Appunti Analisi
Andrea Cacioli

Numeri Complessi

Definizione

Un numero complesso é un numero nella forma $c = a + ib$ in cui i é una costante, in particolare

$$i = \sqrt{-1}$$

Prodotto

Il prodotto di due numeri complessi a e b tali che $a = a_r + i \cdot a_{im}$ e b similmente é dato da:

$$a \cdot b = (a_r \cdot a_{im} - b_r \cdot b_{im}, \quad a_r \cdot b_{im} + a_{im} \cdot b_r)$$

Similitudine con $\mathbb{R}^2$

Il campo complesso $\mathbb{C}$ **non é uguale** al campo $\mathbb{R}^2$ in particolare l'equivalenza vale per le seguenti proprietá:

1. Insiemisticamente ✅
2. Algebricamente ❌
3. Topologicamente ✅

Insiemisticamente perché esiste una biezione tra i due insiemi.

Algebricamente perché la moltiplicazione é definita in maniera diversa in $\mathbb{C}$ rispetto che in $\mathbb{R}^2$.

Topologicamente perché entrambe possono essere rappresentate tramite vettori nello spazio.

Notazione esponenziale

Tramite la rappresentazione polare di un numero complesso di norma ρ e angolo θ é possibile passare alla notazione esponenziale:

$$c = \rho e^{i\theta}$$

Operatori (Sistemi)

Definizione

Un operatore é un oggetto matematico che opera sulle funzioni: in particolare lo si puó vedere come funzione di funzione, prende in input una funzione e restituisce una funzione.

Notazione

La scrittura:

$$y = Ax$$

Rappresenta l'operatore A che prende in input x e restituisce in output y.

Dominio

Gli operatori possono essere:

1. Continui
2. Discreti

se lavorano rispettivamente su funzioni continue o discrete.

Segnali Elementari

Heaveside Function

$$u(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ se t} < 0 \\ 1 \ \text{ se t} > 0 \end{cases}$$

Window Function

$$r_a(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ se } |\text{t}| > \text{a} \\ 1 \ \text{ se } |\text{t}| < \text{a} \end{cases}$$

Funzione sinusoidale

$$x(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi)$$

Dove

1. α é l'ampiezza
2. ω é la velocitá angolare.
3. ϕ é lo sfasamento

Equivalenza di Eulero

Tramite la seguente formula siamo in grado di definire funzioni sinusoidali complesse facilitando i calcoli.

$$e^{it} = \cos(t) + i \sin(t)$$

Attenzione: Posso anche sostituire t con $\omega t + \phi$ e posso modificare le funzioni seno e coseno aumentandone la frequenza o modificandone lo sfasamento.

Filtri

Proprietá

Un filtro é un particolare tipo di sistema in cui valgono le proprietá di:

- Linearitá
- Causalitá (non necessaria, se presente rende il filtro realizzabile)
- Invarianza per traslazioni
- Continuitá

Linearitá

Il principio di linearitá puó essere riassunto in una sola proprietá:

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda A(x) + \mu A(y)$$

Causalitá

Informalmente: Non anticipa i tempi
Matematicamente:

$$A(x_1) = A(x_2) \text{ fino al tempo } t_0 \implies Ax_1(t) = Ax_2(t) \text{ fino al tempo } t_0$$

Invarianza per traslazioni

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \tau_a(Ax) = A(\tau_a x)$$

Continuitá

La continuitá si riferisce alle norme, in particolare:

$$x_n \to x \iff ||x_n - x|| \to 0$$

Un sistema si dice continuo se:

$$x_n \to x \ \wedge \ Ax = y \implies A(x_n) \to y$$

Norme

Norma Infinito

$$||x||_\infty = \sup |x(t)|$$

Norma 1

In un intorno I

$$||x||_1 = \int_I |x(t)| \ dt$$

Norma 2

In un intorno I

$$||x||_2 = \sqrt{\int_I |x(t)|^2 \ dt}$$

Fun fact (prodotto scalare)

La norma 2 rappresenta la radice del prodotto scalare (x, x)

$$(x, x) = \int_I x(t) \cdot \overline{x}(t) \ dt$$

$\overline{x}$ rappresenta il complesso coniugato di x.

Fun Fact (Energia)

La norma 2 rappresenta la radice quadrata dell'energia del segnale.

Ortogonalitá segnali

Due segnali si dicono ortogonali se e solo se il prodotto scalare dei due segnali é uguale a zero:

$$(x, y) = 0$$

Convoluzione

La convoluzione ($*$) é un operatore matematico che rappresenta la seguente operazione:

$$(h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-s) \cdot x(s)\, ds$$

Commutativitá

La Convoluzione é commutativa!

$$(f * g)(t) = (g * f)(t)$$

La convoluzione negli spazi

Se non sai cosa sono gli spazi, vai a vedere alla sezione Fourier e alla sottosezione spazi di funzioni

Date due funzioni f e g rispettivamente appartenenti a $L^p(I)$ e $L^q(I)$, allora

$$(f * g)(t) \in L^r(I)$$

dove

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$$

Ovviamente quando p o q o r sono = a ∞ si intende $\frac{1}{\infty} = 0$

La norma della convoluzione

La norma della convoluzione é dominata dal prodotto delle norme

$$||f * g||_{L^r(\mathbb{R})} \leq ||f||_{L^p(\mathbb{R})} \cdot ||g||_{L^q(\mathbb{R})}$$

Transfer Function

I filtri di convoluzione sono definibili tramite la loro funzione di trasferimento: **una funzione delle frequenze** che indica come il filtro attenua le varie frequenze

Nel filtro RC

$$H(\lambda) = \frac{1}{1 + 2i\pi\lambda RC}$$

Tale funzione ci mostra perché il filtro RC é un filtro **passa basso**.

Spazi di funzioni

Si definiscono degli spazi di funzioni assegnando ad un intervallo aperto I le operazioni di

1. Somma Puntuale $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$
2. Prodotto per una costante $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$

Con queste operazioni, $F(I)$ (insieme delle funzioni da $I \to \mathbb{C}$) é uno **spazio vettoriale**

In questi spazi consideriamo uguali due funzioni che differiscono per un insieme con **misura di Lebesgue nulla**

In $L^n(I)$:

$$f(t) = g(t) \iff ||f||_{L^n(I)} = ||g||_{L^n(I)}$$

Definizione

$$L^n(i) = \{\, f : I \to \mathbb{C} \mid ||f||_{L^n(I)} < \infty \}$$

Banach

Gli spazi $L^n(I)$ sono spazi normati o spazi di **Banach**.

Ció significa che tali spazi una successione é **convergente** se e solo se é di Cauchy

Hilbert

Lo spazio $L^2(I)$ é uno spazio di **Hilbert** poiché si possono definire:

- Prodotto scalare di segnali (ortogonalitá)
- Energia del segnale corrisponde alla norma 2 al quadrato

Basi Ortonormali

Si puó definire uno spazio tramite una base, come per gli spazi di vettori!

In particolare, se una base é composta da funzioni ortogonali e di norma costante, allora si parla di base ortonormale.

Proprietá:

$$\forall i, j \ (\phi_i, \phi_j) = \begin{cases} 0 \text{ se } n \neq m \\ 1 \text{ se } n = m \end{cases}$$

Il fatto che la norma sia uguale a uno implica la normalitá della base.

Nota le varie ϕ rappresentano le frequenze pure.

Serie di Fourier

Ogni funzione che appartiene allo spazio $L^2(I)$ puó essere riscritta come combinazione lineare di funzioni di una base ortonormale.

$$\forall f \in L^2(I)$$
$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \phi_n$$

I vari coefficienti c_n rappresentano 'quanto' della funzione di base c'é in un determinato segnale.

Lo spazio $S'(\mathbb{R})$

Tale spazio deriva dalla necessitá di rappresentare fenomeni di tipo impulsivo che non sarebbe altrimenti rappresentabile dalle sole funzioni.

Degli esempi di necessitá di descrizione di tali fenomeni derivano dalla fisica in cui si vuole rappresentare la carica puntiforme o il punto materiale.
Infatti, se prendiamo ad esempio il punto materiale, esso avrá una massa, concentrata in un volume nullo. Questo creerebbe un problema perché ci porterebbe ad avere densitá infinita.

Per descrivere quindi questo tipo di fenomeni, si é introdotta una nuova distribuzione chiamata delta di Dirac.

Delta di Dirac

La delta di Dirac é definita cosí:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \neq 0 \\ +\infty \text{ se } t = 0 \end{cases}$$

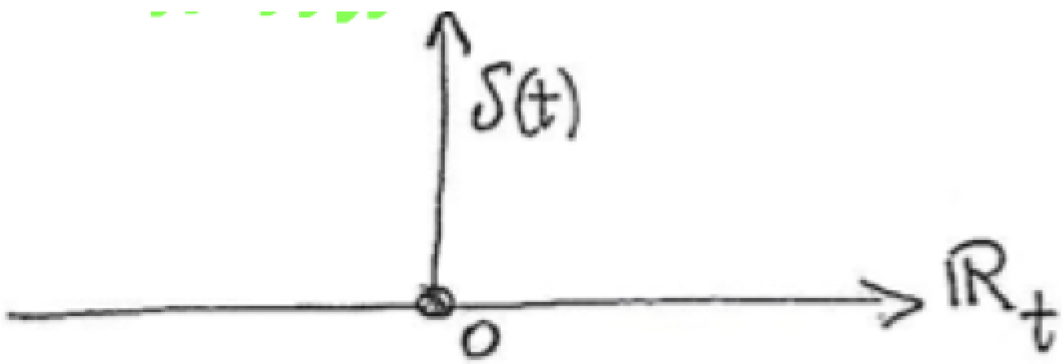
Inoltre

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

Attenzione La funzione nulla che vale 1 solo in $t = 0$ non va bene perché in un qualsiasi spazio $L^n(I)$ sarebbe identica alla funzione nulla, poiché l'insieme dei punti in cui sono diverse ha misura di Lebesgue nulla.

Infatti la delta di Dirac **NON É UNA FUNZIONE** ma una distribuzione.

Tuttavia la si puó rappresentare come una freccia centrata in $t = 0$.



Definizione tramite limite

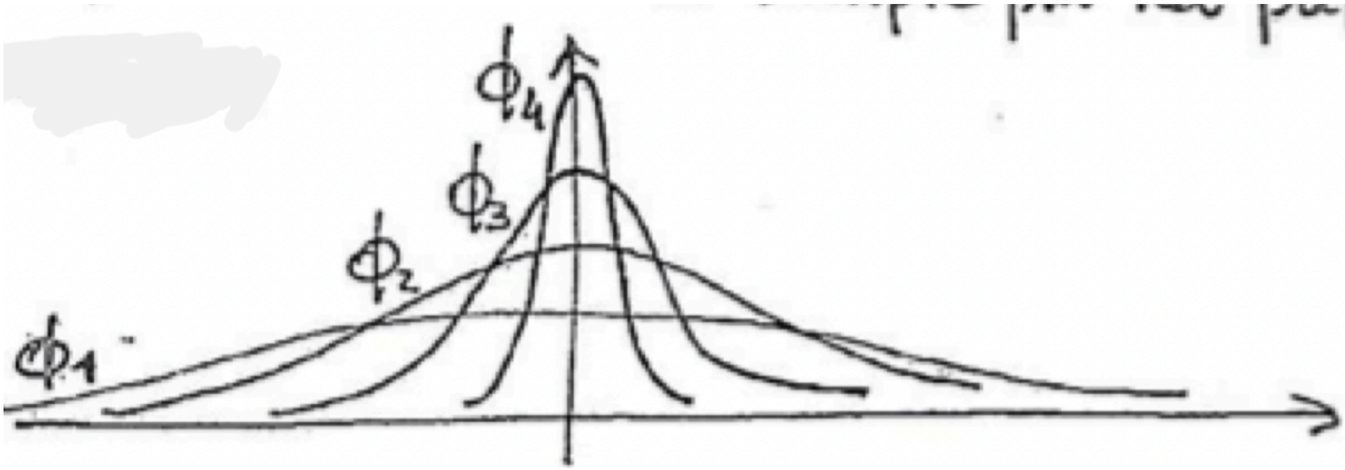
La delta di dirac puó essere anche definita tramite limite di una successione di funzioni che si "assottigliano" fino a diventare cosí sottili da diventare una delta.

Si consideri la successione di funzioni ϕ_n che si assottigliano sempre di piú pur mantenendo l'integrale costante e uguale a 1.

Allora:

$$\lim_{n \to \infty} \phi_n(t) = \delta(t)$$

Questo disegno rappresenta le prime quattro funzioni di questa successione:



Traslate (Notazione)

La distribuzione delta centrata in a:

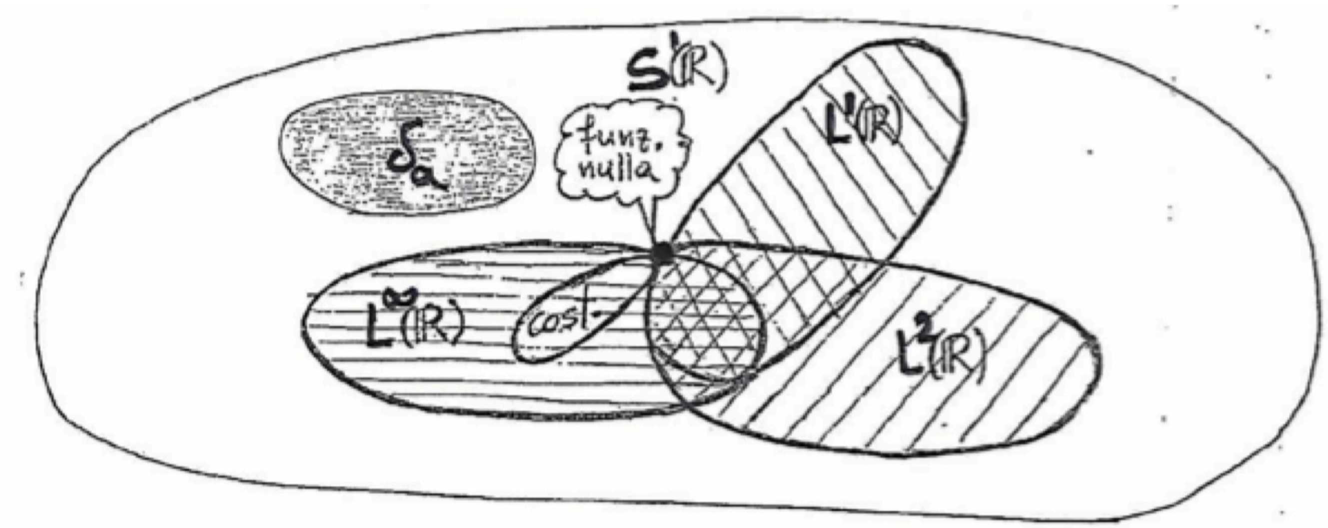
$$\delta_a(t) = \begin{cases} 0 \text{ se } t \neq a \\ +\infty \text{ se } t = a \end{cases}$$

Equivalentemente:

$$\delta_a(t) = (\tau_a \delta)(t)$$

$S'(\mathbb{R})$ Contiente tutto

Un grafico dello spazio $S'(\mathbb{R})$ é il seguente:



Da tale grafico risulta evidente anche la relazione di inclusione che c'é tra i vari insiemi $L^p(\mathbb{R})$
.
In pratica hanno una **intersezione non vuota** ma **nessuno é sottoinsieme** degli altri.

Le operazioni in $S'(\mathbb{R})$

In $S'(\mathbb{R})$ sono definite diverse operazioni che si possono effettuare sui suoi elementi.
Se ne riporta qui una lista:

- Somma di funzioni $(f+g)(t) = f(t) + g(t)$
- Prodotto per una costante $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$
- Moltiplicazione (Solo sotto opportune ipotesi)
- Convoluzione $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)\, ds$
- Traslazione τ_a con $a \in \mathbb{R}$
- Modulazione $(\mu_b f)(t) = f(t)e^{2\pi ibt}$
- Riflessione (Rispetto asse y) $\tilde{f}(t) = f(-t)$

La trasformata di Fourier

Definizione

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, allora chiamiamo "Trasformata di Fourier" una nuova funzione $\hat{f}$ fatta in questo modo:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i\omega t} f(t)\, dt$$

Operatore

Si puó introdurre l'operatore $\mathcal{F}$ che prende una funzione f e restituisce la funzione $\hat{f}$.

Ovvero:

$$\mathcal{F}[f](\omega) = \hat{f}(\omega)$$

Ben Definito

La trasformata di Fourier é ben definita per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R})$

La stessa cosa **non** vale né per $L^2(\mathbb{R})$, né per $S'(\mathbb{R})$

Tuttavia, si puó estendere la definizione per far funzionare l'operatore anche in questi casi.

Lineare

La trasformata di Fourier é lineare su **TUTTI gli spazi vettoriali** su cui é definito.

Attenzione perché la linearitá é **importantissima**, altrimenti non potremmo usare la trasformata su somme di frequenze pure.

Continuo (Solo $L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$)

La trasformata di Fourier é continua se $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \to L^\infty(\mathbb{R})$

Isomorfismo Isometrico (Solo $L^2(\mathbb{R})$)

La trasformata di Fourier é un **ISOMORFISMO ISOMETRICO** in $L^2(\mathbb{R})$

Questo significa che la norma rimane invariata.

$$||f||_{L^2(\mathbb{R})} = ||\hat{f}||_{L^2(\mathbb{R})}$$

Ricordiamo che la norma 2 rappresenta anche l'energia del segnale, quindi questo teorema conferma anche la **conservazione dell'energia del segnale**.

Biezione Bicontinua (Solo $S'(\mathbb{R})$)

Si crea una **BIEZIONE**, quindi é possibile definire il sistema inverso $\mathcal{F}^{-1}$.

Si crea una **BICONTINUITÁ** perché sia $\mathcal{F}$ sia $\mathcal{F}^{-1}$ sono operatori continui.

Trasformate di funzioni importanti

La trasformata della costante é una delta, mentre la trasformata della delta é una costante

$$\hat{1} = \delta \ \wedge \ \hat{\delta} = 1$$

La modulazione diventa una traslata e la traslata una modulazione.

$\forall \phi \in S'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}[\tau_a \phi] = \mu_{-a} \phi$$
$$\mathcal{F}[\mu_a \phi] = \tau_a \phi$$

La trasformata di una frequenza pura é una delta centrata nel valore della frequenza pura.

$$\mathcal{F}\left[e^{2\pi i \omega t}\right] = \delta_\omega$$

La trasformata della funzione finestra é il seno cardinale.

$$\mathcal{F}[\chi_{[-a,a]}](\omega) = \frac{\sin(2a\pi\omega)}{\pi\omega}$$

La trasformata di una qualsiasi funzione f applicata 2 volte é come fare la riflessione di f

$\forall f \in S'(\mathbb{R})$

$$\mathcal{F}^2[f(t)] = \tilde{f}(t) = f(-t)$$

La convoluzione e il prodotto tra funzioni si scambiano.

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}$$

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

Operatore Inverso

L'operatore inverso é il seguente:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\omega t}\hat{f}(\omega)\,d\omega$$

Si noti che manca soltanto il segno meno all'esponente dell'esponenziale complesso rispetto alla trasformata diretta.

Filtri di convoluzione

Definizione

Data una funzione $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ si definisce il filtro di convoluzione l'operatore A

$$A : f \to f * h$$

h si dice funzione funzione interna del filtro.

Attenzione h ci sará utile per la definizione di funzione di trasferimento H.

Funzione di Trasferimento

Si puó definire la funzione di trasferimento $H(\omega)$ a partire dalla funzione interna $h(t)$ se $h \in L^1(\mathbb{R})$.

$$H(\omega) = \hat{h}(t)$$

La funzione di trasferimento é importante perché ci descrive in funzione delle varie frequenze ω quanto di quella frequenza passa.

Per l'esempio nel filtro RC si veda la prima volta che abbiamo visto la Transfer Function

Comportamento

Il comportamento di un filtro di convoluzione si puó riassumere in 3 fasi:

1. Analisi delle frequenze tramite Fourier

$$f \to \hat{f}$$

2. Filtraggio delle frequenze moltiplicando f per $\hat{h}$ ovvero H

$$\hat{f} \to \hat{f}H$$

3. Ricostruzione del segnale filtrato tramite la trasformata inversa

$$\hat{f}H \to \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}H] = f * h$$

Quest'ultimo passaggio rende chiaro perché si chiamano filtri di convoluzione.

Stazionarietá

Questi filtri si dicono stazionari perché filtrano i segnali in maniera indipendente dal tempo.

Infatti non é possibile avere un filtro di questo tipo che fa passare certe frequenze fino al tempo t_0 e poi ne fa passare altre da lí in avanti.

Per soddisfare una tale necessitá é necessario usare altri filtri, per esempio quelli di Gabor.

Causalitá

Resta ora da capire se un tale filtro é anche causale.

Per fare questo basta guardare il supporto di h

Infatti la seguente proposizione é vera.

$$A : [f \to f * h] \acute{}\text{e causale} \iff \text{supp } h \subseteq [0, \infty)$$

Dove supp rappresenta il supporto della fuzione.

Il supporto di una funzione é l'insieme dei punti in cui una funzione non si annulla.

Nel nostro caso consideriamo la chiusura di tale insieme, poiché non consideriamo i punti isolati. In particolare manteniamo la considerazione che due funzioni sono equivalenti se differiscono per un insieme di punti di misura di Lebesgue nulla.

Dimostrazione

$\text{supp}(h) \subseteq [0, \infty] \implies A \acute{}\text{e causale}$

Iniziamo con l'implicazione inversa: Ipotizziamo che il supporto sta in $[0, +\infty)$ e dimostriamo la causalitá.

Dato un punto t_0 tale che $\forall t \leq t_0$ il segnale é assente, allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)\, ds = \int_{0}^{+\infty} f(t-s)h(s)\, ds =$$

Non occorre fare l'integrale da $-\infty$ perché sarebbe una moltiplicazione per 0.

Ma ora verifichiamo che se do a t un qualsiasi valore minore di t_0, anche $f(t-s) = 0$, perché s é positivo per via dell'intervallo di integrazione.

Quindi anche $(f * h)(t) = 0$ se $t \leq t_0$.

CVD ✅

$$A \acute{}\text{e causale} \implies \text{supp}(h) \subseteq [0, \infty]$$

Assumiamo **per assurdo** che esista un $t_0 < 0$ in cui h non é nulla. Per la continuitá di h sappiamo anche che esiste un intorno di t_0 in cui h non é nulla.

Tale intorno lo identifichiamo con l'intervallo $[-b, -a]$ in cui la funzione h non é nulla.

Se allora, per esempio prendo come segnale di input $f(t) = \chi_{[0,b-a]}(t)$, abbiamo

$$\begin{aligned}
&(f * h)(t) = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)h(s)\ ds = \\
&\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[0,b-a]}(t-s)h(s)\ ds = \\
&\text{Ma quindi quando } 0 < t - s < b - a \\
&\int_{t-(b-a)}^{t} h(s)\ ds = \\
&\text{Ma quindi se } t = -a \\
&\int_{-b}^{-a} h(s)\ ds > 0
\end{aligned}$$

Ma questo é assurdo perché allora non ci sarebbe causalitá:

$$\chi_{[0,b-a]}(-a) = 0$$
$$A\chi_{[0,b-a]} > 0$$

CVD ✅

Principio di Indeterminazione

Se si é familiari con il concetto di **Varianza** studiato nei corsi di probabilitá, sará facile capire queste due quantitá. Altrimenti ti basta ricordare che la varianza indica quanto si sposta mediamente una misurazione dal suo valor medio.

Infatti se ad esempio abbimo due studenti con la stessa media dei voti attorno al 26, possiamo dire che uno studente che aveva varianza alta prendeva i voti piú disparati: dal 18 al 30, mentre l'altro studente (con varianza molto piú bassa) non ha mai preso piú di 27 o meno di 25.

Fatta questa piccola premessa definisco queste due quantitá:

$$\Delta x = \frac{\mathrm{Var}(f)}{E(f)}$$

Dove $E(f)$ rappresenta l'energia del segnale f.

Il valore Δx é chiamato **durata effettiva** del segnale.

Il valore Δx esprime la **dispersione relativa del segnale rispetto al tempo**.

$$\Delta \omega = \frac{\mathrm{Var}(\hat{f})}{E(f)}$$

Il valore $\Delta \omega$ é chiamato **banda di frequenze effettiva** del segnale.

Il valore $\Delta \omega$ esprime la **dispersione relativa del segnale rispetto alle frequenze**.

Per il principio di Indeterminazione di Heisenberg

$$\Delta x \cdot \Delta \omega \geq \frac{1}{4\pi}$$

Questo risultato é importantissimo perché ci impedisce di dire con assoluta certezza a che tempo e con che frequenza un segnale é arrivato.
L'unico modo di essere certi al 100% della frequenza é di disporre di un segnale infinitamente lungo.
L'unico modo di essere certi al 100% del tempo di arrivo di un segnale é di costringere il segnale in una finestra temporale infinitamente piccola, ma questo non ci fa conoscere la sua frequenza.