

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2018/2019	Data 19-06-2018
	Curso Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores Licenciatura em Engenharia Informática	Hora 10:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 2,5 horas	

N.º de aluno: _____ Nome: _____

Observações:

Este exame tem um peso de 70% da classificação Final desta UC. Os restantes 30% são relativos ao Trabalho Prático **obrigatório** cujo enunciado está no moodle.

Nas perguntas assinaladas com  recorra ao software para evitar os cálculos morosos. Nas restantes perguntas não são admitidas justificações obtidas com o software.

Submeta no moodle um ficheiro com os cálculos que efetue no .

Bom Trabalho,
Aldina Correia e Eliana Costa e Silva

Questão	1	2	3	4	5	6	PARTE 1	7	8	9	10	11	12	PARTE 2	TOTAL
Cotação	0,9+1,5	0,8+1,3	0,8	0,8	2,0	0,3+0,6+1,0	10	0,8+0,8+1,2	1,2	2,0	0,9	0,9	0,8+1,4	10	20

PARTE 1

1. Considere o conjunto $U = \{x \in \mathbb{Z}_0^+ : x^3 + 1 < 1730\}$ os seus subconjuntos $X = \{3x^2 - x : x \in \mathbb{N} \wedge x < 3\}$ e $Y = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 4 \wedge x \text{ é par}\}$ e o conjunto $A = \{1, 2, \{2\}, 3, \{3\}, \{3, 4\}\}$

1.1. Defina por extensão os conjuntos:

- i) $X \cap \bar{Y}$ ii) $X \oplus (Y - A)$ iii) $\mathcal{P}(Y) \times Y$

1.2. Indique, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. No caso de ser falsa, corrija a afirmação de forma a torná-la verdadeira.

- i) $\{1, \{1\}, 3\} \subseteq A$ ii) $\emptyset, \{2\}, X \in \mathcal{P}(X)$ iii) $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^6$
- iv) A função $f: X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ tal que $f(x) = \{x\}$ é sobrejetiva. v) Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = 2x$, então $f(\mathbb{Z}) = 2$

2. Considere a relação $S = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x + y \text{ é inteiro}\}$ e a relação $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$ definida sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.1. Mostre que S é uma relação de equivalência em \mathbb{Z} e indique a classe de equivalência de 7.

2.2. Indique o domínio e o contradomínio de R e calcule: i) R^{-1} , ii) $R \circ R^{-1}$, iii) $R \cap S$ e iv) reflexivo(R).

3. Determine, apresentando todos os cálculos, e confirme o resultado usando o .

3.1.

$$\sum_{k=1000}^{1011} (-1)^{k-1} \times 3 + \sum_{i=50}^{60} [(-1)^i]$$

3.2.

$$\sum_{i=1}^{201} \left(\prod_{j=6}^8 (j-3) \right)$$

4. Considere a fórmula de recorrência dada por: $\begin{cases} G(1) = 2 \\ G(n) = 5G(n-1) + 1, \quad n > 1 \end{cases}$

Recorrendo ao algoritmo EGV (*Expand, Guess, Verify*), encontre a fórmula fechada.



5. Considere o grafo G_1 definido por $V(\vec{G}_1) = \{a, b, c, d\}$ e $E(\vec{G}_1) = \{(a, a), (a, b), (a, c), (b, c), (c, b), (c, d)\}$ e o grafo G_2 cujos vértices são A, B, C, D, E e a matriz de adjacências é introduzida no Scilab usando o código:

M= [1 1 0 1 0; 1 0 1 0 0; 0 1 0 1 1; 1 0 1 0 1; 0 0 1 1 0]

5.1. Relativamente ao grafo \vec{G}_1 , indique a matriz de adjacências e os grau dos seus vértices.

5.2. Relativamente a G_2 , represente graficamente e indique, justificando, quantos caminhos de comprimento 7 existem do vértice C para o vértice D.

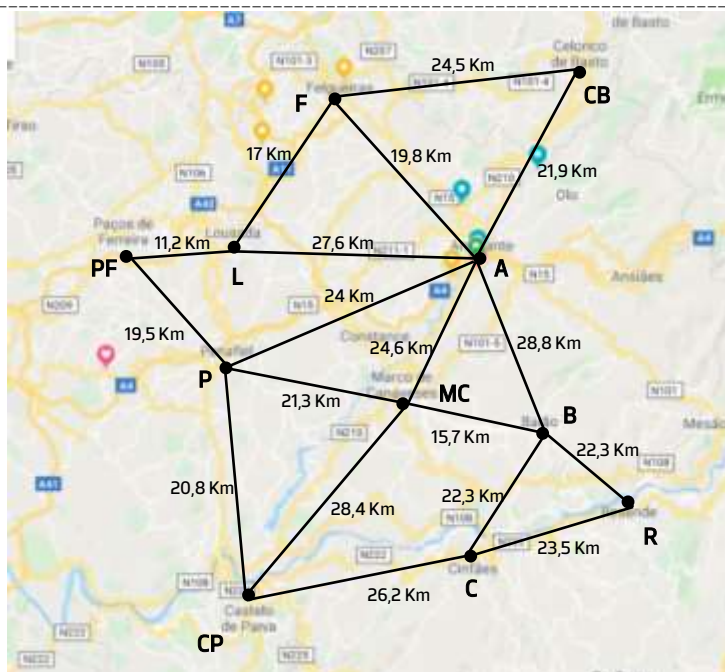
5.3. Diga, justificando se algum dos grafos é conexo ou fortemente conexo.

		Tipo de Prova Exame de Época Normal	Ano letivo 2018/2019	Data 19-06-2018
		Curso Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores Licenciatura em Engenharia Informática		Hora 10:00
		Unidade Curricular Matemática Discreta		Duração 2,5 horas

N.º de aluno: _____ Nome: _____

6. Considere o grafo ao lado onde estão representados os 11 concelhos da Região do Tâmega e Sousa e algumas das distâncias em km entre cada um deles.

Concelhos	Vértice
Amarante	A
Baião	B
Castelo de Paiva	CP
Celorico de Basto	CB
Cinfães	C
Felgueiras	F
Lousada	L
Marco de Canaveses	MC
Paços de Ferreira	PF
Penafiel	P
Resende	R



- 6.1. Identifique um circuito de comprimento 6 e indique o número de km percorridos.
- 6.2. Podemos afirmar que o grafo é Euleriano? E semi-Euleriano? Justifique indicando o grau de cada vértice.
- 6.3. Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto entre Paços de Ferreira e Resende.

PARTE 2

7. A empresa **PC-Now** dá assistência nas instalações dos seus localizadas em cada um dos 11 concelhos da Região do Tâmega e Sousa (Ver grafo acima). Para atender os clientes o mais rapidamente possível a empresa precisa de visitar cada concelho uma única vez e no fim voltar à sua sede em P.

- 7.1. Indique um possível circuito para responder a esta situação e classifique-o.

- 7.2. Por questões de manutenção a estrada que liga B a R está interdita. Ainda é possível efetuar um circuito que passe por todos os concelhos exatamente uma vez? Justifique.

8. Considere a árvore:

- 8.1. Indique:

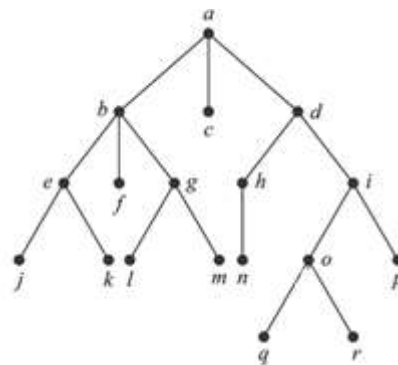
Um vértice interno _____ Um ascendente de i _____

Um irmão de e _____ O pai de o _____

A profundidade do vértice m _____

- 8.2. Desenhe uma subárvore com raiz em d .

9. Usando o Algoritmo de Euclides, determine os inteiros s e t (coeficientes de Bézout) tais que $\text{mdc}(210, 68) = 210s + 68t$ e determine, se possível, o inverso de $68 \bmod 210$.



10. Resolva, se possível, a congruência $6x \equiv 3 \pmod{11}$.

11.  Escreva a sequência de números pseudo-aleatórios gerada por $x_{n+1} = (6x_n + 2) \bmod 13$ e com raiz $x_0 = 4$.

12. Considere a função de encriptação $f(n) = (11n + 1) \bmod 29$. Considere ainda que:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	_	#	@
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

- ### 12.1. Encripte a mensagem "SPAM".

- 12.2. Escreva a função de descriptação e descripte a mensagem "COG".