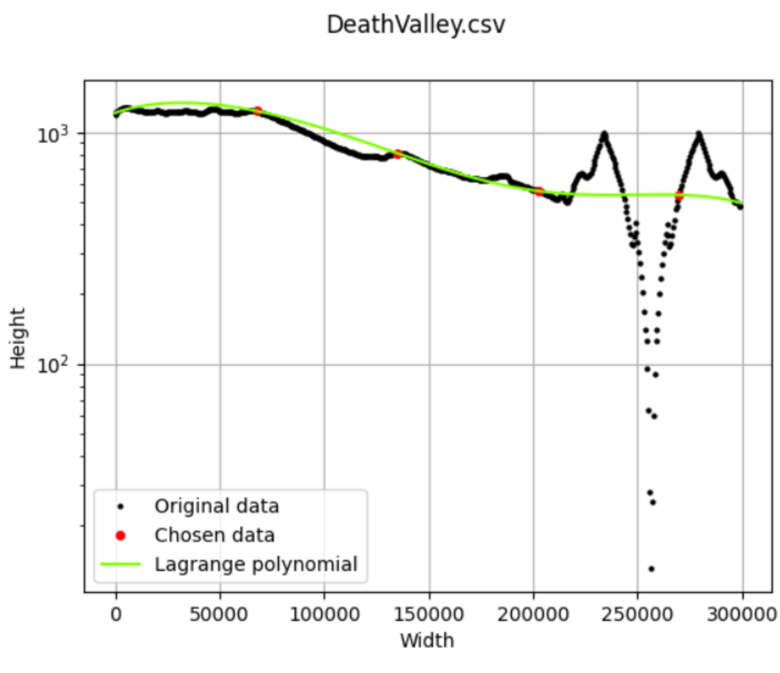
Projekt 3 – Aproksymacja profilu wysokościowego

1. Celem projektu była aproksymacja profilów wysokościwowych z użyciem interpolacji Lagrange'a oraz kubicznych funkcji sklejanych. Do wykonania zadania użyłem języka Python, a dane do programu pozyskałem ze strony http://www.geocontext.org. Wybrane przeze mnie profile to:

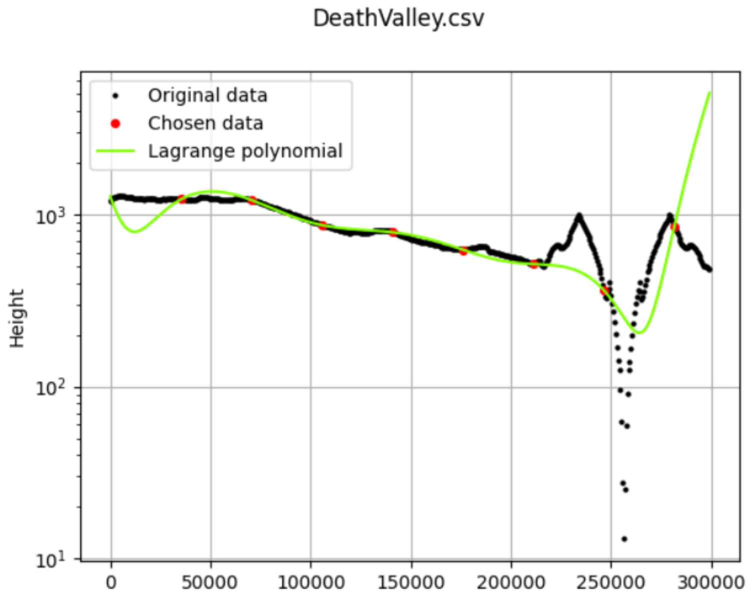
- Mount Everest – wyraźne wzniesienie i następnie spadek
- Death Valley – płaska trasa z jednym gwałtownym spadkiem
- Greenwich – trasa łagodnie pofalowana

Każdy profil występuje w formacie .csv i zawiera 512 wierszy ze współrzędnymi x i y.

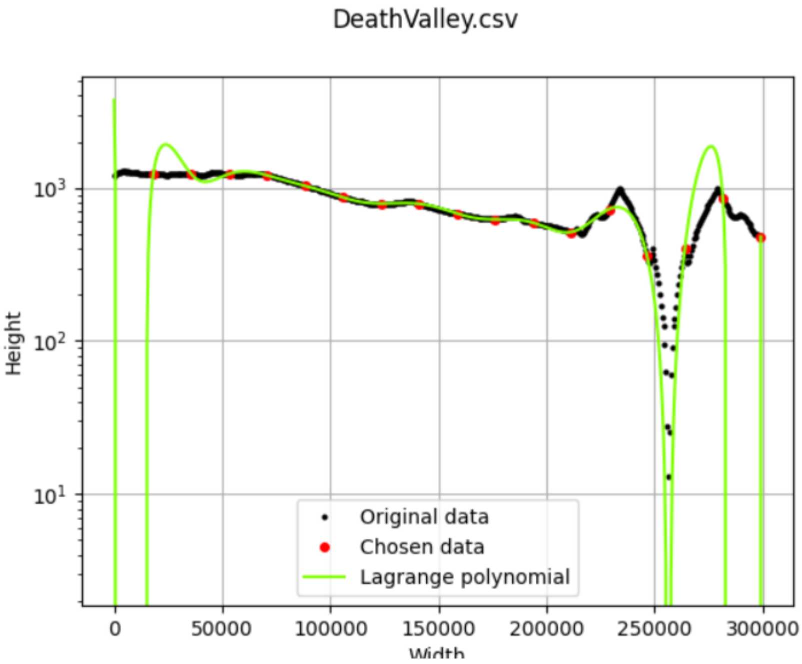
2. **Interpolacja Lagrange'a** to jeden z prostych sposobów na aproksymację, który polega na przybiliżaniu funcji przy pomocy podanych węzłów, bez rozwiązywania układów równań. Dokładność rozwiązania jest zależna od liczby węzłów, ponieważ występuje tak zwany efekt Rungego. Polega on na tym, że na początku wraz ze wzrostem ilości węzłów jakość interpolacji poprawia się, jednak przy dalszym wzroście węzłów następuję pogorszenie, które najbardziej jest widoczne na końcach przedziału. Zjawisko to widać na poniższych obrazkach, a największe błędy powstały na ostatniom obrazku z najwiekszą ilością węzłów.



Rysunek 1 Interpolacja dla k = 115 , czyli dla 5 węzłów

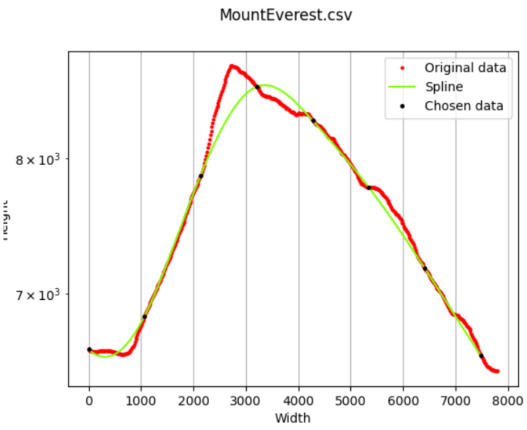


Rysunek 2 Interpolacja dla k=60, czyli dla 9 węzłów

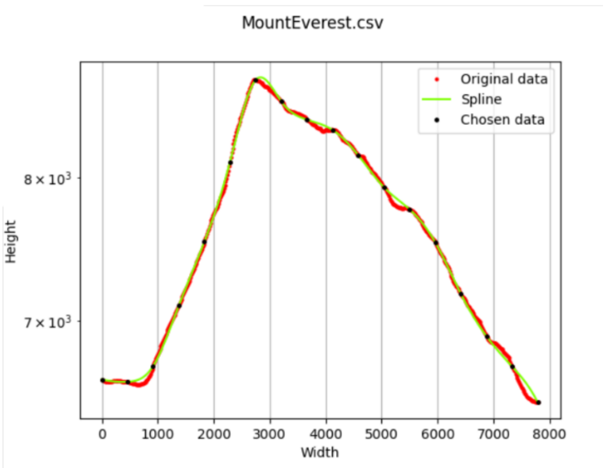


Rysunek 3 Interpolacja dla k = 30, czyli dla 18 węzłów

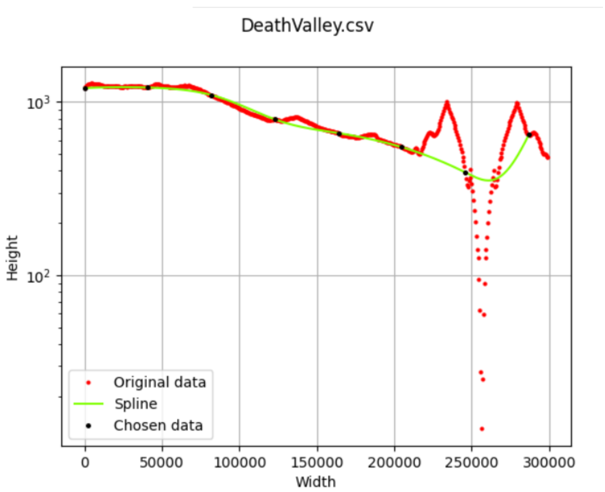
3. **Kubiczne funkcje sklejane** – polega na wyznaczeniu wyznaczeniu innego wielomianu trzeciego stopna dla każdego przedziału, a następnie złączeniu ich w jedną funkcję. Funkcje te wyznacza się z warunków sklejenia w miejscach styku funkcji, a także równych wartości dla pierwszych i drugich pochodnych odpowiednich funkcji. Powstałą z tego pomocu macierz zdecydowałem się rozwiązać metodą faktoryzacji LU.



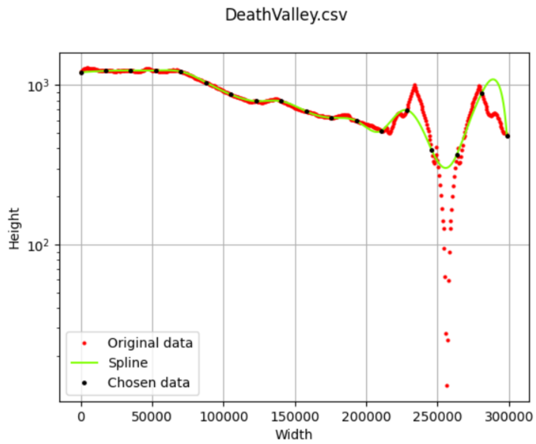
Rysunek 4 Funkcje sklejane dla k = 70, czyli dla 8 węzłów



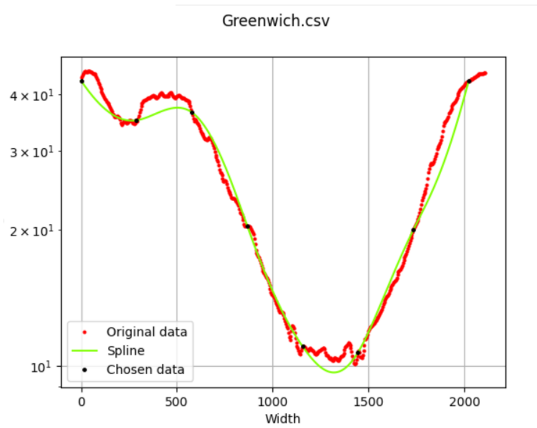
Rysunek 6 Funkcje sklejane dla k = 30, czyli dla 18 węzłów



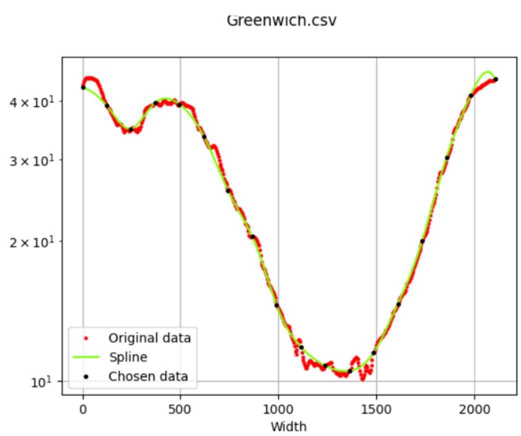
Rysunek 6 Funkcje sklejane dla k = 30, czyli dla 18 węzłów



Rysunek 7 Funkcje sklejane dla k = 30, czyli dla 18 węzłów

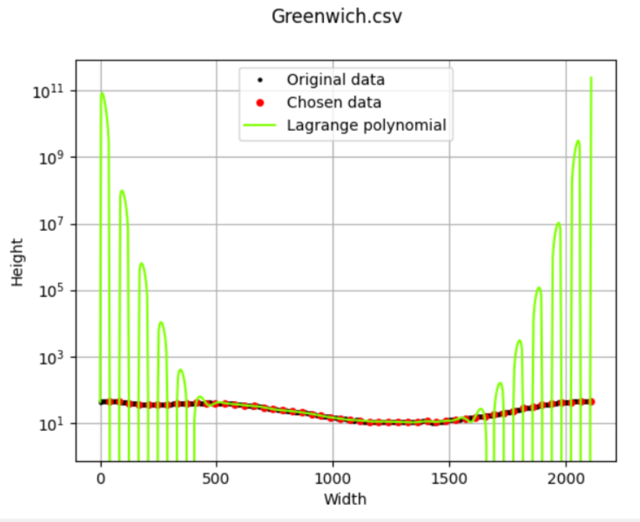


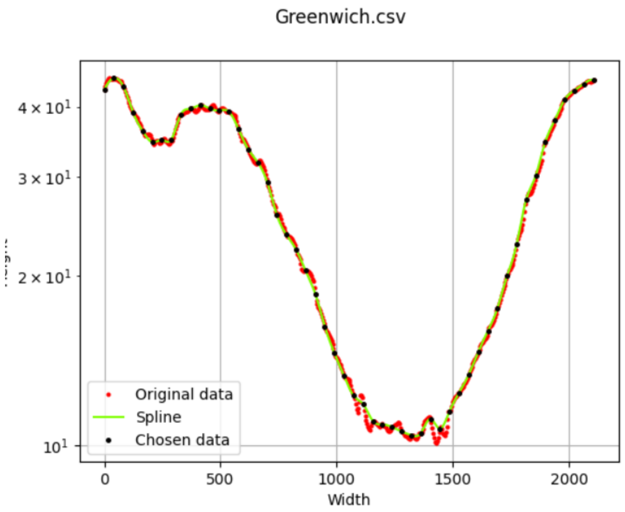
Rysunek 8 Funkcje sklejane dla k = 30, czyli dla 18 węzłów



Rysunek 8 Funkcje sklejane dla k = 30, czyli dla 18 węzłów

4. Porównanie interpolacji dla dużej dokładności.





Zgodnie z przewidywaniem dla dużej ilości danych interpolacja Lagrange'a zwraca bardzo duże błędy na końcach przedziału. Z powodu przeskalowania wykresy nawet nie są do siebie podobne. Funkcje sklejane dobrze radzą sobie dla dużej ilości danych i nie wykazują błędów

5. Podsumowując obie metody interpolacji sprawdzają się dobrze do tras, które nie rosną i nie opadają skokowo, w krótkim przedziale x-ów, jeśli dostarczona ilość danych jest niewielka. Z kolei dla dużej ilości danych metoda Lagrange'a wykazuje duże błędy ze względu na efekt Rungego.

Interpolacja funkcjami sklejanymi bywa niedokładna w przypadku skokowych wzrostów funkcji, ale dla odpowiednio dużej ilości podanych węzłów jest w stanie dobrze odtworzyć zadany profil wysokościowy. Tym samym dość dobrze nadaje się do pracy na rzeczywistych danych i daje dokładny wynik.

Obie metody są też zależne od ułożenia wybranych węzłów. Dla bardziej gwałtownych zmian funkcji powinno się uwzględniać więcej węzłów, tak aby wynik mógł być dokładniejszy, przy czym nie gwarantuje to sukcesu dla metody Lagrange'a.