18 ottobre 2022 Lezione 1

Orario : 1 intervallo inizio 16:00

Libro : S. Ross Introduction to probability models

Esami 2 parti si possono sostenere in appelli diversi purché entro settembre

Durante il corso vi distribuisco 2 fogli esercizi

Si può lavorare in gruppo (≤ 3 membri)

2 settimane lezione
Esercizi
1 settimana senza lez

2 settimane lezione
Esercizi

↳ voto massimo cui aspirare per gli appelli di Gennaio Febbraio!

Dopo : esercizi all'orale

Soluzioni: Scritte in LaTeX

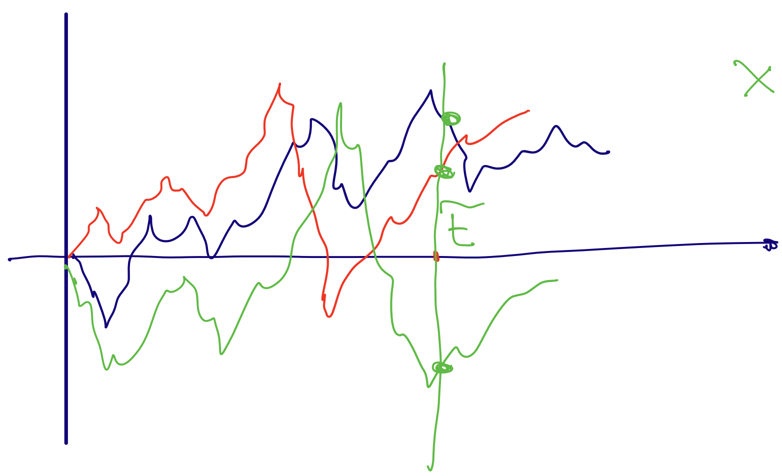
Fuoco del corso

$X(\omega)$ $\omega \in S$

$\{X_t(\omega)\}$ $\{X_n(\omega)\}$

$\downarrow$ $\downarrow$

t continuo discreto



$X(\tilde{t})$ è una v.a.

Passato e futuro sono indipendenti se conosco il presente

$\Downarrow$

Processi stocastici di Markov

- Eventi e spazio campione
- Probabilità su eventi
- Probabilità condizionali
- Indipendenza
- Bayes
- V. a. discrete

S: spazio campione

E: evento $E \subseteq S$

Probabilità (assiomatica)

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Per ogni sequenza di eventi $\{E_n\}_{n \geq 1}$ con $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Es. Def. classica

$$P = \frac{n^\circ \text{ casi favorevoli}}{n^\circ \text{ '' possibili}}$$

Es. Def frequentista

$$P = \frac{n \text{ successi}}{n \text{ prove}}$$

Eventi non incompatibili

$$\{E_i\}_{n \geq 1}$$

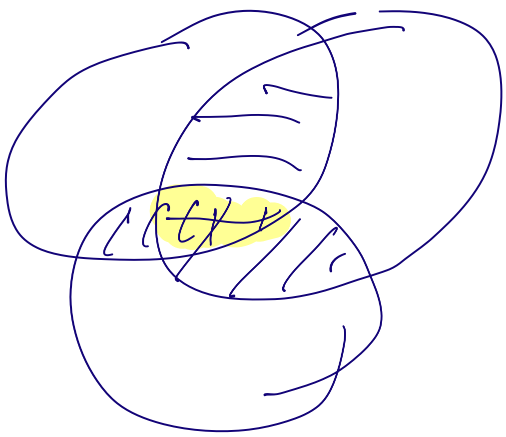
$$P\left(\bigcup_i^{\infty} E_i\right) = \sum_i^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i E_j E_k) + \dots$$

$$+ \dots (-1)^n P(E_1 E_2 \dots E_n)$$

Incompatibili $\quad E_i \cap E_j = \emptyset$

"lavoro sugli insiemi"

indip. $P(E_i \cap E_j) = P(E_i)P(E_j)$



PROBABILITÀ CONDIZIONATA

$E, F \in S$

$$P(E|F) = \frac{P(\overbrace{EF}^{E\cap F})}{P(F)}; \qquad P(F) > 0$$

Esercizio

3 uomini a una festa

lanciano il loro cappello al centro. Poi ognuno ne sceglie uno a caso

Probab. che nessuno di loro riabbia il suo cappello?

Sol.

$P = 1 - P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$E_i = \{$ l'uomo i-mo recupera il suo cappello $\}$

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = \overbrace{P(E_1)}^{1/3} + \overbrace{P(E_2)}^{1/3} + \overbrace{P(E_3)}^{1/3} - P(E_1 E_2) - P(E_1 E_3) - P(E_2 E_3) + P(E_1 E_2 E_3)$

$P(E_1 E_2) = 1/6$

$P(E_1 E_2 E_3) = \underbrace{P(E_3 | E_1 E_2)}_{1} \underbrace{P(E_1 E_2)}_{1/6}$

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3\frac{1}{3} - 3\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$P = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

INDIPENDENZA

E ed F si dicono indipendenti se

$$P(EF) = P(E)P(F)$$

$$\hookrightarrow \quad \frac{P(EF)}{P(F)} = P(E) \qquad P(F) > 0$$

$$\boxed{P(E|F) = P(E)}$$

Estensione a n eventi

Def $E_1, \dots, E_n$ sono indip. se per $\forall$ sottoinsieme $E_{i_1}, \dots, E_{i_r}$, $r \leq n$

$$P(E_{i_1} \dots E_{i_r}) = \prod_{j=1}^{r} P(E_{i_j})$$

ATTENZIONE:

Se
$$\begin{cases} P(E_1 E_2) = P(E_1) P(E_2) \\ P(E_1 E_3) = P(E_1) P(E_3) \\ P(E_2 E_3) = P(E_2) P(E_3) \end{cases}$$
gli eventi sono indip. a coppie MA NON È DETTO CHE SIANO INDIPENDENTI

Esempio: 4 palline numerate

$E = \{1, 2\}$ $F = \{1, 3\}$

$G = \{1, 4\}$

Estraz. equiprob.

$$P(EF) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$= \underbrace{P(E)}_{\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{P(F)}_{\frac{1}{2}}$$

$$P(EG) = \frac{1}{4} = P(E)P(G)$$

$$P(GF) = \frac{1}{4} = P(F)P(G)$$

$$P(EFG) = P(\{1\}) = \frac{1}{4}$$

$$\neq P(E)P(F)P(G) = 1/8$$

FORMULA di BAYES

S Partizione di S:

$$A_1, \dots, A_n$$

$E \in S$

$$P(A_i \mid E) = \frac{P(E \mid A_i)\, P(A_i)}{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} P(E \mid A_i)\, P(A_i)}_{P(E)}}$$

VARIABILI ALEATORIE

V. a. $<$ discrete, continue

$$X = \begin{cases} x_1 & P(X = x_1) \\ x_2 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ x_n & P(X = x_n) \end{cases}$$

Distribuzione di X

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ P(X=x_1) & P(X=x_2) & \cdots & P(X=x_n) \end{bmatrix}$$

Le v.a. discrete assumono un n° finito o un'infinità numerabile di valori

Descrizione di v.a. discrete

- Distribuzione
- Valore atteso

$$E(X) = \sum x_i \, P(X=x_i)$$

$$E(g(X)) = \sum g(x_i) P(X=x_i)$$

Es.

$$E(\ln X) = \sum (\ln x_i) P(X=x_i)$$

- Funzione caratteristica

$$E\left(e^{-i\lambda X}\right) = \sum_{x_i} e^{-i\lambda x_i} P(X = x_i)$$

- Funzione generatrice dei momenti

$$E\left(e^{\lambda X}\right) = \sum_{x_i} e^{+\lambda x_i} P(X = x_i)$$

$$\operatorname{Var} X = E\Big[\big(\underbrace{X - EX}_{Y}\big)^2\Big]$$

$E(X^2)$

$$\sum^{x_n} P(X = x_i) = P(X \leq x_n)$$

Principali distribuzioni discrete

1. V. A. di Bernoulli

$$X \sim Be(p)$$

$$X = \begin{cases} 1 & p \\ 0 & 1-p \end{cases}$$

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{bmatrix}$$

$$EX = \sum_{i=1}^{2} x_i P(X = x_i) =$$

$$1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\operatorname{Var} X = E(X^2) - (\underbrace{EX}_{p})^2$$

$$E(X^2) = 1 p + 0 \cdot (1-p) = p$$

$$\operatorname{Var} X = p - p^2 = p(1-p)$$

2. V. a. Binomiale (n, p)

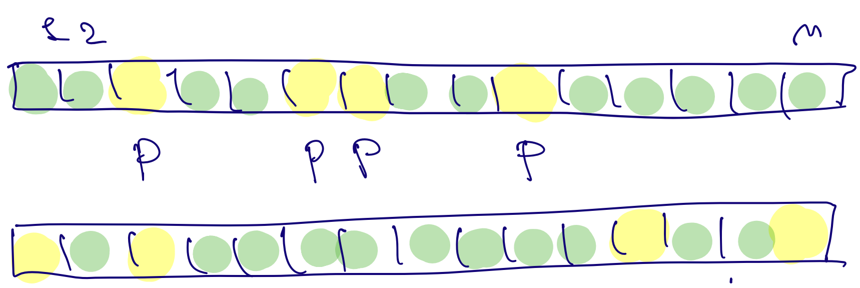
$$X = \begin{cases} 0 & P(X=0) \\ 1 & \vdots \\ 2 & \vdots \\ \vdots & \\ m & P(X=m) \end{cases}$$

$$Y \sim Be(p)$$

$$X = \sum_{i=1}^{m} Y_i$$

$$P(X=i) = \binom{m}{i} p^{i} (1-p)^{m-i}$$

$$i = 0, \dots, m$$



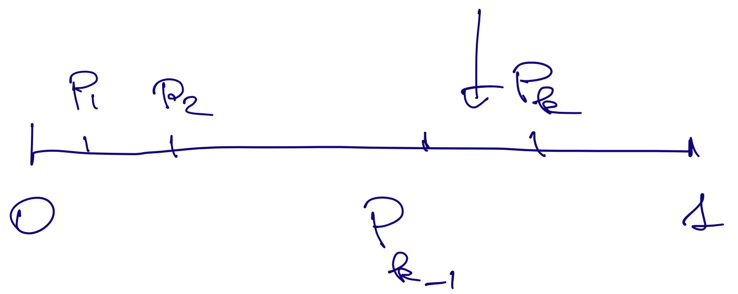
$$p^{i} (1-p)^{m-i}$$

$$P(X=0) = p_1$$

$$P(X=0)+P(X=1) = p_2$$

$$P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) = p_3$$

$$\vdots$$



$$\downarrow \; X = k$$

Una v.a. $Bi(n,p)$ conta il n° di successi in n prove indipendenti.

3. V.a. Geometrica (p)

$$X \sim Geo(p)$$

$$P(X=k) = q^{k-1}\,p \qquad (q = 1-p)$$

$k = 1, \ldots$

$k \in \mathbb{N}^+$

. In un sistema di prove ripetute X è il n° di prove fino al I successo.

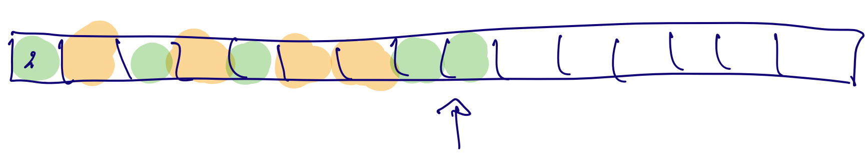
4. Distribuzione Binomiale negativa (di Pascal)

Probabilità di avere k insuccessi prima di avere n successi

$$P(Y = k) = p \binom{k+n-1}{k} p^{n-1} q^{k}$$

$k = 4$

$n = 5$

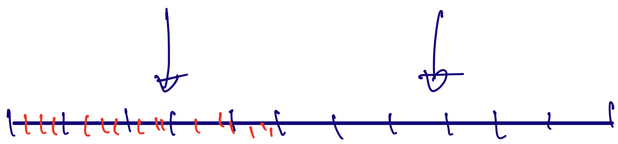


$Y \sim Geo(p)$

$$M = \sum_{i=1}^{k} Y_i$$

5. v. a. di Poisson(λ)

$$P(N=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=0,1,\dots$$



n prove indip. con prob. p_n

$$P(N=k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} =$$

$$n p_n = \lambda \qquad p_n = \frac{\lambda}{n}$$

$$= \binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^{k}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \underbrace{\frac{\overbrace{n(n-1)\cdots(n-k+1)}^{\sim n^k}}{n^k}}_{\to 1} \frac{\lambda^k}{k!} \frac{\overbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n}}^{\to e^{-\lambda}}}{\underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{k}}_{\to 1}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \underbrace{\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}}_{\text{Poisson}} = P(N=k)$$