信号与系统 （公式大全）

I 连续系统的时域分析

§ 1 单位冲激函数

1.1 单位冲激函数 $\delta(t)$

- 定义

$$\begin{cases} \delta(t)=0 & t\neq 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1 \end{cases}$$

- 与单位跃阶信号的关系

$$\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$
$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}$$

- 性质
  - 奇偶性：

$$\delta(t-\tau)=\delta(\tau-t)$$

  - 抽样性：

$$\delta(t)f(t-t_0)=f(-t_0)\delta(t)$$
$$\delta(t-t_0)f(t)=f(t_0)\delta(t-t_0)$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t_0)$$

  - 卷积性质：

$$f(t)*\delta(t)=f(t)$$

  - 尺度变换：

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

1.2 冲激偶 $\delta'(t)$

- 定义

$$\delta'(t)=\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\delta(t)}{\mathrm{d}t} & (t=0) \\ 0 & (t\neq 0) \end{cases}$$

- 性质
  - $$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)\mathrm{d}t = 0$$
- $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t = -f'(t_0)$$
- $$f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$$
- $$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$$
- $$\delta'(at) = \frac{1}{a|a|}\delta'(t)$$

1.3 任意信号的冲激分解

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

§ 2 冲激响应与阶跃响应

2.1 n 阶系统的冲激响应

(1) 冲激响应的数学模型

- 对于线性时不变系统，可以用高阶微分方程表示

$$C_0h^{(n)}(t) + C_1h^{(n-1)} + \cdots + C_{n-1}h^{(1)}(t) + C_nh(t) = \\ E_0\delta^{(m)}(t) + E_1\delta^{(m-1)}(t) + \cdots + E_{m-1}\delta^{(1)}(t) + E_m\delta(t)$$

(2) $h(t)$ 解答的形式

- 与特征根有关（设无重根的单根）

$$h(t) = \left[\sum_{i=1}^{n} A_i \mathrm{e}^{\alpha_i t}\right]\varepsilon(t)$$

- 与 n, m 相对大小有关
  - 当 $n > m$ 时，$h(t)$ 不含 $\delta(t)$及其各阶导数
  - 当 $n = m$ 时，$h(t)$ 含 $\delta(t)$
  - 当 $n < m$ 时，$h(t)$ 含 $\delta(t)$及其各阶导数

2.2 转移算子求解法

(1) 定义算子

- 微分算子

$$p^n x=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}$$

- 积分算子

$$\frac{1}{p}x=\int_{-\infty}^{t}x\,\mathrm{d}\tau$$

(2) 系统的传输算子

- 算子方程

$$\begin{gathered}p^n y(t)+a_1p^{n-1}y(t)+\cdots+a_{n-1}py(t)+a_ny(t)\\=b_0p^mf(t)+b_1p^{m-1}f(t)+\cdots+b_{m-1}pf(t)+b_mf(t)\end{gathered}$$

- 传输算子

$$H(p)=\frac{N(p)}{D(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\cdots+b_m}{p^n+a_1p^{n-1}+\cdots+a_n}$$

(3) 对于 n 阶系统

- 无重根情况
  - $n>m$

$$H(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{p-\lambda_i}$$

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}$$

  - $n\leqslant m$

$$H(p)=H_1+\frac{N_1(p)}{D(p)}$$

$$h(t)=\sum_{j=0}^{m-n}C_j\delta^{(j)}(t)+\left(\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}\right)$$

- 有重根情况（$n>m$）

- 设重根为 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_r=\lambda$
- $$H(p)=\sum_{i=1}^{r}\frac{K_i}{(p-\lambda)^{r-i+1}}+\sum_{i=r+1}^{n}\frac{K_i}{p-\lambda_i}$$
- K_1 到 K_i 计算方法
$$K_i=\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{(i-1)}}{\mathrm{d}p^{(i-1)}}H(p)(p-\lambda)^r\bigg|_{p=\lambda}$$
- $$h_r(t)=\frac{K_1}{(p-\lambda)^r}\delta(t)=\frac{K_1}{(r-1)!}t^{r-1}\mathrm{e}^{\lambda t}\varepsilon(t)$$

§ 3 卷积及其应用

3.1 卷积的概念

- 对于任意信号为输入信号的零状态响应

$$y(t)=f_1(t)*f_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\tau)f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

3.2 卷积的性质

- 交换律、结合律、分配律
- 微分特性

$$f_1(t)*f_2'(t)=f_1'(t)*f_2(t)$$

  - $f(t)*\delta'(t)=f'(t)$
- 积分特性

$$f_1(t)*f_2^{(-1)}(t)=f_1^{(-1)}(t)*f_2(t)$$

  - $f(t)*\varepsilon(t)=\int_{-\infty}^{t}f(\tau)\,\mathrm{d}\tau$

3.3 系统的卷积分析法

- 零状态响应 = 输入信号 * 冲激响应

3.4 与 $\delta(t),\varepsilon(t)$ 有关的方程

$$f(t-t_1)*\delta(t-t_2)=f(t-t_1-t_2)$$
$$f(t)*\delta^{(n)}(t)=f^{(n)}(t)$$

- 常用信号卷积表

$f_1(t)$	$f_2(t)$	$f_1(t)*f_2(t)$
$f(t)$	$\delta(t)$	$f(t)\varepsilon(t)$
$\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$t\,\varepsilon(t)$
$t\,\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{2}t^2\,\varepsilon(t)$
$\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{at}})\varepsilon(t)$
$\mathrm{e}^{-a_1t}\varepsilon(t)$	$\mathrm{e}^{-a_2t}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{a_2-a_1}(\mathrm{e}^{-a_1t}-\mathrm{e}^{-a_2t})\varepsilon(t),a_1\neq a_2$
$\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$t\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$
$t\varepsilon(t)$	$\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{at-1}{a^2}\varepsilon(t)+\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$
$t\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{-at}\varepsilon(t)$

II 信号与系统的频域分析

§ 4 周期信号

4.1 周期信号的三角级数表示

$$\begin{aligned} f(t) &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega_1 t+b_n\sin n\omega_1 t) \\ &= a_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\omega_1 t+\varphi_n) \end{aligned}$$

- ω_1：基波角频率 $(\frac{2\pi}{T})$
- a_0：直流分量 $a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$
- a_n：余弦幅度 $a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$

- b_n：正弦幅度 $b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega_1 t\,\mathrm{d}t$
- A_n：谐波幅度 $A_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$

4.2 周期信号的复指数级数表示

$$f(t)=\sum_{n=\infty}^{\infty}F_n\mathrm{e}^{j\omega_1 t}$$

$$F_n=\frac{1}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{j\omega_1 t}\,\mathrm{d}t$$

§ 5 非周期信号

5.1 傅里叶变换

正变换

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

反变换

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

简记为

$$\begin{gathered}F(\omega)=\mathscr{F}[f(t)]\\f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega))]\\f(t)\leftrightarrow F(\omega)\end{gathered}$$

进一步

$$\begin{aligned}F(\omega)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t-\mathrm{j}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\\&=R(\omega)-\mathrm{j}X(\omega)\\&=\mid F(\omega)\mid\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}\end{aligned}$$

- $|F(\omega)|$ 为幅度频谱，是 ω 的偶函数
- $\varphi(\omega)$ 称为相位频谱，是 ω 的奇函数
- 存在条件：$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|\mathrm{d}t<\infty$

5.2 常用非周期信号的频谱

(1) 门函数

$$g_\tau(t)=\begin{cases}1, & |t|<\frac{\tau}{2}\\ 0, & |t|>\frac{\tau}{2}\end{cases}$$
$$\updownarrow$$
$$F(\omega)=\tau\,\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$Sa(\omega_0 t)\leftrightarrow\frac{\pi}{\omega_0}g_{2\omega_0}(t)$$

(2) 冲激函数

$$\delta(t)\leftrightarrow 1$$

$$\delta^{(n)}(t)\leftrightarrow(\mathrm{j}\omega)^n$$

(3) 直流信号

$$1\leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$$

(4) 指数信号

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\varepsilon(t)\leftrightarrow\frac{1}{\alpha+\mathrm{j}\omega}$$

(5) 符号函数

$$\mathrm{sgn}(t)=\begin{cases}1 & (t>0)\\ -1 & (t<0)\end{cases}$$
$$\updownarrow$$
$$F(\omega)=\frac{2}{\mathrm{j}\omega}$$

(6) 单位阶跃信号

$$\varepsilon(t)\leftrightarrow\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}$$

§ 6 傅里叶变换的性质与应用

> 已知 $f(t)\leftrightarrow F(\omega)$

(1) 对称性质

$$F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$$
$$若f(t)是偶函数：F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$$

(2) 线性性质

$$c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F(\omega) + c_2 F(\omega)$$

(3) 奇偶虚实性

$$f(-t) \leftrightarrow F^*(\omega)$$

(4) 尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

(5) 时移特性

$$f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}$$
$$f(at+b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega\frac{b}{a}}$$

(6) 频移特性

$$f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} \leftrightarrow F(\omega-\omega_0)$$

$$f(t)\cos\omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)]$$

$$f(t)\sin\omega_0 t \leftrightarrow \mathrm{j}\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)]$$

(7) 时域微分

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (\mathrm{j}\omega)^n F(\omega)$$

(8) 频域微分

$$(-\mathrm{j}t)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(\omega)$$

(8) 时域积分

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow F(\omega) \cdot \left[\frac{1}{\mathrm{j}\omega} + \pi\delta(\omega)\right]$$

(9) 时域卷积

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

(10) 频域卷积

$$f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$$

§7 周期信号的傅里叶变换

7.1 正弦信号的傅里叶变换

$$\cos(\omega_0 t) \leftrightarrow \pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$
$$\sin(\omega_0 t) \leftrightarrow \mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$$

7.2 一般周期信号的傅里叶变换

> 设信号周期：$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

$$f_T(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\omega_1 t}$$

$$F_T(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$F_0(\omega) = \int_{-T/2}^{T/2} f_0(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$
$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(\omega)\Big|_{\omega=n\omega_1}$$

§ 8 系统的频域分析

8.1 系统函数与无失真传输条件

- 系统函数

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{F(\omega)} = |H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}$$

- 对应关系

$$
\begin{array}{ccccc}
f(t) & \rightarrow & h(t) & \rightarrow & y(t)=f(t)*h(t) \\
\updownarrow & & & & \\
F(\omega) & \rightarrow & H(\omega) & \rightarrow & Y(\omega)=F(\omega)H(\omega)
\end{array}
$$

- 无失真

$$
\begin{gathered}
y(t)=Kf(t-t_0) \\
\downarrow \\
Y(\omega)=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}F(\omega) \\
\downarrow \\
H=K\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_0}
\end{gathered}
$$

8.2 信号通过理想滤波器

- 频率特性

$$
H(\omega)=|H(\omega)|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)}=\begin{cases}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_0} & (|\omega|<\omega_c) \\ 0 & (|\omega|>\omega_c)\end{cases}
$$

$$
h(t)=\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_0)]
$$

§ 9 频域分析用于通信系统

9.1 调制

- $g(t)$：调制信号
- $f(t)$：已调信号
- $\cos(\omega_0 t)$：载波信号

$$
\begin{gathered}
f(t)=g(t)\cos(\omega_0 t) \\
F(\omega)=\frac{1}{2}[G(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)]
\end{gathered}
$$

9.2 解调

$$
\begin{gathered}
g_0(t)=g(t)\cos^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2}g(t)[1+\cos(2\omega_0 t)] \\
G_0(\omega)=\frac{1}{2}G(\omega)+\frac{1}{4}[G(\omega-\omega_0)+G(\omega+\omega_0)]
\end{gathered}
$$

III 连续系统的复频域分析

§1 拉普拉斯变换

§1.1 从傅里叶变换到拉普拉斯变换

$$
\begin{gathered}
f_1(t) = f(t)e^{-\sigma t} \\
s = \sigma + j\omega \\
F_1(\omega) = F(s)
\end{gathered}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{象函数} \qquad & F(s) = L[f(t)] = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
\text{原函数} \qquad & f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st}\mathrm{d}s
\end{aligned}
$$

§1.2 算子符号

§1.3 常用函数的拉式变换

$f(t)$	$F(s)$	**收敛域**
$\delta(t)$	1	整个平面
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sigma > 0$
$t^n\,\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\sigma > 0$
$e^{-\alpha}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\sigma > -\alpha$
$\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$
$\cos(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$\sigma > 0$

§2 拉氏变换的性质

(1) 线性性质

$$
a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)
$$

(2) 微分性质

$$\frac{d}{dt}f(t) \leftrightarrow sF(s) - f(0_-)$$
$$\frac{d}{dt}f^n(t) \leftrightarrow s^nF(s) - \sum_{r=0}^{n-1} s^{n-r-1}f^{(r)}(0_-)$$

(3) 积分性质

$$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau \leftrightarrow \frac{1}{s}F(s) + \frac{1}{s}\int_{-]\infty}^{0_-} f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

(4) 延时性质

$$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \leftrightarrow F(s)e^{-st_0}$$

(5) s 域平移

$$f(t)e^{-\alpha} \leftrightarrow F(s+\alpha)$$

(6) 尺度变换

$$f(at) \leftrightarrow \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right) \qquad (a>0)$$

(7) 初值定理

$$\lim_{t\to 0_+} f(t) = f(0_+) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$$

(8) 终值定理

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

(9) 卷积定理

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

(10) 对 s 微分

$$t^n f(t) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F(s)}{\mathrm{d}^n s}$$

(11) 对 s 积分

$$\frac{f(t)}{t} = \int_{s}^{\infty} F(s)\mathrm{d}s$$

$\S 3$ 拉式反变换

$\S 3.1$ 过程

- 找出 $F(s)$ 的极点
- 将 $F(s)$ 展成部分分式 $F(s)=\dfrac{N(s)}{D(s)}$
- 查拉氏变换表求 $f(t)$

$\S 3.2$ $D(s)=0$ 的所有根均为单实根

$$F(s)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{s-s_i} \quad \leftrightarrow \quad f(t)=\sum_{i=1}^{n}K_i\mathrm{e}^{s_i t}$$

其中

$$K_i=(s-s_i)F(s)|_{s=s_i}$$

$\S 3.3$ $D(s)=0$ 具有共轭复根

$$F(s)=\frac{K_1}{s-\alpha-j\omega}+\frac{K_1}{s-\alpha+j\omega} \leftrightarrow \begin{aligned} f(t)&=K_1\mathrm{e}^{\alpha+j\omega}+K_2\mathrm{e}^{\alpha-j\omega} \\ &=2|K_1|e^{\alpha t}\cos(\omega t\varphi_1) \end{aligned}$$

其中

$$K_1=|K_1|\mathrm{e}^{j\varphi_1} \qquad K_2=|K_1|\mathrm{e}^{-j\varphi_1}=K_1^*$$

$\S 3.4$ $D(s)=0$ 含有重根

$$\frac{K}{(s-s_1)^m} \leftrightarrow \frac{K}{(m-1)!}t^{m-1}\mathrm{e}^{s_1 t}$$

其中

$$K_{1n}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}[(s-s_1)^m F(s)]|_{s=s_1}$$

$\S 3.5$ 特殊情况

- 非真分式——作长除法
- 含 e^{-s} 的非有理式 —— 利用时移性质

$\S 4$ 系统的S域分析

$\S 4.1$ 微分方程的拉普拉斯变换法

思想:

$$
\text{时域模型}\xrightarrow{\text{取变换}} S\text{域模型}\rightarrow\text{解}S\text{域方程}\xrightarrow{\text{反变换}}\text{时域响应}
$$

$\S 4.2$ 电路的 S 域模型

- 电阻元件

$$
u(t)=Ri(t)\quad\leftrightarrow\quad U(s)=RI(s)
$$

- 电容元件

$$
i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\quad\leftrightarrow\quad I(s)=sCU_C(s)-Cu_C(0_-)
$$

- 电感元件

$$
u(t)=L\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\quad\leftrightarrow\quad U(s)=sLI_L(s)-Li_L(0_-)
$$

- 电路定律的 S 域表示

基尔霍夫定律

$$
\sum I(s)=0\qquad\sum U(s)=0
$$

阻抗和导纳

$$
Z(s)=\frac{U(s)}{I(s)}=R+sL\frac{1}{sC}
$$
$$
Y(s)=\frac{1}{Z(s)}
$$

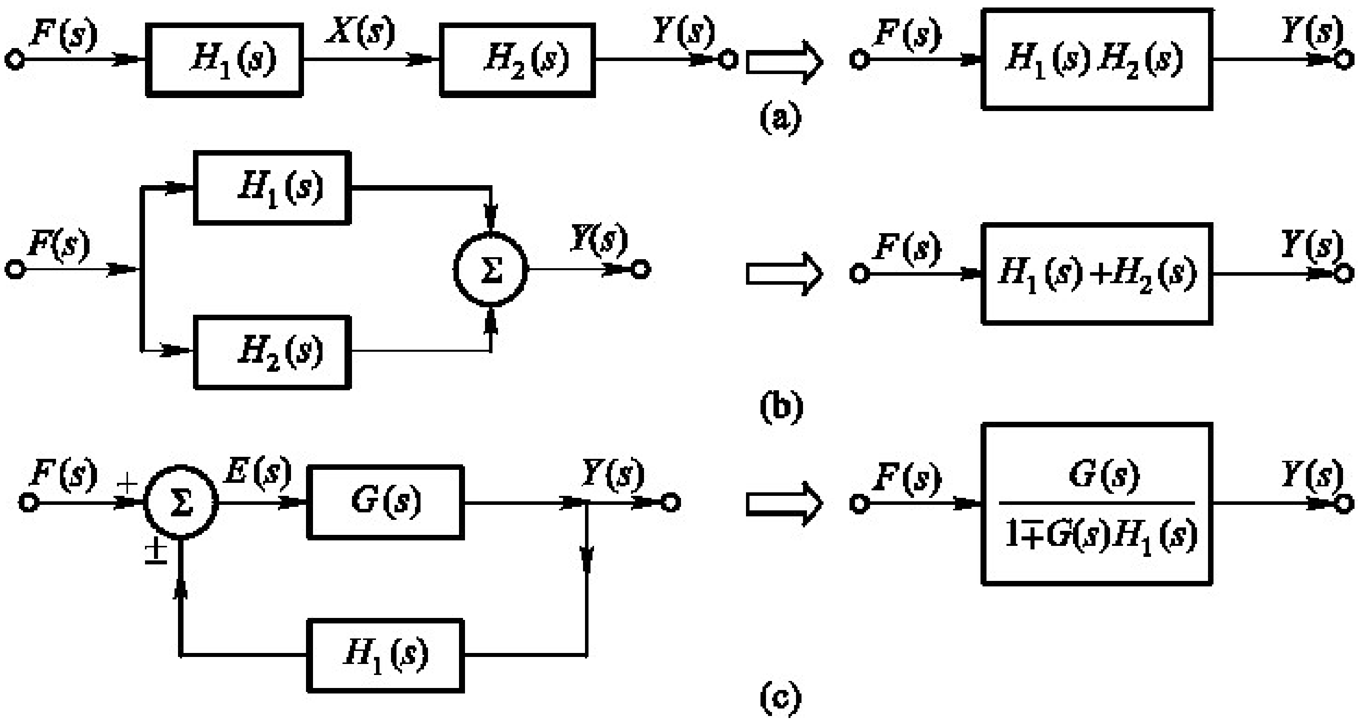
$\S 5$ 系统函数与零、极点分析

$\S 5.1$ 系统函数与系统的模拟

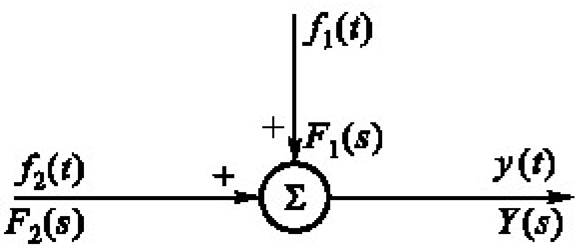
系统函数的定义：零状态响应的象函数与输入信号的象函之比

$$
H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}
$$

系统的方框图



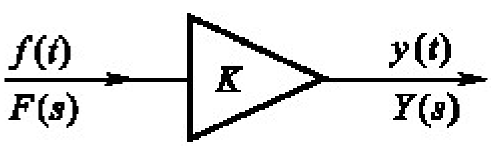
基本模拟单元



$$y(t)=f_1(t)+f_2(t)$$

$$Y(s)=F_1(s)+F_2(s)$$

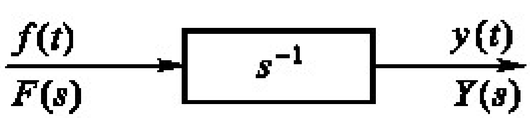
(a)



$$y(t)=K\,f(t)$$

$$Y(s)=K\,F(s)$$

(b)

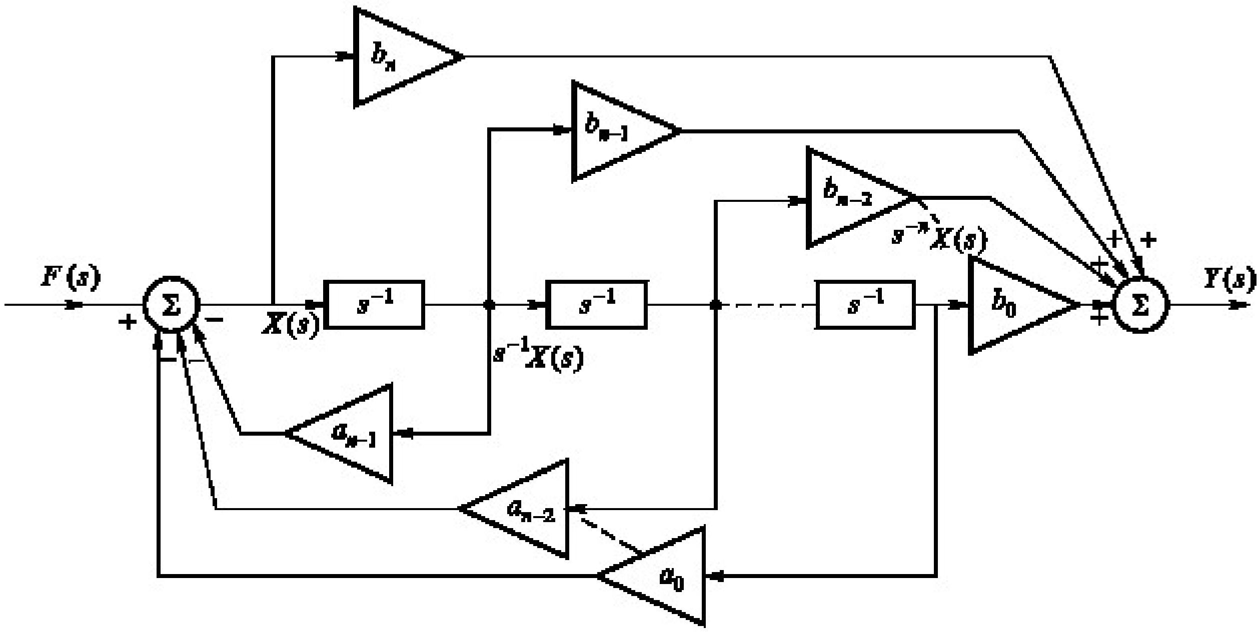


$$y(t)=\int_0^t f(\tau)\mathrm{d}\tau$$

$$Y(s)=\frac{1}{s}F(s)$$

(c)

系统的模拟3

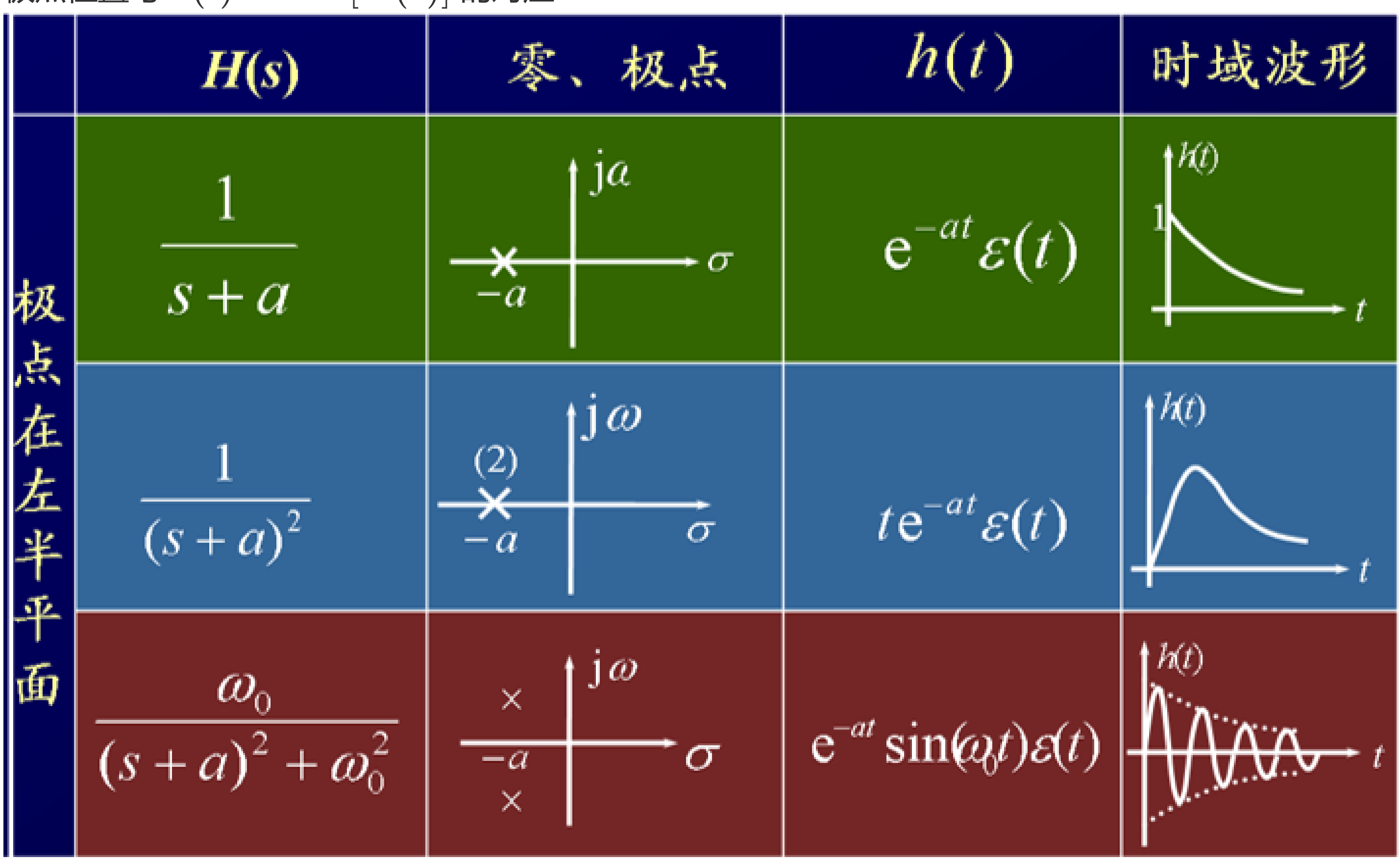


§5.2 系统函数的零点、极点

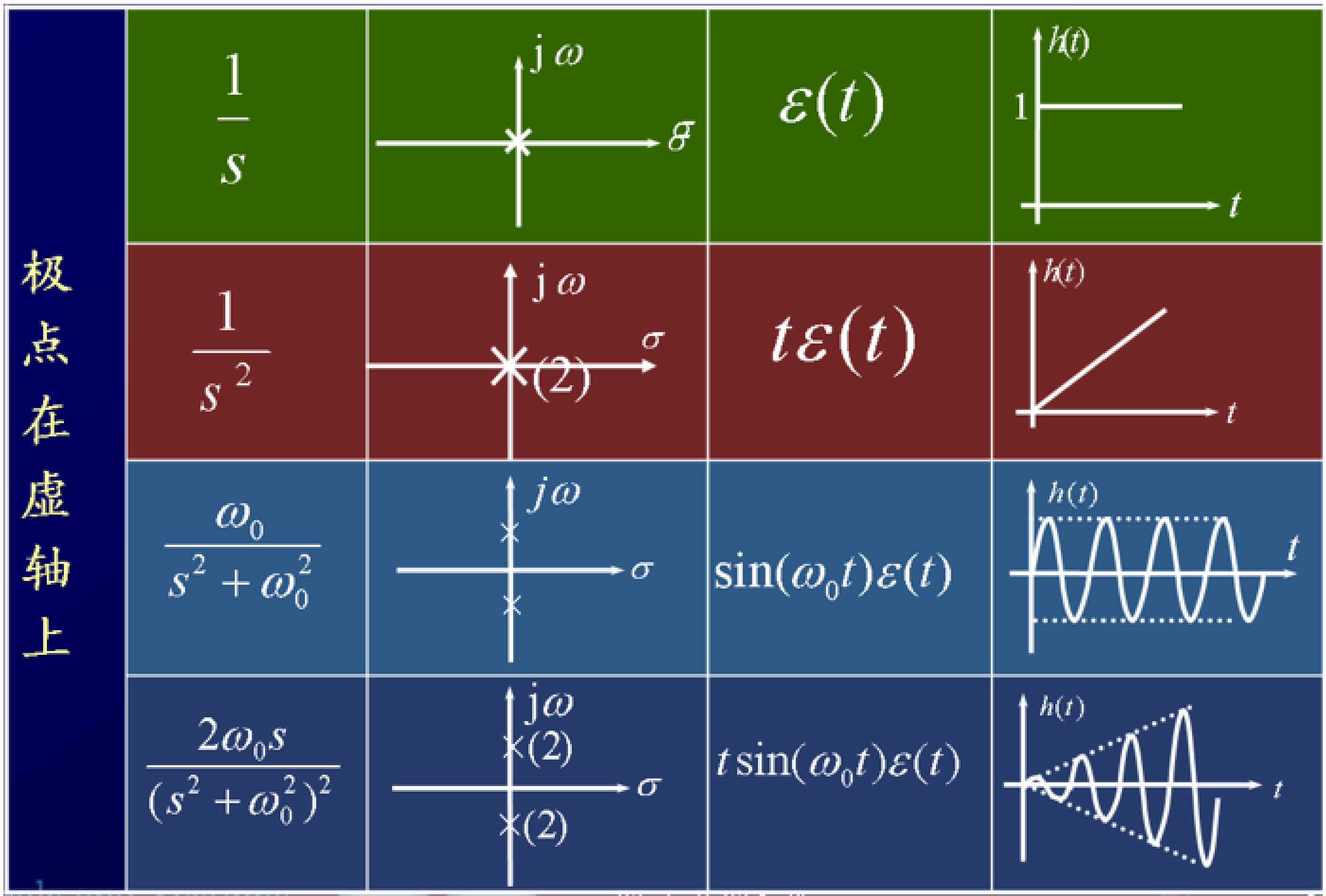
$$H(s) = K\frac{\prod_{j=1}^{m}(s-z_j)}{\prod_{k=1}^{n}(s-p_k)}$$

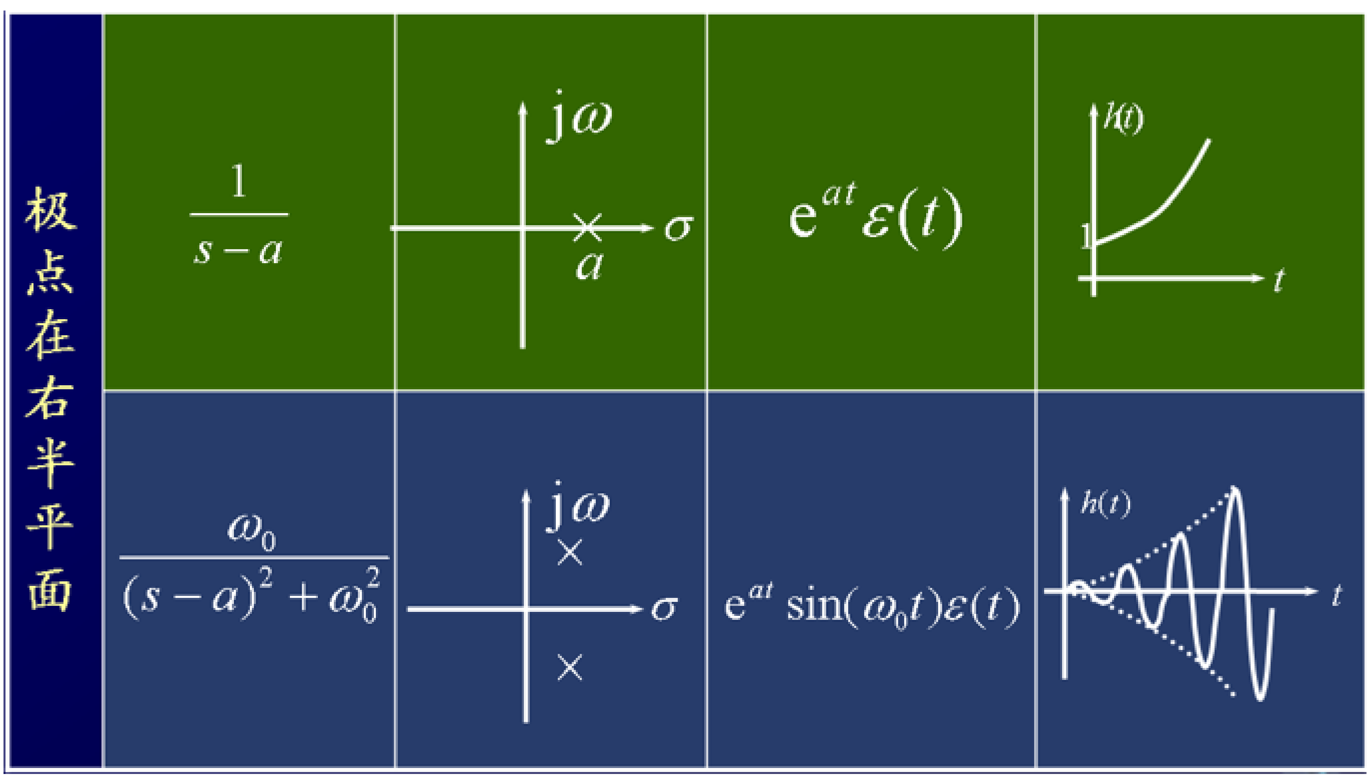
- z_j：零点（用×表示）
- z_k：极点（用。表示）

极点位置与 $h(t)=\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$ 的对应



	$H(s)$	零、极点	$h(t)$	时域波形
极点在左半平面	$\frac{1}{s+a}$	$j\alpha$, σ, $-a$	$e^{-at}\varepsilon(t)$	$h(t)$, 1, t
	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$j\omega$, σ, (2), $-a$	$te^{-at}\varepsilon(t)$	$h(t)$, t
	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$j\omega$, σ, $-a$	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\varepsilon(t)$	$h(t)$, t





$H(s), E(s)$ 的极点分布与自由响应、强迫响应特性的对应

$$
\begin{gathered}
\text{激励：} e(t) \leftrightarrow E(s) \\
\text{响应：} r(t) \leftrightarrow R(s)
\end{gathered}
$$

- 系统函数的极点 $\rightarrow$ 自由响应分量
- 激励函数的极点 $\rightarrow$ 强迫响应分量

$\S 5.3$ 线性系统的稳定性

稳定的概念

- 稳定充要条件：$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|\mathrm{d}t<\infty$，即 $H(s)$ 的全部极点位于 S 的左半面
- 临界稳定：$H(s)$ 在虚轴有单极点
- 不稳定：$H(s)$ 有极点位于 S 的右半平面

$\S 5.4$ S域分析用于控制系统

IV 离散系统

$\S 1$ 离散系统的时域分析

$\S 1.1$ 离散时间信号

> 离散信号的表示方法

$$
x(t) \rightarrow x(nT) \xrightarrow{\quad\text{等间隔}T\quad} x(n) \qquad n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots
$$

> 序列三种形式：单边，双边，有限长

> 常用离散信号

（1）单位样值信号

$$
\delta(n-j)= \begin{cases}0, n \neq j \\ 1, n=j\end{cases}
$$

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)\delta(n-m)$$

（2）单位跃阶序列

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}1, n\geq 0\\0, n<0\end{cases}$$

$$\varepsilon(n)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

$$\delta(n)=\varepsilon(n)-\varepsilon(n-1)$$

（3）矩形序列

$$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leq n\leq N-1\\0, & n<0, n\geq N\end{cases}$$

$$R_N(n)=\varepsilon(n)-u(n-N)$$

（4）斜变序列

$$x(n)=n\varepsilon(n)$$

（5）单边指数序列

$$x(n)=a^n\varepsilon(n)$$

（6）正弦序列

$$x(n)=\sin(n\omega_0)\qquad x(n)=\cos(n\omega_0)$$

$$x(n+N)=x(n)$$

（7）复指数序列

$$x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}$$

> 离散信号的运算

（1）相加（2）相乘（3）乘系数

（4）移位

$$z(n) = x(n-m) \qquad 右移位$$
$$z(n) = x(n+m) \qquad 左移位$$

(5）倒置

$$z(n) = x(-n)$$

(6）差分

$$\Delta x(n) = x(n+1) - x(n) \qquad 前向差分$$
$$\nabla x(n) = x(n) - x(n-1) \qquad 后向差分$$

(7）累加

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}$$

(8）重排（压缩、扩展）

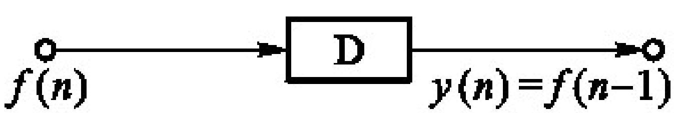
$$x(n) \to x(an)$$

(9）序列的能量

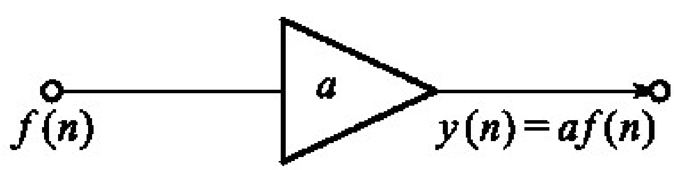
$$E = \sum_{n=-\infty}^{n} |x(n)|^2$$

§1.2 离散时间系统

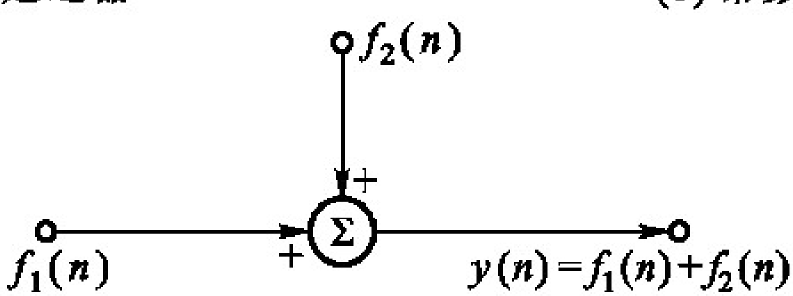
系统的模拟



(a) 单位延迟器



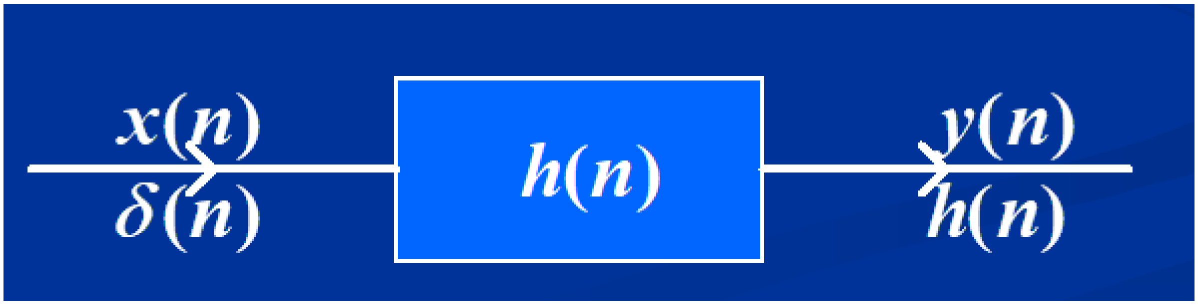
(b) 常数乘法器



(c) 加法器

§1.3 卷积和及其应用

> 离散信号的分解与卷积和



$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=x(n)*h(n)$$

> 离散卷积和的性质

(1) 交换律(2) 结合律 (3) 分配律
(4) 不存在微分、积分性质

> 离散卷积和的计算

(1) 序列阵表格法

(2) 对位相乘求和法

> 连续系统与离散系统的比较

连续系统	离散系统
系统由微分方程描述	系统由差分方程描述
响应 $y(t)=y_{zi}(t)+y_{zs}(t)$	响应 $y(n)=y_{zi}(n)+y_{zs}(n)$
卷积积分	卷积和
线性和非时变性	线性和位移不变性
以冲激信号δ(t)为基本信号	以单位函数δ(n)为基本信号
$y_{zs}(t)=h(t)*f(t)$	$y_{zs}(n)=h(n)*f(n)$

§2 离散系统的 z 域分析

§2.1 z 变换

> 双边 z 变换

$$F(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)z^{-n} \qquad z=\mathrm{e}^{sT}$$

$$f(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

离散信号的 z 变换 $F(z)$ 是取样信号 $f_s(t)$ 的拉式变换中将 s 换为 z 的结果

收敛域（ROC）：

- $x(n)$ 的 ROC 为 z 平面以原点为中心的圆环
- ROC 内不包含任何极点（以极点为边界）
- 有限长序列的ROC为整个 z 平面（可能除去 $z=0$ 和 $z=\infty$）
- 右边序列的 ROC 为 $|z|=R$ 的圆外
- 左边序列的 ROC 为 $|z|=R$ 的圆内
- 双边序列的 ROC 为 $R_1<|z|<R_2$ 的圆环

> 典型序列的单边 z 变换 （$z \geq 0$）

$$\begin{array}{rcll}
f(n) & \leftrightarrow & F(z) & \text{收敛域} \\
\delta(n) & \leftrightarrow & 1 & |z|>0 \\
\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-1} & |z|>1 \\
n\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{(z-1)^2} & |z|>1 \\
n^2\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3} & |z|>1 \\
a^n\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-a} & |z|>|a| \\
na^n\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{az}{(z-a)^2} & |z|>|a| \\
e^{an}\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-e^a} & |z|>|e^a| \\
e^{j\Omega n}\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{z-e^{j\Omega}} & |z|>|1| \\
\sin\Omega n\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z\sin\Omega}{z^2-2z\cos\Omega+1} & |z|>1 \\
\cos\Omega n\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z(z-\cos\Omega)}{z^2-2z\cos\Omega+1} & |z|>1 \\
Aa^{n-1}\varepsilon(n-1) & \leftrightarrow & \dfrac{A}{z-a} & |z|>|a| \\
\dfrac{1}{(m-1)!}n(n-1)\cdots(n-m+2)a^{n-m+1}\varepsilon(n) & \leftrightarrow & \dfrac{z}{(z-a)^m} & |z|>|a|
\end{array}$$

§2.2 z 反变换

> 部分分式展开法

1. $F(z)$ 仅含有一阶单极点

$$\frac{F(z)}{z}=\sum_{i=0}^{n}\frac{K_i}{z-z_i} \qquad K_i=\frac{F(z)}{z}(z-z_i)\big|_{z=z_i}$$

2. $F(z)$ 仅含有重极点

$$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-z_1)^m}+\cdots+\frac{K_{1m}}{z-z_1}+\frac{K_0}{z}$$
$$K_{1n}=\frac{1}{(n-1)!}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}^{n-1}}\left[(z-z_1)^m\frac{F(z)}{z}\right]\Big|_{z=z_i}$$

$\S 2.3$ z 变换的主要性质

> 单边

1. 线性性质

$$a_1 f_1(n)+a_2 f_2(n) \quad \leftrightarrow \quad a_1 F(z)+a_2 F_2(z)$$

2. 移位特性

$$f(n-m)\varepsilon(n-m) \quad (m \geq 0) \quad \leftrightarrow \quad z^{-m} F(z)$$

$$f(n-m) \quad \leftrightarrow \quad z^{-m}\left[F(z)+\sum_{k=1}^{m} f(-k) z^{k}\right]$$

3. 卷积和定理

$$f_1(n)^* f_2(n) \quad \leftrightarrow \quad F_1(z) F_2(z)$$

4. 尺度变换

$$a^{n} f(n) \quad \leftrightarrow \quad F\left(\frac{z}{a}\right)$$

5. 序列求和

$$\sum_{n=0}^{k} f(n) \quad \leftrightarrow \quad \frac{z}{z-1} F(z)$$

6. $F(z)$ 微分

$$n^{m} f(n) \quad \leftrightarrow \quad\left(-z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} z}\right)^{m} F(z)$$

7. 初值定理

$$f(0)=\lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$$

8. 终值定理

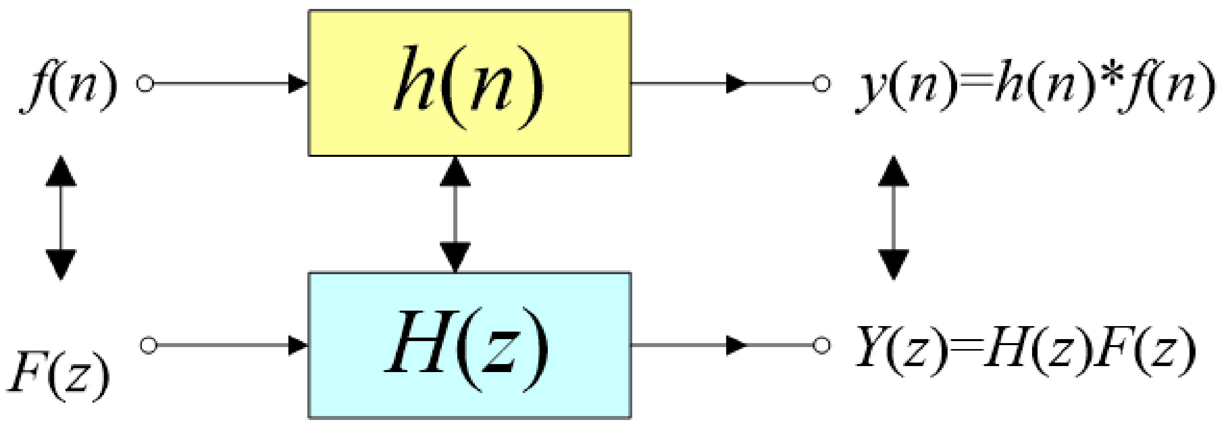
$$f(\infty)=\lim_{z \rightarrow 1}(z-1) F(z)$$

$\S 2.4$ 离散系统的 z 域分析

> 差分方程的 z 变换解（思想）

$$\text{时域模型}\xrightarrow{\text{取变换}}z\text{域模型}\rightarrow\text{解}z\text{域方程}\xrightarrow{\text{反变换}}\text{时域响应}$$

系统函数



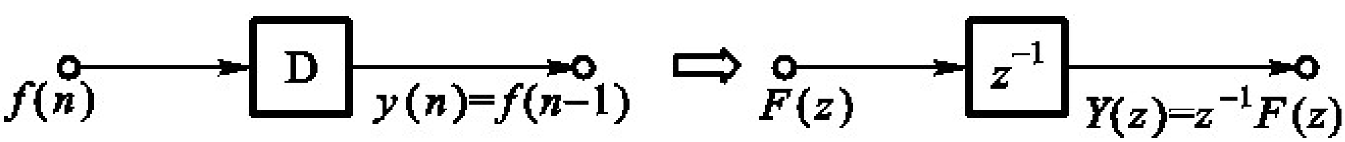
设

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k)=\sum_{r=0}^{M} b_r f(n-r) \qquad \Rightarrow$$

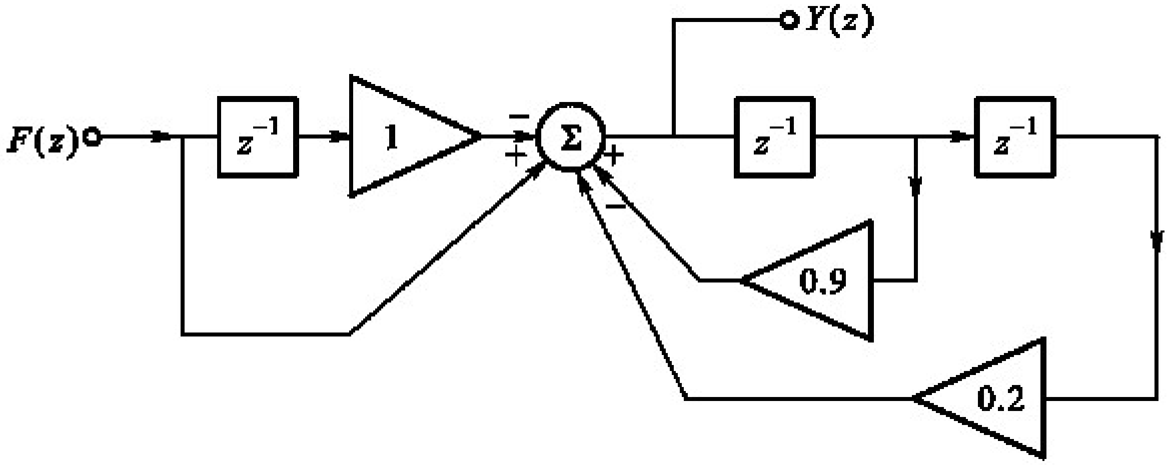
$$H(z)=\frac{Y(z)}{F(z)}=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

z 域模拟

模拟单元



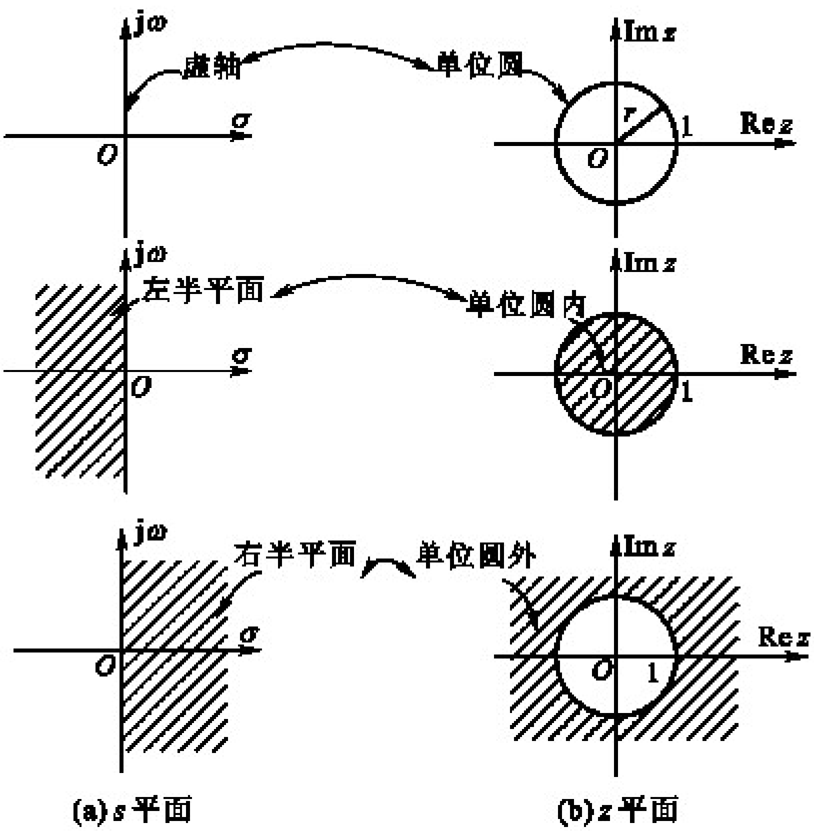
若 $y(n)-0.9y(n-1)+0.2y(n-2)=f(n)-f(n-1)$，有



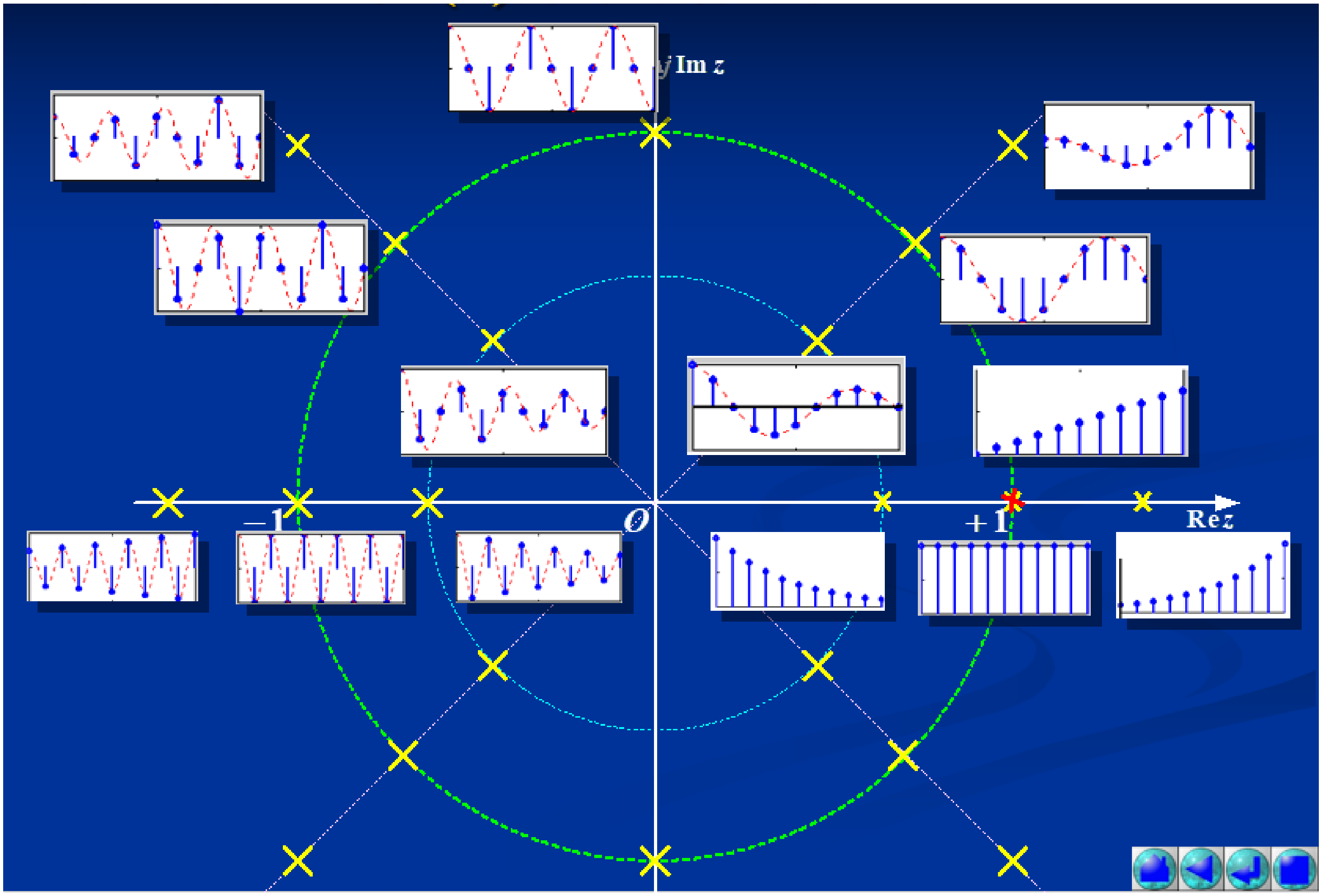
§2.5 系统的零、极点与稳定性

> z 平面与 s 平面的映射关系

$$z = \mathrm{e}^{sT} \qquad s = \sigma + \mathrm{j}\omega$$



> $H(z)$的零、极点分布与$h(n)$ 的关系



> 离散系统的稳定性

- 判据一：

$$\sum_{n-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$$

- 判据二：

$$|z|>a, a<1$$

> 系统的因果性

输出不超前于输入

7、常见信号的拉普拉斯变换表

序号	拉氏变换 E(s)	时间函数 e(t)	Z 变换 E(z)
1	1	δ(t)	1
2	$\frac{1}{1-e^{-Ts}}$	$\delta_T(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\frac{z}{z-1}$
3	$\frac{1}{s}$	$1(t)$	$\frac{z}{z-1}$
4	$\frac{1}{s^2}$	t	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
5	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{t^2}{2}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2(z-1)^3}$
6	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}$	$\lim_{a\to 0}\frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial a^n}(\frac{z}{z-e^{-aT}})$
7	$\frac{1}{s+a}$	e^{-at}	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
8	$\frac{1}{(s+a)^2}$	te^{-at}	$\frac{Tze^{-aT}}{(z-e^{-aT})^2}$
9	$\frac{a}{s(s+a)}$	$1-e^{-at}$	$\frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$
10	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$	$e^{-at}-e^{-bt}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}-\frac{z}{z-e^{-bT}}$
11	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega T}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
12	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega T)}{z^2-2z\cos\omega T+1}$
13	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{ze^{-aT}\sin\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$
14	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{z^2-ze^{-aT}\cos\omega T}{z^2-2ze^{-aT}\cos\omega T+e^{-2aT}}$

15	$\dfrac{1}{s-(1/T)\ln a}$	$a^{t/T}$	$\dfrac{z}{z-a}$

10、 Z 变换性质表

序号	性质名称		信号(序列)	Z 变换
0	定义	双边变换	$f(k)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{k-1}\,\mathrm{d}z$ $-\infty<k<\infty$	$F(z)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}f(k)z^{-k},\ \alpha<\|z\|<\beta$
		单边变换	$f(k)=\dfrac{1}{2\pi\mathrm{j}}\oint_C F(z)z^{k-1}\,\mathrm{d}z$ $k\geqslant 0$	$F(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}f(k)z^{-k},\ \|z\|>\alpha$
1	线　性		$a_1f_1(k)+a_1f_2(k)$	$a_1F_1(z)+a_2F_2(z)$ $\max(\alpha_1,\alpha_2)<\|z\|<\min(\beta_1,\beta_2)$
2	位移	双边变换	$f(k\pm m)$	$z^{\pm m}F(z),\ \alpha<\|z\|<\beta$
		单边变换	$f(k-m),\ m>0$	$z^{-m}F(z)+\sum\limits_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},\ \|z\|>\alpha$
			$f(k+m),\ m>0$	$z^{m}F(z)+\sum\limits_{k=0}^{m-1}f(k)z^{m-k},\ \|z\|>\alpha$
			$f(k-m)\varepsilon(k-m),\ m>0$	$z^{-m}F(z),\ \|z\|>\alpha$
3	K 域乘 a^k		$a^kf(k),\ a\neq 0$	$F\left(\dfrac{z}{a}\right),\ \alpha\|a\|<\|z\|<\beta\|a\|$
4	K 域卷积	双边变换	$f_1(k)*f_2(k)$	$F_1(z)F_2(z)$ $\max(\alpha_1,\alpha_2)<\|z\|<\min(\beta_1,\beta_2)$
		单边变换	$f_1(k)*f_2(k)$ $f_1(k)$、$f_2(k)$ 为因果序列	$F_1(z)F_2(z),\ \|z\|>\max(\alpha_1,\alpha_2)$
5	Z 域微分		$k^mf(k),\ m>0$	$\left[-z\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right]^mF(z),\ \alpha<\|z\|<\beta$
6	Z 域积分		$\dfrac{f(k)}{k+m},\ k+m>0$	$z^m\int_z^{\infty}F(\lambda)\lambda^{-(m+1)}\mathrm{d}\lambda,\ \alpha<\|z\|<\beta$
7	K 域反转 (适用于双边变换)		$f(-k)$	$F(z^{-1}),\ \dfrac{1}{\beta}<\|z\|<\dfrac{1}{\alpha}$
8	部分和	双边变换	$\sum\limits_{m=-\infty}^{k}f(m)$	$\dfrac{z}{z-1}F(z),\ \max(\alpha,1)<\|z\|<\beta$
		单边变换	$\sum\limits_{m=0}^{k}f(m)$	$\dfrac{z}{z-1}F(z),\ \|z\|>\max(\alpha,1)$
9	初值定理	双边变换	$f(N)=\lim\limits_{z\to\infty}z^NF(z),\ f(k)=0,\ k<N$	
		单边变换	$f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z),\ f(k)=0,\ k<0$	

10	终值定理	$f(\infty)=\lim_{z\to 1}\frac{z-1}{z}F(z)$，$\lvert z\rvert>\alpha$，$(0<\alpha<1)$ $f(\infty)$ 存在

参考资料：

[1] 《信号与系统教程》，第 4 版， 燕庆明
[2] 老师的PPT