11/10/2022

Una forma qualitativa del principio di indeterminazione è la seguente proprietà:

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ e sia $a>0$. Poniamo $d_a f(t) = f(at)$.

Nota: se $a>1$ allora $d_a f$ è una "contrazione" di $f(t)$,
se $0<a<1$ allora $d_a f$ è una "dilatazione" di $f(t)$.

Abbiamo:

$$\widehat{d_a f}(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \omega t} f(at)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i \frac{\omega}{a} s} f(s) \frac{1}{a} ds}_{\substack{\text{posto } s=at \\ ds = a\,dt}} = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right) = \frac{1}{a} d_{1/a} \hat{f}(\omega).$$

Dunque, a parte il fattore moltiplicativo $\frac{1}{a}$, la trasformata di Fourier trasforma d_a in $d_{1/a}$, ossia dilatazioni in contrazioni e contrazioni in dilatazioni.

Principio di indeterminazione di Heisenberg

PROP. Sia $f \in L^2(\mathbb{R})$, tale che $\|f\|_2 = 1$, allora: $\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi}$

(Nota se $\|f\|_2 \neq 1$ allora applicando la Prop. precedente alla funzione $\frac{f}{\|f\|_2}$ abbiamo $\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} \omega^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega\right)^{1/2} \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$)

Nota Il I° membro potrebbe essere infinito.

Nota Siano $m = \int_{\mathbb{R}} x |f(x)|^2 dx$, $\mu = \int_{\mathbb{R}} \omega |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega$ (medie di $|f|^2$ e $|\hat{f}|^2$)

(1) È noto che
$$\begin{cases} \min_{a\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 |f(x)|^2 dx =: \mathrm{Var}(f) \\ \min_{b\in\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} (\omega-b)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}} (\omega-\mu)^2 |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega =: \mathrm{Var}(\hat{f}) \end{cases}$$

(2) La Prop. precedente $\iff$ $\mathrm{Var}(f) \cdot \mathrm{Var}(\hat{f}) \geq \frac{1}{4\pi}$

Dim

(1) per brevità poniamo $\rho(x) = |f(x)|^2$. Diamo 2 dimostrazioni:

(I^a dim) $$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\,dx - 2a \overbrace{\int_{\mathbb{R}} x\rho(x)\,dx}^{m} + a^2 \overbrace{\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\,dx}^{1}$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\,dx - 2am + a^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\,dx + m^2 - 2am + a^2 - m^2$$

$$= \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\,dx + (m-a)^2 - m^2$$ che è minima se $a = m$.

(II^a dim.)

Consideriamo la funzione $\psi(a) = \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 \rho(x)\,dx - 2am + a^2$.

$$\psi'(a) = \frac{d}{da} \int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{da} (x-a)^2 \rho(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 2(x-a)\rho(x)\,dx =$$

$$2\left(\int x\rho(x)\,dx - a\int \rho(x)\,dx\right) = 2(m-a) = 0 \implies a = m$$

Ma $\lim_{a\to\pm\infty} \psi(a) = +\infty$ e quindi $a = m$ è punto di minimo.

(2)

$\boxed{\Leftarrow}$ ovvia dalla (1).

$\boxed{\Rightarrow}$ Poiché la Prop. vale $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$ applichiamola a $\mu_b \tau_a f$:

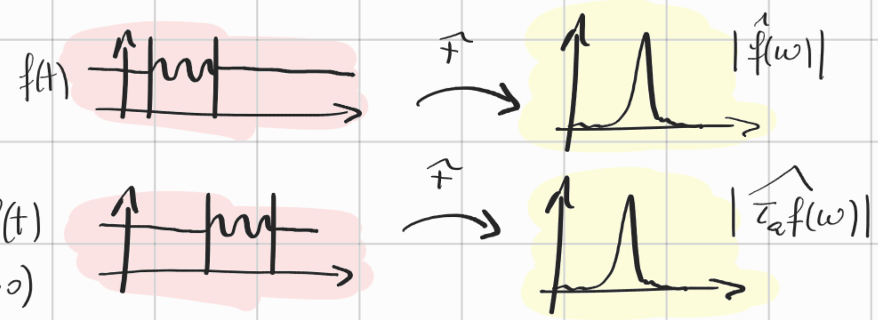
$$\frac{1}{16\pi^2} \leq \int x^2 |\mu_b \tau_a f(x)|^2 dx \cdot \int \omega^2 |\widehat{\mu_b \tau_a f}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\int x^2 |f(x-a)|^2 dx \cdot \int \omega^2 |\tau_b \mu_{-a} \hat{f}(\omega)|^2 d\omega =$$

$$\int (t+a)^2 |f(t)| dt \cdot \int \omega^2 |e^{2\pi i a(\omega-b)} \hat{f}(\omega-b)|^2 d\omega =$$

$$\int (t+a)^2 |f(t)|^2 dt \cdot \int (\lambda+b)^2 |\hat{f}(\lambda)|^2 d\lambda \qquad (\forall a, b \in \mathbb{R})$$

Es. di come $|\hat{f}(\omega)|$ perda l'informazione sui tempi



le trasformate sono esattamente uguali infatti:

$$|\widehat{\tau_a f}(\omega)| = |\mu_{-a} \hat{f}(\omega)| = |\hat{f}(\omega)|$$
