Álgebra Linear e Geometria Analítica

1. Conjunto dos Números Complexos (Revisões)

Engenharia Informática/Segurança Informática em Redes e Computadores,
ESTG-P.PORTO

Maria João Polidoro (mjp@estg.ipp.pt)
Teófilo Melo (tmelo@estg.ipp.pt)

2021-2022

Sumário

Introdução

- Leonhard Euler (1707-1783) introduziu o conceito de quantidade imaginária para representar $\sqrt{-1}$.
- $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.
- $\mathbb{C}$ é conjunto dos números complexos.

Forma algébrica

Definição

Seja $z \in \mathbb{C}$ um número complexo. A sua forma algébrica (cartesiana ou retangular) é definida por:

$$z = a + bi$$

onde a, $b \in \mathbb{R}$ e i designa a unidade imaginária.

Definição

Diz-se que z é um número imaginário puro se $a = 0$ e $b \neq 0$. Por outro lado, se $b = 0$ então z é um número real.

Igualdade

Definição

Dois números complexos são iguais, se e só se, têm partes reais e imaginárias iguais, isto é:

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c \wedge b=d.$$

Conjugado

Definição

Chama-se conjugado de um número complexo $z = a + bi$ ao número complexo $\bar{z} = a - bi$, isto é, aquele que tem a mesma parte real e parte imaginária simétrica.

Definição

Seja $z \in \mathbb{C}$ um número complexo.

1. $\bar{z} = z$ se e só se $z \in \mathbb{R}$, isto é, só os números reais são conjugados de si próprios.
2. $\bar{\bar{z}} = z$, isto é, todo o número complexo é conjugado do seu conjugado.

Sumário

Plano de Argand

Propriedades

- O eixo dos *xx* é designado por eixo real.
- O eixo dos *yy* é designado por eixo imaginário.
- O ponto $P(a, b)$ é o afixo (imagem) de z.
- O afixo diz-se um ponto do plano de Argand.
- A cada número complexo z corresponde o vetor $\overrightarrow{OP}$.

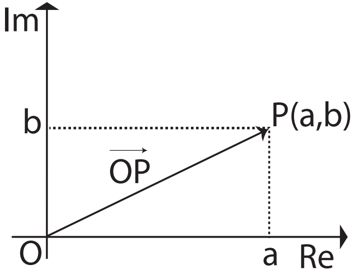


Figura: $z = a + bi$

Plano de Argand

Interpretação geométrica

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$.

- Conjugado: $\bar{z} = a - bi$ é a reflexão de z relativamente ao eixo real.
- Simétrico: $-z = -a - bi$ tem o afixo simétrico ao de z.
- Módulo de z: $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Sumário

Adição de números complexos

Definição

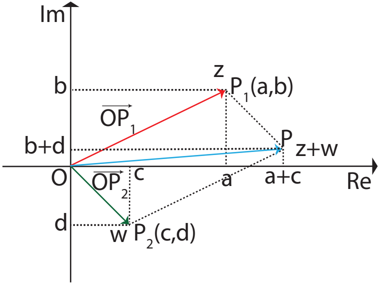
Sejam $z_1 = a+bi$ e $z_2 = c+di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A adição de dois números (ou mais) complexos é ainda um número complexo em que a parte real é a adição das partes reais, e a parte imaginária é a adição das partes imaginárias, ou seja:

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i.$$

Adição de números complexos

Interpretação geométrica

- $z = a + bi \rightarrow P_1(a, b)$
- $w = c + di \rightarrow P_2(c, d)$
- $z \rightarrow$vetor $\overrightarrow{OP_1}$
- $w \rightarrow$vetor $\overrightarrow{OP_2}$
- $z + w = (a + c) + (b + d)i$
- $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$ (regra do paralelogramo)



Subtração de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A subtração de z_1 por z_2 não é mais que a soma de z_1 com o simétrico de z_2, ou seja:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a - c) + (b - d)i.$$

Multiplicação de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. A multiplicação de dois números complexos procede-se como se estivéssemos a multiplicar dois números reais, aplicando a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição algébrica e tendo em conta que $i^2 = -1$, isto é:

$$z_1 \times z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Multiplicação de números complexos

Interpretação geométrica

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos. Tem-se que:

$$z_1 \times z_2 = (a + bi) \times (c + di) = \underbrace{(a + bi) \times c}_{(I)} + \underbrace{(a + bi) \times di}_{(II)}$$

(I) Multiplicação por um número real c - determinar o produto do vetor (a, b) pelo número real c.

(II) Multiplicação por um imaginário puro di - determinar o produto do vetor (a, b) pelo número real d, e fazer uma rotação de 90° ao vetor obtido.

(III) Adicionar os vetores obtidos em (I) e (II).

Multiplicação de números complexos

Interpretação geométrica

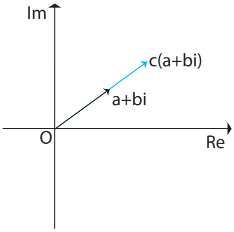


Figura: (I)

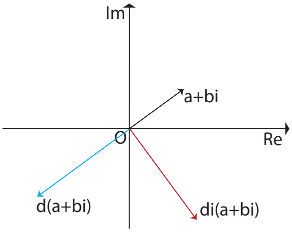


Figura: (II)

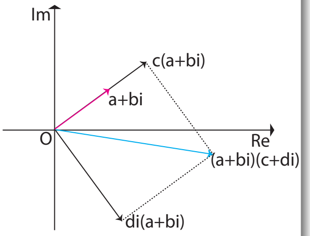


Figura: (III)

Divisão de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois números complexos com a, b, c e $d \in \mathbb{R}$. Tem-se que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \times \bar{z}_2}{z_2 \times \bar{z}_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}.$$

Inverso de um número complexo

Definição

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$. O inverso de z que se representa por z^{-1}, é determinado da seguinte forma:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Potência de base i e expoente $n \in \mathbb{Z}$

Definição

Sabendo que $i^4 = 1$ tem-se que:

$$i^n = i^{4q+r} = \left(i^4\right)^q \times i^r = i^r.$$

Propriedades

Definição

Sejam $z,\ w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

1. $z + \bar{z} = 2a$ e $z \times \bar{z} = a^2 + b^2$
2. $Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$ e $Im(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$, $\overline{z \times w} = \bar{z} \times \bar{w}$ e $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$
4. $z \times \bar{z} = |z|^2$
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Scilab

adição	+
subtração	-
multiplicação	*
divisão	/
potenciação	^
unidade imaginária	% i

Tabela: Operadores aritméticos

$a+bi$	`complex(a,b)`
conjugado	`conj(x)`
parte real	`real(x)`
parte imaginária	`imag(x)`
módulo	`abs(x)`

Tabela: Funções matemáticas

Sumário

Forma trigonométrica

Definição

Seja $z = a + bi \in \mathbb{C}$ um número complexo. A sua forma trigonométrica é definida por:

$$z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$$

com $\rho \in \mathbb{R}$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Forma trigonométrica

- $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ é a medida do comprimento $\overline{OP}$, dito módulo de z.
- θ é a medida do ângulo definido pelo semi-eixo positivo dos xx e pelo segmento $\overline{OP}$, designado por argumento de z, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- $z = a + bi = \rho \operatorname{cis}(\theta) = \rho\,(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))$
- $a = \rho \cos(\theta),\ b = \rho \operatorname{sen}(\theta)$

Forma trigonométrica

Definição

Seja $z = \rho\,\mathrm{cis}(\theta) \in \mathbb{C}$.

1. O conjugado de z é definido por:

$$\bar{z} = \rho\,\mathrm{cis}(-\theta).$$

2. O simétrico de z é definido por:

$$-z = \rho\,\mathrm{cis}(\theta + \pi).$$

Igualdade de números complexos

Definição

Dois números complexos não nulos são iguais se e só se têm módulos iguais, e os seus argumentos diferem apenas por um múltiplo inteiro de 2π, isto é:

$$\rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1) = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2) \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \wedge \theta_1 \equiv \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Multiplicação de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ dois números complexos não nulos. Tem-se que:

$$z_1 \times z_2 = \rho_1 \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2).$$

Divisão de números complexos

Definição

Sejam $z_1 = \rho_1 \operatorname{cis}(\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2 \operatorname{cis}(\theta_2)$ dois números complexos não nulos. Tem-se que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2).$$

Inverso de um número complexo

Definição

Seja $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$ então o inverso de z é definido por:

$$z^{-1} = \rho^{-1} \operatorname{cis}(-\theta).$$

Potência de expoente natural

Definição

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Tem-se que:

$$z^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta).$$

De outra forma:

$$z^{-n} = \frac{1}{z^n} = \frac{1}{\rho^n} \operatorname{cis}(-n\theta).$$

Raiz de índice n

Definição

Seja $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$. Tem-se que:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \cdots, n-1\}.$$