Review of Financial Economics 何未

3类题:
名词解释
证明计算
简答：简洁

~~Part I~~ Chapter 1. (略)

Capter 2. 个体风险态度&度量

一、风险态度

1. 效用函数 $\xrightarrow{\text{反映}}$ 风险态度. Fair Game . ε

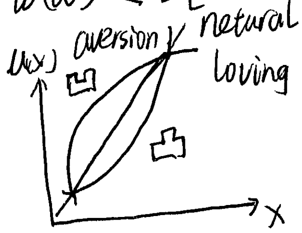
2. $(p: x_1, x_2)$. $px_1+(1-p)x_2=0$.

$u \to$ VNM效用函数, W初始禀赋　　VNM效用函数 $U(X)=p_1u(x_1)+p_2u(x_2)+\dots+p_nu(x_n)$

$u(W) > p\,u(W+x_1)+(1-p)\,u(W+x_2)$

期望的效用 > 效用的期望

$$\begin{cases} u(W) > E[u(W+\tilde{\varepsilon})], & \text{risk aversion} \\ u(W) = E[u(W+\tilde{\varepsilon})], & \text{neutral} \\ u(W) < E[u(W+\tilde{\varepsilon})], & \text{risk loving} \end{cases}$$



3. 凸凹性为局部性质: $W\uparrow$, aversion $\to$ loving

二. 度量 $\begin{cases}\text{certainty equivalence} \\ \text{risk premium}\end{cases}$

①

回避风险 $E[u(W+\tilde{\varepsilon})]=u(W-p)$

p: 马科维兹 risk premium

$W-p$: certainty equivalence

② 风险厌恶系数求法☆. p

若 $u(x)$ 二次连续可微, 在 W 处 taylor 展开.

Ps: $E(\varepsilon)=0$
$Var(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)-E(\varepsilon)=E(\varepsilon^2)$

$$E[u(W)+u'(W)\cdot\varepsilon+\tfrac{1}{2}u''(W)\varepsilon^2+Re] = u(W)-u'(W)p+Re$$

. $Re \to$ 高阶余项.

$$u(W)+\tfrac{1}{2}u''(W)\cdot Var(\varepsilon) = u(W)-u'(W)p$$

$$p \approx \underbrace{\left[-\frac{u''(W)}{2u'(W)}\right]}_{\text{体现偏好}}\cdot\underbrace{Var(\varepsilon)}_{\text{体现不确定性}}$$

绝对 $R_A(W)=-\dfrac{u''(W)}{u'(W)}$ (Arrow-Pratt absolute aversion)

$$\frac{P}{W} = \boxed{-\frac{u''(W)\cdot W}{2u'W}} \cdot Var\left(\frac{\varepsilon}{W}\right)$$

$R_R(W) = -\frac{u''(W)\cdot W}{u'(W)}$ (Arrow-Pratt relative ~~absolute~~ aversion)

Def. $T(W) = \frac{1}{R_A(W)} = -\frac{u'(W)}{u''(W)}$. 风险容忍~~系~~数(risk tolerance)

③. 风险厌恶度量的性质

$$\begin{cases} R_A(W) \longrightarrow W\text{相同. 不同主体} \\ R_R(W) \longrightarrow W\text{变化时. aversion 的度量} \end{cases}$$

1. W相同.时. i.比j更厌恶风险

1>. $R_A^i \geq R_A^j$; 2>. $P_i(W) > P_j(W)$ 3> 曲率, i比j更加凹

~~$R_A^i > P_j$~~

Pratt 普拉特定理: 若 $u(x)$ 二次可微.单增. $\Longrightarrow$ 1>, 2>, 3> 等价.

2°. 财富水平W变化.

absolute
$$\begin{cases} \frac{dR_A(W)}{dW} < 0, & \text{递减} \\ \frac{dR_A(W)}{dW} > 0, & \sim\text{增} \\ \frac{dR_A(W)}{dW} = 0, & \text{常数} \end{cases}$$

Arrow-Pratt定理

W↑, risk assets ↑. 正常品 ~~$\eta > 1$~~

W↓, risk assets ↓. 劣等品 ~~$\eta < 1$~~

W 与无关 ~~$\eta = 0$~~

relative. $\boxed{\cancel{\eta = \frac{dW/W}{d\alpha/\alpha}}}$. 风险资产需求弹性

$\eta = \frac{d\alpha/\alpha}{dW/W}$:

$$\begin{cases} \frac{dR_R(W)}{dW} > 0 \Longrightarrow \eta < 1 \\ \sim\sim < 0 \Longrightarrow \eta > 1 \\ \sim\sim = 0 \Longrightarrow \eta = 1 \end{cases}$$

可计算表达式为数值性表达, 系无变量上等同系

四、效用函数及性质

$u(W) = \frac{1-r}{r}\left(\frac{\alpha W}{1-r} + \beta\right)^r$, $\beta > 0, r \neq 1$

$u'(W) = \alpha\left(\frac{\alpha W}{1-r} + \beta\right)^{r-1}$.

$u''(W) = -\alpha^2\left(\frac{\alpha W}{1-r} + \beta\right)^{r-2}$.

$T(W) = \frac{1}{R_A(W)} = -\frac{u'W}{u''W} = \left(\frac{1}{1-r}\right)W + \frac{\beta}{\alpha}$

假设个人具有 linear risk tolerance (LRT)

即 T(W)与W呈线性关系

$$\begin{cases} r > 1, & W\uparrow, T(W)\downarrow \\ r < 1, & W\downarrow, T(W)\downarrow \end{cases}$$

Hyperbolic absolute risk aversion (HARA)

1. $r \to 1$. $u(W) = a + bW$. $b > 0$.

2. $r \to 2$. $u(W) = W - \frac{b}{2}W^2$. $b > 0$ $\longrightarrow R_A'(W) > 0$

3. $\beta = 1$, $r \to -\infty$, $u(W) = -e^{-\alpha W} \longrightarrow R_A(W) = \alpha$.

4. $\beta = 0$, $r < 1$, $\Rightarrow$ 幂函数 $\longrightarrow R_R(W) = C$

$u(W) = \frac{W^r}{r}$

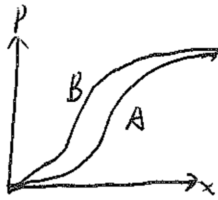
5. $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $r \to 0 \Longrightarrow u(W) = \ln W \longrightarrow R_R(W) = 1$

五、随机占优 stochastic dominance

定义：$F_A(x)$, $F_B(x)$为收益的累积分布函数，

$\forall x \in [a,b]$，$F_A(x) \le F_B(x)$，

则 $A \underset{FSD}{\geq} B$，一阶随机占优。



分布A把更多概率分配到较高的收益 x.

定理：对于 $F_A(x)$, $F_B(x)$，$\underset{U'(x)\geq 0}{\underline{U(x)\text{递增}}}$，则 $A \underset{FSD}{\geq} B \Leftrightarrow E_A U(x) \geq E_B U(x)$

证明：$E_A U(x) \geq E_B U(x)$，即 $\int_a^b U(x)\,dF_A(x) \geq \int_a^b U(x)\,dF_B(x)$，分部积分法

$$\underbrace{F_A(x)U(x)\Big|_a^b}_{=U(x)} - \int_a^b F_A(x)U'(x)\,dx - \Big(\underbrace{F_B(x)U(x)\Big|_a^b}_{=U(x)} - \int_a^b F_B(x)U'(x)\,dx\Big) \geq 0$$

$$\int_a^b (F_B(x) - F_A(x))\,U'(x)\,dx \geq 0, \implies F_B(x) \geq F_A(x).$$

结论：① $A \underset{FSD}{\geq} B$，② $F_A(x) \le F_B(x)$，$\forall x$，③ $x_A \overset{d}{=} x_B + \alpha$，$\alpha \geq 0$，

①、②、③等价。

一阶 FSD

二阶 SSD

Second degree stochastic dominates

$$S(x) = \int_a^b (F_A(x) - F_B(x))\,dx \le 0, \quad x \in [a,b]$$，条件 $E(\tilde{x}_A) = E(\tilde{x}_B)$

$\tilde{x}_B \overset{d}{=} \tilde{x}_A + \tilde{\varepsilon}$，$E[\tilde{\varepsilon} \mid \tilde{x}_A] = 0$，$\tilde{x}_A$与$\tilde{\varepsilon}$相互独立。

Chapter 3. 资产组合理论

一、两资产 model

基本假设：① $u(x)$ 递增，二阶可导，VNM效用

② W_0

R_f	$\tilde{R}$
$W_0-\alpha$	α

$\tilde{W}$

$$\tilde{W}=(W_0-\alpha)R_f+\alpha\tilde{R}$$
$$=W_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)$$

求解 α，$\quad \mathrm{Max}\,E[u(\tilde{W})]$，s.t. $\tilde{W}=W_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)>0$

过程. $\dfrac{\partial E[u(\tilde{W})]}{\partial\alpha}=0$，即 $E[u'(\tilde{W})(\tilde{R}-R_f)]=0$，

对约束条件变形，设 $\mu=E(\tilde{R})$.

☆ $\tilde{W}=W_0R_f+\alpha\underbrace{(\tilde{R}-\mu)}_{\text{fair game}}+\alpha\underbrace{(\mu-R_f)}_{\text{risk premium}}$ ⟶ 此步骤与推导无关

☆ $E\{[u'(W_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)](\tilde{R}-R_f)\}=0$，taylor 展开到二阶

$E\{[u'(W_0R_f)+\cancel{u''(\tilde{R}-R_f)}\;u''(W_0R_f)\cdot\alpha(\tilde{R}-R_f)](\tilde{R}-R_f)\}=0$

$u'(W_0R_f)E(\tilde{R}-R_f)+u''(W_0R_f)\cdot\alpha\cdot E(\tilde{R}-R_f)^2=0$

$$\alpha=\frac{E(\tilde{R}-R_f)=L\ \text{风险资产风险溢价}}{E(\tilde{R}-R_f)^2\cdot R_A(W_0R_f)}$$

$E(\tilde{R}-R_f)^2$ 风险水平；$R_A(W_0R_f)$ ⟶ 个人的风险厌恶程度

☆二、性质“比较静态分析”

1. risk premium 对 α 的影响

关系式：$\alpha=\dfrac{E(\tilde{R}-R_f)}{E(\tilde{R}-R_f)^2\cdot R_A(W_0R_f)}$

$\begin{cases} E(\tilde{R}-R_f)>0, & \alpha>0 \\ E(\tilde{R}-R_f)=0, & \alpha=0 \times \end{cases}$ 此处 α 可为负值
$\quad E(\tilde{R}-R_f)<0,\ \alpha<0$ 可理解为做空

2. W_0 对 α 影响

假设. ①、个人严格风险厌恶 ②. $L>0$，即 $\alpha>0$

关系式 ① $\alpha=\dfrac{L}{E(\tilde{R}-R_f)^2R_A(W_0R_f)}$. $\quad \dfrac{d\alpha}{dW_0}=-\boxed{\dfrac{L\cdot R_f}{E(\tilde{R}-R_f)^2\cdot R_A^2(W_0R_f)}}\cdot\dfrac{dR_A(W_0R_f)}{dW_0}$ ⟶ 待定

$\boxed{\cdots}\to>0$

$\begin{cases} \dfrac{dR_A(W)}{dW}<0, & \dfrac{d\alpha}{dW}>0 \\ \dfrac{dR_A(W)}{dW}>0, & \dfrac{d\alpha}{dW}<0 \end{cases}$

此处两种方式推导结论，分别使用不同关系式，

①为个人的推导，由于 α 的求解过程中使用了 Taylor 展开，故做了近似处理，故此方法可能存在不严密性，但便于理解。

②为老师讲解的推导方式，计算略复杂。

关系式 ②. $E\{[u'(W_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)](\tilde{R}-R_f)\}=0$，对 W_0 求隐函数导数

$E\{(\tilde{R}-R_f)\cdot u''(\tilde{W})\cdot[R_f+(\tilde{R}-R_f)\dfrac{d\alpha}{dW}]\} \Longrightarrow \dfrac{d\alpha}{dW}=\dfrac{-R_fE[u''(\tilde{W})(\tilde{R}-R_f)]}{E[u''(\tilde{W})(\tilde{R}-R_f)^2]}$

分析 $\frac{d\alpha}{dw}$ 的正负号

$$\frac{d\alpha}{dw}=\frac{-R_f\cdot \overset{\text{讨 } R_A'(w)<0}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]}<0}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]<0}>0$$

1°. 主体严格风险厌恶，且 $u'>0$，

则 $R_A=-\frac{u''(w)}{u'(w)}>0$，由于 $u'(w)>0$，故 $u''(w)<0$，

分母中 $u''(\tilde{w})\cdot(\tilde{R}-R_f)^2<0$，$E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]<0$。

☆ 2°. 欲求 $u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)$，变形

$$u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)=\underbrace{-R_A(\tilde{w})\cdot u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)}$$

当 $\tilde{R}-R_f>0$，$\tilde{w}>w_0R_f$，①$R_A'(w)<0$，$R_A(\tilde{w})<R_A(w_0R_f)$，同乘以 $-u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)$，

~~$R_A(\tilde{w})$~~ $-R_A(\tilde{w})u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)>-R_A(w_0R_f)\cdot u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)$

$E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]\geq -R_A(w_0R_f)\underbrace{E[u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]}_{\text{一阶条件}}=0$

②$R_A'(w)>0$，略

3. R_f，$\tilde{R}$ 对 α 的影响

R_f 关系式 $E\{u'[w_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)](\tilde{R}-R_f)\}=0$，对 R_f 求导

$$E\left[(\tilde{R}-R_f)u''(\tilde{w})\left[(\tilde{R}-R_f)\frac{d\alpha}{dR_f}-\alpha+w_0\right]-u'(\tilde{w})\right]=0$$

$$\frac{d\alpha}{dR_f}=\frac{E[u'(\tilde{w})]-(w_0-\alpha)E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]}=\frac{E[u'(\tilde{w})]>0}{\underbrace{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]}_{<0}}+\frac{w_0-\alpha}{R_f}\cdot\boxed{\frac{d\alpha}{dw}}$$

由 $\frac{d\alpha}{dw}$ 的分析可知，

① $R_A'(w)>0$，$\frac{d\alpha}{dw}<0$，$\Rightarrow\frac{d\alpha}{dR_f}<0$

② $R_A'(w)<0$，$\Rightarrow\frac{d\alpha}{dw}>0$，

$\frac{d\alpha}{dR_f}$ 不确定。

$\tilde{R}$ 关系式：$E\{u'[w_0R_f+\alpha(\tilde{R}-R_f)](\tilde{R}-R_f)\}=0$，$\tilde{R}$ 求导

$$E\left[u'(\tilde{w})+(\tilde{R}-R_f)u''(\tilde{w})\cdot\alpha+(\tilde{R}-R_f)^2u''(\tilde{w})\frac{d\alpha}{d\tilde{R}}\right]=0$$

$$\frac{d\alpha}{d\tilde{R}}=-\frac{\overset{>0}{E[u'(\tilde{w})]}+\boxed{\overset{\text{确定}}{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]\cdot\alpha}}}{\underbrace{E[(\tilde{R}-R_f)^2u''(\tilde{w})]}<0}$$

→ ① $R_A'(w)<0$，由 $\frac{d\alpha}{dw}$ 分析知，$E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]\cdot\alpha\geq0$。

故 $\frac{d\alpha}{d\tilde{R}}>0$

② $R_A'(w)>0$ 时，不确定

4. $\overset{(\tilde{R}-R_f)^2}{\underline{\text{风险程度}}}$ 对 α 影响

关系式 $$\alpha=\frac{E(\tilde{R}-R_f)}{E(\tilde{R}-R_f)^2\cdot R_A(w_0R_f)}$$

$E(\tilde{R}-R_f)^2\uparrow$，$\alpha\downarrow$

补充. ⑭ 财富水平与弹性 ⑤补充

$$\eta = \frac{d\alpha/\alpha}{dw/w} = \frac{\partial\alpha}{\partial w}\cdot\frac{w}{\alpha} = 1 - \frac{\alpha - \frac{\partial\alpha}{\partial w}\cdot w_0}{\alpha}$$ ，代入 $\frac{d\alpha}{dw_0}$

$$原式 = 1 - \frac{\alpha E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2] + w_0 R_f E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)]}{\alpha E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]}$$

$$= 1 - \frac{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)[\alpha(\tilde{R}-R_f)+w_0R_f]]}{\alpha E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]} = 1 - \frac{E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)\cdot\tilde{w}]}{\alpha\cdot E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)^2]}$$ >0 <0

$\longrightarrow$ 由前面证明 <0.

由 $R_R(\tilde{w}) = -\frac{u''(\tilde{w})}{u'(\tilde{w})}\cdot\tilde{w} \Longrightarrow u''(\tilde{w})\cdot\tilde{w}(\tilde{R}-R_f) = -R_R(\tilde{w})\cdot u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)$

①. $R_R'(w)<0$, $\tilde{R}-R_f>0$ 时. $\tilde{w}>w_0R_f$, $R_R(\tilde{w})<R_R(w_0R_f)$

$$u''(\tilde{w})(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f) = -R_R(\tilde{w})u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f) > -R_R(w_0R_f)\cdot u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)$$

$$E[u''(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)\cdot\tilde{w}] > -R_R(w_0R_f)E[u'(\tilde{w})(\tilde{R}-R_f)] = 0 \Rightarrow \eta \geq 1$$

三、多资产model

2资产model不再适用故仅记结论（须引入偏好）

定理3.1. 多资产，严格风险厌恶，最优组合包含风险资产

$\Longleftrightarrow E(\tilde{R}) > R_f$. or $E(\tilde{W}) > E(W_0 R_f)$

定理3.2 K资产

$R_K = \sum_{j \neq k} \alpha_j R_j + \varepsilon_K$，且 $\sum_{j \neq k} \alpha_j = 1$. $E[\varepsilon_k \mid R_1, R_2 \cdots R_k \cdots R_j] = E(\varepsilon_k)$

对K最优投资取决于 ε_k（符号）

—— 3.3. $T(w)$ 若 $\frac{1}{\sigma}$ 为线性，最优组合中每一风险资产的投资与 W_0 有线性关系。

Chapter 4. 均值—方差偏好的投资组合选择

Markowitz均值—方差组合理论

基本内容重在理解，相比C3，此理论使最优投资组合的构建具有可实现性。

一、假设条件：

① 单期投资

② 资产收益分布呈正态分布。

③ $u(W) = W - \frac{b}{2}W^2$

④ 经济主体仅仅关心 $\begin{cases} \text{期望报酬} \longrightarrow \text{收益} \\ Var \longrightarrow \text{风险} \end{cases}$

⑤ —— 非饱和性、风险厌恶。

局限性：

① 资产回报的均值和方差不能完全包含个人期望效用全部信息。

② 任意效用函数与收益分布，

$u(\tilde{w})$ Taylor展开至二阶

$u(\tilde{w}) = u(E\tilde{w}) + u'(E\tilde{w})(\tilde{w} - E\tilde{w}) + \frac{1}{2!}u''[E(\tilde{w})](\tilde{w} - E\tilde{w})^2 + R_3$

$\Rightarrow E[u(\tilde{w})] = u(E\tilde{w}) + \frac{1}{2}u''(E\tilde{w}) + \sigma(\tilde{w}) + \underbrace{R_3 E(R_3)}$

（被忽略）

定理一：①.未来收益任意分布 ②效用函数为二次函数 $u(W) = W - \frac{b}{2}W^2$

$\Longrightarrow E[u(\tilde{w})]$ 为 $E(\tilde{w})$ 和 $Var(\tilde{w})$ 的函数

证明：$E[u(\tilde{w})] = E(\tilde{w}) - \frac{b}{2}E(\tilde{w})^2 = E(\tilde{w}) - \frac{b}{2}[E(\tilde{w})^2 + Var(\tilde{w})] = E(\tilde{w})(1 - \frac{b}{2}E(\tilde{w})) - \frac{b}{2}\sigma(\tilde{w})$

—— 二：① 未来收益正态分布 ② 偏好任意 $\Longrightarrow$ 同上

纯数学证明

Taylor展开 同上

证明：~~$E[u(\tilde{w})] = E(\tilde{w}) - \frac{b}{2}E(\tilde{w})$~~

$u(\tilde{w}) = u[E\tilde{w}] + u'[E\tilde{w}](\tilde{w} - E\tilde{w}) + \frac{1}{2!}u''[E\tilde{w}](\tilde{w} - E\tilde{w})^2 + R_3$

奇数阶矩为0

$E(\tilde{w} - E\tilde{w})^j \begin{cases} 0, & j = 2k+1, \\ \frac{j!}{(\frac{j}{2})!}\frac{\sigma(\tilde{w})}{\sqrt{2}}, & j = 2k \end{cases}$ 偶——可用方差表示 $\Longrightarrow$ 数学证明如下。

Chapter 5. CAPM

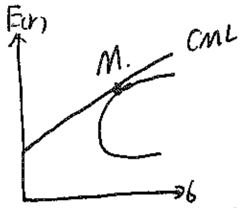
一、推导CAPM

假设：1. 单期投资
2. 风险厌恶

idealized financial market
3.（frictionless market）
4.（no manipulation）
5.（no institutional restriction）

6. 无风险证券

代表性投资人
7. 信息完全
8. homogeneity of expectation



无风险资产净投资为0（借贷净额为0）

原理：边际收益=边际成本 ⟹ 均值.标准差转换率相等.

组合M与i构造P，比例（1-x, x）

$\mu_p = x\mu_i + (1-x)\mu_m$ ， $6_p^2 = x^2 6_i^2 + (1-x)^2 6_m^2 + 2x(1-x)6_{im}$

P资产均值-方差边际转换率为 MRT

$$MRT = \frac{d\mu_p}{d6_p} = \frac{d\mu_p/dx}{d6_p/dx} = \frac{\mu_i - \mu_m}{\frac{1}{6_p}(x6_i^2 - (1-x)6_m^2 + (1-2x)6_{im})} = \frac{(\mu_i-\mu_m)6_p}{x6_i^2 - (1-x)6_m^2 + (1-2x)6_{im}}$$

点M处斜率应等于CML的斜率 $k = \frac{\mu_m - \mu_f}{6_m}$

代入 $x=0$，

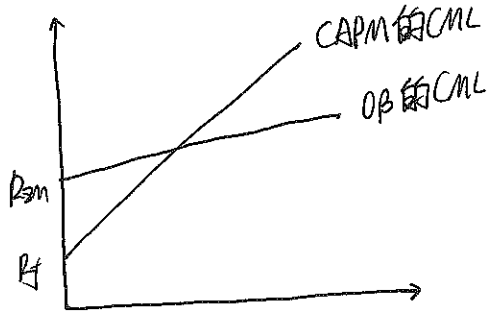
$$\left.\frac{d\mu_p}{d6_p}\right|_{x=0} = k \Rightarrow \frac{(\mu_i-\mu_m)\cdot 6_m}{6_{im} - 6_m^2} = \frac{\mu_m - \mu_f}{6_m}, \quad \mu_i = \mu_f + \frac{6_{im}}{6_m^2}(\mu_m - \mu_f)$$

二、SML曲线（略）

三、CAPM扩展

（一）零β CAPM

假定不存在无风险资产，使用ZM，与市场资产组合正交资产组合。



Chapter 5. (数理)补充.(不考)

一、不考虑无风险资产时,多风险资产的有效边界 (Efficient Frontier)

以2资产为例

$$V=\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix}$$ 协方差矩阵. $w=\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix}$ 权重. $e=\begin{bmatrix}E(r_1)\\ E(r_2)\end{bmatrix}$ 收益

$$\underbrace{\sigma_p^2}_{\text{数值}}=w^TV\cdot w=[w_1\ w_2]\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_2^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}w_1\\ w_2\end{bmatrix} \qquad \underbrace{E(r_p)}_{\text{数值}}=\sum w_i E(r_i)=w^T\cdot e$$

即求解下列线性规划问题

$$\min.\ \tfrac{1}{2}w^TVw$$

s.t. $w^Te=E$, $w^T\cdot\vec{1}=1$. 拉格朗日乘数法

$$L=\tfrac{1}{2}w^TVw+\lambda(E-w^Te)+\gamma(1-w^T\vec{1})$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial w}=Vw-\lambda e-\gamma\vec{1}=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=E-w^Te=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \gamma}=1-w^T\vec{1}=0\end{cases} \Rightarrow w_p=\lambda V^{-1}e+\gamma V^{-1}\vec{1}$$

$$e^Tw_p=\lambda(e^TV^{-1}e)+\gamma(e^TV^{-1}\vec{1})=E(r_p) \quad ①$$

$$\vec{1}^Tw_p=\lambda(\vec{1}^TV^{-1}e)+\gamma\underbrace{(\vec{1}^TV^{-1}\vec{1})}_{\text{数字}}=1 \quad ②$$

联立①.②.
且设 $A=\vec{1}^TV^{-1}e=e^TV^{-1}\vec{1}$
$B=e^TV^{-1}e>0$
$C=\vec{1}^TV^{-1}\vec{1}$, $D=BC-A^2$

解之

$$w_p=\frac{CE-A}{D}V^{-1}e+\frac{B-AE}{D}V^{-1}\cdot\vec{1}$$

$$=\frac{1}{D}[B(V^{-1}\vec{1})-A(V^{-1}e)]+\frac{1}{D}[C(V^{-1}e)-A(V^{-1}\vec{1})]\cdot E$$

$$=\underbrace{g+h}_{\text{向量}}\cdot E \to \text{标量}$$

经复杂计算 $\sigma^2=w_p^T\cdot V\cdot w_p=\dfrac{C}{D}\left(E(r_p)-\dfrac{A}{C}\right)^2+\dfrac{1}{C}$

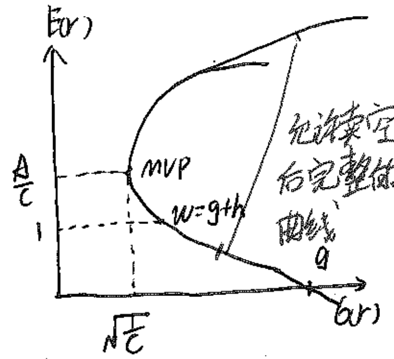
最小方差组合 MVP.
$E(r_p)=\dfrac{A}{C}$, $\sigma^2_{min}=\dfrac{1}{C}$

两基金分离定理的证明: (Two-Fund Separation Theorem) P_1、P_2 位于 Efficient Frontier 上. P_1.P_2 的凸组合构成 q

$$E(r_q)=\alpha E(r_{p_1})+(1-\alpha)E(r_{p_2})$$

$$w_q=\alpha w_{p_1}+(1-\alpha)w_{p_2}=\alpha[g+hE(r_{p_1})]+(1-\alpha)[g+hE(r_{p_2})]$$

$$=g+hE(r_q).$$ 因此 q 也为边界组合.



二、CAPM模型 (加入无风险资产后).

变量及其他条件同上,求解线性规划

$$\min.\ \tfrac{1}{2}w_p^TVw_p$$

s.t. $w^T\cdot e+(1-w^T\cdot\vec{1})\cdot r_f=E$, 同样使用拉格朗日乘子

$$L=\tfrac{1}{2}w_p^TVw_p+\lambda(w^T\cdot e+(1-w^T\cdot\vec{1})r_f-E)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial w}=V\cdot w_p+\lambda(e-\vec{1})\cdot r_f=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}=w^Te+(1-w^T\cdot\vec{1})\cdot r_f-E=0\end{cases} \xRightarrow{\text{计算略}} \begin{cases}\lambda=\dfrac{E-r_f}{H}, \quad H=(e-r_f)^T\cdot V^{-1}(e-r_f)\\ w_p=V^{-1}(e-r_f\cdot\vec{1})\dfrac{E(r_p)-r_f}{H}\end{cases}$$

P为市场组合M
q为任一资产组合

$$\sigma^2(\tilde{r}_p) = w_p^T \cdot V w_p = \left(\frac{E(\tilde{r}_p) - r_f}{H}\right)^2 \cdot \underbrace{(e - r_f 1)^T \cdot V^{-1} \cdot V \cdot V^{-1} (e - r_f)^T}_{=H} = \frac{(E(\tilde{r}_p) - r_f)^2}{H} \quad ③$$

$$\mathrm{cov}(\tilde{r}_q, \tilde{r}_p) = w_q^T V w_p = \frac{[E(\tilde{r}_p) - r_f][E(\tilde{r}_q) - r_f]}{H} \quad ④$$ 过程略

由③.④联立，消去H

$$E(\tilde{r}_q) - r_f = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{r}_p, \tilde{r}_q)}{\sigma^2(\tilde{r}_p)} [E(\tilde{r}_p) - r_f]$$ ，证毕

Chapter 6. APT — Abitrage Pricing Theory

一、CAPM局限性（略）

（一）假设条件
- ① no friction
- ② homogeneity Expectation
- ③ risk aversion

（二）实证
- ①. P_m的识别
- ②. 单因素

（三）Roll's Critique
- 1.
- 2.
- 3.

二、APT

假设条件（多因素）

$$R_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik} f_k + \varepsilon_i$$

$f_k \longrightarrow$ Factor risk $\longrightarrow$ 系统性风险

$b_{ik} \longrightarrow$ Factor loading

$\varepsilon_i \longrightarrow$ 残差项 → 非系统性风险

1.
- ①. $\mathrm{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$.
- ②. $E(f_k) = E(\varepsilon_i) = 0$
- ③ $E[f_j f_k] = E(\varepsilon_i f_k) = 0$, $\forall k$
- ④. $E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2 < \bar{\sigma}^2$, 有界
- ⑤. $n \gg k$,

2. 齐次预期
3. 完全竞争市场
4. frictionless
5. 非饱和性

6. $\vec{x} = (x_1, x_2, \cdots x_i)$, 资产组合
- $\sum x_i = 0 \rightarrow$ 投入为0
- $\sum x_i b_{ik} = 0 \rightarrow$ 系统性风险为0
- $\sum x_i \varepsilon_i = 0 \rightarrow$ 特质风险为0

$\Rightarrow \sum x_i R_i = 0 \rightarrow$ 收益为0

无套利假设

精确因子模型 $\longrightarrow$ 不考虑 ε_i, 仅依赖于 f_k

①单因子. $\hat{R}_i = a_i + b_i \hat{f}$, $i = 1, \cdots n$ 收益生成函数，$\hat{R}_i$为i的随机收益，$\hat{f}$为因子风险，

$\mu_i = E(\hat{R}_i) = a_i + b_i \cdot E[\hat{f}] = a_i$, 为$i$的期望收益，通过无套利定价求$\mu_i$.

假设无风险市场利率为r, $R_f = 1 + r$, 贷入1单位无风险资产，投入在i, j两风险资产中，w, $(1-w)$

$\hat{R}_p = [w a_i + (1-w) a_j] + [w b_i + (1-w) b_j] \hat{f}$ 调整w使P组合的总因素载荷系数为0, R_p变为确定收益 $\hat{R}_p^*$

$w b_i + (1-w) b_j = 0 \Longrightarrow w^* = \dfrac{b_j}{b_j - b_i}$

$\hat{R}_p^* = w^* a_i + (1-w^*) a_j$，由无套利原理知 $\hat{R}_p^* = R_f$, 推出 $\dfrac{a_i - R}{b_i} = \dfrac{a_j - R}{b_j} = \lambda$ (factor risk premium) 因素风险溢价

$w^* = \dfrac{R - a_j}{a_i - a_j}$

整理得 $E(\hat{R}_i) = R_f + b_i \cdot \lambda$, $i = 1, \cdots n$.

②. 双因子.

$\hat{R}_i = a_i + b_{i1} \hat{f}_1 + b_{i2} \hat{f}_2$, $i = 1, \cdots, n$, 假设同上，

贷入1单位无风险资产，投入在i, j, k三个风险资产中，w_1, w_2, w_3 且$\sum_{i=1}^{3} w_i = 1$

$\hat{R}_p = \sum_{i=1}^{3} w_i a_i + \hat{f}_1 \cdot \sum_{i=1}^{3} w_i b_{i1} + \hat{f}_2 \cdot \sum_{i=1}^{3} w_i b_{i3}$, 调整 $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ 使 $\hat{R}_p = R_f$ 为无风险资产

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_f \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow E(r_i) = R_f + b_{i1} \cdot \lambda_1 + b_{i2} \cdot \lambda_2, \; i = 1, \cdots, n$$

(λ_0) $\lambda_0 = w^* a_i + (1-w^*) a_j$

$\lambda_k = \dfrac{\mu_i - R_f}{b_{ik}}$, $k = 1, 2$

③多因子（略） $\tilde{R}_i = a_i + \sum_{k=1}^{K} b_{ik}\tilde{f}_k$. $E(R_i) = \mu_i + R_f + \sum_{k=1}^{K} b_{ik}\lambda_k$.

(a_i)

三、特质风险&极限套利

由于特质风险的存在，无法构造 $\tilde{R}_p = R_f$ 确定套利定价，故使用多资产分散特有风险。

极限套利：n资产 >> n因子

定义：投资组合 $A^{(n)}$ 包含所有风险资产n种，资产i的投资额为 z_i，

$\sum_{i=1}^{n} z_i^{(n)} \geq 0$,

$\lim_{n\to\infty} E[R_A^{(n)}] = \delta > 0$

$\lim_{n\to\infty} Var[R_A^{(n)}] = 0$，$A^{(n)}$为一个极限套利组合

证明：当 $n\to+\infty$ 时，特质风险 $\to 0$，可得到考虑 ε_i 时的定价公式。

$E(\tilde{R}_i) = R_f + \vec{b}\cdot\vec{\lambda} + \varepsilon_i$

即证：$\tilde{R}_i = a_i + \vec{b}\cdot\vec{f} + \varepsilon_i$，若特质风险可分散，即 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|^2$ 有界 $R = (R_1, R_2, \cdots R_n \cdots)$ $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_n, \cdots)$

即证 $\lim_{n\to\infty}\sum|\varepsilon_i|^2 = \lim_{n\to\infty}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)$ → 证其有界，

现构造投资组合 $\vec{z}_i^{(n)} = \overset{\text{常数}}{x}\cdot\vec{\varepsilon}$，由无套利假设可知

$\vec{z}_i^{(n)}\cdot\vec{I}^T = 0$. $\vec{z}_i^{(n)}\cdot\vec{b}^{(n)} = 0$.

$$\begin{cases} \mu^{(n)} = E[\vec{z}^{(n)}\cdot\vec{R}^{(n)T}] = \vec{z}_i\vec{I}^T\cdot R_f + \vec{z}_i\vec{b}^{(n)}\cdot\vec{\lambda} \\ \sigma^{(n)2} = Var[\vec{z}\cdot\vec{R}^{(n)}] = x^2 Var[\vec{\varepsilon}\cdot\vec{R}^{(n)}] \end{cases}$$

$\vec{z}\cdot E(\vec{R}^{(n)}) = \vec{z}\cdot\vec{I}^T\cdot R_f + \vec{z}^{n}\cdot\vec{b}^{(n)}\cdot\vec{\lambda}^{(n)} + \vec{z}^{(n)}\vec{\varepsilon}^{(n)T}$

$= x\cdot\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T$

$= x^2\cdot(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)\cdot Var(\vec{\varepsilon})$ 不知道怎么变形的

有界，设上确界为D

$\leq x^2\cdot(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)\cdot D$

令 $x = (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)^{-\frac{2}{3}}$ 代入 $\begin{cases} \mu^{(n)} = (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)^{\frac{1}{3}} \\ \sigma^{(n)2} \leq (\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)^{-\frac{1}{3}}\cdot D \end{cases}$

反证：若 $\lim_{n\to\infty}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)\to\infty$，则 $\begin{cases} \lim_{n\to\infty}\mu^{(n)}\to\infty \\ \lim_{n\to\infty}\sigma^{(n)2}\to 0 \end{cases}$，存在套利不成立

故 $\lim_{n\to\infty}(\vec{\varepsilon}\cdot\vec{\varepsilon}^T)$ 有界，证毕

四、APT与CAPM比较

假设条件

同

1. 完全市场
2. 效用最大化
3. 同质预期/信息完全
4. 无交易费用

异

CAPM要求：

1. 单期投资
2. 存在无风险证券
3. CAPM要求投资者以收益率的均值和方差为基础选择Portfolio.

Chapter 7. 金融市场资源配置效率

一、金融市场model 框架

经典静态纯交换竞争性经济模型

假设
① 静态环境
② $I=\{1,\cdots i,\cdots I\}$ 个体；$M=\{1,\cdots m,\cdots M\}$ 商品
③ 禀赋 $w^i=(w_1^i,\cdots w_m^i\cdots w_M^i)$
④ 消费 $C=(C_1^i,\cdots C_m^i,\cdots C_M^i)$
⑤ 偏好 $U(C)$

① maket clearing
$$\sum_{i=1}^{I} C^i=\sum_{i=1}^{I} W^i$$
② ~~make~~ (equilibrium allocation)
$$\operatorname{Max} U^i(C^i)$$
$$\text{s.t. } qC^i=qw^i \quad \forall i\in I$$
③ 帕累托最优
$$U^i(C^i)>U^i(\bar{C}^i)$$

单期model. $q_s, q_0 \rightarrow$ 商品价格 $\quad C_0^i=(C_{01}^i, C_{02}^i\cdots C_{0m}^i) \quad C_s^i=(C_{s1}^i, C_{s2}^i\cdots C_{sm}^i)$

现货市场 $C_{0m}^i \rightarrow$ 0时刻，m商品

Spot market $C_{sm}^i \rightarrow$ S状态，m ——

$$\max U^i(C^i)$$
$$\text{s.t. } q_0C_0^i\le q_0W_0^i$$
$$q_sC_s^i\le q_sW_s^i. \quad \text{S状态，S+2约束条件}$$
$$C^i\geq 0$$

① 或有权益市场（其风险性较）：交割 1unit contingent commodity

contingent claim security market

P_{sm}：或有权益证券的现在价格。 $\theta_s^i=(\theta_{s1}^i,\theta_{s2}^i\cdots\theta_{sm}^i)$. 购买的S状态的或有证券数量。

Ps：此客胎忽略矩阵乘法法则，默认满足乘法法则

$$\operatorname{Max} U^i(C^i)$$
$$\text{s.t. } q_0C_0^i\le q_0W_0^i-\sum_{s=1}^{S}\vec{P}_{sm}\cdot\theta_s^i \quad ①$$

每一种状态都要购买

$$C_{sm}^i\le W_{sm}^i+\theta_{sm}^i. \quad \forall s\in S, m\in M \quad ②$$
$$C^i\geq 0$$

②. $\vec{P}_{sm}$ + ① 变换

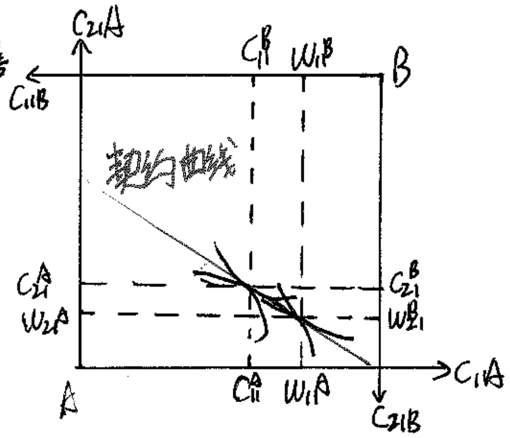
$$\operatorname{Max} U^i(C^i)$$
$$q_0C_0^i+\sum_{s=1}^{S}\vec{P}_{sm}C_s^i\le q_0W_0^i+\sum_{s=1}^{S}\vec{P}_{sm}W_s^i \quad \text{S+1个约束条件}$$
$$C^i>0$$

交易成本：
① M个现货市场
② S×M个或有权益证券市场

$>(S+1)M$ 个市场. 交易成本巨大。

消费者福利改善

Edgeworth Box



② Arrow Security Market 阿罗证券

☆ 交割 1 unit 购买力

K种证券，S种状态，K=S，市场完备(complete)　　P_s为阿罗证券价格

$\max U^i(c^i)$

s.t. $q_0 c_0^i \le q_0 W_0^i - \sum_{s=1}^{S} \vec{P}_{sm} \theta^i$　　①

$q_s c_s^i \le q_s W_s^i + \theta_s^i \cdot 1$，$\forall s \in S$　　②

$c^i \geq 0$.

① + $\vec{P}_{sm}$ · ② 变换

$q_0 c_0^i + \sum_{s=1}^{S} P_{sm} \cdot q_s c_s^i \le q_0 W_0^i + \sum_{s=1}^{S} q_s \cdot P_{sm} W_s^i$　　③

且由两种投资方式等价可知.

$q_s \cdot P_s = P_{sm}$　　④

	0	1	
	P_{sm}	q_s	或有权益
	P_s	1	Arrow

$\frac{q_s}{P_{sm}} = \frac{1}{P_s} \Rightarrow P_s q_s = P_{sm}$

把④代入③

$p_0 c_0^i + \sum_{s=1}^{S} P_{sm} c_s^i \le p_0 W_0^i + \sum_{s=1}^{S} P_{sm} W_s^i$ 与或有权益市场等同. 证毕

交易成本:
- 0. M个现货市场
- 0. S个 Arrow Security Market
- 1. M个现货市场，购买力 → 消费品

$\Rightarrow S + 2M$

③. Ordinary Security Market 普通证券

交割: S状态支付不同购买力

n种证券，S种状态

$$D_{S\times N} = \begin{array}{cc} & N \\ & \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1n} & \cdots & D_{1N} \\ D_{s1} & \cdots & D_{sn} & \cdots & D_{sN} \\ \vdots & & & & \\ D_{S1} & \cdots & D_{Sn} & \cdots & D_{SN} \end{bmatrix} & S \end{array}$$

0时刻证券价格为 $P = (P_1, \cdots P_n \cdots P_N)$，持有数量 $\theta^i = (\theta_1^i, \theta_2^i, \cdots \theta_n^i, \cdots \theta_N^i)$

$\max U^i(c_i)$ s.t. $q_0 c_0^i \le q_0 W_0 - P\theta^i$，$P\theta^i = \sum_{n=1}^{N} P_n \theta_n$

$q_s c_s^i \le q_s W_s^i - \boxed{D_s \theta^i}$，$\forall s \in S$，$D_s\theta^i = \sum_{n=1}^{N} D_{sn} \cdot \theta_n$

$c^i \geq 0$

市场出清:

$\sum_{i=1}^{I} \theta_n^i = 0$，$\forall n \in N$

Chapter 8. 套利与资产定价

一、套利

① $P=(P_0,P_1\cdots P_n,\cdots P_N)$，$\theta=(\theta_1,\cdots\theta_n,\cdots\theta_N)$，$D$ 支付矩阵

存在套利：① initial Value $\sum_{n=1}^{N}P_n\theta_n\le 0$，terminal payoff $\sum_{n=1}^{N}D_{sn}\theta_n>0$ $\exists s\in S$ 成立

② ～～ $\sum_{n=1}^{N}P_n\theta_n<0$，～～ $\sum_{n=1}^{N}D_{sn}\theta_n\ge 0$，$\forall s\in S$，～

② 资产定价基本定理

经济中不存在套利 $\Longleftrightarrow$

$$N\times S\quad \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}\cdots & D_{1S}\\ D_{21} & D_{22}\cdots & D_{2S}\\ \vdots & & \\ D_{N1} & \cdots\cdots & D_{NS}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \vdots\\ \phi_S\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_1\\ P_2\\ \vdots\\ P_N\end{bmatrix}$$

即 $D_{SN}^{T}\phi=P$，$N=S$ 时市场完备 $\phi=\alpha$ 状态价格

③ 定价：$\begin{bmatrix}1+r & 1+r\\ D_1 & D_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ P_0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}(1+r)\phi_1+(1+r)\phi_2\\ D_1\phi_1+D_2\phi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ P_0\end{bmatrix}$

$\pi_1=(1+r)\phi_1$，$\pi_2=(1+r)\phi_2$，　$\pi_1,\pi_2\in(0,1)$，$\pi_1+\pi_2=1$

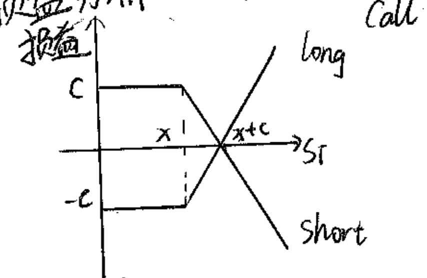
π_s 为风险中性概率

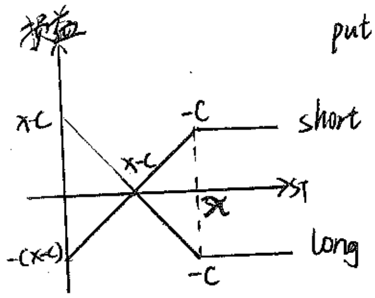
$P_0=\frac{1}{1+r}(\pi_1D_1+\pi_2D_2)$，　同理 $P_n=\frac{\sum_{s=1}^{S}\pi_sD_{sn}}{1+r}$　$n=1,\cdots N$

$=E^{\pi}[D_n]\frac{1}{1+r}$

二、期权

① 损益分析 (European option)

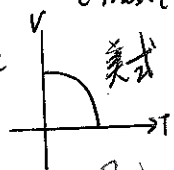




defination

intrinsic value $\begin{cases}\max\{S_T-X,0\} & \text{call}\\ \max\{X-S_T,0\} & \text{put}\end{cases}$

time value



实值
平～ 时间价值最大
虚～

② 期权价格问题

1) 标的价格 S_t, S_T，行权价 X，期权费 C，$\begin{cases}C_E(S_t,X,T), & C_A(S_t,X,T)\\ P_E(S_t,X,T), & P_A(S_t,X,T)\end{cases}$

2) 基本性质及证明：

①. 期权价值非负

②. 到期日，E与A价值相等，且 $\max\{S_T-X,0\}$ (call)，$\max\{X-S_T\}$ (put)

③. A期权价值不小于行权时内在价值。即 $C_A\ge S_T-X$.

证：反证法，若 $C_A<S_T-X$

当期立即行权，套利为 $(S_T-X-C_A)>0$.

④. 到期日越远，A期权价值提高。

⑤ A期权价值高于同一标的资产与到期日E期权价值。

⑥. $X\uparrow$，~~E↓~~ 买权价↑，卖权价↓

⑦ 买权价值不高于标的资产当前价格，$C_A\le S_t$，$C_E\le S_t$. (反证法)

⑧. 到期日无限, $X=0$ 时, $C_A=S_t$.

⑨. $S_t=0$ 时, $C_A=0$.

⑩. 标的资产不发放股利, $C_E \geqslant S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}$, $P_E > Xe^{-r(T-t)} - S_t$

证明: $C_E(S_t, X, T) \geqslant S_t - X \cdot e^{-r(T-t)}$.

构建 Strategy: 卖空股票, 买进期权 C_E, 贷出 $X \cdot e^{-r(T-t)}$

t时刻: 成本 $(S_t - X \cdot e^{-r(T-t)} - C_E) \times (-1)$

T时刻: 收益 $S_T \geqslant X$ | $S_T < X$

$S_T - X + X - S_T = 0$ | $X - S_T > 0$.

故, 收益 $\geqslant 0 \Longrightarrow$ 成本 $\geqslant 0$, 证毕

$P_E \geqslant X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t$

证明: 同理, 买入股票, 买入 P_E, 贷入 $X \cdot e^{-r(T-t)}$

t时刻: 成本 $(-P_E + X \cdot e^{-r(T-t)} - S_t) \times (-1)$

T ~~: 收益: $X \geqslant S_T$ | $S_T > X$

$S_T - X + (X - S_T) = 0$ | $S_T - X > 0$

收益 $\geqslant 0 \Longrightarrow$ 成本 $\geqslant 0$.

P_E: 此时为期权空方。

37. 期权价格关系

①. 标的资产相同, 行权价不同的两 C_E 差价不高于两期权行权价之差的现值.

$C_E(S_t, X_1, T) - C_E(S_t, X_2, T) \leq (X_2 - X_1)e^{-r(T-t)}$

即. $C_E(S_t, X_1, T) - C_E(S_t, X_2, T)$

证明: strategy: 卖出 $C_E(X_1)$, 买入 $C_E(X_2)$, 贷出 $(X_2 - X_1)e^{-r(T-t)}$

t时刻: 成本 $C_E(S_t, \ ,T) - C_E(S_t, \ ,T) - $

证明: strategy: 卖出 $C_E(X_1)$, 买入 $C_E(X_2)$, 贷出 $(X_2 - X_1)e^{-r(T-t)}$

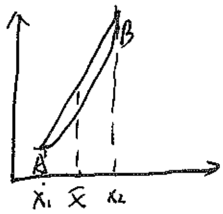
t时刻成本: $(X_2 - X_1)e^{-r(T-t)} + C_E(S_t, X_2, T) - C_E(S_t, X_1, T)$

T时刻收益: $S_T \geqslant X_2$ | $X_1 \leq S_T < X_2$ | $S_T < X_1$

$(X_2 - S_T) - (X_1 - S_T) + X_2 - X_1 = 2(X_2 - X_1) > 0$ | $X_2 - X_1 - X_1 + S_T = (X_2 - X_1) + (S_T - X_1) > 0$ | $X_2 - X_1 > 0$.

收益 $> 0 \Longrightarrow$ 成本 > 0, 证毕

②欧式看涨期权价格为行权价格凸函数



$\bar{X} = X_1 \cdot \alpha + X_2 \cdot (1-\alpha)$

证明: $\alpha \cdot C_E(S_t, X_1, T) + (1-\alpha) C_E(S_t, X_2, T) \geqslant C_E(S_t, \bar{X}, T)$

1°. $X_1 = X_2$, 成立

2°. $X_1 < X_2$, 构造 买入 α 单位 X_1, $(1-\alpha)$ 单位 X_2, 卖出 1 单位 $\bar{X}$

成本: $\alpha C_E(S_t, X_1, T) + (1-\alpha) C_E(S_t, X_2, T) - C_E(S_t, \bar{X}, T)$

T时刻:	$S_t < X_1$	$X_1 < S_t < \bar{X}$	$\bar{X} < S_t < X_2$	$S_t > X_2$
收益	0	$(S_t - X_1) \cdot \alpha > 0$	$\alpha(S_T - X_1) - (S_T - \bar{X}) = (1-\alpha)(X_2 - S_T) > 0$	$(1-\alpha)(S_T - X_2) + \alpha(S_T - X_1) - (S_T - \bar{X}) = (1-\alpha)(X_2 - S_T) + (1-\alpha)(S_T - X_2) = 0$

收益 $\geqslant 0$, 成本 $\geqslant 0$

③. 股票投资组合头寸为正(不卖空), 以此资产为标的, 行权价为X的欧式看涨期权的价格不会超过分别以其中单只股票为标的资产, 行权价~~~以相同比例构成的期权组合.

C_E(组合的期权) < C_E(期权的组合)

证: N个股票投资组合, i的权重为α_i, $\sum_{i=1}^{N}\alpha_i=1$

i当前价格, T时刻价格 S_i, S_{iT}

组合 ~~~ $S=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i S_i$, $S_T=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i S_{iT}$

到期日,组合价值

$$\max[S_T-X,0]=\max\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i S_{iT}-X,0\right]=\underbrace{\max\left[\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(S_{iT}-X),0\right]\le\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\max[S_{iT}-X,0]}_{\text{凸函数}}$$

④. 到期日前标的资产不发放股利, 则 $P_E(S_t,X,T)=C_E(S_t,X,T)+Xe^{-r(T-t)}-S_t$

期权平价 (put-call parity) 定理

构造 买入C_E, 卖P_E, 贷出$X\cdot e^{-r(T-t)}$, 卖S_t

T时刻.	$S_T>X$	$S_T<X$	
收益	$(S_T-X)+X-S_T=0$	$-(X-S_T)+X-S_T=0$.	收益=0, 成本=0

⑤. 到期日不发放股利, C_A, P_A不提前执行.

$C_A=C_E\ge S_t-Xe^{-r(T-t)}$

若C_A在t时刻行权, 收益为S_t-X

t<T时, $\underbrace{S_t-X<S_t-X\cdot e^{-r(T-t)}<C_A}_{\text{收益<成本}}$

⑥ $P_A\ge C_A+X\cdot e^{-r(T-t)}-S_t$

证明: 1) 不发放股利, 不提前行权

$C_A=C_E$, $P_A=P_E=C_E+X\cdot e^{-r(T-t)}-S_t$ 同④

2) 发股利, 提前行权

$t\in[0,T]$, 构建 买出C_A 贷出$X\cdot e^{-r(T-t)}$, 卖空S_t.

成本 $C_E+X\cdot e^{-r(T-t)}-S_t$

t时刻行权, 收益为

$S_t-X+Xe^{-r(T-t)}-S_t=X\cdot e^{-r(T-t)}-X<0$

故 成本<0, $P_A\ge0>C_E+X\cdot e^{-r(T-t)}-S_t$. 证毕

课件外补充内容

期权定价：①标的资产波动率，正相关　　stock option

②到期日

③ r_f, X.

二项式期权定价

(一)单期 model

假设：时间离散化，有且仅有一期，$T=1$, $t=0$.

一份欧式 call option 的标的资产的现金为 S，其未来价格有两种可能状态，

$S \begin{cases} uS \\ dS \end{cases}$ $(u>d>0)$ 概率 $\begin{cases} p \\ 1-p \end{cases}$，无风险资产收益率为 r.

且 $d<1+r<u$，行权价为 X，求 C.

$C \begin{cases} \xrightarrow{p} \max[uS-X, 0] = C_u \\ \xrightarrow{1-p} \max[dS-X, 0] = C_d \end{cases}$

令自然状态风险中性概率为：$\pi_u = (1+r)\phi_u$, $\pi_d = (1+r)\phi_d$

$\pi_u + \pi_d = 1$, $0<\pi_u, \pi_d<1$

$$C = (\pi_u \cdot C_u + \pi_d \cdot C_d) \cdot \frac{1}{1+r}$$

① 构造：买进 S_t，借入时刻 $T=1$，偿还 dS 的资金

资金现价 $\frac{dS}{1+r}$，成本：$S - \frac{dS}{1+r}$. 令 $1+r=R$，时刻 $T=1$，组合收益 $\begin{cases} uS-dS, & S_T=uS \\ dS-dS=0, & S_T=dS \end{cases}$

$$\begin{bmatrix} R & R \\ uS-dS & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ S-\frac{dS}{R} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \phi_u \\ \phi_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}\right) \\ \frac{1}{R}\left(\frac{u-R}{u-d}\right) \end{bmatrix}$$

$\Longrightarrow \pi_u = R \cdot \phi_u$, $\pi_d = R \cdot \phi_d$. $C = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d} \cdot C_u + \frac{u-R}{u-d} C_d\right)$

eg: $R_f = 10\%$. ~~期权~~标的价格 50，未来可能价格 60, 40，行权价 50，求期权价格. $\frac{75}{11}$

可不掌握

证明: $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$E(X-\mu)^j=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^j\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx$$ ，令 $x-\mu=t$，原式 $=\int_{-\infty}^{\infty}t^j\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt$

j 为奇数，$j=2k+1$. 奇函数，对称性

原式 $=\int_{-\infty}^{+\infty}t^{2k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=\int_{-\infty}^{0}t^{2k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt+\int_{0}^{+\infty}t^{2k+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt=0$,

j 为偶数，$j=2k$. 偶函数

$\boxed{\cancel{原式=\frac{1}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{0}^{+\infty}t^j e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}dt}}$ 令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$，原式 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^j}{\sqrt{2\pi}}\cdot t^j e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\sigma^n\int_{0}^{+\infty}t^j e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^j\cdot(j-1)\int_0^{+\infty}t^{j-2}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sigma^j(j-1)(j-3)\cdots1\cdot\int_0^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

$$=\sigma^j(j-1)!!=(j-1)!!\cdot(\sigma^2)^{\frac{j}{2}}$$

二次效用函数局限性(略)

二、资产组合风险的分散化(略)

三、两资产model下的 Efficient ~~Frionter~~ Frontier (略)

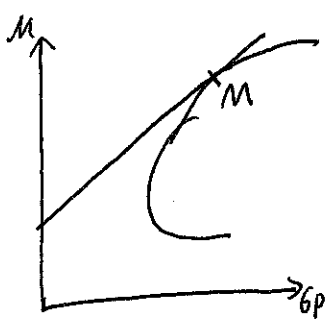
推导：加入 R_f 的最优组合前沿

1. 假设：①资产组合由一无风险资产和2个风险资产构成。

②. R_f，$\tilde{r}_1,\tilde{r}_2$ 随机收益，$\tilde{r}_p$ 组合随机收益，$\mu=E[\tilde{r}_p]$

③. $E[\tilde{r}_m]=\mu_m$，σ_m^2

2. $\begin{cases}\mu=\alpha\cdot R+(1-\alpha)\cdot\mu_m\\ \sigma_p^2=(1-\alpha)^2\sigma_m^2\end{cases}\Rightarrow \mu=R+\frac{\mu_m-R}{\sigma_m}\cdot\sigma_p$



① 构造一个风险对冲组合，使其最终产生无风险收益。

卖出 call option，买出m股股票，T=1时，

该组合收益为 $m(uS)-\max[uS-X,0]$

$m(dS)-\max[dS-X,0]$

使组合无风险，$m^*(uS)-C_u=m^*(dS)-C_d$

$$\Rightarrow m^*=\frac{C_u-C_d}{uS-dS}$$

这样在T=1时，组合的收益确定等于

$$m^*(uS)-C_u=m^*(dS)-C_d=\frac{dC_u-uC_d}{u-d}$$

根据无套利原理

$$\frac{dC_u-uC_d}{u-d}\Big/(m^*S-C)=R\text{，求得 } C=\frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_u+\frac{u-R}{u-d}\cdot C_d\right)$$

(二) 两期 model

假设 T=2，每期两种标的资产价格，每期涨跌幅度相同

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & u^2S \\
 & uS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
S \arrow[ur] \arrow[dr] & & udS \\
 & dS \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & d^2S
\end{tikzcd}$$

期权价值

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & C_{uu}=\max[u^2S-X,0] \\
 & C_u \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C \arrow[ur] \arrow[dr] & & C_{ud}=\max[udS-X,0] \\
 & C_d \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_{dd}=\max[d^2S-X,0]
\end{tikzcd}$$

$$C_u=\frac{1}{R}[\pi_d C_{ud}+\pi_u C_{uu}],\quad C_d=\frac{1}{R}[\pi_d C_{dd}+\pi_u C_{du}]$$

$$C=\frac{1}{R^2}[\pi_u^2 C_{uu}+2\pi_u\pi_d C_{ud}+\pi_d^2 C_{dd}]$$