Universidade do Minho **Cursos: CC & MAT**
DMA **Probabilidades e Aplicações** **2018/2019**
Teste II - 9/Janeiro/2019

Nome: **N^{o}** **Curso:**

Responda às questões 1 e 2 na folha de teste e responda à questão 3 neste enunciado. Justifique todas as respostas, indique cálculos intermédios e funções do `R` *que utilizar. Duração*: 2h30m

1. Considere X a v.a.r. que representa a quantidade (em kg) de um certo produto que é vendida diariamente num determinado estabelecimento A. Sabe-se que X é absolutamente contínua com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & se \quad 0 \leq x < 1 \\ k & se \quad 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & se \quad \text{c.c.} \end{cases},$$

em que k é uma constante real.

(a) Mostre que $k = \frac{1}{4}$.

(b) Determine a probabilidade de, num dia em que se vendeu pelo menos 2 kg deste produto, se ter vendido menos de 2.5 kg? Justifique.

(c) Mostre que $E[X]$ e $Var[X]$ existem. Mostre ainda que $E[X] = \frac{5}{4}$ e que $Var[X] = \frac{37}{48}$.

(d) Se, por cada kg de produto vendido, o dono do estabelecimento tiver um lucro de 3 euros, qual o valor médio e a variância do lucro diário? Justifique.

(e) Seja Y a v.a.r. que representa a quantidade (em kg) deste produto vendida diariamente noutro estabelecimento B. Sabe-se que X e Y são independentes e que $Y \sim U([0, 3])$.

i. Determine a probabilidade de, num dia, se vender pelo menos de 2 kg deste produto em cada um dos estabelecimentos.

ii. Determine a função densidade de probabilidade conjunta do par aleatório (X, Y).

iii. Determine a probabilidade de, num dia, a quantidade deste produto vendida no estabelecimento B ser inferior ao triplo da vendida no estabelecimento A.

2. Considere uma máquina que começa a funcionar no instante $t = 0$ e é reparada instantaneamente quando se avaria (i.e. o tempo de reparar a máquina é nulo). Sabe-se que o tempo, em horas, que decorre até à 1ª avaria, assim como o tempo que decorre entre avarias consecutivas, são v.a.r.'s absolutamente contínuas, i.i.d.'s, com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x < 0 \\ 2e^{-2x} & se \quad x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Seja T_1 a v.a.r. que representa o tempo decorrido até à primeira avaria da máquina.

i. Determine a função de distribuição de T_1.

ii. Qual a probabilidade de máquina não avariar nas primeiras 2 horas de funcionamento?

iii. Mostre que $P(T_1 \leq t + s | T_1 > s) = P(T_1 \leq t)$, $t, s > 0$.

(b) Determine a probabilidade de em 30 horas de funcionamento haver pelo menos 50 avarias.

(c) Suponha que 10 máquinas, idênticas a esta, começam a funcionar todas no mesmo instante $t = 0$ e que elas funcionam de forma independente umas das outras. Qual a probabilidade de 7 destas máquinas sofrerem a primeira avaria durante a primeira hora de funcionamento e de pelo menos 2 delas não avariarem durante as primeiras 2 horas? Justifique.

Observação: Se necessário, pode usar, sem demonstrar, que $E[T_1] = \frac{1}{2}$ e que $Var[T_1] = \frac{1}{4}$.

(v.s.f.f.)

3. Considere Z uma v.a.r. discreta tal que $Z \sim Bernoulli(p)$, com $0 < p < 1$.

   (a) Determine, usando a definição, a transformada de Laplace de Z.

   (b) Considere agora duas v.a.r.'s, Z_1 e Z_2, i.i.d.'s com Z.

      i. Identifique, justificando, a lei de v.a.r. $Z_1 + Z_2$.

      ii. Determine, em função de p, o valor de $P(Z_1 - Z_2 \geq 0)$.

   Observação: A lei $Bernoulli(p)$ também é conhecida por lei $Bin(1, p)$.