 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

Observações: As respostas às questões devem ser submetidas na página do Moodle no link fornecido para o efeito e devem ser identificadas com o número de aluno.

1. Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  com  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ . Utilize o Maxima para verificar que  $f$ :

- (a) admite um único ponto de inflexão em  $\mathbb{R}, \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$  e  $a \neq 0$ .

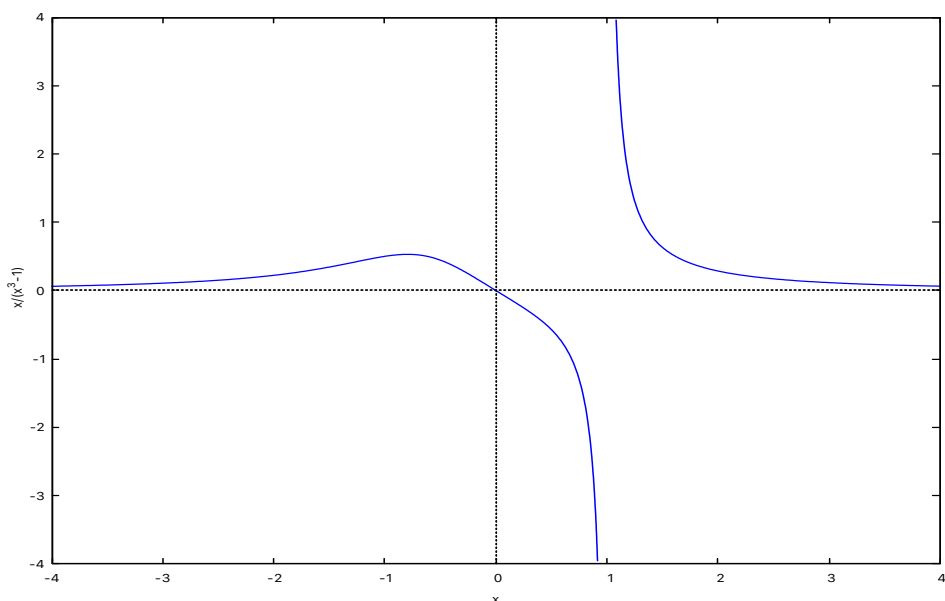
```
(%i1) f(x):=a*x^3+b*x^2+c*x+d;
(%o1)          3      2
f(x) := a x  + b x  + c x + d
(%i2) diff(f(x),x,2);
(%o2)          6 a x + 2 b
(%i3) solve(%,x);
(%o3)          b
[x = - ----]
3 a
```

- (b) não admite extremos em  $\mathbb{R}$  para  $a = 2, b = 2, c = 1$  e  $d = 5$ .

```
(%i4) diff(f(x),x,1);
(%o4)          2
3 a x  + 2 b x + c
(%i5) %,a=2,b=2,c=1,d=5;
(%o5)          2
6 x  + 4 x + 1
(%i6) solve(%,x);
(%o6)          sqrt(2) %i + 2      sqrt(2) %i - 2
[x = - ----, x = - ----]
6                      6
```

2. Utilize o Maxima para fazer o estudo da função  $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$  e esboçar o respetivo gráfico.

```
(%i7) f(x):=x/(x^3-1);
plot2d(f(x),[x,-4,4],[y,-4,4])$
plot2d: expression evaluates to non-numeric value somewhere in plotting range.
plot2d: some values were clipped.
```



```
(%i8) diff(f(x),x,1);
```

```
(%o8)
```

$$\frac{1}{x^3 - 1} - \frac{3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

```
(%i9) factor(%);
```

```
(%o9)
```

$$-\frac{2x^2 + 1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$$

```
(%i10) a:num(%);
```

```
(%o10)
```

$$(-2x^2 - 1)^3$$

```
(%i11) solve(a,x);
```

```
(%o11)
```

$$\left[ x = -\frac{\sqrt[4]{3} \sqrt{-1}}{2}, x = \frac{\sqrt[4]{3} \sqrt{1}}{2}, x = -\frac{1}{2} \right]$$

```
(%i12) part(%,3);
```

```
(%o12)
```

$$x = -\frac{1}{2}$$

```
(%i13) %, numer;
```

```
(%o13)
```

$$x = -0.7937005259840998$$

```
(%i17) diff(f(x),x,1);
```

```
(%o17)
```

$$\frac{1}{x^3 - 1} - \frac{3x^3}{(x^3 - 1)^2}$$

```
(%i18) %,x=-3;
```

```
(%o18)
```

$$\frac{53}{784}$$

```
(%i19) diff(f(x),x,1);
```

```
(%o19)
```

$$\frac{1}{x^3 - 1} - \frac{3x^3}{(x^3 - 1)^2}$$

```
(%i20) %,x=-0.1;
```

```
(%o20)
```

$$- 0.9960069900129842$$

```
(%i21) diff(f(x),x,2);
```

```
(%o21)
```

$$\frac{18x^5}{(x^3 - 1)^3} - \frac{12x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

```
(%i22) factor(%);
```

```
(%o22)
```

$$\frac{6x^2(x^3 + 2)}{(x^3 - 1)^3(x^2 + x + 1)^3}$$

```
(%i23) b:num(%);
```

```
(%o23)
```

$$6x^2(x^3 + 2)$$

```
(%i24) solve(b,x);
```

```
(%o24)
```

$$\left[ x = -\frac{1}{2}, \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{-2}, x = \frac{1}{2}, \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2}, x = -\frac{1}{2}, \sqrt[3]{3} \sqrt[3]{2}, x = 0 \right]$$

```
(%i26) part(%,3);
```

```

(%o26)
x = - 2
(%i27) %,numer;
(%o27) x = - 1.259921049894873
(%i28) diff(f(x),x,2);

          5          2
        18 x      12 x
----- - -----
      3      3      3      2
(x - 1)    (x - 1)

(%o28)

(%i29) %, x=-1.5
;
(%o29) 0.2216676384839651
(%i32) diff(f(x),x,2);

          5          2
        18 x      12 x
----- - -----
      3      3      3      2
(x - 1)    (x - 1)

(%o32)

(%i33) %,x=-1;

          3
        - -
          4

(%o33)

(%i34) diff(f(x),x,2);

          5          2
        18 x      12 x
----- - -----
      3      3      3      2
(x - 1)    (x - 1)

(%o34)


(%i35) %,x=0.25;
(%o35) - 0.7924270237195408
(%i36) diff(f(x),x,2);

          5          2
        18 x      12 x
----- - -----
      3      3      3      2
(x - 1)    (x - 1)

(%o36)

(%i37) %,x=-0.25;
(%o37) - 0.7103213472917614
(%i38)
(%i38) limit(f(x),x,1,minus);
(%o38) minf

```

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

```
(%i39) limit(f(x),x,1,plus);
(%o39)                                     inf
(%i40) limit(f(x)/x,x,inf);
(%o40)                                     0
(%i41) limit(f(x)/x,x,minf);
(%o41)                                     0
(%i42) limit(f(x),x,inf);
(%o42)                                     0
(%i43) limit(f(x),x,minf);
(%o43)                                     0
```


- $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $(x, y) = \left( \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, \frac{\sqrt[3]{4}}{3} \right)$  é um máximo
- $f$  é crescente de  $]-\infty, \frac{-1}{\sqrt[3]{2}}[$  e decrescente de  $\frac{-1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty[$
- $(x, y) = \left( \sqrt[3]{-2}, \frac{\sqrt[3]{2}}{3} \right)$  é um ponto de inflexão
- $f$  tem a concavidade voltada para cima de  $]-\infty, \sqrt[3]{-2}[$  e  $]1, +\infty[$  e voltada para baixo de  $]\sqrt[3]{-2}, 1[$
- $(x, y) = (0, 0)$  não é ponto de inflexão
- $y = 1$  é uma assintota vertical
- $f$  não tem assintotas oblíquas
- $y = 0$  é uma assintota horizontal

3. Considere a seguinte função  $f$  tabelada.

$x$	1.20	1.29	1.30	1.31	1.40
$f(x)$	11.59006	13.78176	14.04276	14.30741	16.86187

(a) Utilize o Scilab para aproximar  $f'(1.30)$  pela fórmula de diferenciação dos cinco pontos.

```
clc;
clear;
xi=[1.20 1.29 1.30 1.31 1.40];
fi=[11.59006 13.78176 14.04276 14.30741 16.86187];
exec cp_c.sci;
```

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

```
[cpc]=cp_c(xi,fi);
disp(cpc);
```

$$f'(1.30) = -0.9876019$$

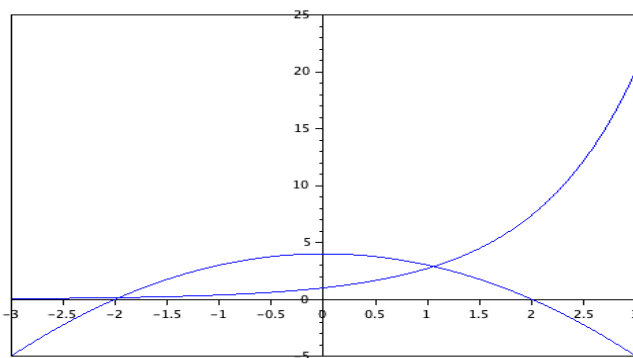
- (b) Sabendo que  $f(x) = 3xe^x - \cos(x)$ , utilize o Maxima para calcular o erro cometido na alínea anterior.


```
(%i62) f(x):=3*x*exp(x)-cos(x);
(%o62)                                     f(x) := 3 x exp(x) - cos(x)
(%i63) diff(f(x),x,5);
(%o63)                                     x      x
sin(x) + 3 x %e  + 15 %e
(%i64) %,x=1.20;
(%o64)                                     62.68621384886701
(%i65) %o63, x=1.40;
(%o65)                                     78.84528909340621
(%i66) 0.1^4/30*%;
(%o66)                                     2.628176303113541e-4
(%i67)
```

4. Considere a função  $f(x) = \ln(4 - x^2) - x$ . Utilize o Scilab para responder às seguintes questões.

- (a) Faça a localização gráfica das raízes reais de  $f(x) = 0$ .

```
clear;
clc;
x=[-3:0.1:3];
plot(x,4-x^2);
plot(x,exp(x));
a=gca();
a.x_location = "origin";
a.y_location = "origin";
disp("A funcao tem zeros nos intervalos [-1.99,-1.95], [1,1.5]")
```



 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

- (b) Utilize o método da bissecção para aproximar o valor da menor raiz real com um erro absoluto inferior a  $10^{-3}$ .

```
function f=exame_modelob(x)
    f=log(4-x^2)-x;
endfunction

clc;
clear;
a=-1.99;
b=-1.95;
tol=1e-3;
maxit=100;
exec exame_modelob.sci;
exec bisseccao.sci;
[raiz]=bisseccao(exame_modelob,a,b,tol,maxit);
disp(raiz);
```

it	[ an, bn]	xn	f(xn)
1	[-1.9700000, -1.9500000]	-1.9700000	-0.1578
2	[-1.9700000, -1.9600000]	-1.9600000	0.1174
3	[-1.9650000, -1.9600000]	-1.9650000	-0.0099
4	[-1.9650000, -1.9625000]	-1.9625000	0.0560
5	[-1.9650000, -1.9637500]	-1.9637500	0.0236
6	[-1.9650000, -1.9643750]	-1.9643750	0.0070


-1.964375

- (c) Utilizando o método de Newton aproxime o valor da maior raiz real com um erro relativo inferior a  $10^{-4}$ .

```
(%o67) f(x) := log(4 - x^2) - x
(%i68) diff(f(x),x,2);
```

$$\left(-\frac{x^2}{4-x^2}\right) - \frac{4x}{(4-x^2)^2}$$

```
(%o68)
(%i69) %,x=1;
(%o69) -10/9
(%i70) %o68,x=1.5;
```

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

```
(%o70)                                - 4.081632653061224
(%i71) f(1);
(%o71)                                log(3) - 1
(%i72) %,numer;
(%o72)                                0.09861228866810978
(%i73) f(1.5);
(%o73)                                - 0.9403842120645773
```

$x_0 = 1.5$  é a aproximação inicial no método de Newton

```
function [f,df]=exame_modeloN(x)
    f=log(4-x^2)-x;
    df=(-2*x)/(4-x^2)-1;
endfunction

clc;
clear;
x0=1.5;
tol=1e-4;
maxit=100;
exec exame_modeloN.sci;
exec newton.sci;
[raiz,cp]=newton(exame_modeloN,x0,tol,maxit);
disp(raiz);
```

```
it      xn      f(xn)    df(xn)
  1 1.15354266 -0.9404  -2.7143
  2 1.06143704 -0.1717  -1.8643
  3 1.05801059 -0.0060  -1.7388
  4 1.05800640 -0.0000  -1.7346
```

1.0580064

5. Utilize o Máxima para aproximar  $\int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx$  pela regra de Simpson composta usando  $h = 0.25$  e para calcular o erro cometido.


$$h = \frac{b-a}{n} \Leftrightarrow 0.25 = \frac{2}{n} \Leftrightarrow n = 8$$

$$x_1 = 0.25, x_2 = 0.5, x_3 = 0.75, x_4 = 1, x_5 = 1.25, x_6 = 1.5, x_7 = 1.75$$

$$I_{SC} = \frac{h}{3} \left( f(a) + 2 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4 \sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b) \right)$$

```
(%o3)                                2      2
f(x) := x  exp(- x )
```



 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova: Exame Modelo – Parte Prática Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2020/2021  Data: Hora: Duração: 30m
--	---	---

(%i4) 2/0.25;

(%o4)  $8.0$

(%i7)  $0.25/3*(f(0)+2*(f(0.5)+f(1)+f(1.5))+4*(f(0.25)+f(0.75)+f(1.25)+f(1.75))+f(2))$

(%o7)  $0.0833333333333333 (2 (e^{-1} + 0.4318484510320459) + 4 (e^{-4} + 3.399875915245804))$

(%i8) %,numer;

(%o8)  $0.4227161879339765$

(%i11) diff(f(x),x,4);

(%o11)  $16 x^6 e^{-x^2} - 112 x^4 e^{-x^2} + 156 x^2 e^{-x^2} - 24 e^{-x^2}$

(%i12) %,x=0;

(%o12)  $-24$

(%i13) %o11,x=2;

(%o13)  $-168 e^{-4}$

(%i14) %,numer;

(%o14)  $-3.077027333307342$

(%i15) 2/180\*0.25^4\*24;

(%o15)  $0.001041666666666667$