Universidade do Minho **Cursos: CC & MAT**
DMA **Probabilidades e Aplicações** **2018/2019**
Exame de Recurso - 19/Janeiro/2019

Nome: **Nº**

Responda às questões 1 *e* 2 *na folha de teste e responda à questão* 3 *neste enunciado. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do* R *que utilizar. Duração*: 2h30m.

---

1. Considere um dado viciado em que o acontecimento "sair face par" é três vezes mais provável do que o acontecimento "sair face ímpar".
   (a) Considere a experiência aleatória que consiste em lançar este dado quatro vezes consecutivas e seja Z a variável aleatória real que representa o número de faces par obtidas.
      i. Determine a função de probabilidade e os quartis de Z.
      ii. Sabendo que saiu pelo menos uma face par nos quatro lançamentos, qual a probabilidade de ter saído face par no primeiro lançamento? Justifique.
      iii. Identifique, justificando, uma família formada por três acontecimentos independentes.
      iv. Considere agora W a v.a.r. que representa o número de ases (i.e., faces 1) obtidos nesta experiência. Diga, justificando, se Z e W são independentes.
   (b) Considere agora um jogo em que, após um lançamento deste dado, o jogador perde 1€ se sair uma face par, ganha 10€ se sair um ás e ganha 5€ no caso contrário.
      i. Mostre que a média e a variância do ganho numa jogada são $\frac{11}{12}$ e $\frac{1787}{144}$, respetivamente.
      ii. Determine a probabilidade de, ao fim de 100 jogadas, o ganho total do jogador ser superior a 60€. Justifique.
   (c) Suponha agora que este dado viciado é colocado numa caixa juntamente com **outros 4 dados equilibrados** e que não é possível distinguir, a olho, os 5 dados. De seguida escolheu-se, ao acaso, um destes dados da caixa, efectuaram-se 3 lançamentos consecutivos com ele e observou-se que tinham saído somente ases. Qual a probabilidade de o dado escolhido não ter sido o viciado? Justifique.

   Observação: Assuma que as faces ímpar são equiprováveis, i.e., $P(\{1\}) = P(\{3\}) = P(\{5\})$.

2. Seja X a v.a.r. que representa a quantidade vendida diariamente (em kg) de um produto numa certa empresa A. Sabe-se que X é absolutamente contínua, que segue uma lei Uniforme e que:
   - a probabilidade de, num dia, se vender no máximo 3 kg do produto é igual a $\frac{1}{4}$.
   - a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos 4 kg deste produto é igual a $\frac{1}{2}$.

   (a) Mostre que $X \sim U([2, 6])$.
   (b) Determine a probabilidade de, em 10 dias de vendas, haver um dia em que se vende menos de 3kg e de haver pelo menos 8 dias em que se vende mais de 4kg.
   (c) Seja Y a v.a.r. que representa a quantidade (em kg) deste produto vendida diariamente noutro estabelecimento B. Sabe-se que X e Y são independentes e que $Y \sim U([0, 6])$.
      i. Determine a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos 4 kg deste produto em cada um dos estabelecimentos.
      ii. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).
      iii. Determine a probabilidade de, num dia, a quantidade vendida no estabelecimento B ser inferior à vendida em A.

   Observação: Assuma que as quantidades vendidas em dias distintos são independentes.

(v.s.f.f.)

3. Sejam $(\Omega,\mathcal{A},P)$ um espaço de probabilidade e $X:\Omega \to \mathbb{R}$ uma v.a.r. com função de distribuição F.

(a) Seja $E \in \mathcal{A}$. Mostre que a seguinte família de subconjuntos de Ω, denotada por $\mathcal{A}_E$, é uma σ- álgebra sobre o conjunto E

$$\mathcal{A}_E = \{E \cap G, \, G \in \mathcal{A}\}.$$

(b) Mostre que, se A, B e C formam uma família de três acontecimentos independentes, então A e $B \cap C$ são dois acontecimentos independentes.

(c) Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$\phi(a) = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & se & a \leq 0 \\ 1 & se & a > 0 \end{array} \right. .$$

Mostre que $\phi(X)$ é uma v.a.r. e determine, em função de F, a função de distribuição de $\phi(X)$.