P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO	Tipo de Prova: Teste Modelo Curso: Engenharia Informática Unidade Curricular: Matemática Computacional I	Ano Letivo 2018/2019	Data: 23/04/2018 Hora: Duração:

1. Considere a equação $\sin(x+y) = y^2\cos(x)$ definida implicitamente, calcule $\dfrac{dy}{dx}$ no ponto (π,π).

   $\sin(x+y) = y^2\cos(x) \Leftrightarrow \sin(x+y) - y^2\cos(x) = 0$, derivando implicitamente obtém-se:

$$(x+y)'\cos(x+y) - \left(2yy'\cos(x) - \operatorname{sen}(x)y^2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+y')\cos(x+y) - 2yy'\cos(x) + y^2\operatorname{sen}(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos(x+y) + y'\cos(x+y) - 2yy'\cos(x) = -y^2\operatorname{sen}(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'\cos(x+y) - 2yy'\cos(x) = -y^2\operatorname{sen}(x) - \cos(x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y'(\cos(x+y) - 2y\cos(x)) = -y^2\operatorname{sen}(x) - \cos(x+y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{-y^2\operatorname{sen}(x) - \cos(x+y)}{\cos(x+y) - 2y\cos(x)},$$

   substituindo no ponto (π,π) obtém-se:

$$y' = \frac{-\pi^2\operatorname{sen}(\pi) - \cos(2\pi)}{\cos(2\pi) - 2\pi\cos(\pi)} = \frac{-1}{1+2\pi}.$$

2. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x) - x$.

   (a) Determine os intervalos de monotonia e extremos de f.

   (b) Determine as convavidades e pontos de inflexão de f.

   (c) Determine as assintotas ao gráfico de f e indique o contradomínio.

3. Use a regra de L'Hôpital para calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x^4+x+1)}$.

4. Considere a seguinte função tabelada.

x	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$f(x)$	3.1345	4.3689	5.3983	6.3859	7.5537

   (a) Usando a fórmula de diferenciação dos 3 pontos adequada calcule uma aproximação para $f'(1.8)$.

   $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \Rightarrow f'(1.8) = \dfrac{f(1.9) - f(1.7)}{2\times 0.1} = \dfrac{6.3859 - 4.3689}{0.2} = \dfrac{2.017}{0.2} = 10.085.$

(b) Usando a fórmula de diferenciação dos 5 pontos adequada calcule uma aproximação para $f'(2.0)$ considerando um espaçamento $h = -0.1$.

Considerando a fórmula dos cinco pontos progressiva:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left(-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)\right),$$

considerando, $h = -h$, obtém-se a seguinte fórmula dos cinco pontos regressiva:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h}\left(25f(x_0) - 48f(x_0-h) + 36f(x_0-2h) - 16f(x_0-3h) + 3f(x_0-4h)\right).$$

Então:

$$f'(2.0) = \frac{1}{12 \times 0.1}\left(25f(2.0) - 48f(1.9) + 36f(1.8) - 16f(1.7) + 3f(1.6)\right) = 13.466.$$

5. Considere a equação $4(x^2 - x) = \cos(x)$ que no intervalo $[-0.9, -0.1]$, admite uma única raíz real α, e no intervalo $[1, 2]$ admite uma única raíz real β.

(a) Utilizando o método de Newton e usando a aproximação inicial $x_0 = 1.5$ calcule duas iterações para aproximar β.

$f(x) = 4x^2 - 4x - \cos(x) \Rightarrow f'(x) = 8x - 4 + \mathrm{sen}(x)$;

Equação iterativa do Método de Newton: $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, considerando a aproximação inicial $x_0 = 1.5$, obtemos a seguinte solução no final da 1ª iteração:

$x_1 = 1.5 - \dfrac{f(1.5)}{f'(1.5)} \Leftrightarrow x_1 = 1.5 - \dfrac{2.9293}{8.9975} \Leftrightarrow x_1 = 1.5 - 0.32557 \Leftrightarrow x_1 = 1.17443.$

No final da 2ª iteração obtemos a seguinte solução:

$x_2 = 1.17443 - \dfrac{f(1.17443)}{f'(1.17443)} \Leftrightarrow x_2 = 1.17443 - \dfrac{0.4334}{6.3179} \Leftrightarrow x_2 = 1.17443 - 0.068599 \Leftrightarrow$ $x_2 = 1.105831.$

(b) Calcule uma iteração pelo método da bissecção para aproximar α.

$f(-0.9) = 6.21 > 0$ e $f(-0.1) = -0.55 < 0$;

$x_1 = \dfrac{-0.9 + (-0.1)}{2} = -0.5$ e $f(x_1) = 2.12 > 0$, então o intervalo para a 2ª iteração é $I = [-0.5, -0.1]$.

(c) Quantas iterações teria que executar pelo método da bissecção para aproximar β com um erro inferior a 10^{-5}.

6. Considerando a aproximação inicial $x_0 = 1$, calcule duas iterações pelo método do ponto fixo para determinar a solução da equação $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ no intervalo $[1, 2]$. Calcule os erros absoluto e relativo cometidos pela aproximação.

$x^4 - 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^4 = 3x^2 + 3 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{3x^2+3} \Rightarrow g(x) = \sqrt[4]{3x^2+3}$.
$g(x) = \sqrt[4]{3x^2+3}$ verifica as condições de aplicação do método ponto fixo, uma vez que verifica as seguintes condições:
1) $g(1) = 1.56 \in [1,2]$ e $g(2) = 1.96 \in [1,2]$;
2) $g'(x) = \dfrac{6x}{4}(3x^2+3)^{-\frac{3}{4}}$, g'(1)=0.3913 <1 e g'(2)=0.3936 <1.
Considerando a aproximação inicial $x_0 = 1$, e $x_{n+1} = g(x_n)$, obtemos a seguinte solução no final da 1ª iteração: $x_1 = \sqrt[4]{3 \times 1.5^2 + 3}$=1.7671.
No final da 2ª iteração obtemos a solução $x_2 = \sqrt[4]{3 \times 1.7671^2 + 3} = 1.8753$.
No final da 2ª iteração, o erro absoluto é: $\Delta_{\bar{x}} = |x_2 - x_1| = |1.8753 - 1.7671| = 0.1082$, e o erro relativo é: $r_{\bar{x}} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|} = 0.057697$.