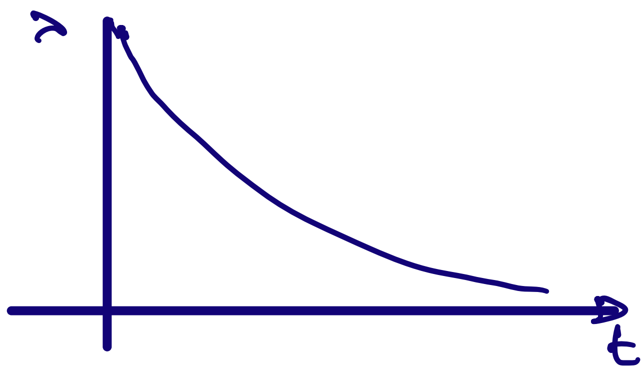
15/11/2022 Lezione 7

V.a. esponenziale



$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$$\lambda > 0$$

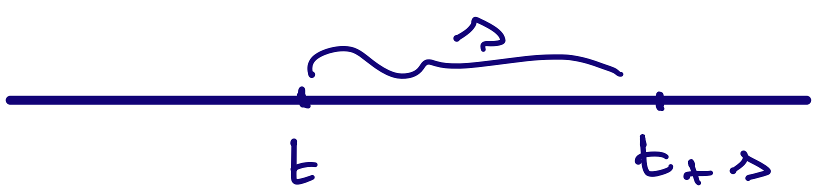
$$EX = \frac{1}{\lambda} \qquad Var\, X = \frac{1}{\lambda^2}$$

PROPRIETÀ

La v.a. $X \sim exp(\lambda)$ si dice

PRIVA DI MEMORIA:

$$P(X > t+s \mid X > t) = P(X > s)$$



NON C'È USURA

$X \sim \exp(\lambda)$ gode delle proprietà

$$P(X > s+t \mid X > t) =$$

$$\frac{P(X > s+t,\ X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)}$$

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

Esempio

Ufficio con 2 impiegati. Quando entra un cliente entrambi sono occupati ma non c'è coda. Tempi di servizio siano indip. esponenziali di parametro μ.

Con quale probab. l'ultimo entrato è l'ultimo a uscire?

R

$\underbrace{X_1 \quad X_2}$ X_3

$$X_2 > X_3$$

$$X_2 \sim \exp(\mu)$$

$$X_3 \sim \exp(\mu)$$

$$P(X_3 > X_2) = 1/2$$

$$P(X_3 > X_2) = \int_0^{\infty} P(X_3 > X_2 \mid X_2 = x) f_{X_2}(x)\,dx$$

$$-\mu x$$

$$\overset{\text{ind.}}{=} \int_0^\infty \overbrace{P(X_3 > x)}^{e^{-\mu x}} \mu e^{-\mu x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty \mu e^{-2\mu x}\, dx = \frac{1}{2}$$

$$f_X(x) = \mu e^{-\mu x}$$

$$F_X(x) = \int_0^x \mu e^{-\mu y}\, dy = 1 - e^{-\mu x}$$

$$\bar{F}_X(x) = 1 - F_X(x) = e^{-\mu x}$$

Teorema: l'esponenziale è l'unica distribuzione continua che gode della proprietà di assenza di memoria

Nel discreto l'unica distribuzione che gode della prop. di assenza di memoria è la dist. geometrica

Altre proprietà delle v.a

$$X \sim \exp(\lambda)$$

1. $\sum_{1}^{n} X_i$ $\quad X_i \sim \exp(\lambda)$ i.i.d.

$$\sum_{1}^{n} X_i \sim \text{Gamma}(n, \lambda)$$

2. $X_1 \sim \exp(\lambda_1)$ $\quad X_2 \sim \exp(\lambda_2)$
indip.

$$P(X_1 < X_2) = \int_0^{\infty} P(X_1 < X_2 | X_1 = x) f_X(x)\, dx$$

sapro.

$$\overset{\text{ind.}}{=} \int_0^\infty P(X_2 > x)\, \underbrace{\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}}_{\text{d.d.p.}} \, dx =$$

$$= \int_0^\infty e^{-\lambda_2 x} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \, dx =$$

$$P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

3. Distrib. del minimo tra n v.a. esponenziali indip. $X_i \sim \exp(\lambda_i)$

$$P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) =$$

$$P(X_1 > x, \dots, X_n > x) =$$

$$\prod_{i=1}^{n} \underbrace{P(X_i > x)}_{e^{-\lambda_i x}} = \prod_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i x} =$$

$$e^{-x \sum_1^n \lambda_i} = P(\min(X_1, \dots, X_n) > x)$$

4. $$P\left(X_i = \min_{j=1,\dots,m} X_j\right) = \frac{\lambda_i}{\sum_{i}^{m} \lambda_j}$$

X_i indip. $X_i \sim \exp(\lambda_i)$

Esercizio

Si consideri una coda con un unico servitore, il cui tempo di servizio sia $\exp(\mu)$. Ogni cliente che arriva aspetta un tempo esponenz. di parametro θ e se non è servito lascia la coda

Calcolare

$$P_n = P(\text{n-me persona sia servita})$$

Ho una coda in cui 1 persona è in servizio e penso all'n-ma in coda

Sol.

$$P_n = P_{n-1} \left(\text{Prob. (io non abbia il tempo più piccolo)} \right)$$

P(mio tempo sia il più piccolo)

$$= \frac{\theta}{n\theta + \mu}$$

$$P_n = \left(1 - \frac{\theta}{n\theta + \mu}\right) P_{n-1}$$

$$= \left(\frac{n\theta + \mu - \theta}{n\theta + \mu}\right) P_{n-1}$$

$$= \frac{\cancel{(n-1)\theta+\mu}}{n\theta+\mu} \frac{(n-2)\theta+\mu}{\cancel{(n-1)\theta+\mu}} P_{n-2}$$

$$= \dots = \frac{\theta+\mu}{n\theta+\mu} \underbrace{P_1}_{\frac{\mu}{\theta+\mu}} =$$

$$\frac{\mu}{n\theta+\mu}$$

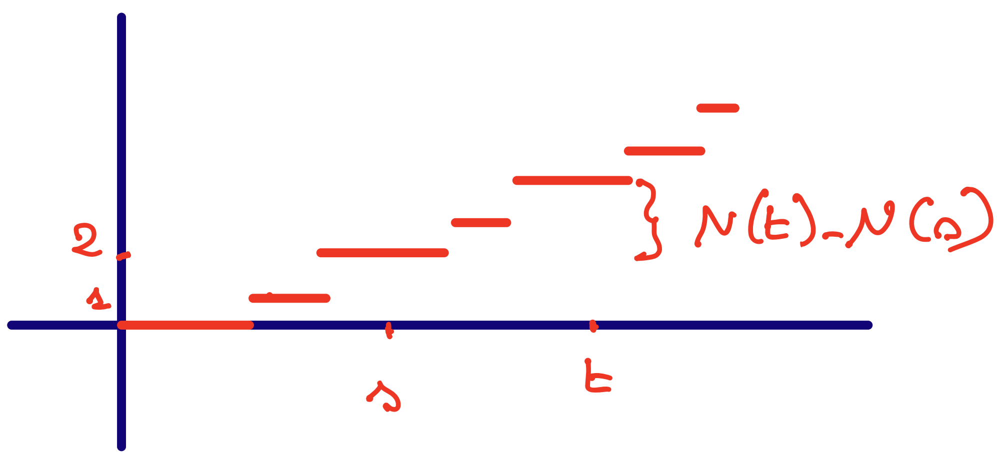
PROCESSI di CONTEGGIO

<u>Def</u> Il processo $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ si dice processo di conteggio se

1. $N(t) \geq 0$
2. $N(t) \in \mathbb{N} \qquad t \geq 0$
3. Se $s < t \quad N(s) \leq N(t)$

4. Se $s < t$ $\quad N(t) - N(s)$ conta il numero di eventi in $(s, t]$

$N(t) - N(s)$ si dice incremento del processo in $(s, t]$



Def Un processo si dice a incrementi indipendenti se il n° di eventi che si verificano in intervalli disgiunti sono v.a. indipendenti

Per $\forall\ t_1 < t_2 < t_3 < t_4$

$$N(t_2) - N(t_1) \perp\!\!\!\perp N(t_4) - N(t_3)$$

$\perp$
indip.

Def. Un processo si dice a incrementi stazionari se

$$N(t+s)-N(t) \sim N(s)-N(0)$$
$$\forall s,t$$

$$\boxed{\text{PROCESSO DI POISSON}}$$

Def: Un processo di conteggio si dice di Poisson se

1. $N(0)=0$
2. Ha incrementi indipendenti
3. Il n° di eventi che si verificano in un intervallo $(s,t]$, $\forall s,t>0$ è una v.a. di Poisson di parametro $\lambda(t-s)$

$$P(N_{(s,t]}=k)=P(N(t)-N(s)=k)$$

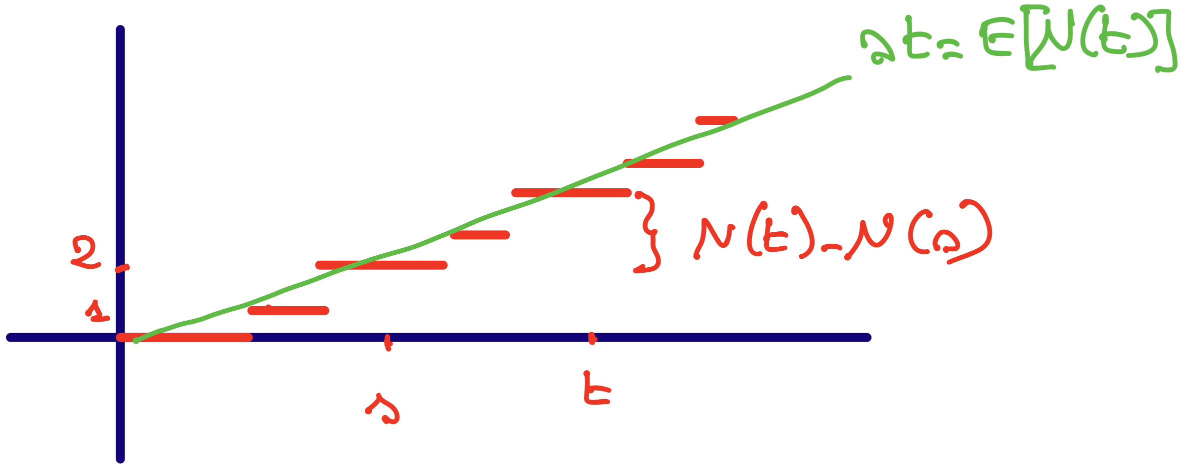
$$= \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(t-s)}$$

$k = 0, 1, \dots$

Proprietà

$$E[N(t)] = \lambda t$$

del processo in (s



<u>Def. 2</u> Il processo $\{N(t)\}$ è un processo di Poisson se:

1. $N(0)=0$

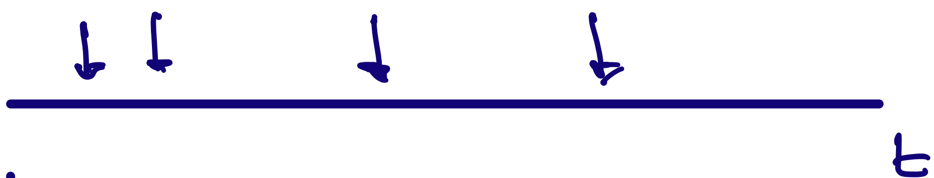
2. Ha incrementi indipendenti e stazionari

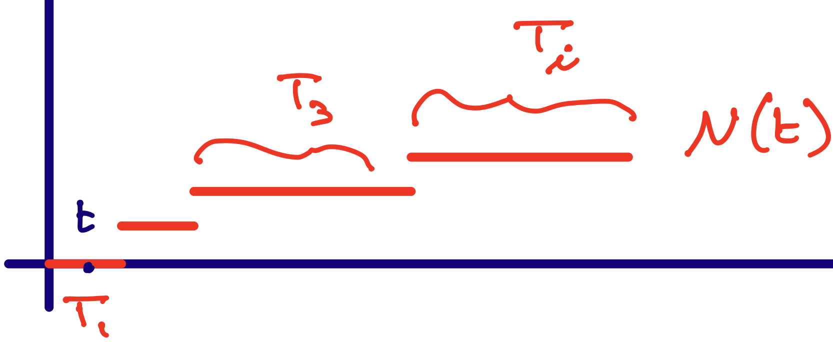
3. $P(N(h)=1)=\lambda h+o(h)$

4. $P(N(h)\geq 2)=o(h)$

È un processo di Markov?

È il più semplice processo di Markov a tempo continuo





$\{T_i\}$ sono indip.

Distribuz. ?

$P(T_1 > t)$

$$\{T_1 > t\} = \{N(t) = 0\}$$

$$P(T_1 > t) = P(N(t)=0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}$$

$\hookrightarrow T_1 \sim exp(\lambda)$

$$P(T_2 > t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_2 > t\}}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_2 > t\}} \mid T_1]]$$

$$= \mathbb{E}[P(T_2 > t \mid T_1)]$$

Oss.

$$P(T_2 > t \mid T_1 = s) = P(N_{(s,s+t]} = 0 \mid T_1 = s)$$

$\overset{\text{ind.}}{=} P(N_{(s,s+t]} = 0) =$

$\underset{\text{staz.}}{=} P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$

$\hookrightarrow$ $\{T_i\}$ v.a. indip. ident. dist. $T_i \sim exp(\lambda)$

<u>Def</u> $\{N(t)\}$ è il processo di conteggio caratterizzato da intertempi indip. esponenziali di parametro λ.

Espres. dist. Gamma

$S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ tempo n-mo evento

$\downarrow$ dist. come una gamma

Oss.

$$\{N(t) \geq n\} \leftrightarrow \{S_n \leq t\}$$

$$P(N(t) \geq n) = P(S_n \leq t) = F_{S_n}(t)$$

$$= \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

Voglio la funzione d.d.p.

$$\frac{d}{dt} F_{S_n}(t) =$$

$$-\lambda e^{-\lambda t} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^j}{j!} +$$

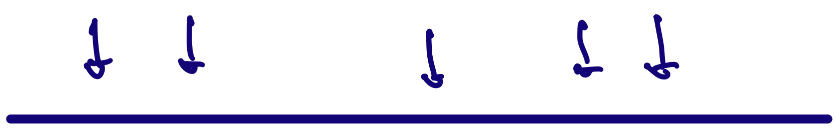
$$\lambda \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t} \cancel{j} \frac{(\lambda t)^{j-1}}{\cancel{j!}_{(j-1)!}}$$

$$= -\lambda \sum_{j=n}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j}}{j!} + \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$+ \lambda \sum_{j=n+1}^{\infty} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1}}{(j-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} = f_{S_n}(t)$$

PROPRIETÀ DEL PROCESSO DI POISSON



p : P(evento di tipo 1)

$1-p$: P(. . . tipo 2)

$N_1(t)$ n° eventi di tipo 1

$N_2(t)$ " " " 2

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t)$$

<u>Teorema</u> Se $\{N(t)\}$ è un proc. di Poisson di parametro λ allora $\{N_1(t)\}$ e $\{N_2(t)\}$ sono 2 proc. di Poisson di parametri λp e $\lambda(1-p)$ indip.

Dim

1. $N_1(0) = N_2(0)$

2. Increm. indip. $\Rightarrow$ vero perché

lo sono quelli $N(t)$

3. $P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \mid N(t)=k)$

Se $k \neq n+m$

$$P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \mid N(t)=k) = 0$$

$$P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m) =$$

$$\sum_k P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \mid N_1(t)+N_2(t)=k) \cdot P(N_1(t)+N_2(t)=k) =$$

$$\underbrace{P(N_1(t)=n,\ N_2(t)=m \mid N_1+N_2(t)=n+m)}_{\binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m} \, P(N_1(t)+N_2(t)=n+m)$$

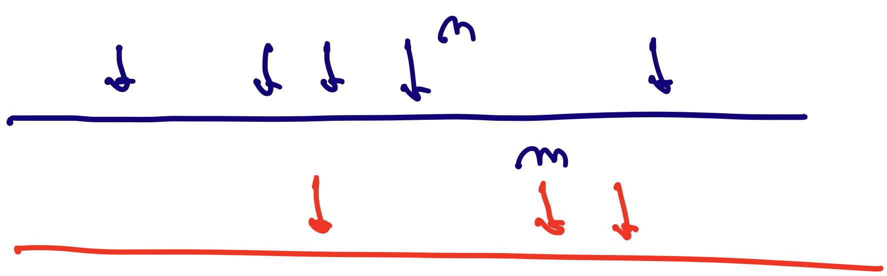
$$= \binom{n+m}{n} p^n (1-p)^m \frac{(\lambda t)^{n+m}}{(n+m)!} e^{-\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda p t}\frac{(p\lambda t)^n}{n!}\,\frac{(\lambda(1-p))^m}{m!}e^{-\lambda(1-p)t}$$

$\sim$ Poisson$(\lambda p t)$ Poisson$(\lambda(1-p)t)$

- Proprietà

Consideriamo 2 processi di Poisson indip. di parametri λ_1 e λ_2.



S^1_n tempo n mo evento del I processo

S^2_m tempo m-mo evento del II processo

$$P(S^1_n < S^2_m) = ?$$

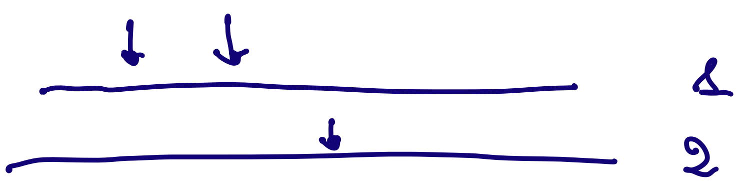
Sol.

$n = 1 \quad m = 1$

$$P(S^1_1 < S^2_1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

$n = 2 \quad m = 1$

$$P(S^1_2 < S^2_1) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}\right)^2$$



$$P(S^1_n < S^2_m) =$$

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-k-1} \binom{n+m-1}{k}$$

Esercizi consegna 3 pomeriggio