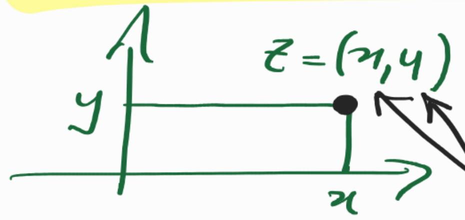
NUMERI COMPLESSI



$z=(x,y)$ ⟵ numero complesso = coppia ordinata di numeri reali

x = parte reale di z

y = " immaginaria di z

$\mathbb{C}$ = insieme dei numeri complessi

Note:

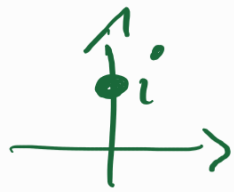
$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$

$x \longrightarrow (x,0)$

$\mathbb{R}$ è "immerso" in $\mathbb{C}$

Nota: i num. complessi del tipo $(0,y)$ cioè con parte reale nulla si dicono "immaginari puri"

Def: $i=(0,1)$ = "unità immaginaria"



Def: se $z=(x,y)$ pongo $\bar{z}=(x,-y)$ = "coniugato" di z

Nota: più comunemente invece di $z=(x,y)$ scriveremo

$$z=x+iy$$

e faremo tutte le operazioni formalmente come se fosse un usuale binomio, ricordando solo che

$$i=-1$$

Capiremo tra poco che senso dare a tutto ciò.

Domanda: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \leftarrow$ (piano) ?

Risposta: SI , NO , SI !

insiemisticamente — algebricamente — topologicamente

Insiemisticamente: $\boxed{\text{SI}}$ infatti

$z = (x, y) \equiv$ punto di $\mathbb{R}^2$ di coord x e y.

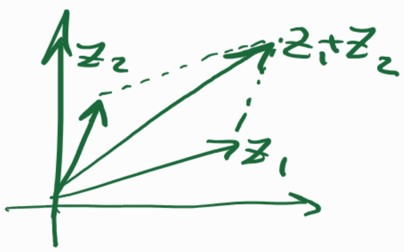
Algebricam.: $\boxed{\text{NO}}$ le operazioni in $\mathbb{C}$ non coincidono con le operaz. di spazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$

Somma: (questa corrisponde alla somma di vettori in $\mathbb{R}^2$)

$z_1 = (x_1, y_1)$; $z_2 = (x_2, y_2)$ **Def**: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, \; y_1 + y_2)$

Es: $z_1 = (2, 3) = 2 + 3i$
$z_2 = (-1, e) = -1 + ei$ $\mapsto$

$z_1 + z_2 = (1, \; 3+e) = 1 + (3+e)i$



Prodotto (non ha corrispondente in $\mathbb{R}^2$)

Se $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + iy_1x_2 + \underbrace{(i)^2}_{-1} y_1y_2$$

$$= \underbrace{x_1x_2 - y_1y_2}_{\text{parte reale}} + i\underbrace{(x_1y_2 + x_2y_1)}_{\text{parte immag.}}$$

Poniamo: $\boxed{z_1 z_2 \overset{\text{def.}}{=} (x_1x_2 - y_1y_2 \,,\, x_1y_2 + x_2y_1)}$

Nota: il prod. è commutativo (verifica x es.)

Nota $i^2 = (0,1)^2 = (0,1)(0,1) = (0\cdot0 - 1\cdot1, 0\cdot1 + 1\cdot0) = (-1,0) \equiv -1$

ecco in che senso $i^2 = -1$!!!

Possiamo ora risolvere in $\mathbb{C}$ l'eq. $z^2+1=0$

$z^2+1 = 0$

$z^2 = -1$

$\to z = i$

$\to z = -i$

infatti

$i^2 = -1$ e inoltre

$(-i)^2 = ((-1)\cdot i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1$

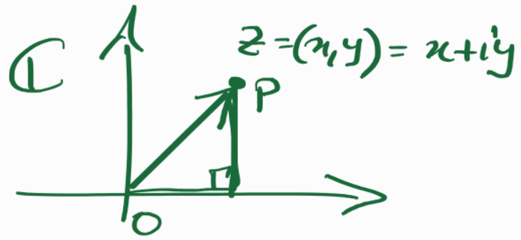
Note:

$\boxed{x+iy}$ $= (x,0) + (0,1)\cdot(y,0) = (x,0) + (0\cdot y - 1\cdot 0,\ 0\cdot 0 + 1\cdot y)$

$\boxed{\text{in } \mathbb{C}}$ $= (x,0) + (0,y) = (x,y) = z$

ecco in che senso $z = x+iy$!!!

Topologicamente $\boxed{\mathbb{C}}$



Def

- $\|z\| = \|\overline{PO}\| \overset{\text{def.}}{=} \sqrt{x^2+y^2}$

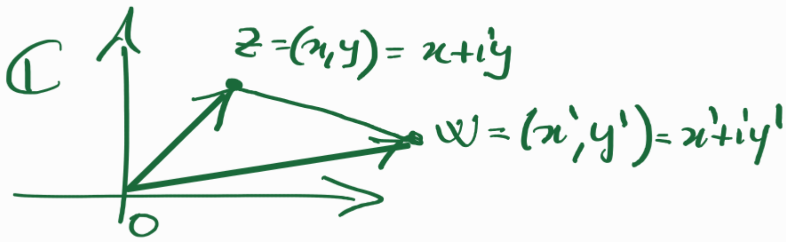
  "norma" o "modulo" di $z \in \mathbb{C}$

(stessa norma del vettore di $\mathbb{R}^2$ di coordinate (x,y))

- $\text{dist}(z,w) \overset{\text{def}}{=} \|z-w\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$

  $x-x'+i(y-y')$

"distanza" tra z e w

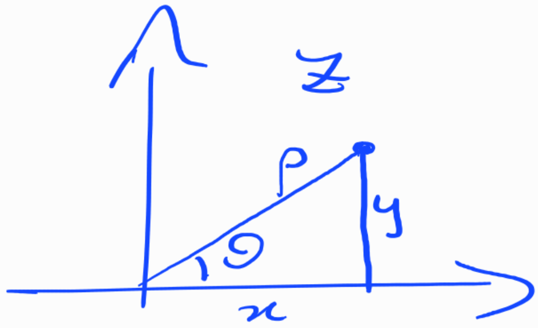


Note se $z = x+iy$ allora:

$$z \cdot \bar{z} = (x-iy)(x+iy) = x^2-(iy)^2 = x^2+y^2 = \|z\|^2$$

cioè $\|z\| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$

Forma trigonometrica dei num. complessi



$$z = (x,y) = x + iy$$
$$= \rho\cos\vartheta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$$
$$= \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta) \equiv (\rho, \vartheta)$$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \vartheta = \mathrm{artg}(y/x) \end{cases} \leftarrow \left(\begin{array}{l} \text{Nota} \\ \rho = \|z\| \end{array} \right)$$

(corrisponde ad usare coordinate polari)

Formula di De Moivre

la prendiamo come definizione:

$$\boxed{e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta}$$

dunque

$$z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta) = \boxed{\rho e^{i\vartheta}}$$

Forma esponenziale dei num. complessi

Più in generale

sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$, pongo

"esponenziale complesso"

$$e^z \overset{\text{def.}}{=} e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Es: se $z = 2 + 3i$ allora

$$e^z = e^2 \cdot e^{3i} = e^2(\cos 3 + i \operatorname{sen} 3)$$

Es: $e^{i\pi} = e^{0+i\pi} = e^0 \cdot e^{i\pi} = 1 \cdot (\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)$

$= -1 + i \cdot 0 = -1$

Nota: se $z = e^{i\vartheta} \Longleftrightarrow \|z\| = 1$

Nota: la forma esponenziale è comoda per moltiplicazioni e potenze

Es: $z = \rho_1 e^{i\vartheta_1}$, $w = \rho_2 e^{i\vartheta_2}$ allora

$$zw = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \cdot \rho_2 e^{i\vartheta_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\vartheta_1+\vartheta_2)}$$

in partic. se $z = \rho e^{i\vartheta}$ allora $z^2 = \rho^2 e^{i2\vartheta}$,

e in generale $z^n = \rho^n e^{in\vartheta}$.

Riassunto:

$$z=(x,y)=x+iy \equiv (\rho,\vartheta) = \underbrace{\overset{\rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta}{\rho(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)}}_{\substack{\text{forma alg.}\\ \text{scritta in}\\ \text{modo trig.}}} = \rho e^{i\vartheta}$$

forma algebrica — forma trig. — forma esp.

(non usata qui)

FUNZIONI DI VARIABILE REALE A VALORI COMPLESSI

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \to y=f(t)\in\mathbb{C}$$

(sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

Per ogni $t\in I$ si ha $f(t)\in\mathbb{C}$ dunque

$$f(t)=\underbrace{f_1(t)}_{\substack{\text{parte reale}\\ \text{di } f(t)}} + i\,\underbrace{f_2(t)}_{\substack{\text{parte immaginaria}\\ \text{di } f(t)}}$$

con $f_1: I\to\mathbb{R}$, $f_2: I\to\mathbb{R}$ } funz. reali (di variab. reale)

Es $\quad f(t)=\underbrace{t\cos(t^2)}_{f_1(t)} + i\,\underbrace{e^{t^2+1}}_{f_2(t)}$

Def Derivata di $f: I \to \mathbb{C}$:

$$f'(t) \overset{\text{def.}}{=} f_1'(t) + i f_2'(t)$$

Es $f(t) = 2t+1 + i e^{t^2}$

$$f'(t) = 2 + i\, 2t e^{t^2}$$

Def: Integrale di $f: I \to \mathbb{C}$:

$$\int_I f(t)\,dt \overset{\text{def.}}{=} \int_I f_1(t)\,dt + i \int_I f_2(t)\,dt$$

Es: $f(t) = \operatorname{sen} t + i t^2$

$$\int_0^\pi f(t)\,dt = \int_0^\pi \operatorname{sen} t\,dt + i \int_0^\pi t^2\,dt = \dots$$

$$[-\cos t]_0^\pi + i \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^\pi = \cos\pi$$

$$(-\cos\pi) - (\cos 0) + i\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right) = 0 + i\,\frac{\pi^3}{3}$$

$$= i\,\frac{\pi^3}{3}$$