 <div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div> </div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

#### Observações:

A avaliação desta Unidade Curricular, na modalidade de avaliação durante o período de exames, contempla dois elementos com as ponderações: **70% Exame + 30% Trabalho Prático**.

Para a realização desta prova o estudante pode usar um formulário (com até duas páginas A4) manuscrito e criado pelo próprio. No final da prova, **têm de ser entregues** o enunciado, as folhas de resposta e de rascunho, assim como o formulário, todos **devidamente identificados** com o nome e número de estudante.

Bom trabalho!

Eliana Costa e Silva, Isabel Cristina Duarte e Glória Carvalho

### PARTE 1

#### RESPONDA À QUESTÃO 1 NESTA FOLHA. NÃO PRECISA DE JUSTIFICAR A SUA RESPOSTA.

1. Considere os conjuntos  $X = \{x^2 + 1 : x \in \{0, 1\}\}$  e  $Y = \{\emptyset, 0, 1, 2, \{1, 2\}\}$ .

1.1. [0.6] Complete os espaços abaixo com  $\in$  ou  $\subseteq$  por forma a obter afirmações verdadeiras.

$\emptyset$  \_\_\_\_\_  $Y$        $\{0, 1\}$  \_\_\_\_\_  $Y$        $\{1, 2\}$  \_\_\_\_\_  $X$        $\{1, 2\}$  \_\_\_\_\_  $\mathcal{P}(Y)$

1.2. [0.6] Complete os espaços abaixo por forma a obter afirmações verdadeiras.

A função  $f: \{0, 1\} \rightarrow Y$ , definida por  $f(x) = \{x\} \cap X$  é \_\_\_\_\_ (injetiva/não injetiva) e \_\_\_\_\_ (sobrejetiva/não sobrejetiva), portanto é \_\_\_\_\_ (bijetiva/não bijetiva).

1.3. [0.8] Determine:

$X \times Y =$  \_\_\_\_\_

$X^2 =$  \_\_\_\_\_

$\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y) =$  \_\_\_\_\_

$\#(X \oplus Y) =$  \_\_\_\_\_

#### PARA AS QUESTÕES 2 ATÉ 6, APRESENTE TODAS AS JUSTIFICAÇÕES E CÁLCULOS NA FOLHA DE RESPOSTA.

2. [1.2] Tendo em conta as igualdades apresentadas ao lado, determine:

$$\sum_{i=1}^{76} \left(\frac{3}{5}\right)^i$$

$$7 \sum_{i=8}^{45} (i^3 - i^2)$$


$$\frac{5}{3} \prod_{i=97}^{101} 2$$

$\sum_{i=0}^n ar^i, r \neq 0$ (PG)	$a \times \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, r \neq 1$
$\sum_{i=1}^n i$ (PA)	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

3. [1.2] Considere a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 5 \\ S(n) = 3S(n-1) + 4, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

Recorrendo ao algoritmo EGV (*Expand, Guess, Verify*), encontre a fórmula fechada correspondente.

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	

4. Considere o conjunto  $A = \{1,4,6,7\}$ , e as duas relações seguintes definidas em  $A$ :
- $$R = \{(x, y) : |x - y| \text{ é divisível por } 2\} \text{ e } S = \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,6)\}$$

1

4

- 4.1. [0.4] Represente a relação  $R$  graficamente na figura ao lado;


7

6

- 4.2. [0.8] Indique, justificando, se a relação  $R$  é de equivalência e em caso afirmativo escreva o seu conjunto quociente;

- 4.3. [1.2] Calcule:

- $S^{-1} \cup R =$  \_\_\_\_\_
- $S^2 =$  \_\_\_\_\_
- $S \cap R =$  \_\_\_\_\_.

5. Considere o fragmento de código  onde são definidas as matrizes de adjacência  $M1$  e  $M2$  de dois grafos com vértices  $V1=\{a,b,c,d,e,f\}$  e  $V2=\{A,B,C,D\}$ , respetivamente. Com base no *output*, responda às questões seguintes.

<pre>--&gt; M1=[1 0 0 1 0 1; &gt; 1 0 0 0 0 0; &gt; 1 1 0 0 0 1; &gt; 0 0 1 0 1 0; &gt; 0 0 1 0 0 1; &gt; 1 1 0 1 1 0];  --&gt; M2=[1 0 2 1 &gt; 0 0 1 0 &gt; 2 1 1 0 &gt; 1 0 0 1];</pre>	<pre>--&gt; M1^4 ans = 16. 9. 6. 10. 8. 12. 5. 2. 4. 3. 3. 5. 13. 7. 7. 9. 8. 11. 10. 2. 5. 7. 5. 7. 11. 5. 5. 8. 6. 9. 17. 7. 7. 11. 9. 11.</pre>	<pre>--&gt; M2^4 ans = 60. 18. 54. 24. 18. 6. 15. 6. 54. 15. 57. 24. 24. 6. 24. 12.  --&gt; M2+M2^2+M2^3+M2^4 ans = 83. 24. 78. 35. 24. 8. 23. 8. 78. 23. 79. 32. 35. 8. 32. 19.</pre>
--	--	--

- 5.1. Relativamente ao grafo definido pela matriz  $M1$ , indique:

i) [0.6] todos os caminhos de comprimento 4 do segundo para o quinto vértice;

ii) [0.2] o número de caminhos de comprimento 4 do quinto para o quarto vértice;

- 5.2. [0.4] Relativamente ao grafo definido pela matriz  $M2$ , indique justificando se se trata de um grafo conexo;

6. Relativamente ao grafo apresentado ao lado:

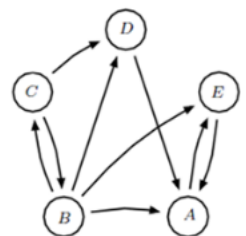
- 6.1. [0.6] indique a ordem, a dimensão, o conjunto dos vértices e das arestas;

Ordem \_\_\_\_\_

Dimensão \_\_\_\_\_

Conjunto das arestas \_\_\_\_\_

Conjunto dos Vértices \_\_\_\_\_



- 6.2. [1.0] determine a matriz de adjacências e determine o grau de cada vértice.


- 6.3. [0.4] averigue, justificando, se se trata de um grafo euleriano ou semi-euleriano, e, se possível, determine um circuito ou caminho de Euler, recorrendo ao Algoritmo de Fleury.

<div>P.PORTO</div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	

Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

## PARTE 2


**RESPONDA ÀS QUESTÕES 7 ATÉ 10 NESTA FOLHA. NÃO PRECISA DE JUSTIFICAR A SUA RESPOSTA.**

7. [0.5] Considere o fragmento de código  onde são definidas as matrizes de adjacência M1 e M2 de dois grafos de vértices {a,b,c,d,e,f} e {A,B,C,D}, respetivamente. Com base no output, podemos afirmar que:

- ☐ os dois grafos são de Hamilton  
☐ apenas o grafo de vértices {a,b,c,d,e,f} é de Hamilton  
☐ nenhum dos grafos é de Hamilton  
☐ apenas o grafo de vértices {A,B,C,D} é de Hamilton

```
--> M1=[0 0 0 0 1 0;  
> 1 0 1 0 0 0;  
> 0 0 0 1 0 0;  
> 1 0 1 0 0 0;  
> 0 0 0 0 0 1;  
> 0 1 0 0 0 0];
```

```
--> M2=[1 1 0 0;  
> 1 1 1 2;  
> 0 1 0 0;  
> 0 2 0 1];
```

8. Com base no fragmento de código  ao lado, podemos afirmar que:

8.1. [0.5] mdc(294, 525) é:

- ☐ 3   ☐ 7   ☐ 21   ☐ nenhuma das anteriores


8.2. [0.5] existe o inverso de 525 modulo:

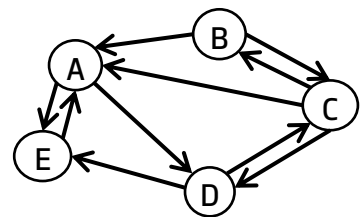
- ☐ 22   ☐ 126   ☐ 294   ☐ nenhuma das anteriores

```
--> factor(22), factor(126), factor(294), factor(525)  
ans =  
2. 11.  
ans =  
2. 3. 3. 7.  
ans =  
2. 3. 7. 7.  
ans =  
3. 5. 5. 7.
```

9. [0.5] Um inverso de 5 modulo 7 é: ☐ 2   ☐ 3   ☐ 4   ☐ 5

10. Considere a rede constituída por cinco páginas web A, B, C, D e E com os links mostrados na imagem ao lado.

10.1. [0.5] Considere que, em cada passo, escolhemos de forma aleatória um link da página web onde estamos. A matriz de transição (definida no ) do processo Markov subjacente é:



☐  
 $T =$   

0.	0.5	0.3333333	0.	1.
0.	0.	0.3333333	0.	0.
0.	0.5	0.	0.5	0.
0.5	0.	0.3333333	0.	0.
0.5	0.	0.	0.5	0.

☐  
 $T =$   


0.	0.	0.	0.5	0.5
0.5	0.	0.5	0.	0.
0.3333333	0.3333333	0.	0.3333333	0.
0.	0.	0.5	0.	0.5
1.	0.	0.	0.	0.

☐  
 $T =$   

0.41	0.59	0.39	0.73	0.54
0.88	0.69	0.92	0.26	0.12
0.11	0.89	0.95	0.5	0.23
0.2	0.5	0.34	0.26	0.63
0.56	0.35	0.38	0.53	0.76

☐  
 $T =$   

0.	0.5	0.33	0.	1.
0.	0.	0.33	0.	0.
0.	0.5	0.	0.5	0.
0.5	0.	0.33	0.	0.
0.5	0.	0.	0.5	0.

10.2. [0.5] Considere os cálculos apresentados no fragmento de código , sendo T a matriz de transição definida na alínea anterior.

```
--> T^6*[1 0 0 0 0]'  
ans =  
0.2916667  
0.0277778  
0.1423611  
0.2291667  
0.3090278  
  
--> T^6*[0 1 0 0 0]'  
ans =  
0.3935185  
0.0601852  
0.1111111  
0.1956019  
0.2395833  
  
--> T^6*[0 0 0 0 1]'  
ans =  
0.4027778  
0.0694444  
0.0833333  
0.2152778  
0.2291667
```

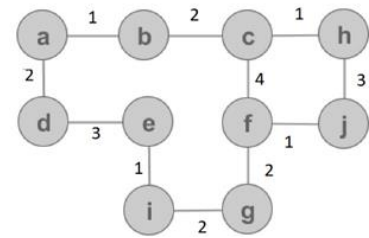
A probabilidade, de começando na página B, seis passos depois não estar nem na página A nem na página C é aproximadamente:

- ☐ 0,39   ☐ 0,11   ☐ 0,50   ☐ 0,56

<div>P.PORTO</div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	

11. Considere o grafo ponderado apresentado ao lado.

11.1. [1.2] Use o algoritmo de *Dijkstra* para encontrar o caminho de menor custo entre *a* e *g*.



**Observação:** Apresente a sua resolução na tabela abaixo.

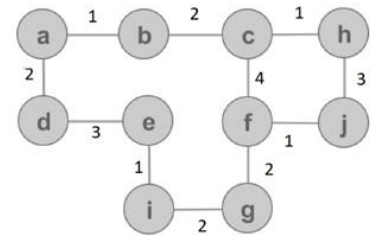
It.	$v_d$ (M)	Mc	A	$v_i, \dots, v_d, v_j$ e $L(v_j)$	X e $X_d$	R: Caminhos mínimos

<div>P.PORTO</div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	


Nome: \_\_\_\_\_ Número: \_\_\_\_\_

11.2. [1.2] Usando o Algoritmo de *Kruskal*, determine uma árvore geradora de custo mínimo do grafo, e indique o seu comprimento.

Observação: Apresente a sua resolução na tabela abaixo.



t	( $v_i, v_j$ )	$S_i$	$S_j$	T	S1	S2	S3	S4	S5	S6	S7	S8	S9	S10	Nr

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2021/2022	Data 01-07-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 3,0 horas	

**PARA AS QUESTÕES SEGUINTE, APRESENTE TODAS AS JUSTIFICAÇÕES E CÁLCULOS NA FOLHA DE RESPOSTA.**

12. [1.0] Determine, recorrendo ao Algoritmo de Euclides, os inteiros  $s$  e  $t$  (coeficientes de Bézout) tais que  $\text{mdc}(32,105) = 105 \times s + 32 \times t$ , e se possível, indique o inverso de 32 mod 105.
13. [0.6] Resolva, se possível, a congruência  $7x \equiv 2 \pmod{12}$ , sabendo que 7 é inverso de 7 modulo 12.
14. [1.0] Escreva a sequência de números pseudo-aleatórios gerada por  $x_{n+1} = (6x_n + 2) \pmod{13}$ , com raiz  $x_0 = 1$ .

15. Considere a função de encriptação  $f(n) = (8n + 1) \pmod{29}$  e ainda as correspondências seguintes:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_	#	@
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- 15.1. [0.4] Mostre que a função de descriptação é definida por  $f^{-1}(n) = (11n + 18) \pmod{29}$ .

- 15.2. [0.8] Descripte a mensagem "@ECC\_".

16. [0.8] Considere o sistema RSA com  $a = 13$  e  $m = 43 \times 59 = 2537$ . Sendo  $b=937$  a chave privada, descripte a mensagem "1590". Use os outputs do Scilab que considerar necessários.

<pre>--&gt; pmodulo(1408,2537) ans =     1408. --&gt; pmodulo(1408^13,2537) ans =      0.</pre>	<pre>--&gt; x=13; --&gt; x_new=1; --&gt; for k=1:1408, &gt;     x_new=pmodulo(x*x_new,2537); &gt; end --&gt; x_new x_new =     271.</pre>
<pre>--&gt; x=1048; --&gt; x_new=1; --&gt; for k=1:13, &gt; x_new=pmodulo(x*x_new,2537); &gt; end --&gt; x_new x_new =     1673.</pre>	<pre>--&gt; x=1590; --&gt; x_new=1; --&gt; for k=1:2537, &gt;     x_new=pmodulo(x*x_new,937); &gt; end --&gt; x_new x_new =     664.</pre>
<pre>--&gt; x=1590; --&gt; x_new=1; --&gt; for k=1:13, &gt;     x_new=pmodulo(x*x_new,2537); &gt; end --&gt; x_new x_new =     1332.</pre>	<pre>--&gt; x=1590; --&gt; x_new=1; --&gt; for k=1:937, &gt;     x_new=pmodulo(x*x_new,2537); &gt; end --&gt; x_new x_new =     1203.</pre>