esempio di segnale con più frequenze sovrapposte.

È chiaro che è assai difficile dalla forma del grafico di $f(x)$ distinguere le singole frequenze che lo compongono.

Tuttavia la trasformata di Fourier (figura seguente), come ci si aspetta, fornisce una funzione che presenta un “picco” in corrispondenza di ogni frequenza dominante del segnale originario permettendo quindi di risalire a tali frequenze.

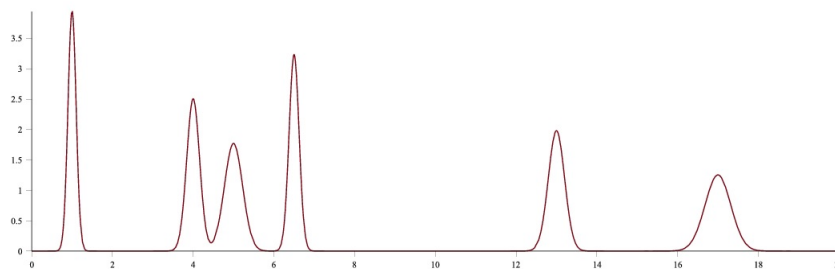


Figura 2.5: Trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$

Essa agisce in certo senso in modo simile all’orecchio umano che “sentendo il segnale sonoro” $f(x)$ riesce ad individuare da quali note esso è composto.

Tuttavia in questa individuazione delle frequenze la trasformata di Fourier è soggetta ad alcuni limiti intrinseci di cui parleremo nel seguito e che

porteranno alla definizione della trasformata di Gabor trattata nell'ultimo capitolo di queste note.

2.3 Il principio di indeterminazione

In meccanica quantistica il famoso principio di indeterminazione di Heisenberg afferma che non è possibile determinare contemporaneamente con precisione arbitraria posizione e velocità di una particella. In teoria dei segnali vale un principio di indeterminazione che ha identica struttura matematica ma invece delle variabili posizione e velocità coinvolge le variabili durata e frequenza di un segnale. Intuitivamente si può riassumere dicendo che maggiore è la “dispersione” nel tempo (ovvero la durata) di un segnale, minore è la sua “dispersione” nelle frequenze (ovvero l'imprecisione della determinazione delle frequenze che contiene). Viceversa un segnale di breve durata presenta una maggiore indeterminazione delle frequenze. Al limite per un segnale istantaneo il concetto stesso di frequenza perde significato (fatto che si esprime dicendo che non ha senso preciso il concetto di “frequenza istantanea”). Tutto ciò si può precisare meglio nel modo seguente.

Dato un segnale $f(x)$, le funzioni $|f(x)|^2$ ed $|\hat{f}(\omega)|^2$ possono essere interpretate come due modi equivalenti di rappresentare la distribuzione di energia del segnale, il primo rispetto al tempo, il secondo rispetto alle frequenze.

La quantità

$$E_f = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega \quad (2.4)$$

rappresenta l'energia totale del segnale. La seconda uguaglianza nella (2.4) è detta *uguaglianza di Parseval*² e in questo contesto non è altro che un'espressione della legge di conservazione dell'energia: l'energia totale di un segnale resta invariata calcolata rispetto ai tempi o alle frequenze.

Per esprimere la dispersione di energia rispetto al tempo e alle frequenze introduciamo le seguenti definizioni³:

- $\sigma_f^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx$ esprime la dispersione dell'energia rispetto al tempo;
- $\sigma_{\hat{f}}^2 = \int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ esprime la dispersione dell'energia rispetto alle frequenze;

²Per la dimostrazione si veda ad esempio [1]

³Si noti l'analogia con la varianza delle distribuzioni di probabilità classiche

Il valore definito da

$$\Delta x = \frac{\sigma_f^2}{E_f}$$

esprime allora la dispersione relativa del segnale nel tempo ed è chiamato *durata effettiva* del segnale f .

Analogamente il valore

$$\Delta \omega = \frac{\sigma_{\hat{f}}^2}{E_f}$$

è chiamato *banda di frequenze effettiva* ed esprime la dispersione relativa rispetto alle frequenze.

Il *principio di indeterminazione* di Heisenberg è una limitazione inferiore al prodotto $\Delta x \cdot \Delta \omega$. Più precisamente vale disuguaglianza ⁴:

$$\Delta x \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (2.5)$$

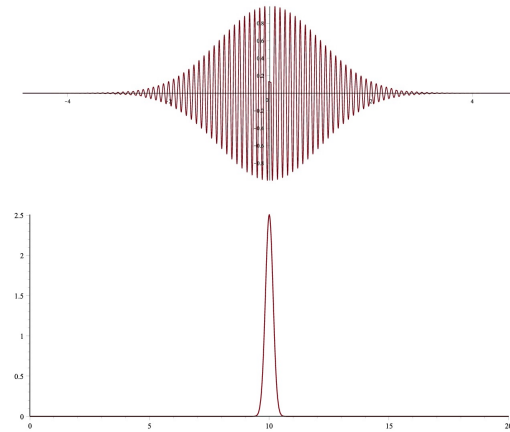
La conseguenza di ciò è che

non si può avere dispersione delle frequenze e del tempo entrambe piccole a piacere.

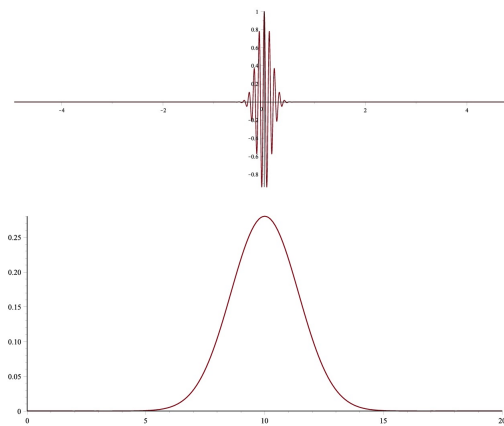
Quindi, se Δx è piccolo, $\Delta \omega$ dovrà necessariamente essere grande (questo, come si è accennato in precedenza, è legato al fatto che, se il segnale esiste per un tempo molto breve, è più difficile distinguere in modo preciso le frequenze). Viceversa, se Δx è grande, $\Delta \omega$ potrà essere piccolo (ovvero considerando intervalli temporali molto lunghi si potranno determinare frequenze più precise).

Nelle seguenti figure si evidenzia questa “dualità” tra la durata del segnale e la concentrazione della sua trasformata di Fourier.

⁴Per la dimostrazione si veda ad esempio [1]



Segnale $f(x)$ di “lunga durata” e corrispondente trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ molto concentrata.



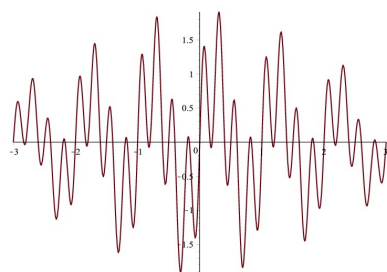
Segnale $f(x)$ di “breve durata” e corrispondente trasformata di Fourier $\hat{f}(\omega)$ poco concentrata.

Concludiamo questo paragrafo ricordando che il principio di indeterminazione di Heisenberg non è che uno dei molti modi di esprimere l’indeterminazione descritta. Esiste in effetti una vasta letteratura a riguardo in quanto l’idea fisica di base può essere formalizzata in modi e con strumenti matematici diversi.

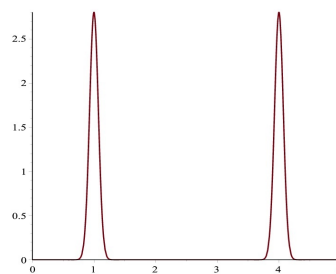
2.4 Limiti della trasformata di Fourier

La trasformata di Fourier, come abbiamo visto, segnala le frequenze che compaiono in un dato segnale, permettendo ad esempio di risalire alle singole frequenze presenti in un'onda sonora composta. Essa ha però un limite, che illustriamo con i seguenti esempi.

Esempio 1.

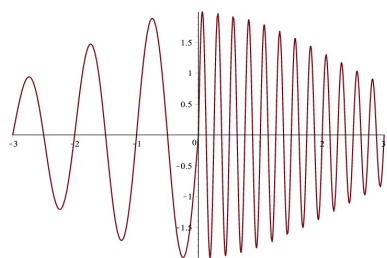


Segnale f_1

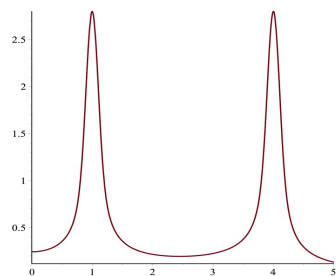


Trasformata di Fourier \hat{f}_1

Esempio 2.

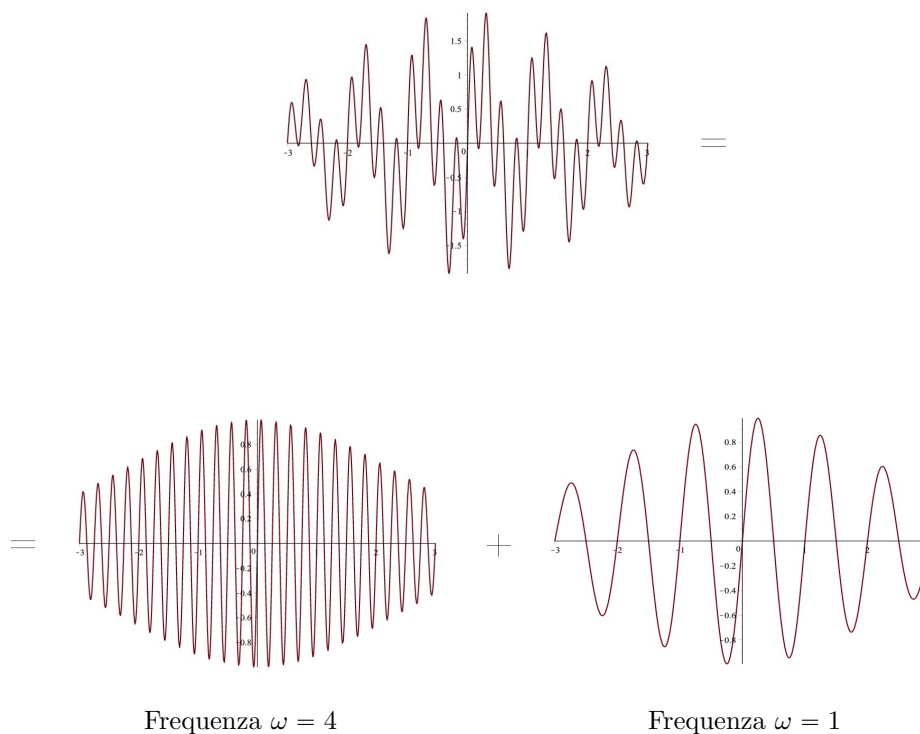


Segnale f_2



Trasformata di Fourier \hat{f}_2

Possiamo notare che le trasformate di Fourier dei due segnali f_1 e f_2 sono simili (in particolare hanno gli stessi picchi in corrispondenza delle stesse frequenze $\omega = 1$ e $\omega = 4$), mentre i due segnali di partenza sono molto diversi tra loro. La spiegazione di questo fenomeno è che il segnale f_1 è costituito dalla somma di due frequenze, nel modo seguente:



Le due frequenze che, sommate, generano f_1 sono le stesse che compaiono in f_2 , con l'unica differenza che, in f_1 , esse *suonano* contemporaneamente, mentre in f_2 esse *suonano* in successione, una dopo l'altra.

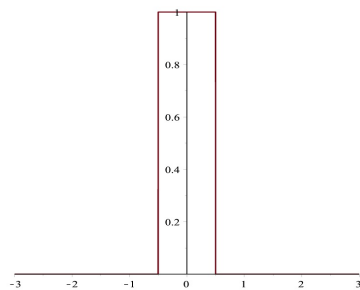
Guardando il grafico della trasformata di Fourier, riusciamo effettivamente a riconoscere che nei due segnali compaiono le frequenze 1 e 4, ma non riusciamo a capire *quando* compaiono. Quest'informazione in realtà è contenuta nella trasformata di Fourier (infatti le due trasformate non sono perfettamente identiche), ma non è chiaramente individuabile. Per rendere questa informazione *leggibile* in modo semplice, c'è bisogno di un'idea nuova, che presenteremo nel prossimo paragrafo.

Capitolo 3

La trasformata di Gabor

Riprendiamo gli esempi del paragrafo precedente, e cerchiamo di formalizzare un metodo (basato sulla trasformata di Fourier) che permetta non solo di individuare le frequenze del segnale, ma di mettere in evidenza anche in quali intervalli di tempo esse compaiono. Per fare questo, non possiamo analizzare tutto il segnale contemporaneamente, ma dobbiamo analizzarne un tratto per volta. In questo modo, diventerà evidente che, in ogni tratto del segnale f_1 sono presenti contemporaneamente entrambe le frequenze, mentre, per quanto riguarda f_2 , in tratti diversi del segnale vi sono frequenze diverse.

Matematicamente si tratta di “tagliare” il segnale, moltiplicandolo per una “funzione finestra” che viene fatta spostare nel tempo. Successivamente si applica la trasformata di Fourier al segnale tagliato. In tal modo la trasformata coinvolge soltanto le frequenze che cadono nell’intervallo determinato dalla “finestra” e non tutte quelle presenti nel segnale stesso. Consideriamo per esempio una funzione finestra $g(x)$ del seguente tipo:



Finestra g

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

È chiaro che moltiplicando un segnale $f(x)$ per la finestra g verrà annullata la parte di segnale al di fuori dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, mentre la parte all'interno di questo intervallo verrà conservata inalterata.

Lo spostamento della finestra nel tempo si effettua tramite una traslazione, cioè considerando $g(t-x)$ e ciò consente di esaminare tutto il segnale ma non contemporaneamente bensì al variare del tempo x ; la trasformata di Gabor di f si definisce quindi come la trasformata di Fourier di f moltiplicata per una traslazione di g . Precisamente, si ha la seguente definizione.

Definizione 8. Fissata una “funzione finestra” opportuna $g \neq 0$, la **trasformata di Gabor** (detta anche **short-time Fourier transform** o, ancora, **windowed Fourier transform**) di un segnale f rispetto a g è data da

$$V_g f(x, \omega) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega t} f(t) \overline{g(t-x)} dt, \quad \text{per ogni } x, \omega \in \mathbb{R}.$$

Questa trasformata deve il suo nome all'ingegnere e fisico ungherese **Dennis Gabor**¹.



Figura 3.1: Dennis Gabor (1900 – 1979)

Osserviamo che nella definizione di $V_g f(x, \omega)$ compare il complesso coniugato di $g(t-x)$ (si veda l'Appendice per un'introduzione sui numeri

¹Dennis Gabor (1900-1979). Ingegnere, fisico e inventore ungherese naturalizzato britannico. Iniziò gli studi a Budapest, sua città natale, e trasferitosi in Germania si laureò in ingegneria a Berlino. Intraprese poi ricerche nel gruppo Siemens fino al 1933, quando, essendo di famiglia ebraica sfuggì al Nazismo trasferendosi in Gran Bretagna. Nel dopoguerra fu insegnante all'Imperial College di Londra e sviluppò ricerche nel campo dell'ottica elettronica, in particolare i suoi lavori riguardanti la tecnica dell'olografia gli valsero il premio Nobel per la fisica nel 1971.

(https://it.wikipedia.org/wiki/Dennis_Gabor)

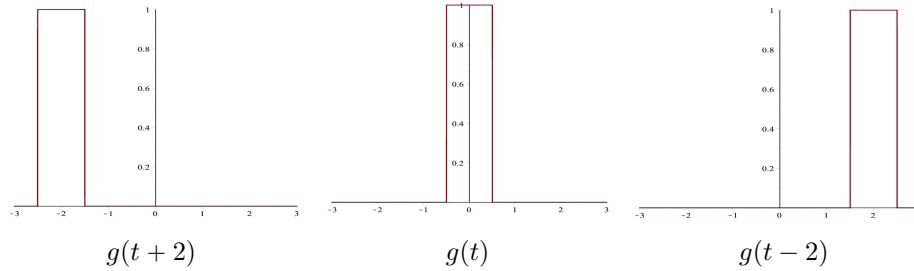
complessi); questo è dovuto a motivazioni matematiche formali che esulano dagli obbiettivi della presente trattazione. Negli esempi che considereremo prenderemo in considerazione finestre g reali, per cui il complesso coniugato di g coincide con g stessa: nel seguito ignoreremo dunque la coniugazione complessa sulla finestra g .

Non potremmo tuttavia ignorare la presenza dell'esponentiale complesso $e^{-2\pi i \omega t}$, infatti, come la trasformata di Fourier, anche la trasformata di Gabor è in generale una funzione a valori complessi e per poterla rappresentare in grafici considereremo in realtà implicitamente il suo modulo $|V_g f(x, \omega)|$.

A differenza della trasformata di Fourier, la *trasformata di Gabor* di un segnale è però una funzione in due variabili, il tempo x e la frequenza ω . Essa fornisce indicazioni sia sulle frequenze sia sui tempi in cui esse compaiono nel segnale.

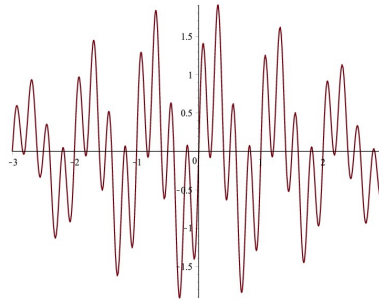
Osserviamo anche che la scelta della funzione finestra non è unica; la finestra g considerata sopra ha il vantaggio di tagliare il segnale senza modificarlo, tuttavia il fatto che non sia continua produce delle irregolarità nelle rappresentazioni. Per questo motivo, spesso si preferisce considerare finestre di tipo gaussiano. Queste funzioni infatti non tagliano il segnale in modo netto in quanto non sono mai nulle e neanche mantengono parti del segnale intatte non essendo identicamente uguali ad 1 su nessun intervallo, dunque modificano leggermente il contenuto del segnale. Tuttavia approssimano bene il comportamento di una finestra “rettangolare” g come quella sopra considerata con il vantaggio di fornire rappresentazioni più regolari e più facilmente trattabili dal punto di vista matematico. Per testi più approfonditi sull'argomento rimandiamo a [1] e [2].

Vogliamo ora analizzare la trasformata di Gabor degli esempi del paragrafo 2.4. Osserviamo innanzitutto cosa succede quando moltiplichiamo i corrispondenti segnali per $g(t - x)$; a titolo esemplificativo, consideriamo $x = -2$, $x = 0$, $x = 2$:

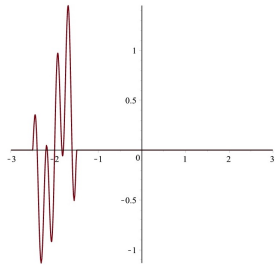
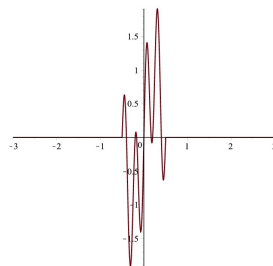
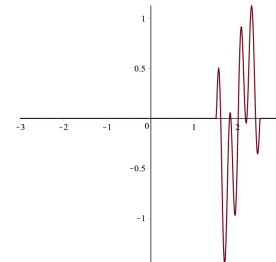


I grafici di $f(t)g(t - x)$ sono illustrati nei seguenti due esempi.

Esempio 1. Il primo segnale era dato dalla seguente funzione che rappresenta due frequenze presenti contemporaneamente nel segnale

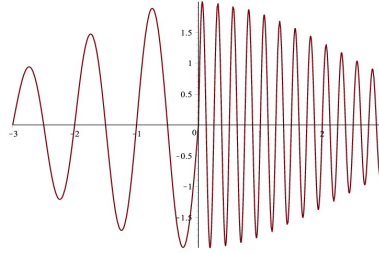
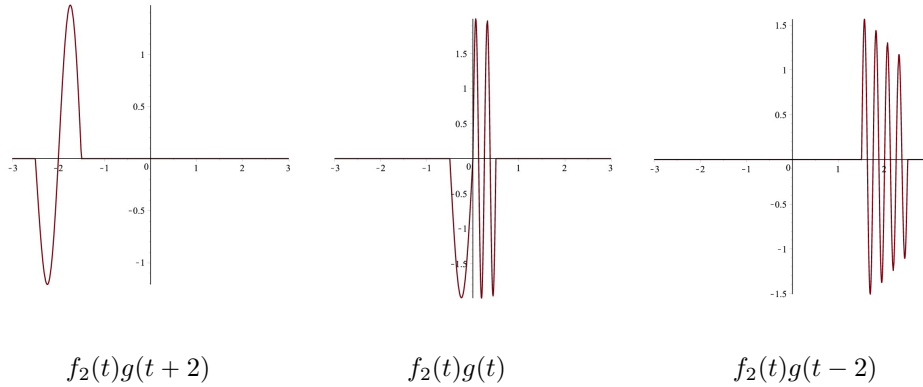
Segnale f_1

Tagliando il segnale con le traslazioni della finestra g otteniamo i seguenti grafici:

 $f_1(t)g(t+2)$  $f_1(t)g(t)$  $f_1(t)g(t-2)$

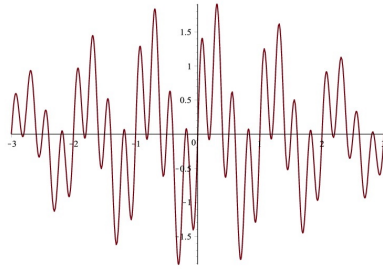
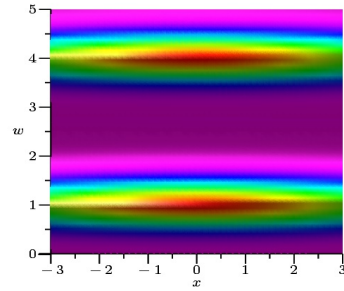
Anche soltanto osservando qualitativamente questi grafici si nota facilmente che, in ognuno di essi, il segnale tagliato contiene ancora entrambe le frequenze presenti nel segnale completo.

Esempio 2. Il secondo segnale del paragrafo 2.4 conteneva le stesse due frequenze ma presenti in intervalli di tempo successivi:

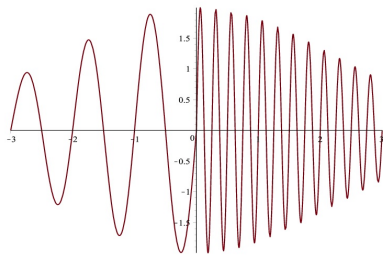
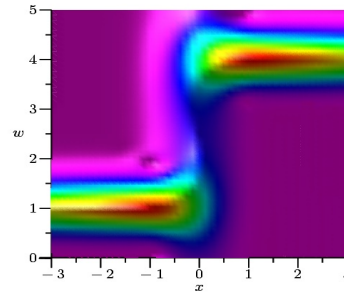
Segnale f_2 

A differenza dell'esempio precedente, si nota ora che il primo ed il terzo grafico contengono frequenze diverse. Notiamo anche che, il grafico centrale, che corrisponde alla traslazione $x = 0$ della finestra g e che rappresenta quindi ciò che si “udirebbe” al tempo $x = 0$, presenta un problema: entrambe le frequenze sono presenti mentre in realtà nel segnale le due frequenze non si sovrappongono in nessun istante. Di tale problema parleremo più avanti. Riportiamo ora i grafici delle trasformate di Gabor di f_1 e f_2 . In queste rappresentazioni leggiamo i tempi x sull'asse orizzontale, e le frequenze ω su quello verticale, i valori di $|V_g f(x, \omega)|$ sono rappresentati tramite colori diversi.²

²I grafici delle trasformate di Gabor che presentiamo nei prossimi paragrafi sono ottenuti con una finestra di tipo gaussiano

Esempio 1.Segnale f_1 

Trasformata di Gabor

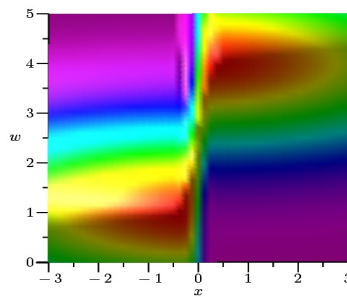
Esempio 2.Segnale f_2 

Trasformata di Gabor

I grafici delle trasformate di Gabor di f_1 e f_2 mostrano chiaramente il fatto che, nel primo caso, le due frequenze $\omega = 1$ e $\omega = 4$ compaiono in contemporanea, mentre nel secondo caso compaiono in successione.

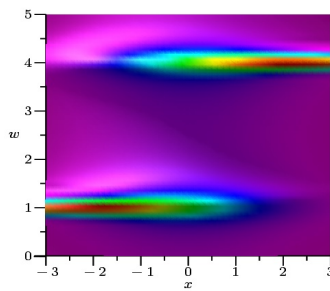
Vogliamo ora soffermarci sul secondo esempio, e analizzare il comportamento vicino a $x = 0$. Abbiamo già osservato che, quando tagliamo il segnale f_2 vicino all'origine, vediamo nella stessa “finestra” entrambe le frequenze; questo ha un riscontro nella corrispondente trasformata di Gabor, in cui notiamo che le due frequenze, vicino a $x = 0$, non sono perfettamente separate, ma c'è una sorta di “interferenza” tra di loro, nonostante nel segnale di partenza esse siano nettamente distinte nel tempo. Potremmo tentare di limitare questo problema prendendo una finestra g molto stretta, in modo

da “vedere” entrambe le frequenze per il minor tempo possibile. Questo però causa un altro problema: prendere una finestra molto stretta corrisponde ad analizzare volta per volta una parte molto piccola del segnale, e come già osservato nel paragrafo 6, da un tratto molto piccolo del segnale, è più difficile individuare correttamente le frequenze. Quindi, se da un lato una finestra stretta permette di aumentare la precisione sui tempi, dall’altro compromette la precisione sulle frequenze. Calcolando $V_g f_2$ con una finestra molto stretta, si ottiene infatti il grafico seguente.



Trasformata di Gabor di f_2 , con finestra stretta

D’altra parte, una finestra larga permette di individuare in modo più preciso le frequenze, ma aumenta anche la zona in cui nel segnale tagliato compaiono entrambe le frequenze; il risultato è una maggiore precisione nelle frequenze, e una minore precisione sui tempi, come si vede nel grafico seguente.



Trasformata di Gabor di f_2 , con finestra larga

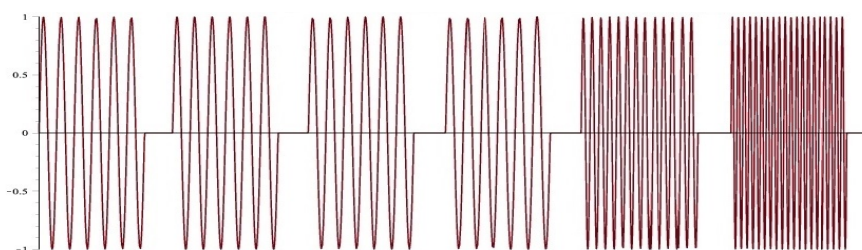
Si potrebbe tentare di ottenere una rappresentazione migliore combinando opportunamente le due precedenti. Per esempio, il prodotto tra una

trasformata di Gabor con finestra stretta e una con finestra larga dà in genere risultati migliori sia sui tempi che sulle frequenze, introducendo tuttavia altri tipi di interferenze su cui non ci soffermiamo in queste note.

Osserviamo che questa “dualità” tra tempi e frequenze, per cui un aumento della precisione da un lato comporta una diminuzione dall’altro, è una caratteristica intrinseca della trasformata di Gabor, legata al principio di indeterminazione, e si può formalizzare in modo preciso dal punto di vista matematico. Inoltre, è possibile costruire rappresentazioni più sofisticate della trasformata di Gabor, che permettano, almeno su determinate classi di segnali, di ottenere una precisione migliore su tempi e frequenze. Queste questioni tuttavia vanno al di là degli obbiettivi di questa trattazione.

3.1 La partitura musicale

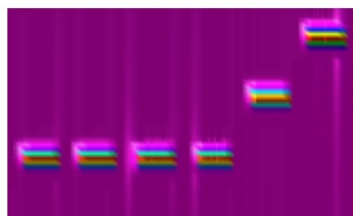
Consideriamo un segnale di questo tipo:



Se un musicista, sentendo suonare questo segnale, lo volesse trascrivere in notazione musicale, scriverebbe qualcosa del genere



D'altra parte, possiamo calcolare la trasformata di Gabor del segnale, e otteniamo il seguente grafico:

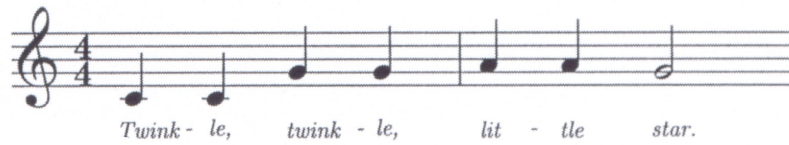


Notiamo il parallelismo delle due rappresentazioni. L'analisi tempo-frequenza del segnale, tramite la trasformata di Gabor, ha prodotto qualcosa di simile allo spartito musicale di cui quel segnale è espressione. In entrambi i casi leggiamo, in orizzontale, lo scorrere del tempo e, in verticale, le frequenze presenti nei vari intervalli temporali.

La scrittura di uno spartito equivale dunque all'*analisi del segnale* f in termini di informazione tempo-frequenza. Viceversa, suonare corrisponde all'operazione di *sintesi* o *ricostruzione* del segnale originale f a partire dalla sua rappresentazione tempo-frequenza.

Osserviamo tuttavia che una nota musicale fissa lunghezza e frequenza di un suono come multipli (o frazioni) di unità di tempo e frequenza pre-stabilite. Lo spartito può essere quindi visto come una decomposizione “discreta” della musica in “atomi tempo-frequenza”. Per contro la trasformata di Gabor fornisce una rappresentazione “nel continuo” essendo la funzione $V_g f(x, \omega)$ non a valori interi ma in genere complessi e dipendente dalle variabili x ed ω che variano con continuità nei numeri reali.

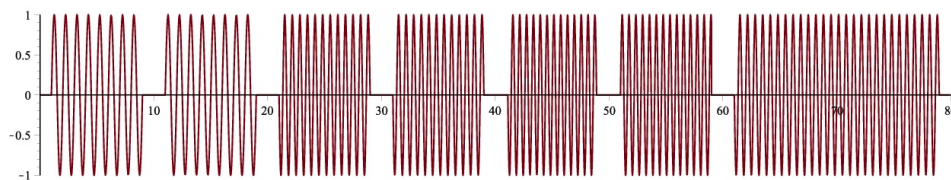
Presentiamo ora un altro esempio che, oltre a mettere in luce il parallelismo tra la trasformata di Gabor e la partitura musicale, illustra anche l'effetto che la scelta della funzione finestra ha sul grafico finale della rappresentazione tempo-frequenza. Partiamo dal seguente spartito



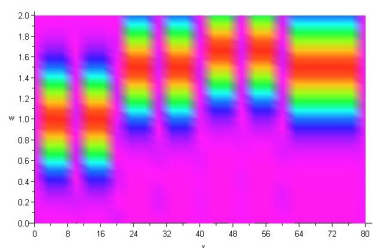
che rappresenta le prime due battute della nota melodia *Twinkle twinkle little star* e anticipa quale dovrebbe essere il grafico della trasformata di Gabor del segnale corrispondente.

Consideriamo ora il seguente segnale acustico che modella le note della partitura musicale precedente

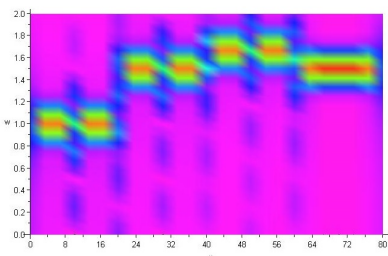
$$f(t) = \begin{cases} \sin(2\pi \cdot x) & \text{se } 1 < x < 9 \\ \sin(2\pi \cdot x) & \text{se } 11 < x < 19 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 21 < x < 29 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 31 < x < 39 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot x) & \text{se } 41 < x < 49 \\ \sin(2\pi \cdot 5/3 \cdot x) & \text{se } 51 < x < 59 \\ \sin(2\pi \cdot 3/2 \cdot x) & \text{se } 61 < x < 79 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$



Applichiamo la trasformata di Gabor al segnale acustico $f(x)$ precedente. In particolare la calcoliamo utilizzando due funzioni finestra differenti.



In questo caso è stata usata una finestra gaussiana con supporto nei tempi stretto e, pertanto, largo spettro. Di conseguenza la trasformata di Gabor possiede una buona risoluzione temporale che è evidente nella netta separazione rispetto al tempo delle sette componenti del segnale. Tuttavia si hanno larghe bande di frequenza e questo ci mostra la povera risoluzione spettrale.



In questo secondo caso è stata usata una finestra gaussiana con supporto largo nei tempi e, dunque, stretto spettro. In questa situazione la trasformata di Gabor fornisce una buona risoluzione rispetto alle frequenze per ogni componente del segnale, ma la risoluzione temporale è mediocre, come si nota dalla scarsa precisione nella separazione temporale tra le note.

Abbiamo, quindi, messo ora in luce su un esempio musicale la differenza di comportamento tra una trasformata di Gabor con finestra stretta ed una larga, fenomeno le cui motivazioni erano state analizzate nel paragrafo precedente. In ogni caso possiamo comunque identificare le regioni di massima intensità di energia sul piano tempo-frequenza con corrispondenti note dello spartito musicale, a riprova del fatto che la rappresentazione tempo-frequenza è il corrispettivo matematico della partitura musicale.

3.2 Applicazioni: analisi, elaborazione e ricostruzione di segnali

Dopo aver costruito la trasformata di Gabor e averne analizzato i legami con la partitura musicale è naturale chiedersi quali applicazioni tutto ciò possa avere. A questo proposito vogliamo brevemente illustrare in questo paragrafo uno dei suoi utilizzi più importanti che consiste nella possibilità di “ripulire” i segnali da vari disturbi.

Questa operazione prevede essenzialmente 3 fasi:

(1) **Analisi:** il segnale viene analizzato nello spazio tempo-frequenza tramite la trasformata di Gabor. Dato un segnale $f(x)$ questa prima operazione consiste quindi nel passaggio:

$$f(x) \longrightarrow V_g f(x, \omega)$$

(g è una opportuna funzione finestra). Notiamo incidentalmente che la trasformata di Gabor non è affatto l'unica trasformata disponibile. Esistono infatti svariate altre trasformazioni ognuna delle quali presenta a seconda dei casi vantaggi e svantaggi, non ci soffermeremo tuttavia su questo aspetto.

(2) **Elaborazione:** Una volta che si ha a disposizione il segnale nello spazio tempo-frequenza si cerca di distinguere le frequenze effettivamente rilevanti dai “disturbi”. Moltiplicando poi il segnale trasformato, cioè $V_g f(x, \omega)$, per una opportuna funzione che sia nulla nelle zone dello spazio tempo-frequenza individuate come disturbi è possibile “ripulire” il segnale. La distinzione tra disturbi e vere frequenze è, come si può immaginare, una questione assai delicata su cui non ci soffermeremo. Semplificando, si può immaginare ad esempio che in un determinato intervallo di tempo $[a, b]$ non ci si aspetti frequenze in una determinata fascia $[\alpha, \beta]$. Se nel rettangolo $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ risultasse $V_g f(x, \omega)$ diversa da zero sarà allora chiaro che si tratta di un disturbo. Per eliminarlo sarà sufficiente moltiplicare $V_g f(x, \omega)$ per una funzione $a(x, \omega)$ che sia zero in $[a, b] \times [\alpha, \beta]$. Il secondo passo consiste quindi nella moltiplicazione:

$$V_g f(x, \omega) \longrightarrow V_g f(x, \omega) a(x, \omega)$$

(3) **Ricostruzione:** il segnale, modificato al punto (2), viene ricostruito a partire dalla sua rappresentazione nel piano tempo-frequenza tramite l'applicazione di una “operazione inversa” della trasformata di Gabor che viene denominata “formula di ricostruzione”. La descrizione di questa formula

esula dagli scopi di queste note, ci limitiamo a scrivere la sua espressione che è la seguente:

$$V_g f(x, \omega) a(x, \omega) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^2} a(x, \omega) V_g f(x, \omega) e^{2\pi i \omega t} g(t - x) dx d\omega$$

L'applicazione in successione delle tre operazioni predendenti prende il nome di “operatore di localizzazione”. Lo studio degli operatori di localizzazione è uno dei settori fondamentali dell'analisi dei segnali. Operatori di questo tipo agiscono sui segnali come filtri variabili nel tempo “lasciando passare” o eliminando le frequenze al variare del tempo a seconda della funzione $a(x, \omega)$ usata nella fase (2).

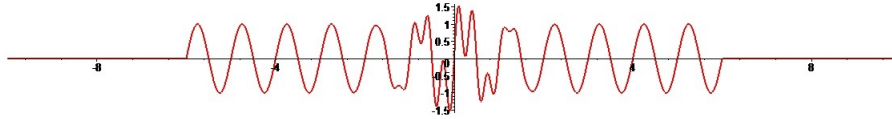
Riassumendo:

$$f(x) \longrightarrow \tilde{f}(x) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{2d}} a(x, \omega) \underbrace{V_g f(x, \omega)}_{\text{analisi}} e^{2\pi i \omega t} g(t - x) dx d\omega}_{\substack{\text{elaborazione} \\ \text{ricostruzione}}} \left. \vphantom{\int_{\mathbb{R}^{2d}}} \right\} \begin{array}{l} \text{operatore} \\ \text{di} \\ \text{localizzazione} \end{array}$$

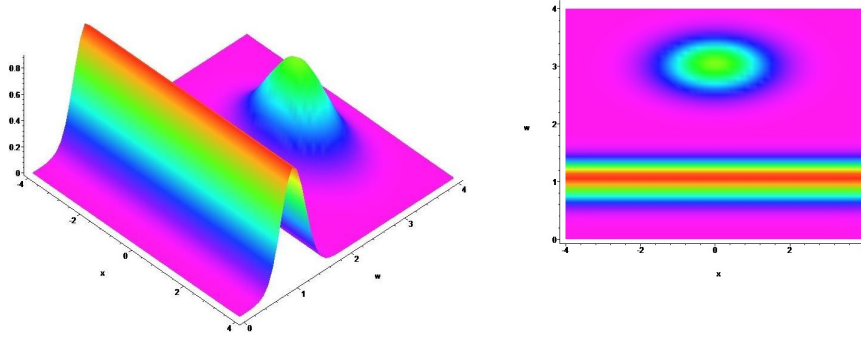
dove $f(x)$ è il segnale originario, $\tilde{f}(x)$ è il segnale “ripulito”.

Per concludere ci proponiamo di illustrare su un semplicissimo esempio la tecnica appena descritta.

Consideriamo il segnale seguente contenente nell'intervallo di tempo $[-4, 4]$ la frequenza $\omega = 1$ soggetta ad un “disturbo” durante l'intervallo $[-1.5, 1.5]$.



Applichiamo la trasformata di Gabor scegliendo per esempio come funzione finestra la gaussiana $g(t) = e^{-t^2}$. Otterremo il grafico:

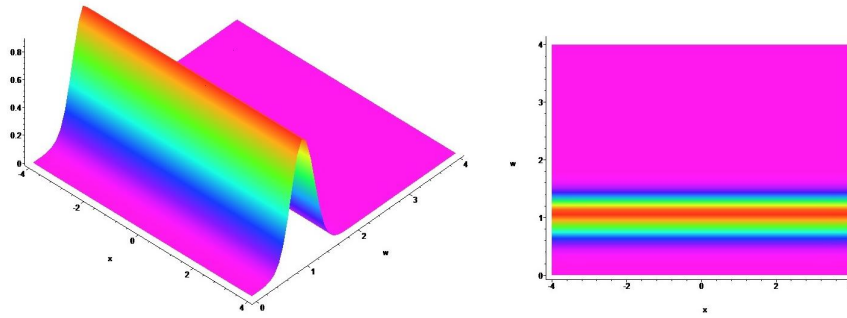


visto rispettivamente in prospettiva e dall'alto.

A differenza di quanto avviene con il grafico del segnale originario, è ora chiaramente riconoscibile che il disturbo è contenuto nel rettangolo $R = [-2, 2] \times [2, 4]$ dello spazio tempo-frequenza. Definiamo allora, ad esempio, $a = \chi_R$, ovvero

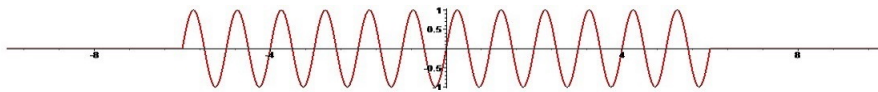
$$a(x, \omega) = \begin{cases} 1 & \text{per } (x, \omega) \in R; \\ 0 & \text{per } (x, \omega) \notin R. \end{cases}$$

Per il prodotto $a(x, \omega)V_g f(x, \omega)$ otteniamo il grafico:



visto rispettivamente in prospettiva e dall'alto.

Come si può vedere il disturbo è stato cancellato. Ricostruendo ora il segnale con la formula di ricostruzione otteniamo:



Ciò corrisponde esattamente alla frequenza $\omega = 1$ “ripulita” dal disturbo originario.

Il principio qui illustrato trova per esempio applicazione nelle tecniche di ripulitura di vecchie incisioni in cui siano presenti fruscii ed altri disturbi.

3.3 Conclusione

Gli argomenti trattati e gli esempi proposti sono stati volutamente semplificati rispetto alle situazioni che si incontrano realmente nelle applicazioni. Scopo di queste note è infatti fornire una presentazione qualitativa ed intuitiva dell’analisi dei segnali senza pretese di completezza e senza eccedere nel rigore matematico. La scelta degli argomenti e del tipo di presentazione riflettono inoltre l’interesse ed i gusti degli autori. Riportiamo nella bibliografia alcuni testi più rigorosi ed approfonditi su questi temi. Ci auguriamo comunque di aver dato un esempio di come una buona comprensione del mondo che ci circonda si basi inevitabilmente sullo sviluppo di adeguati modelli matematici.

Capitolo 4

Appendice

4.1 I Numeri Complessi

L'insieme dei numeri complessi, indicato con \mathbb{C} , estende quello dei reali¹ e risponde all'esigenza di dare soluzioni a equazioni polinomiali. Si pensi, ad esempio, all'equazione

$$x^2 + 1 = 0.$$

Sappiamo che $x^2 = -1$ non ha soluzioni reali, in quanto in \mathbb{R} non esistono numeri il cui quadrato sia un numero negativo. Estendiamo pertanto \mathbb{R} ad un insieme più grande, indicato con \mathbb{C} , detto insieme dei *numeri complessi*. Esso contiene un elemento i , detto **unità immaginaria**, che gode della proprietà

$$i^2 = -1,$$

ed è quindi (insieme a $-i$) soluzione dell'equazione $x^2 + 1 = 0$. Non entreremo nei dettagli dell'estensione da \mathbb{R} a \mathbb{C} ma richiamiamo solo il necessario a dare un significato operativo alle formule usate che compaiono nella definizione della trasformata di Fourier e di Gabor, rimandando a testi più specifici (ad esempio [4]) per un approccio più rigoroso ed approfondito.

Un numero complesso $z \in \mathbb{C}$ è costituito da una coppia (x, y) di numeri reali; x si dice *parte reale* di z ed y *parte immaginaria* (in simboli $Re(z) = x$ e $Im(z) = y$). Invece di $z = (x, y)$ sarà più conveniente scrivere

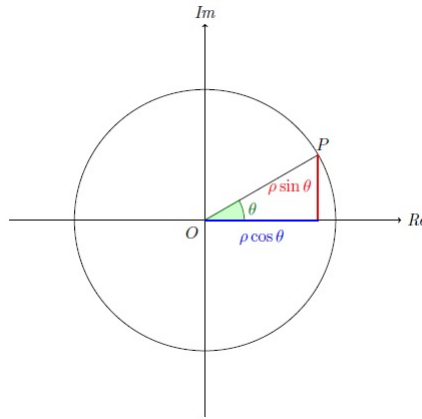
$$z = x + iy.$$

¹Valgono le seguenti inclusioni:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

In questo modo le operazioni di somma e prodotto di \mathbb{R} si estendono “operativamente” a \mathbb{C} applicando le solite regole su binomi del tipo $x + iy$ e ricordando semplicemente che $i^2 = -1$.

I numeri complessi sono in corrispondenza con i punti del piano, detto *piano complesso* o *piano di Gauss*: esso è rappresentato da un piano cartesiano con asse delle ascisse coincidente con l’asse reale e asse delle ordinate coincidente con l’asse immaginario. Al numero complesso $x + iy$ si associa il punto P di coordinate cartesiane (x, y) . Ad esempio, l’unità immaginaria i viene ad essere rappresentata dalla coppia $(0, 1)$.



Oltre a questo tipo di rappresentazione, detta *rappresentazione cartesiana*, esistono diversi altri modi per rappresentare un numero complesso, e questi sono tutti equivalenti tra loro. La *rappresentazione polare* fa riferimento alle coordinate (ρ, θ) (coordinate polari). Pertanto, un numero $z \in \mathbb{C}$ si può esprimere come

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta).$$

ρ è detto **modulo** di z ed è sempre un numero positivo o nullo, mentre θ è detto **fase** o **argomento**. Se $z \in \mathbb{C}$ è espresso in coordinate cartesiane, ovvero $z = x + iy$, è possibile passare alle coordinate polari utilizzando le seguenti relazioni necessarie per ottenere modulo e fase:

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Usando poi la cosiddetta *formula di Eulero*, è possibile dare una ulteriore rappresentazione dei numeri complessi, la *rappresentazione esponenziale*, che

discende direttamente da quella polare. Precisamente si ha:

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \rho e^{i\theta} \quad \textbf{formula di Eulero},$$

uguaglianza che si può prendere come definizione dell'esponenziale complesso $e^{i\theta}$ per $\theta \in \mathbb{R}$.

Dato $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, chiamiamo *complesso coniugato* di z il numero $\bar{z} = x - iy$ e risulta $|z|^2 = \bar{z}z$.

Una *funzione complessa* di una variabile complessa è un'applicazione che associa un numero complesso $f(z) \in \mathbb{C}$ ad ogni z in un sottoinsieme A di \mathbb{C} . Usiamo la seguente notazione

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto w = f(z) \end{aligned}$$

dove, separando parte reale e parte immaginaria di $f(z)$ ed identificando z con la coppia (x, y) , possiamo scrivere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ovvero assegnare f equivale a specificare due funzioni $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ reali di due variabili reali.

Come per il caso delle funzioni reali, anche per quelle complesse si possono definire la continuità, la derivabilità, ma anche, come è stato appena fatto per i numeri complessi, si può definire la *funzione complessa coniugata* $\overline{w(z)} = u(x, y) - iv(x, y)$ (ad esempio, nella trasformata di Gabor compare $\overline{g(t-x)}$).

Naturalmente nel caso particolare in cui l'insieme di definizione A della funzione f sia incluso in \mathbb{R} avremo una funzione complessa di variabile reale, ovvero

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{C} \\ t &\mapsto w = f(t) \end{aligned}$$

Un esempio di questo tipo è la funzione $e^{2\pi it\omega}$ che compare nella definizione della trasformata di Fourier e che, per ogni valore fissato di ω , dipende dalla variabile reale t .

4.2 Gli Integrali impropri

Dato $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervallo reale limitato ed $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funzione reale di variabile reale, supponiamo nota la nozione di integrale di Riemann

$$\int_a^b f(t) dt.$$

Ci proponiamo qui di dare senso ad integrali estesi a tutto \mathbb{R} di funzioni a valori complessi definite su \mathbb{R} ⁽²⁾

Consideriamo inizialmente il caso di funzioni reali.

Definizione 9. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann su ogni intervallo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Poniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(t) dt + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(t) dt$$

nel caso esistano finiti entrambe i limiti precedenti e chiamiamo tale valore *integrale di Riemann improprio (o generalizzato)* di f su \mathbb{R} . Nel caso invece uno o entrambe i limiti suddetti non siano finiti o non esistano diremo che f non è integrabile su \mathbb{R} in senso improprio secondo Riemann.

Alcune osservazioni:

1) La scelta del punto 0 in cui “dividere” l’integrazione precedente è del tutto irrilevante e potrebbe essere sostituita da un qualsiasi altro punto $x_0 \in \mathbb{R}$, lasciamo la verifica al lettore.

2) Notiamo che si tratta di un tipo di integrale improprio in cui non vi è “compensazione” nel senso che se

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 f(t) dt = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b f(t) dt = -\infty$$

(o viceversa) si assumerà che la funzione non sia integrabile e non che abbia integrale nullo (altrimenti dovremmo ad esempio accettare che la funzione $y = x$ sia integrabile con integrale nullo su \mathbb{R}).

3) Abbiamo descritto la situazione in un caso un po’ particolare. In realtà una definizione più generale includerebbe casi in cui la funzione $f(t)$ possa anche avere asintoti verticali (purchè con ordine di infinito non troppo elevato). Anzi è usuale inquadrare l’argomento nell’ambito ancora più generale dell’integrazione di Lebesgue invece di quella di Riemann. Tuttavia per gli scopi di questa introduzione la descrizione data risulta più che sufficiente.

Passiamo ora al caso di funzioni a valori complessi. Come visto alla fine dell’appendice sui numeri complessi, una funzione di variabile reale a valori

² Anche quando un segnale $f(t)$ è una funzione reale di variabile reale, nella trasformata di Fourier (e similmente in quella di Gabor) compare l’integrale $\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i \omega t} f(t) dt$ dove, poichè $e^{-2\pi i \omega t} = \cos(2\pi \omega t) - i \sin(2\pi \omega t)$, si ha, per ogni ω fissato, l’integrale su tutto \mathbb{R}

complessi è una funzione del tipo

$$f : t \in \mathbb{R} \longrightarrow f(t) = u(t) + iv(t) \in \mathbb{C}$$

dove $u(t)$ e $v(t)$ sono due funzioni reali di variabile reale (dette parte reale e parte immaginaria di f).

Definizione 10. L'integrale di f su \mathbb{R} è il numero complesso

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \int_{\mathbb{R}} u(t) dt + i \int_{\mathbb{R}} v(t) dt.$$

a patto che entrambi gli integrali di u e v esistano finiti come integrali impropri di funzioni reali di variabile reale. (In modo analogo si definirebbe l'integrale di f su qualunque altro dominio di integrazione)

Rimandiamo ad esempio ai testi [4, 5, 6] per una trattazione più approfondita.

Bibliografia

- [1] C. Gasquet, P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications: Filtering, Numerical Computation, Wavelets Harmonic Analysis in Phase Space*, Springer-Verlag, 1998.
- [2] K. Gröchenig. *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2001.
- [3] D. Kammler, *A First Course in Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 2007.
- [4] M. Bramanti, C.D Pagani, S.Salsa, *Analisi matematica 1*, Zanichelli 2008
- [5] L. G. Rodino, *Lezioni di Analisi Matematica 1*, Levrotto&Bella, 1989.
- [6] C. Trapani, *Analisi Matematica - Funzioni di una variabile*, McGraw-Hill, 2008.

di una funzione a valori complessi della variabile reale t .