
Nome:	Nº	Curso:
-------	----	--------

*Responda às questões 1 e 2 na folha de teste. Responda à questão 3 neste enunciado.
Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e as funções do \mathbb{R} que utilizar.
O teste tem a duração de 1h45m.*

1. Considere a experiência aleatória que consiste em efectuar três lançamentos consecutivos de um dado equilibrado.
 - (a) Identifique o espaço de probabilidade associado a esta experiência aleatória.
 - (b) Sabendo que saiu pelo menos uma face ímpar nos três lançamentos, qual a probabilidade de nos dois primeiros lançamentos sair pelo menos uma vez a face 1? Justifique.
 - (c) Diga, justificando, se A , B e C formam uma família de acontecimentos independentes, sendo:

A : "saiu face par no primeiro lançamento",
 B : "saiu face ímpar no segundo lançamento",
 C : "saiu uma face par e uma face ímpar nos dois primeiros lançamentos".
 - (d) Seja X a v.a.r. que representa o número de faces par obtidas nos três lançamentos.
 - i. Mostre que X é discreta e determine a sua função de probabilidade.
 - ii. Determine a função de distribuição de X .
 - iii. Sabendo que saíram pelo menos duas faces par nos três lançamentos, qual a probabilidade de não ter saído qualquer face ímpar? Justifique.
2. Numa certa população, 30% dos indivíduos possuem uma certa doença e os restantes são saudáveis. Dos que têm a doença, 40% têm na forma contagiosa e os restantes são não contagiosos. Escolheu-se ao acaso um indivíduo nesta população.
 - (a) Mostre que a probabilidade de o indivíduo ter a doença na forma não contagiosa é 0.18.
 - (b) Um exame clínico dá resultado positivo (i.e., diz que o indivíduo tem a doença) em todos os casos contagiosos e em apenas 70% dos casos de doentes não contagiosos. O exame clínico dá negativo em 95% dos casos em que o indivíduo é saudável.
 - i. Suponha que o indivíduo escolhido é submetido a este exame uma única vez.
 - 1) Calcule a probabilidade de o exame dar negativo.
 - 2) Se o resultado do exame der negativo, qual a probabilidade de o indivíduo ser saudável? Justifique.
 - 3) Se o resultado do exame der positivo, qual a probabilidade de o indivíduo ser doente? Justifique.
 - ii. Suponha que o indivíduo escolhido efectuou o exame 3 vezes, sempre nas mesmas condições. Sabendo que o resultado do exame foi negativo nas 3 vezes, qual a probabilidade de o indivíduo ser realmente saudável? Justifique.

(v.s.f.f.)

3. Seja Ω um conjunto e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de Ω .

- (a) Diga, justificando, se a seguinte afirmação é verdadeira ou falsa: "Se \mathcal{F} é uma σ -álgebra sobre Ω então \mathcal{F} é um π -sistema sobre Ω ."
- (b) Considere agora (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade e $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma v.a.r..
 - i. Seja λ uma qualquer constante real. Mostre que λX também é uma v.a.r..
 - ii. Mostre que a lei de probabilidade de X , i.e., a função $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$P_X(E) = P(X^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

é uma medida de probabilidade sobre $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.