P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO	Tipo de Prova Exame (Época Normal)	Ano letivo 2018/2019	Data 16/01/2019
	Curso Licenciatura em Engenharia Informática /Licenciatura em Sistemas de Informação e Redes de Computadores		Hora 10h00
	Unidade Curricular Álgebra Linear e Geometria Analítica		Duração 2h(+30m)

Observações
Para a realização da prova de avaliação o estudante pode utilizar:
1. Máquina de calcular;
2. Formulário em folha A4, manuscrito pelo aluno que está a realizar a prova. Não é permitido fotocópias de formulários.

Nas respostas deve apresentar todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

PROPOSTA DE RESOLUÇÂO E SOLUÇÕES

1. Dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

a) [1,00] Calcule $2A-3B^T$.

$$2A-3B^T=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 9 & -5\\ 10 & -4\end{bmatrix}$$

b) [1,00] Calcule AB.

$$AB=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\ 8 & 3 & 8\\ 14 & 7 & 16\end{bmatrix}$$

2. Dado o seguinte sistema de equações lineares

$$\begin{cases}x+2y+az=1\\ 2x+y+az=0,\\ 3x+2y+z=1\end{cases} \quad a\in\mathbb{R}.$$

a) [1,50] Determine a de modo que o sistema seja de Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & a\\ 2 & 1 & a\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\underbrace{=}_{R.Sarrus}-3+5a$$

Para que o sistema seja de Cramer o determinante da matriz dos coeficientes tem que ser diferente de zero, isto é,

$$|A|\neq 0\Leftrightarrow -3+5a\neq 0\Leftrightarrow a\neq\frac{3}{5}$$

b) [1,50] Faça $a=0$ e determine a solução do sistema, aplicando a regra de Cramer, e sabendo que, $\Delta_x=1$ e $\Delta_y=-2$.

$$|A|=\Delta=-3+5a=-3$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{vmatrix}\underbrace{=}_{R.Sarrus}-2$$

$$S: (x, y, z) = \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}, \frac{\Delta_z}{\Delta}\right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

3. Considere o seguinte sistema de equações lineares, dado por

$$\begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+(b+2)y-z=2a \\ x+2y+z=a \\ x+by=1 \end{cases} \quad \text{onde } a, b \in IR.$$

a) [1,50] Defina a matriz completa [*A*|*B*] e a partir dela e utilizando o método por condensação, discuta e calcule a característica da matriz *A*, em função do parâmetro *b*.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & b+2 & -1 & 2a \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & b & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Passos para a condensação: L2->-2L1+L2; L3->-L1+L3; L4->-L1+L4; L4->-L2+L4

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & b+2 & -1 & 2a \\ 1 & 2 & 1 & a \\ 1 & b & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\cdots}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & b-2 & -1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 2 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+2 \end{array}\right]$$

Se $b-2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2 \rightarrow r(A) = 3$

Se $b-2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \rightarrow r(A) = 2$

b) [1,50] Para $a=1$, discuta e classifique o sistema *AX=B* em função do parâmetro **b**, através do estudo das características.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & b-2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se $b-2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 2 \rightarrow r(A) = r(A|B) = 3 \rightarrow S.P.D$

Se $b-2 = 0 \Leftrightarrow b = 2 \rightarrow r(A) = 2 = r(A|B) \rightarrow S.P.Simplesmente\ Indeterminado$

$$n = 3 \text{ e } r(A) = 2 \text{ logo } n - r(A) = 1$$

c) [1,50] Apresente, se possível, a solução do sistema no caso de este ser possível determinado, através do estudo feito na alínea *b*).

$$a = 1 \; e \; b \neq 2$$

Nota: Se não resolveu as alíneas anteriores, faça $a = 1$ e $b = 3$ e resolva o sistema.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & b-2 & -1 & 2a-2 \\ 0 & 0 & 2 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & -2a+2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$S: (x, y, z) = (1,0,0)$$

d) [1,50] Para $b = 2$, determine a solução geral do sistema homogéneo associado ao sistema apresentado.

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{SPSI}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$$

$$S: (x, y, z) = (-2k, k, 0), k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

4. Considere o seguinte código do *Scilab*,

```
--> b=[1 8 1]';

--> [L U]=gauss(A)
 U  =

   2.    3.    -1.
   0.    0.5    3.5
   0.    0.    -22.

 L  =

   1.     0.    0.
   1.5    1.    0.
  -0.5    7.    1.
```

a) [1,00] Escreva o sistema de equações AX=b.

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & 7 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1/2 & 7/2 \\ 0 & 0 & -22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ 3x + 5y + 2z = 8 \\ -x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

b) [2,00] Resolva o sistema utilizando a factorização A=LU.

$$LY = b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 & 8 \\ -1/2 & 7 & 1 & 1 \end{array}\right] \underbrace{\sim}_{Condensação} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 13/2 \\ 0 & 0 & 1 & -44 \end{array}\right]$$

$$UX = Y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1/2 & 7/2 & 13/2 \\ 0 & 0 & -22 & -44 \end{array}\right] \underbrace{\sim}_{Condensação} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$S: (x, y, z) = (3, -1, 2)$$

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$.

a) [1,50] Mostre que A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

A é um sub-espaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se:

1. $A \neq \emptyset$

Se o vetor nulo pertencer a A está confirmada a primeira condição.
(0,0,0) 0+2*0+3*0=0 , logo $A \neq \emptyset$.

2. $\forall\, u, v \in A \Rightarrow u + v \in A$

c.a. $x + 2y + 3z = 0 \Leftrightarrow x = -2y - 3z \Rightarrow (x, y, z) = (-2y - 3z, y, z)$

Seja $u = (-2u_2 - 3u_3, u_2, u_3)$ e $v = (-2v_2 - 3v_3, v_2, v_3)$

Então $u + v = (-2u_2 - 3u_3 - 2v_2 - 3v_3\,, u_2 + v_2, u_{3+}v_3) =$
$= (-2(u_2 + v_2) - 3(u_3 + v_3)\,, u_2 + v_2, u_{3+}v_3) \in A$

3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}^3, \forall\, u \in A \Rightarrow \alpha u \in A$

$$\alpha\, u = \alpha(-2u_2 - 3u_3, u_2, u_3) = (-2\alpha u_2 - 3\alpha u_3, \alpha u_2, \alpha u_3) \in A$$

Concluindo assim que A é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

b) [1,50] Determine uma base de *A* e indique a sua dimensão.

A dimensão de *A* é igual ao número de variáveis livre, neste caso, y e z, portanto dim(*A*)=2

Uma base para *A* é um conjunto constituído por 2 vetores linearmente independentes de *A*, que verificam a condição imposta. Utilizando a base canónica de R^2 igual a (y,z)=(1,0) e (y,z)=(0,1), cujos vetores são linearmente independentes, obtemos a base

$$\{(-2-0,1,0),(0-3,0,1)\}=\{(-2,1,0),(-3,0,1)\}$$

6. Considere o seguinte código do *Scilab*,

```
-> [vec val]=spec(A)
val  =

  5.    0.
  0.    0.

vec  =

  0.9486833  -0.8944272
  0.3162278   0.4472136
```

a) [1,00] Indique qual o maior valor próprio da matriz *A* e o seu respetivo vetor próprio.

Maior valor próprio: $\lambda_1 = 5$

Respetivo vetor próprio: $V_1 = \begin{bmatrix}0.9486833\\0.3162278\end{bmatrix}$

b) [1,00] A matriz *A* admite inversa. Justifique.

Como $\lambda_2 = 0$, a matriz *A* não admite inversa.

7. [1,00] Averigue se o seguinte conjunto de vetores $\{(1,-2,-3),(3,2,1)\}$ é ou não linearmente independentes. Justifique.

$$\alpha(1,-2,-3)+\beta(3,2,1)=(0,0,0)$$

$$\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\-2 & 2 & 0\\-3 & 1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\0 & 8 & 0\\0 & 10 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 3 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$(\alpha,\beta)=(0,0)$, Solução Trivial, logo os dois vetores são linearmente independentes.

Boa Sorte e Bom Trabalho.