 <div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div> </div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2017/2018	Data 18-06-2018
	Curso Licenciatura em Engenharia Informática	Hora 14:30	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 2,5 horas	

N.º de aluno: _____ Nome: _____

Observações:

Este exame tem um peso de 70% da classificação Final desta UC.

Os restantes 30% são relativos ao Trabalho Prático **obrigatório** cujo enunciado está no moodle.

Nas perguntas assinaladas com  recorra ao software para evitar os cálculos morosos.

Submeta no moodle um ficheiro com os cálculos que efetue no .

Questão	1	2	3	4	5	6	PARTE 1	7	8	9	10	11	12	13	PARTE 2	TOTAL
Cotação	0,3x3 +0,5x2	1,4	2,0	1,5	1,0	1,0 +1,2	10	2,8	1,2	0,8	1,0	1,0 +1,2	1,0	1,0	10	20

PARTE 1

- Considere o conjunto $X = \{\emptyset, a, b, \{\emptyset\}, \{a\}, \{\emptyset, a, b\}\}$, com $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Indique, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. No caso de ser falsa, corrija a afirmação de forma a torná-la verdadeira.
 - $\{\emptyset, a, \{a\}\} \subseteq X$
 - $\{\emptyset, a, \{b\}\} \in \mathcal{P}(X)$
 - $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^{16}$
 - A função $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $f(x) = \{x\} \cap \{a\}$ é bijetiva.
 - A relação $\Theta \in \mathcal{P}(X)$ definida por $A\Theta B$ se e só se $B \subseteq A$ é uma relação de ordem parcial.

- Considere o conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ : x^3 + 1 < 59\}$, os seus subconjuntos:
 $A = \{x \in U : x^2 \geq 4\}$, $B = \{x \in U : 2 \text{ divide } x\}$ e $C = \{x \in U : |x - 0,3| < 2\}$,
Determine, apresentando todos os cálculos $(A \cup B) \oplus \bar{C}$ e $B \times \overline{A \cap C}$.

- Considere as seguintes relações binárias definidas sobre $\{1,2,3\}$:
 $R = \{(2,2), (1,3), (3,1)\}$ e $S = \{(1,1), (2,2), (2,3), (1,2), (3,3)\}$.
 - Determine, se possível simétrico(S) e $(S \cap R^{-1}) \circ S$
 - Diga, justificando, se alguma das relações R ou S é relação de equivalência, e determine, se possível, a classe de equivalência de 1.

- Determine, apresentando todos os cálculos:

$$\sum_{k=100}^{110} (-1)^{k-1} \times 3k - \sum_{i=1}^{21} \left(\prod_{j=0}^2 (j^2 - j) \right)$$

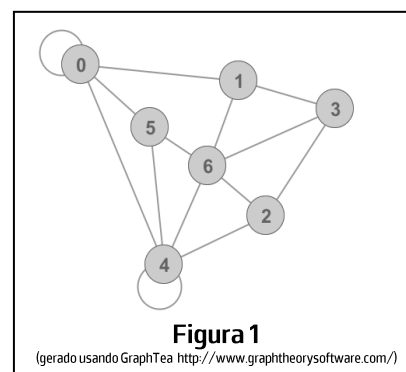
- Considere a fórmula de recorrência dada por: $\begin{cases} G(1) = -5 \\ G(n) = 2G(n-1) + 3, \quad n \geq 2 \end{cases}$
Recorrendo ao algoritmo EGV(Expand, Guess, Verify), encontre a fórmula fechada.

- Considere o grafo \vec{G}_1 definido por $V(\vec{G}_1) = \{a, b, c, d\}$ e $E(\vec{G}_1) = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, d), (c, d), (d, d)\}$, o grafo G_2 representado na Figura 1.

- Represente \vec{G}_1 graficamente, indique a matriz de adjacências de G_2 e determine os graus de cada vértice de \vec{G}_1 .

-  Indique, justificando:

- se possível, para o grafo G_2 , um caminho simples de comprimento 3 do vértice 3 para o vértice 6;
- quantos caminhos de comprimento 4 do primeiro para o terceiro vértice, existem no grafo \vec{G}_1 ;
- se algum dos grafos é fortemente conexo.



<div>P.PORTO</div> <div>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</div>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2017/2018	Data 18-06-2018
	Curso Licenciatura em Engenharia Informática	Hora 14:30	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 2,5 horas	

N.º de aluno: _____ Nome: _____

PARTE 2

7. Uma multinacional pretende testar todas as ligações de circuitos dedicados entre as suas filiais sediadas em 7 países (A-Alemanha, B-Bélgica, C-Canadá, D-Dinamarca, E-Espanha, F-Finlândia e G-Grécia), utilizando uma mensagem de diagnóstico que terá de percorrer todas as ligações. As ligações entre as diferentes filiais são dadas pelo grafo apresentado na **Figura 2**

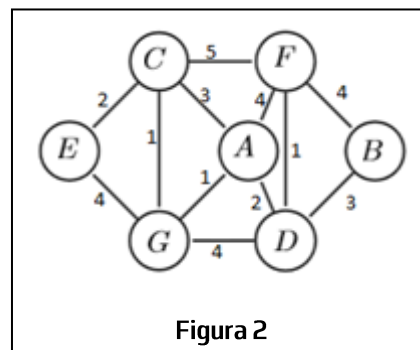


Figura 2

- a) Diga, justificando, se é ou não possível que a mensagem parta da sede na Alemanha, A, percorra todas as ligações exatamente uma vez e retorne à Alemanha. Em caso afirmativo, indique um possível circuito e o respetivo custo.
- b) Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho menor custo entre a Espanha e a Bélgica. Observação: Use uma tabela como a abaixo indicada.

Iteração	Vértice	Caminhos / Custo	Caminhos mínimos

8. Usando o Algoritmo de Euclides, determine os inteiros s e t (coeficientes de Bézout) tais que $\text{mdc}(210,45) = 210s + 45t$.
9. Resolva, se possível, a congruência $5x \equiv 3 \pmod{13}$.
10. Escreva a sequência de números pseudo-aleatórios gerada por $x_{n+1} = (6x_n + 1) \pmod{11}$, com raiz $x_0 = 7$.

11. Considere a função de encriptação $f(n) = (8n + 11) \pmod{29}$. Considere ainda que:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*	@	_
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- a) Encripte a mensagem "LEI".
- b) Escreva a função de descriptação e descripte a mensagem "TOKS".

Observação: $8 \times 11 \equiv 1 \pmod{29}$.

12. Considere o sistema RSA com $p = 43$, $q = 59$ e $a = 13$. Encripte a mensagem "LEI".

13. Considere a rede constituída por 6 páginas web A, B, C, D, E, F com os links mostrados na **Figura 3**.

Suponha que, em cada passo, escolhemos de forma aleatória um link da página web onde estamos.

Escreva a matriz de transição do processo Markov subjacente e calcule a probabilidade, de começando na página D, 10 passos depois estar na página F?

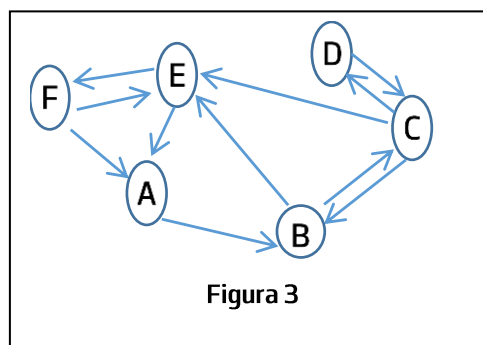


Figura 3

Bom Trabalho
Elia Costa e Silva
Flora Ferreira