16/11/2022 Lezione 8

Distribuzione condizionale dei tempi tra gli arrivi conoscendo il n° totale di arrivi fino al tempo t.

Caso $N(t) = 1$

$$P(T_1 < s \mid N(t)=1) = \frac{P(T_1 < s,\ N(t) = 1)}{P(N(t)=1)} =$$

$$\frac{P(N_{[0,s)} = 1,\ N_{[s,t]} = 0)}{P(N_t = 1)} \overset{\text{inc. indip.}}{=}$$

$$\frac{P(N_{[0,s)} = 1)\, P(N_{[s,t)} = 0)}{P(N_t = 1)} =$$

$$\frac{\cancel{\lambda} s \,\cancel{e^{-\lambda s}}\,\cancel{e^{-\lambda(t-s)}}}{\cancel{\lambda} t\,\cancel{e^{-\lambda t}}} =$$

$P(T_1 < s) = \dfrac{s}{t} \qquad s \in [0,t]$

$\downarrow$

t é uniforme in $[0,t]$

Teorema Dato $N(t)=n$, gli n tempi di arrivo degli eventi $S_1, S_2, \dots, S_n$ hanno la stessa distribuzione delle statistiche ordinate corrispondenti a n v.a. uniformi in $(0,t)$

Statistiche ordinate:

Ho $X_1, X_2, \dots, X_n$ v.a. i.i.d.

$\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$

$\min(X_1, X_2, \dots, X_n$ da cui ho tolto il min$)$

etc.

Catene di Markov a tempo continuo

<u>Def. 1</u> $\{X_t\}_{t\geq 0}$ sia un processo stocastico a valori sugli interi non negativi. $\{X_t\}$ si dice CATENA DI MARKOV A TEMPO CONTINUO se per $\forall s, t \geq 0$ e $i, j, x(u)$ interi non negativi si ha $s<t$

$$P(X(t)=j \mid X(s)=i, \underbrace{X(u)=x_u \quad 0 \leq u < s}_{y_s}) = P(X(t)=j \mid X(s)=i)$$

<u>OSS</u> Se $P(X(t)=j \mid X(s)=i)$ non dipende da s la catena

si dice temporalmente omogenea.

I PROBLEMA

Supponiamo che il processo entri in uno stato i a un certo tempo. Vogliamo la probab. che il processo lasci i dopo un tempo t

T_i : tempo trascorso in i

$$P(T_i > t+s \mid T_i > s) = P(\underbrace{T_i > t \mid T_i > 0}_{\text{0 transizioni in } (0,t]})$$

Il processo è di Markov

$$P(T_i > t+s \mid T_i > s) = P(T_i > t)$$

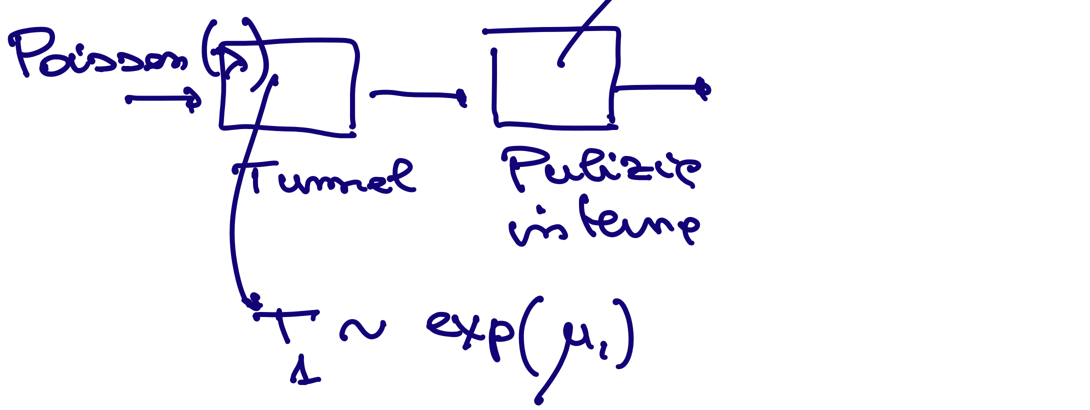
↳ dev'esserci la prop. di assenza di memoria →
$T_i \sim \exp(\lambda)$

<u>Def. 2</u> Una catena di Markov a tempo continuo ha le seguenti proprietà

1. Ogni volta che il processo entra in un stato i vi rimane per un tempo esponenziale con media $\frac{1}{v_i}$

2. Se il processo lascia lo stato i entra in uno stato j con probabilità P_{ij} con
$$\begin{cases} \sum_j P_{ij} = 1 \\ P_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

Esempio



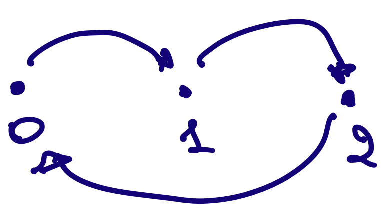
Il cliente si ferma solo se il tunnel di lavaggio è vuoto e la pulizia interna è vuota.

Stati:

0 : sistema vuoto

1 : lavaggio

2 : pulizia interna



$v_0 = \lambda$

$v_1 = \mu_1$

$$v_2 = \mu_2$$

$$P_{01} = 1$$
$$P_{12} = 1$$
$$P_{20} = 1$$

$$P = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Processi di nascita e morte

Lo stato del processo corrisponde a un conteggio:

$$\underbrace{\{\lambda_n\}}_{\text{freq. delle nascite}} \qquad \underbrace{\{\mu_n\}}_{\text{freq. delle morti}}$$

Stati: $0, 1, 2, \dots$

Transizioni possibili

$$n \begin{cases} n-1 \\ n+ \end{cases}$$

Definire la catena di Markov.

Tempi delle transizioni

$$v_0 = \lambda_0 \qquad v_i = \lambda_i + \mu_i$$

$$\downarrow$$

$$T_i = \min(T^{\uparrow}, T^{\downarrow})$$

Matrice di transizione

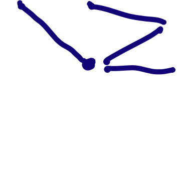
$$P_{01} = 1$$

$$P_{i,i+1} = P(T^{\uparrow} < T^{\downarrow}) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

$$P_{i,i-1} = \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}$$

Esempio Problema di nascite con frequenza lineare

No morti $\mu_i = 0 \quad \forall i$



$$\lambda_i = i\lambda$$

Processo di Yule

ed è un BRANCHING PROCESS

Cosa vogliamo studiare?

Cominciamo con $\mathbb{E}[X(t)]$

lo facciamo su un esempio

<u>Esempio</u> Crescita e morte lineari con immigrazione

$$\begin{cases} \lambda_n = n\lambda + \theta & n \geq 0 \\ \mu_n = n\mu & n \geq 1 \end{cases}$$

Voglio $M(t) = \mathbb{E}[X(t)]$

$$M(t+h) = \mathbb{E}[X(t+h)] =$$

$$\mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t)]\big]$$

$$X(t+h) = \begin{cases} X(t)+1 & \overbrace{[\theta + X(t)\lambda]h + o(h)} \\ X(t)-1 & \overbrace{X(t)\mu h + o(h)}^{B} \\ X(t) & 1 - A - B + o(h) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t)] = X(t) + h[\theta + \lambda X(t) - \mu X(t)] + o(h)$$

$$\mathbb{E}[X(t+h)] = \mathbb{E}\big[\mathbb{E}[X(t+h) \mid X(t)]\big]$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[X(t)]}_{M(t)} + (\lambda - \mu)\,\mathbb{E}[X(t)]h + \theta h + o(h)$$

$$M(t+h) = M(t) + (\lambda-\mu)h\,M(t) + \theta h + o(h)$$

$$\frac{M(t+h) - M(t)}{h} = (\lambda - \mu)M(t) + \theta + \frac{o(h)}{h}$$

$$\lim_{h \to 0}$$

$$\frac{dM}{dt} = \begin{cases} (\lambda - \mu) M(t) + \theta & \lambda \neq \mu \\ \theta & \lambda = \mu \end{cases}$$

$$M(0) = j$$

$$M(t) = \begin{cases} \dfrac{\theta \left(e^{(\lambda-\mu)t} - 1 \right)}{\lambda - \mu} + j e^{(\lambda-\mu)t} & \lambda \neq \mu \\ \theta t + j & \lambda = \mu \end{cases}$$

<u>OSS</u> Se $\lambda \geq \mu$ $E[X(t)] \xrightarrow{t \to \infty} \infty$

Se $\lambda < \mu$ $E[X(t)] \xrightarrow{t \to \infty} \dfrac{\theta}{\lambda - \mu}$

anzi $h \to \infty$

Esempio Code $M|M|1$

M → Markov → interarr. exp.

1 → n° servitori

Arrivi : Poisson (λ)

Partenze : $\exp(\mu)$

$$\begin{cases} \lambda_n = \lambda \\ \mu_n = \mu \end{cases}$$

Esempio Code $M|M|s$

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} s\mu & n > s \\ n\mu & 1 < n \leq s \end{cases}$$

Tempo necessario per passare

da i a $i+1$.

ET_i

$\downarrow$

tempo per passare da i a $i+1$

Se $i = 0$ T_0 è il tempo $T^{\uparrow}$

$$ET_0 = \frac{1}{\lambda_0}$$

Procediamo ricorsivamente

$i > 0$

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{se la I transizione è } i \to i-1 \\ 1 & \text{- - - - } i \to i+1 \end{cases}$$

Dobbiamo valutare

$$E\left[\min(T^{\uparrow}, T^{\downarrow}) \mid \min(T^{\uparrow}, T^{\downarrow}) = T^{\uparrow}\right]$$

$$\mathbb{E}[T_i \mid I_i = 1] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i}$$

$$\mathbb{E}[T_i \mid I_i = 0] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}[T_{i-1}] + \mathbb{E}[T_i]$$

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{\lambda_i + \mu_i} \underbrace{\frac{\lambda_i}{\lambda_i + \mu_i}}_{P(I_i = 1)} + \frac{\mu_i}{\lambda_i + \mu_i}\left[\frac{1}{\lambda_i + \mu_i} + \mathbb{E}[T_{i-1}] + \mathbb{E}[T_i]\right]$$

... conti

$$\mathbb{E}[T_i] = \frac{1}{\lambda_i} + \frac{\mu_i}{\lambda_i}\mathbb{E}[T_{i-1}]$$

$$\mathbb{E}[T_0] = \frac{1}{\lambda_0}$$

$$\mathbb{E}[T_1] = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{1}{\lambda_0}$$

ci interessa

$$\underbrace{P_{ij}(t)}_{?} = P(X(t+s)=j \mid X(s)=i)$$

$$= P(X(t)=j \mid X(0)=i)$$

MATERIALE PRELIMINARE

v_i : tasso con cui il processo effettua una transiz. partendo da i

q_{ij} : $\forall i, j$

$$\underbrace{q_{ij}}_{\text{tasso con cui abbandono } i} = \overbrace{v_i}^{\text{tasso di abbandono di } i} \underbrace{P_{ij}}_{\text{prob. che la catena lasci}}$$

per andare in j $\quad$ i per andare
↓ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ in j

frequenze di transizione
istantanee

OSS

1. $$v_i = \sum_j v_i P_{ij} = \sum_j q_{ij}$$

$$\hookrightarrow \boxed{v_i = \sum_j q_{ij}}$$

2. $$P_{ij} = \frac{q_{ij}}{v_i} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}$$

$$\boxed{P_{ij} = \frac{q_{ij}}{\sum_j q_{ij}}}$$

Conoscere le q_{ij} $\longleftrightarrow$ Conoscere $\begin{cases} P_{ij} \\ v_i \end{cases}$

$P_{ij}(t) = ?$

<u>Teorema</u> Per $\forall\, s \geq 0,\ t \geq 0$

$$P_{ij}(t+s) = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}(t) P_{kj}(s)$$

eq. di Chapman Kolmogorov

<u>Teorema</u> (eq. Backward di Kolmogorov)

$$\frac{dP_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq i} q_{ik} P_{kj}(t) - v_i P_{ij}(t)$$

__Teorema__ (eq. Forward di Kolmogorov)

$$\frac{d P_{ij}(t)}{dt} = \sum_{k \neq j} q_{kj} P_{ik}(t) - v_j P_{ij}(t)$$

Se esiste la distribuzione limite

$$\lim_{t \to \infty} P_{ij}(t)$$

$$\hookrightarrow \frac{d P_{ij}(t)}{dt} = 0$$

La distribuz. limite se $t \to \infty$

$$0 = \sum_{k \neq j} q_{kj} \underbrace{P_{ik}(\infty)}_{\pi_k} - v_j \underbrace{P_{ij}(\infty)}_{\pi_j}$$

$$\boxed{\sum_{k\neq j} q_{kj}\,\pi_k = v_i\,\pi_j}$$

equazioni bilanciamento

Catena EMBEDDED: catena a tempo discreto associata a quella a tempo continuo

<u>Esempio</u> Processo di nascita e morte

Stato	
0	$\lambda_0 \overset{\pi_0}{P_0} = \mu_1 \overset{\pi_1}{P_1}$
1	$(\lambda_1+\mu_1)P_1 = \mu_2 P_2 + \lambda_0 P_0$
2	
$n \geq 1$	$(\lambda_n+\mu_n)P_n = \mu_{n+1}P_{n+1} + \lambda_{n-1}P_{n-1}$

Sommiamo ogni eq. con quella che la precede

$$\begin{cases} \lambda_0 P_0 = \mu_1 P_1 \\ \lambda_1 P_1 = \mu_2 P_2 \\ \vdots \\ \lambda_n P_n = \mu_{n+1} P_{n+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = \dfrac{\lambda_0}{\mu_1} P_0 \\ P_2 = \dfrac{\lambda_1}{\mu_2} P_1 = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1}{\mu_2 \mu_1} P_0 \\ \vdots \\ P_n = \dfrac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} P_0 \end{cases}$$

ma $\sum P_i = 1$

$$1 = P_0 + P_0 \sum_{n}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdots\lambda_0}{\mu_n \cdots \mu_1}$$

$$P_0 = \frac{1}{1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_1}}$$

se $< \infty$

$$P_n = \frac{\lambda_0 \cdots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdots \mu_n (1 + \sum \cdots)}$$

la distribuzione limite esiste se

$$\sum \frac{\lambda_{n-1}\cdots\lambda_0}{\mu_n\cdots\mu_1} < \infty$$

Caso particolare: coda $M/M/s$

la serie diviene

$$\sum_{n=s}^{\infty} \frac{\lambda^n}{(s\mu)^n} < \infty \quad \text{se converge}$$

esiste la dist. limite

$\leftrightarrow$ la condiz x l'esistenza è

$$\frac{\lambda}{s\mu} < 1$$

$W(t)$