Esercizio 1.15.2 Determinare per quali valori di $C \in \mathbb{R}$ l'equazione $\sin(Cx) = \sqrt{2}/2$ ammette un'unica soluzione nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Esercizio 1.15.3 Utilizzare il metodo grafico per risolvere le disequazioni:

a) (a), (b) ed (e) dell'Esercizio 1.10.2;

b) (c), (d) e (h) dell'Esercizio 1.11.2;

c) (a), (f) e (g) dell'Esercizio 1.12.4;

d) (a), (b) e (d) dell'Esercizio 1.13.3.

Esercizio 1.15.4 Utilizzare il metodo grafico per risolvere qualitativamente le seguenti disequazioni:

a) $\operatorname{arctg} x < 2^{-x}$;

b) $\log|x-1| < \dfrac{1}{x^2}$;

c) $\operatorname{arctg} x < 2^{-x} + a, \quad a \in \mathbb{R}$;

d) $\arcsin(1/x) \geq ax, \quad a \in \mathbb{R}$;

e) $\dfrac{1}{1+x^2} \geq ax^{2/3}, \quad a \in \mathbb{R}$;

f) $f(x) < \operatorname{arctg}(2x+1)$, dove $f(x) = \begin{cases} \log_{1/3}(2x+1) & \text{se } 2x+1 > 0 \\ -\pi/4 & \text{se } 2x+1 \leq 0. \end{cases}$

Bertsch - Dall'Aglio - Giacomelli, Epsilon 1 Primo corso di Analisi Mat., McGraw Hill

1.16 I numeri complessi

1.16.1 Definizione e proprietà

I numeri complessi sono uno strumento estremamente utile in matematica. Essi sono ottenuti mediante l'introduzione del simbolo i, detto **unità immaginaria**, che verifica formalmente $i^2 = -1$ (ovviamente nessun numero reale verifica questa proprietà). Successivamente si considerano tutte le somme formali del tipo $x+iy$, con x e y numeri reali. Le operazioni di addizione e moltiplicazione tra questi oggetti sono definite in maniera intuitiva, trattandoli come se fossero polinomi nella variabile i. Per esempio, proviamo a sommare e a moltiplicare i due numeri complessi $5-2i$ e $1+3i$:

$$(5-2i) + (1+3i) = 6 + i,$$

$$(5-2i)\cdot(1+3i) = 5 + 15i - 2i - 6i^2 = 11 + 13i.$$

Nell'ultimo passaggio si è sfruttata la proprietà $i^2 = -1$, ovvero $-6i^2 = 6$. Questa semplice idea si formalizza nella definizione seguente.

Guida
In questo volume, il teorema fondamentale dell'algebra, precisamente il Corollario 1.148, è utilizzato per l'integrazione delle funzioni razionali.

DEFINIZIONE 1.128
Numeri complessi

Un **numero complesso** è una coppia ordinata (x, y) di numeri reali x e y, usualmente rappresentato nella forma $z = x+iy$. Nell'insieme dei numeri complessi,

$$\mathbb{C} = \{z = x+iy : \ x, y \in \mathbb{R}\},$$

si definiscono, ponendo $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, le seguenti due operazioni:

addizione $\quad z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2);$

moltiplicazione $\quad z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) := (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$

I numeri reali x e y si dicono, rispettivamente, **parte reale** e **parte immaginaria** del numero complesso $z = x+iy$ e si indicano, rispettivamente, con $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(x+iy) := x, \quad \operatorname{Im} z = \operatorname{Im}(x+iy) := y.$$

OSSERVAZIONE 1.129

- Si usano anche le notazioni

$$x := x + 0i, \quad iy := 0 + iy, \quad 0 := 0 + i0, \quad i := 0 + i1, \quad x - iy := x + i(-y).$$

Per esempio, $4 - i$ è una notazione abbreviata del numero complesso $4 + i(-1)$.

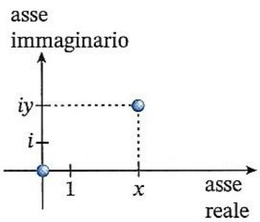

Figura 1.89

- Come insieme, $\mathbb{C}$ può essere identificato con $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed è naturale rappresentare i numeri complessi in un piano, detto **piano complesso**: scelta l'origine e l'unità di misura, si rappresentano i numeri reali x sull'asse orizzontale passante per l'origine, detto **asse reale**, e i numeri iy (con $y \in \mathbb{R}$), detti anche **immaginari puri**, sull'asse verticale passante per l'origine, detto **asse immaginario**; un numero generico $z = x + iy$ si rappresenta come in Fig. 1.89. Sottolineiamo però che $\mathbb{C}$ è un insieme numerico, mentre $\mathbb{R}^2$ non lo è.

- La parte reale e la parte immaginaria sono numeri reali.

- Dati i numeri complessi $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, allora l'uguaglianza $z_1 = z_2$ equivale a un sistema di due uguaglianze in $\mathbb{R}$:

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \,. \end{cases}$$

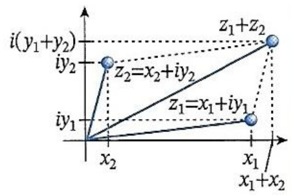

Figura 1.90

- Geometricamente, l'addizione corrisponde alla *regola del parallelogramma* per la somma dei vettori (Fig. 1.90). L'interpretazione geometrica della moltiplicazione, invece, non sembra altrettanto chiara, ma vedremo successivamente che può essere descritta in termini di rotazioni e riscalamenti (si veda il Teorema 1.137).

NO

Il seguente teorema garantisce che le operazioni nei numeri complessi continuano a verificare le usuali proprietà delle operazioni, per esempio la proprietà distributiva.

TEOREMA 1.130
$\mathbb{C}$ è un campo

I numeri complessi verificano le proprietà (P1)–(P9) elencate nel Paragrafo 1.2. In particolare sono definiti la differenza $z_1 - z_2$ (per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$) e il quoziente z_1/z_2 (per ogni $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ con $z_2 \neq 0$). In poche parole, $\mathbb{C}$ è un campo.

Dimostrazione

La dimostrazione è facile e si basa sulla definizione dell'addizione e della moltiplicazione e sulle analoghe proprietà dei numeri reali. Solo la costruzione del reciproco $1/z$, per $z \neq 0$, richiede un piccolo artificio per ridurre il denominatore a un numero reale:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\,. \tag{1.53}$$

A posteriori si verifica che tale numero soddisfa la proprietà richiesta. Una volta definito $1/z$, è chiaro come si calcola il rapporto tra due numeri complessi.

ESEMPIO 1.131

Calcoliamo

$$\frac{3+2i}{2-5i} = \frac{(3+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)} = -\frac{4}{29} + i\frac{19}{29}, \qquad \frac{4-5i}{3i} = \frac{(4-5i)(-i)}{3i(-i)} = -\frac{5}{3} - \frac{4}{3}i.$$

OSSERVAZIONE 1.132

- Le operazioni definite nei numeri complessi estendono le operazioni definite nei numeri reali, nel senso che, se applicate ai numeri della forma $x + i0$, con $x \in \mathbb{R}$, forniscono risultati corrispondenti a quelli che si ottengono con i numeri reali. In questo senso possiamo considerare $\mathbb{R}$ come un sottoinsieme di $\mathbb{C}$: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

- Una fondamentale differenza tra i numeri complessi e gli altri insiemi numerici finora introdotti è che non è possibile introdurre sui numeri complessi una relazione d'ordine che soddisfi le abituali proprietà di compatibilità con le operazioni, in particolare le proprietà (P10)–(P15) del Paragrafo 1.2. Quindi in generale la scrittura $z \geq w$ non ha senso nei numeri complessi.

DEFINIZIONE 1.133
Coniugato e modulo

Dato $z = x + iy$, si dicono **coniugato** di z, indicato con $\overline{z}$, il numero complesso $x - iy$, e **modulo** di z, indicato con $|z|$, il numero reale non negativo $\sqrt{x^2 + y^2}$:

$$\overline{x + iy} := x - iy, \qquad |x + iy| := \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.54}$$

OSSERVAZIONE 1.134

- Un'altra differenza rispetto ai numeri reali è che in quelli complessi si ha in generale $z^2 \neq |z|^2$. Per esempio, se $z = 1 + i$, allora $z^2 = 2i$, mentre $|z|^2 = 2$.

- Nel piano complesso, z e $\overline{z}$ sono simmetrici rispetto all'asse reale (Fig. 1.93).

- Per il teorema di Pitagora, $|z|$ può essere interpretato come la distanza tra z e 0 nel piano complesso. Analogamente, $|z_1 - z_2|$ si può interpretare come la distanza tra z_1 e z_2 (Fig. 1.91). Non è difficile dimostrare algebricamente le seguenti proprietà del modulo, per ogni scelta di $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

NO

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\,, \quad \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ (z_2 \neq 0)\,,\right) \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\,. \tag{1.55}$$

L'ultima disuguaglianza prende il nome di **disuguaglianza triangolare nei numeri complessi** e implica la seguente disuguaglianza, anch'essa detta "triangolare",

$$|z_1 - z_2| \leq |z_1 - z_3| + |z_3 - z_2| \qquad \forall\, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}. \tag{1.56}$$

L'interpretazione geometrica è intuitiva: in un triangolo la lunghezza di ogni lato non è superiore alla somma delle lunghezze degli altri due lati (Fig. 1.92).

- Valgono le seguenti proprietà (di facile dimostrazione):

$$z\,\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} \tag{1.57}$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \qquad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2} \qquad \text{per ogni } z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{1.58}$$

NO

In accordo con la (1.53), ne segue che

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad \forall\, z \neq 0. \tag{1.59}$$

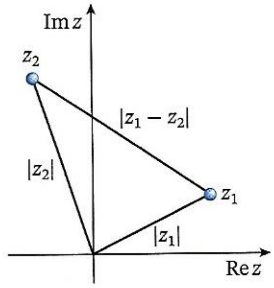

Figura 1.91 Distanza tra numeri complessi.

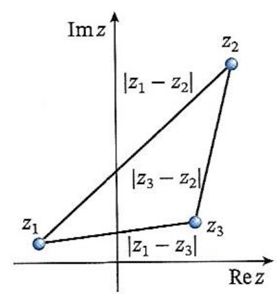

Figura 1.92 Disuguaglianza triangolare.

1.16.2 Rappresentazione polare di un numero complesso

In Fig. 1.93, oltre al modulo, abbiamo indicato anche l'angolo φ, detto **argomento** di z e indicato con $\arg z$ (come sempre, misurato in verso antiorario dal semiasse reale positivo). Dalla definizione di seno e coseno segue che

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos(\arg z)\,, \qquad \operatorname{Im} z = |z| \sin(\arg z), \tag{1.60}$$

ovvero

$$\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i \sin\varphi)\,, \qquad \varphi = \arg z.} \tag{1.61}$$

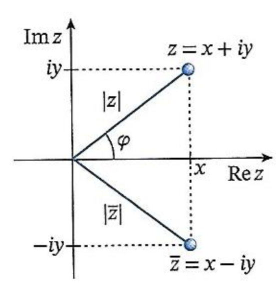

Figura 1.93

Si noti che $\arg z$ non è definito se $z = 0$ e che, se $z \neq 0$, $\arg z$ è determinato a meno di un multiplo intero di 2π, in quanto gli unici valori a essere determinati sono il suo seno e il suo coseno. Questo implica che, per ogni $z, w \in \mathbb{C} \neq \{0\}$,

$$z = w \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} |z| = |w| \\ \arg z = \arg w + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases} \tag{1.62}$$

La (1.61) si dice anche **rappresentazione trigonometrica, o polare**, di $z \neq 0$. Per la definizione di coniugato si ha

$$|\overline{z}| = |z|\,, \quad \arg \overline{z} = -\arg z + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})\,. \tag{1.63}$$

ESEMPIO 1.135

Si vuole determinare la rappresentazione polare di $z = 1 - i$ e di $w = -2 + 3i$.
Si ha $|z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Risulta poi evidente, rappresentando z nel piano complesso (Fig. 1.94), che $\arg z = -\frac{\pi}{4}(+2k\pi)$. Quindi, per esempio,

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

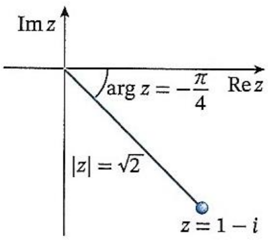

Figura 1.94

Per w si ha $|w| = \sqrt{13}$, $\cos(\arg w) = -\frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin(\arg w) = \frac{3}{\sqrt{13}}$, che non sono valori corrispondenti ad angoli noti. Pertanto

$$w = \sqrt{13}\left(\cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi)\right),$$

dove φ è l'angolo del secondo quadrante, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, che può essere scritto come

$$\varphi = \pi - \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}} = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\frac{2}{3}\,.$$

OSSERVAZIONE 1.136

È interessante provare a svolgere la moltiplicazione di due numeri complessi z_1 e z_2 usando la rappresentazione polare dei numeri complessi. Siano $\varphi_1 = \arg z_1$ e $\varphi_2 = \arg z_2$. Allora, per la (1.61),

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)|z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= |z_1|\cdot|z_2|\Big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\Big). \end{aligned}$$

Nell'ultima espressione riconosciamo ora le ben note formule trigonometriche per il seno e coseno della somma di due angoli. Pertanto

$$\boxed{z_1 z_2 = |z_1|\cdot|z_2|\Big(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\Big).} \tag{1.64}$$

NO

Se $z_2 \neq 0$, per la (1.63) si ha che $|z_2| = |\overline{z}_2|$ e $\arg \overline{z}_2 = -\varphi_2$. Perciò, utilizzando la (1.59) e la (1.64), si ottiene

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\Big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\Big).} \tag{1.65}$$

Le formule (1.64) e (1.65) sono riassunte nel seguente risultato, che fornisce anche l'interpretazione geometrica della moltiplicazione e della divisione di numeri complessi (Fig. 1.95).

TEOREMA 1.137
Prodotto e quoziente in forma polare

Il prodotto di due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli dei due fattori e per argomento la somma degli argomenti (formula (1.64)).
Il quoziente di due numeri complessi ha per modulo il rapporto dei moduli dei due numeri e per argomento la differenza degli argomenti (formula (1.65)).

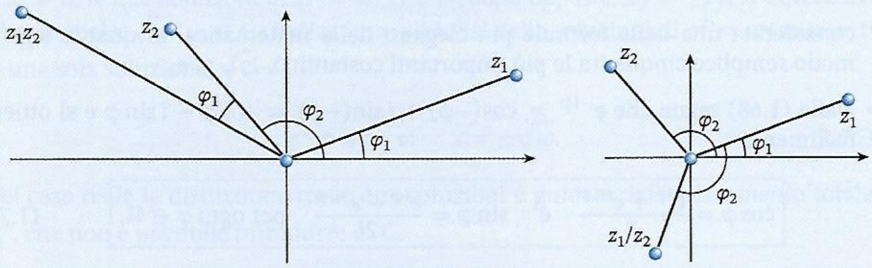

Figura 1.95 Prodotto e quoziente di numeri complessi.

ESEMPIO 1.138

Consideriamo i numeri $z_1 = 1 - i$ e $z_2 = 1 + i$. Allora

$$|z_1| = |z_2| = \sqrt{2}, \qquad \arg z_1 = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \qquad \arg z_2 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Pertanto

$$|z_1 z_2| = 2 \ \text{ e } \ \arg(z_1 z_2) = 0\,(+2k\pi) \quad \Rightarrow \quad z_1 z_2 = 2,$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1 \ \text{ e } \ \arg\frac{z_1}{z_2} = -\frac{\pi}{2}\,(+2k\pi) \quad \Rightarrow \quad \frac{z_1}{z_2} = -i.$$

Potenza di un numero complesso

Se applichiamo ripetutamente il Teorema 1.137, otteniamo che per ogni $n = 1, 2, \ldots$

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{e, se } z \neq 0, \quad \arg(z^n) = n \arg z + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{1.66}$$

In particolare, se $|z| = 1$, ovvero $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$, si ottiene la **formula di De Moivre**:

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi).} \tag{1.67}$$

È di grande utilità la notazione

$$\boxed{e^{i\varphi} := \cos\varphi + i\sin\varphi \quad \text{per } \varphi \in \mathbb{R},} \tag{1.68}$$

dove e è la costante di Nepero introdotta nell'Osservazione 1.94. Con tale notazione la (1.61) si riscrive in modo equivalente come

$$\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \qquad \varphi = \arg z}, \tag{1.69}$$

che è detta **rappresentazione esponenziale** di $z \neq 0$. Usando la (1.64) si ottiene in particolare

$$e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \tag{1.70}$$

e possiamo riscrivere la formula di De Moivre come segue:

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi}.$$

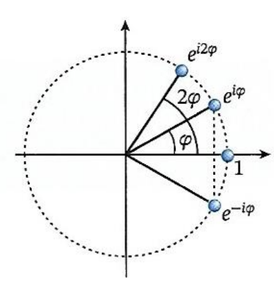

Figura 1.96 φ, $e^{i\varphi}$, $e^{i2\varphi}$ ed $e^{-i\varphi}$.

Evidenziamo che a questo punto delle nostre conoscenze la notazione introdotta è puramente formale. Tuttavia dalle due formule precedenti pare naturale introdurre una notazione che faccia uso dell'esponenziale. Nel secondo volume vedremo che anche l'uso del "numero e" come base non è casuale, anzi è sostanzialmente "obbligato". Si noti che

$$e^{2k\pi i} = 1, \quad e^{i(\varphi + 2k\pi)} = e^{i\varphi} \quad (k \in \mathbb{Z}), \qquad |e^{i\varphi}| = 1. \tag{1.71}$$

OSSERVAZIONE 1.139

- Valgono le uguaglianze $e^{i\pi} = -1$, $e^{i\pi/2} = i$, $e^{3i\pi/2} = -i$ e $e^{3i\pi/4} = (-1+i)/\sqrt{2}$. In particolare vale la **formula di Eulero**

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0\,,}$$

considerata una delle formule più eleganti della matematica, in quanto lega in modo semplice cinque tra le più importanti costanti: 0, 1, i, π, e.

- Dalla (1.68) segue che $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi) = \cos\varphi - i\sin\varphi$ e si ottiene facilmente

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2} \quad \text{e} \quad \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i} \quad \text{per ogni } \varphi \in \mathbb{R}.} \tag{1.72}$$

La notazione esponenziale è largamente usata nelle applicazioni anche perché facilita notevolmente le manipolazioni che coinvolgono grandezze trigonometriche. Le formule (1.72) permettono di esprimere seno e coseno come combinazione di esponenziali complessi, e la regola di moltiplicazione (1.70) è particolarmente semplice da usare e da ricordare in confronto alle formule trigonometriche.

OSSERVAZIONE 1.140 Esponenziale complesso

La notazione (1.68) si può generalizzare coerentemente con le proprietà delle potenze, definendo l'**esponenziale complesso**

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \qquad \forall z = x+iy \in \mathbb{C}. \tag{1.73}$$

NO

1.16.3 Radici n-esime di un numero complesso

L'equazione $x^2 = -1$ non ha soluzioni reali, ma i numeri complessi i e $-i$ sono soluzioni complesse. Più in generale, cerchiamo le **radici complesse n-esime** di un numero assegnato $w \in \mathbb{C}$, ovvero i numeri complessi z tali che $z^n = w$. Se $w = 0$, l'unica possibilità è $z = 0$ ($0 = |z^n| = |z|^n$). Se $w \neq 0$, per l'uguaglianza $z^n = w$ deve essere

$$z^n = w \quad \overset{(1.62)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} |z^n| = |w| \\ \arg(z^n) = \arg w + 2k\pi \end{cases}$$

$$\overset{(1.66)}{\Leftrightarrow} \quad \begin{cases} |z|^n = |w| \\ n\arg z = \arg w + 2k\pi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} |z| = \sqrt[n]{|w|} \\ \arg z = \dfrac{\arg w}{n} + \dfrac{2k\pi}{n} \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

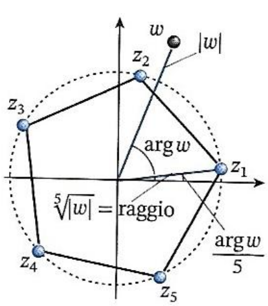

Figura 1.97 Soluzioni di $z^5 = w$.

dove con $\sqrt[n]{|w|}$ indichiamo la radice reale positiva di $|w|$. In realtà non serve prendere infiniti valori $k \in \mathbb{Z}$: poiché k e $k+n$ forniscono lo stesso valore di z, basta prendere $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Abbiamo quindi provato una regola per il calcolo delle radici di un numero complesso.

TEOREMA 1.141 Radici n-esime di un numero complesso

Sia $w \in \mathbb{C}$ e sia $n = 2, 3, \dots$

(*i*) Se $w = 0$, la sola soluzione complessa dell'equazione $z^n = w$ è $z = 0$.

(*ii*) Se $w \neq 0$, l'equazione $z^n = w$ ha esattamente n soluzioni complesse distinte:

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i(\arg w + 2k\pi)/n}, \qquad k = 0, 1, \dots, n-1, \tag{1.74}$$

dove $\sqrt[n]{|w|}$ denota la radice reale positiva di $|w|$. Geometricamente, tali soluzioni sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[n]{|w|}$ e centro 0 (Fig. 1.97).