P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2018/2019	Data 12-04-2019
	Curso Licenciatura em Engenharia Informática Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores		Hora 00:00
	Unidade Curricular Matemática Discreta		Duração 1,5 horas

Observações

Responda às questões que se seguem na folha do enunciado da prova.

Submeta no moodle um ficheiro com os cálculos que efetue no Scilab.

Na realização desta prova é permitido usar formulário em formato A4, manuscrito pelo estudante que está a realizar o teste/exame. O Formulário tem que conter o nome e número de aluno e deve ser entregue junto com a folha de respostas.

VERSÕES – 10AbrilV1 + 10AbrilV2 + 12AbrilV3 + 12AbrilV4

NOTAS:

- Tirei o 4 do conjunto Y porque eram muitos elementos. Os conteúdos e é mais fácil corrigir. Por exemplo
- Falta ao produto cartesiano e complementar (temos de ter o conjunto universo e não temos)
- adicionei o conjunto Z (ou C conforme as versões) e alterei a 1.2.2 e 1.2.3.
- Falta funções --- acrescentei 1.1.5 e 1.1.6

1. Considere os conjuntos

10AbrilV1 $X = \{x^2 - x : x \in \{0,1,2,3\}\}$, $Y = \{\{1\}, 1, 2, \{2\}, 3, \{3,4\}\}$ e $Z = \{x \in N : x < 3 \; e \; x \; é \; ímpar\} = \{1\}$

10AbrilV2 $X = \{|x-2| : x \in \{0,1,2,3\}\}$, $Y = \{1, 2, \{2\}, 3, \{1,2,3\}, 4\}$ e $Z = \{x \in N : x < 4 \; e \; x \; é \; par\} = \{2\}$

12AbrilV3 $A = \{a^2 - a : a \in \{0,1,2,3\}\}$, $B = \{\{1\}, 1, 2, \{2\}, 3, \{3,4\}\}$ e $C = \{x \in N : x < 3 \; e \; x \; é \; ímpar\} = \{1\}$

12AbrilV4 $A = \{|a-2| : a \in \{0,1,2,3\}\}$, $B = \{1, 2, \{2\}, 3, \{1,2,3\}, 4\}$ e $C = \{x \in N : x < 4 \; e \; x \; é \; par\} = \{2\}$

1.1. Indique, se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa. No caso de ser falsa, corrija a afirmação de forma a torná-la verdadeira.

1.1.1. $\{\emptyset, 1, \{1\}\} \subseteq Y$	1.1.2. $\{\emptyset, \{2\}, \{2,6\}\} \in \mathcal{P}(X)$
1.1.3. $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^8$	1.1.4. $\#Y = 7$
1.1.5. A função $f : X \to \mathcal{P}(X)$ tal que $f(x) = \{x\}$ é injetiva e sobrejetiva. F é injetiva e não sobrejetiva	1.1.6. Seja $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 3x$, então $g^{-1}(Z) = 3$ Falso, $g^{-1}(\{1\}) = 1/3$

PROPOSTA DE CORREÇÃO

Temos que

10AbrilV1 $X = \{x^2 - x : x \in \{0,1,2,3\}\} = \{0^2 - 0, 1^2 - 1, 2^2 - 2, 3^2 - 3\} = \{0, 0, 2, 6\} = \{0,2,6\}$

$$Y = \{\{1\}, 1, 2, \{2\}, 3, \{3,4\}\}$$

10AbrilV2 $X = \{|x-2| : x \in \{0,1,2,3\}\} = \{2,1,0,1\} = \{0,1,2\}$ e $Y = \{1, 2, \{2\}, 3, \{1,2,3\}, 4\}$

12AbrilV3 $A = \{a^2 - a : a \in \{0,1,2,3\}\}$ e $B = \{\{1\}, 1, 2, \{2\}, 3, \{3,4\}\}$ **É IGUAL A** 10AbrilV1

12AbrilV4 $A = \{|a-3| : a \in \{0,1,2,3\}\}$ e $B = \{1, 2, \{2\}, 3, \{1,2,3\}, 4\}$ **É IGUAL A** 10AbrilV2

1.1.1. 10AbrilV1 $\{\emptyset, 1, \{1\}\} \subseteq Y$ Afirmação falsa (porque $\{\emptyset, 1, \{1\}\}$ não é subconjunto de Y uma vez que $\emptyset$ não é elemento de Y). Possíveis respostas: $\{1, \{1\}\} \subseteq Y$, $\{\emptyset, 1, \{1\}\}$ não está contido Y

10AbrilV2 $\{1,\{1\},4\} \subseteq Y$ Afirmação falsa (porque $\{1,\{1\}\}$ não é subconjunto de Y uma vez que $\{1\}$ não é elemento de Y). Possíveis respostas: $\{1\} \subseteq Y$, $\{1,\{1\},4\}$não está contido Y
12AbrilV3 $\{\emptyset,2,\{2\}\} \subseteq B$
12AbrilV4 $\{1,\{1\},3\} \subseteq B$

1.1.2. 10AbrilV1 $\{\emptyset,\{2\},\{2,6\}\} \in \mathcal{P}(X)$ A afirmação falsa. $\emptyset,\{2\},\{2,6\}$ são elementos de $\mathcal{P}(X)$ mas $\{\emptyset,\{2\},\{2,6\}\}$ não é, portanto $\{\emptyset,\{2\},\{2,6\}\} \subset \mathcal{P}(X)$ ou $\emptyset,\{2\},\{2,6\} \in \mathcal{P}(X)$.
10AbrilV2 $\emptyset,\{2\},\{1,2,3\} \in \mathcal{P}(X)$ A afirmação é verdadeira.
12AbrilV3 $\{\emptyset,\{1\},\{2,6\}\} \in \mathcal{P}(A)$ A afirmação falsa
12AbrilV4 $\emptyset,\{1\},\{2,3\} \in \mathcal{P}(A)$ A afirmação é verdadeira.

1.1.3. 10AbrilV1 $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^8$ A afirmação é verdadeira $\#\mathcal{P}(X) = 2^3 = 8$ e $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\#\mathcal{P}(X)} = 2^8$
10AbrilV2 $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^6$ A afirmação é falsa $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) = 2^8$
12AbrilV3 $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = 2^8$
12AbrilV4 $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = 2^6$

1.1.4. 10AbrilV1 $\#Y = 7$ A afirmação é falsa. Resposta: $\#Y = 6$
10AbrilV2 $\#Y = 6$ A afirmação é verdadeira
12AbrilV3 $\#\mathrm{B} = 7$ A afirmação é falsa. Resposta: $\#Y = 6$
12AbrilV4 $\#\mathrm{B} = 6$ A afirmação é verdadeira

1.1.5 A função $f: X \to \mathcal{P}(X)$ tal que $f(x) = \{x\}$ é injetiva e sobrejetiva. F é injetiva e não sobrejetiva 10AbrilV1 A função $f: A \to \mathcal{P}(A)$ tal que $f(a) = \{a\}$ é injetiva e sobrejetiva. 12AbrilV3	1.1.6 Seja $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 3x$, então $g^{-1}(Z) = 3$ Falso, $g^{-1}(\{1\}) = 1/3$ 10AbrilV1 Seja $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(a) = 3a$, então $g^{-1}(Z) = 3$ Falso, $g^{-1}(\{1\}) = 1/3$ 12AbrilV3
1.1.7 A função $f: X \to \mathcal{P}(X)$ tal que $f(x) = \{x\}$ é bijetiva F é injetiva e não sobrejetiva 10AbrilV2	1.1.8 Seja $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = 2x$, então $g^{-1}(Z) = 2$ Falso, $g^{-1}(\{1\}) = 1/2$ 10AbrilV2

1.2. Defina por extensão os conjuntos:
1.2.1. $X \cup Y$
1.2.2. $X \oplus (Y - C)$
1.2.3. $\mathcal{P}(X) \cap Y$ --- $\mathcal{P}(Z) \cap Y$

PROPOSTA DE CORREÇÃO

1.2.1. 10AbrilV1 $X \cup Y = \{0,2,6\} \cup \{\{1\},1,2,\{2\},3,\{3,4\}\} = \{0,\{1\},1,2,\{2\},3,\{3,4\},6\}$
10AbrilV2 $X \cup Y = \{0,1,2\} \cup \{1,2,\{2\},3,\{1,2,3\},4\} = \{0,1,2,\{2\},3,\{1,2,3\},4\}$
12AbrilV3 $A \cap B = \{0,2,6\} \cap \{\{1\},1,2,\{2\},3,\{3,4\}\} = \{2\}$
12AbrilV4 $A \cap B = \{0,1,2\} \cap \{1,2,\{2\},3,\{1,2,3\},4\} = \{1\}$

NOTA: $X \oplus (Y-X) = (X \cup (Y-X)) \cap (X \cap (Y-X)) = (X \cup Y) \cap \emptyset = X \cup Y$

$(Y-X) \oplus X = ((Y-X) \cup X) \cap ((Y-X) \cap X) = (X \cup Y) \cap \emptyset = X \cup Y$

Fica repetido nas versões 1 e 2!!

1.2.2. 10 AbrilV1 $X \oplus (Y-Z) = \{0,2,6\}$

10AbrilV2 $X \oplus (Y-Z) = \{0,1,2\}$

12AbrilV3 $A \oplus (B-C) = \{0,2,6\}$

12AbrilV4 $A \oplus (B-C) = \{0,1,2\}$

1.2.3

10AbrilV1 $\mathcal{P}(Z) \times Z = \{\emptyset, \{1\}\} \times \{1\} = \{(\emptyset, 1), (\{1\}, 1)\}$

10AbrilV2 $Z \times \mathcal{P}(Z) = \{2\} \times \{\emptyset, \{2\}\} = \{(2, \emptyset), (2, \{2\})\}$

12AbrilV3 $\mathcal{P}(C) \times C = \{\emptyset, \{1\}\} \times \{1\} = \{(\emptyset, 1), (\{1\}, 1)\}$

12AbrilV4 $C \times \mathcal{P}(C) = \{2\} \times \{\emptyset, \{2\}\} = \{(2, \emptyset), (2, \{2\})\}$

1. Considere as relações

10AbrilV1

$R = \{(x,y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x-y \text{ é inteiro}\}$ e $S =$ {(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)} definida sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$.

10AbrilV2

$R =$ {(1,3),(1,4),(3,3),(3,1)} definida sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$ e $S = \{(x,y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x+y \text{ é inteiro}\}$.

12AbrilV3

$R =$ {(1,3),(1,4), (1,1), (4,1)} definida sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$ e $S = \{(x,y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x+y \text{ é inteiro}\}$

12AbrilV4

$R = \{(x,y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x-y \text{ é inteiro}\}$ e $S =$ {(2,3),(2,1),(3,2),(4,4)} definida sobre o conjunto $\{1,2,3,4\}$.

Aldina, o teste demora muito a fazer por isso coloquei a relação S com menos elementos porque é mais rápido de resolver e continuamos a conseguir avaliar se os alunos sabem a matéria. Para além disso faltavam os conceitos de simétrico, reflevivo e transitivo .

2.1. Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. 10AbrilV1e12AbrilV4
Mostre que S é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. 10AbrilV2 e 12AbrilV3

2.2. Calcule a classe de equivalência de 2, relativamente à relação R. 10AbrilV1e12AbrilV4
Calcule a classe de equivalência de 2, relativamente à relação S. 10AbrilV2 e 12AbrilV3

2.3. Indique o domínio e o contradomínio de S. 10AbrilV1e12AbrilV4
Indique o domínio e o contradomínio de R 10AbrilV2 e 12AbrilV3

2.4. Calcule $S \circ S; S^{-1}; S^{-1} \cap R$ e simétrico(S) 10AbrilV1e reflexivo(S)12AbrilV4
Calcule $R \circ R; R^{-1}; R^{-1} \cap S$ e simétrico(R)10AbrilV2 e reflexivo (R)12AbrilV3

PROPOSTA DE CORREÇÃO

2.1. Mostre que R é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$. 10AbrilV1e12AbrilV4 R 10AbrilV2 e 12AbrilV3 S

10AbrilV1

$R = \{(x,y): x, y \in \mathbb{Z} \text{ e } x-y \text{ é inteiro}\} = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Reflexividade: Seja $x \in \mathbb{Z}$. Temos que $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, portanto R é reflexiva.

Simetria: Sejam x, y dois números inteiros. Temos que se $x - y$ é um número inteiro também $y - x$ é inteiro, donde, se $(x,y) \in R$ então $(y,x) \in R$, e portanto a relação R é simétrica.

Transitividade: Sejam $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$, então $x - y$ é inteiro e $y - z$ é inteiro

NOTA: para as outras versões é igual. Apenas fica + em vez de –.

2.2. Calcule a classe de equivalência de 2, relativamente à relação R. 10AbrilV1e12AbrilV4 R 10AbrilV2 e 12AbrilV3 S

10AbrilV1

$[2]_R = \mathbb{Z}$, uma vez que $x - 2 \in \mathbb{Z}$ para qualquer $x \in \mathbb{Z}$.

NOTA: para as outras versões é igual. Apenas fica + em vez de -.

2.3. Indique o domínio e o contradomínio de S. 10AbrilV1e12AbrilV4 S e10AbrilV2 e 12AbrilV3 R

10AbrilV1 S ={(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)} ---- dom(S)={1,2,3} e cdom(S)={1,2}

10AbrilV2 R ={(1,3),(1,4),(3,3),(3,1)} ---- dom(R)={1,3} e cdom(R)={1,3,4}

12AbrilV3 R ={(1,3),(1,4), (1,1), (4,1)} ---- dom(R)={1,4} e cdom(R)={1,3,4}

12AbrilV4 S ={(2,3),(2,1),(3,2),(4,4)} ---- dom(S)={2,3,4} e cdom(S)={1,2,3,4}

2.5. Calcule $S \circ S; S^{-1}; S^{-1} \cap R$ e simétrico(S)10AbrilV1e reflexivo(S)12AbrilV4

10AbrilV1

$S \circ S = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (3,1), (3,2)\}$

S ={(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)} --- S^{-1} ={(2,1),(1,1), (2,2),(2,3)} FALTA ORDENAR!!!

$S^{-1} \cap R = S^{-1} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = S^{-1}$

S ={(1,2),(2,1),(2,2),(3,2)} --- simétrico(S) =S∪ $\{(2,3)\}$ ={(1,2),(2,1),(2,2),(3,2),(2,3)} FALTA ORDENAR!!!

12AbrilV4

$S \circ S = \{(2,2), (3,3), (3,1)\}$

S ={(2,3),(2,1),(3,2),(4,4)} --- S^{-1} ={(3,2),(1,2), (2,3),(4,4)} FALTA ORDENAR!!!

$S^{-1} \cap R = S^{-1} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = S^{-1}$

S ={(2,3),(2,1),(3,2),(4,4)}--- reflexivo (S) =S∪ $\{(1,1), (2,2), (3,3)\}$ = {(2,3),(2,1),(3,2),(4,4), $(1,1), (2,2), (3,3)$} FALTA ORDENAR!!!

Calcule $R \circ R; R^{-1}; R^{-1} \cap S$ e simétrico(R)10AbrilV2 e reflexivo (R)12AbrilV3

10AbrilV2

$R \circ R = \{(1,3), (3,1), (3,3), (3,4)\}$

R ={(1,3),(1,4),(3,3),(3,1)} ---R^{-1} ={(3,1),(4,1),(3,3),(1,3)} FALTA ORDENAR!!!

$R^{-1} \cap S = R^{-1} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = R^{-1}$

Simétrico(R) =R ∪{(4,1)} ={(1,3),(1,4),(3,3),(3,1),(4,1)} FALTA ORDENAR!!!

12AbrilV3

$R \circ R = \{(1,1), (1,4), (4,3), (4,4)\}$

R ={(1,3),(1,4), (1,1), (4,1)} ---R^{-1} ={(3,1),(4,1),(1,1),(1,4)} FALTA ORDENAR!!!

$R^{-1} \cap S = R^{-1} \cap (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) = R^{-1}$

reflexivo (R)=R ∪{(2,2),(3,3),(4,4)} ={(1,3),(1,4), (1,1), (4,1),(2,2),(3,3),(4,4)} FALTA ORDENAR!!!

3. Determine, apresentando todos os cálculos:

10AbrilV1	$\sum_{i=0}^{100} 3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^i + \sum_{i=5}^{50} [(-1)^i]$
	`--> sum(3*((-1/2)^k1))`
	`ans =`
	`2.`
	`--> k2=5:50;`
	`--> sum(floor((-1)^k2))`
	`ans =`
	`0.`
		$\sum_{j=1}^{30} \prod_{k=10}^{12} (k-1)$
		$\sum_{j=1}^{30} (10-1) \times (11-1) \times (12-1)$
		$= \sum_{j=1}^{30} 9 \times 10 \times 11 = \sum_{j=1}^{30} 990$
		$= 990 \times (30 - 1 + 1) = 29700$
		`k2=10:12;`

		`soma=0;`
		`for k1=1:30`
		`    soma=soma+prod(k2-1)`
		`end`

10AbrilV2	$\sum_{i=0}^{110} 5 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^i + \sum_{i=0}^{25} [(-1)^i]$	$\sum_{j=1}^{25} \prod_{k=20}^{22} (k-2)$ $\sum_{j=1}^{25} (20-2) \times (21-2) \times (22-2)$ $= \sum_{j=1}^{25} 18 \times 19 \times 20 = \sum_{j=1}^{25} 6840$ $= 6840 \times (25-1+1) = 171000$
12AbrilV3	$\sum_{i=0}^{105} 4 \times \left(-\frac{1}{4}\right)^i + \sum_{i=0}^{30} [(-1)^i]$	$\sum_{j=1}^{60} \prod_{k=5}^{7} (k+1)$ $\sum_{j=1}^{60} (5+1) \times (6+1) \times (7+1)$ $= \sum_{j=1}^{60} 6 \times 7 \times 8 = \sum_{j=1}^{60} 336$ $= 336 \times (60-1+1) = 20160$
12AbrilV4	$\sum_{i=0}^{115} 2 \times \left(-\frac{1}{5}\right)^i + \sum_{i=0}^{45} [(-1)^i]$	$\sum_{j=1}^{55} \prod_{k=8}^{10} (k+2)$ $\sum_{j=1}^{55} (8+2) \times (9+2) \times (10+2)$ $= \sum_{j=1}^{55} 10 \times 11 \times 12 = \sum_{j=1}^{60} 1320$ $= 1320 \times (55-1+1) = 72600$

4. Considere a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} G(1) = 2 \\ G(n) = 7\,G(n-1) + 1, \quad n > 1 \end{cases}$$

Recorrendo ao algoritmo EGV(*Expand*, *Guess*, *Verify*), encontre a fórmula fechada.

10AbrilV1	$\begin{cases} G(1) = 2 \\ G(n) = 7\,G(n-1) + 1, \quad n > 1 \end{cases}$	$G(n) = 7^{n-1}G(1) + 7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0$ $= 2 \times 7^{n-1} + 7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0, n \geq 1$
10AbrilV2	$\begin{cases} G(1) = 3 \\ G(n) = 5\,G(n-1) + 1, \quad n \geq 2 \end{cases}$	

12AbrilV3	$\begin{cases} G(1) = 4 \\ G(n) = 3\,G(n-1) + 1, \;\; n \geq 2 \end{cases}$	
12AbrilV4	$\begin{cases} G(1) = 5 \\ G(n) = 2\,G(n-1) + 1, \;\; n > 1 \end{cases}$	

PROPOSTA DE CORREÇÃO

Expand

$$G(n) = 7\,G(n-1) + 1 = 7[7\,G(n-2) + 1] + 1 = 7^2 G(n-2) + 7 + 1$$

$=7^2[7\,G(n-3) + 1] + 7 \times 1 + 1 = 7^3 G(n-3) + 7^2 + 7 + 1$

$=7^3[7\,G(n-4) + 1] + 7^2 + 7 + 1 = 7^4 G(n-4) + 7^3 + 7^2 + 7 + 1$

Guess

$$G(n) = 7^k G(n-k) + 7^{k-1} + 7^{k-2} + \cdots + 7^1 + 7^0$$

Se $n - k = 1$, temos

$$G(n) = 7^{n-1} G(1) + 7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0 = 2 \times 7^{n-1} + 7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0, n \geq 1$$

Verify

Passo Base - $G(1) = 2 \times 7^0 = 2$ Verdadeiro

Passo indutivo – Hipótese: $G(k) = 2 \times 7^{k-1} + 7^{k-2} + \cdots + 7^1 + 7^0$

Tese: $G(k+1) = 2 \times 7^k + 7^{k-1} + \cdots + 7^1 + 7^0$

Temos que

$G(k+1) = 7G(k) + 1$, por definição de G

$= 7[2 \times 5^{k-1} + 5^{k-2} + \cdots + 7^1 + 7^0] + 1$, pela hipótese de indução

$= 2 \times 7^k + 7^{k-1} + \cdots + 7^1 + 7^0$ c.q.m.

Logo, a formula fechada para a recorrência apresentada é $G(n) = 2 \times 7^{n-1} + 7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0$.

Esta parte é opcional!!!

Adicionalmente, como

$$7^{n-2} + 7^{n-3} + \cdots + 7^1 + 7^0 = \sum_{i=0}^{n-2} 7^i = 1 \times \frac{1 - 7^{n-2+1}}{1 - 7} = -\frac{1 - 7^{n-1}}{6}$$

(soma de uma progressão geométrica – ver Teorema 5 da pág. 28)

Temos que $G(n) = 2 \times 7^{n-1} - \frac{1-7^{n-1}}{6} = -\frac{1}{6} + \left(2 + \frac{1}{6}\right) \times 7^{n-1} = -\frac{1}{6} + \frac{13}{6} \times 7^{n-1}, n \geq 1$

<table>
<tr><td rowspan="3">ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</td><td>Tipo de Prova
Teste 1</td><td>Ano letivo
2018/2019</td><td>Data
12-04-2019</td></tr>
<tr><td colspan="2">Curso
Licenciatura em Engenharia Informática
Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores</td><td>Hora
00:00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Curricular
Matemática Discreta</td><td>Duração
1,5 horas</td></tr>
</table>

5. Considere o grafo G_1 definido por V(G_1) = {a, b, c, d, e} e E(G_1) = { (a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)}, o grafo $\vec{G}_2$ representado na **Figura 1** e o grafo $\vec{G}_3$ cujos vértices são A, B, C, D e a matriz de adjacências é introduzida no Scilab usando o código:

```
-->M=[1 1 0 0; 1 0 0 2; 1 1 0 0; 1 0 0 1]
```

```
IDEIA v1 G1 não orientado V2 orientado
V2 G1 orientado V2 não orientado
```

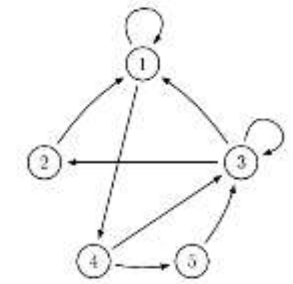
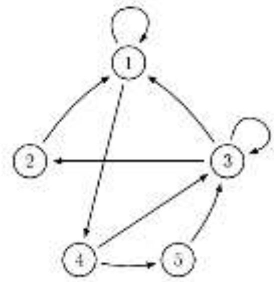
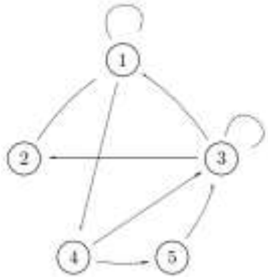
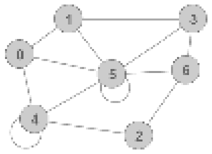
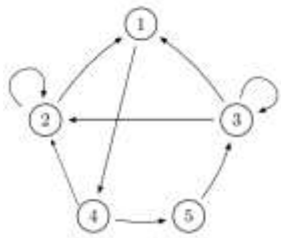
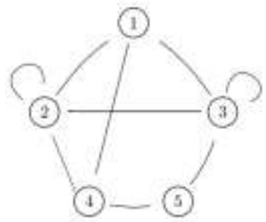
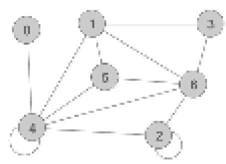


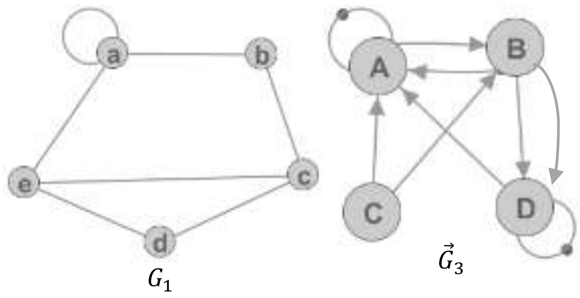
Figura 1

<table>
<tr><td></td><td>10AbrilV1</td><td>10AbrilV2</td><td>12AbrilV3</td><td>12AbrilV4</td></tr>
<tr><td>G1</td><td>Não orientado
V(G_1) = {a, b, c, d, e} e E(G_1) = { (a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)}</td><td>Orientado
V($\vec{G}_1$) = {a, b, c, d, e} e E($\vec{G}_1$) = { (a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)}</td><td>Não orientado
V(G_1) = {a, b, c, d, e} e E(G_1) = { (a, b), (a, e), (b,b),(b, c), (b, d), (c, e), (d, e)}</td><td>Orientado
V($\vec{G}_1$) ={a, b, c, d, e} e E($\vec{G}_1$) = { (a, b), (a, e), (b,b),(b, c), (b, d), (c, e), (d, e)}</td></tr>
<tr><td>G2</td><td></td><td>
O de baixo é maior. Acho melhor ficar para depois

Igual a LEI1T2_v1 do ano passado</td><td></td><td>
O de baixo é maior. Acho melhor ficar para depois

Igual a LEIT2_v2 do ano passado</td></tr>
<tr><td>G 3</td><td>M=[1 1 0 0; 1 0 0 2; 1 1 0 0; 1 0 0 1]</td><td>M=[1 1 0 0; 1 1 0 0; 1 0 0 2; 1 0 0 1]
(Troquei a 2.ª com a 3.ª linha)</td><td>M=[1 0 0 2;
1 1 0 0;
1 1 0 0; 1 0 0 1]
(Troquei a 1.ª com a 2.ª linha)</td><td>M=[1 0 0 1;
1 1 0 0;
1 1 0 0; 1 0 0 2]
(Troquei a 1.ª com a 4.ª linha)</td></tr>
</table>

5.1. Indique a matriz de adjacências de $\vec{G}_2$

$$M_{\vec{G_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2. Represente G_1 e $\vec{G}_3$ graficamente



5.3. Determine os graus de cada vértice de G_1 e $\vec{G}_3$

G_1

$$grau(a) = 4; grau(b) = 2; grau(c) = 3; grau(d) = 2; grau(e) = 3$$

$\vec{G}_3$

$grau^e(A) = 4;\ grau^s(A) = 2;$
$grau^e(B) = 2; grau^s(B) = 3;$
$grau^e(C) = 0; grau^s(C) = 2;$
$grau^e(D) = 3; grau^s(D) = 2$

5.4. Indique, justificando quantos caminhos de comprimento 5 do vértice C para o vértice B, existem no grafo $\vec{G}_3$;

10AbrilV1
10AbrilV2 comprimento 4 do vértice B para o vértice C, existem no grafo $\vec{G}_3$;
12AbrilV3 comprimento 5 do vértice A para o vértice C, existem no grafo $\vec{G}_3$;
12AbrilV4 comprimento 4 do vértice C para o vértice A, existem no grafo $\vec{G}_3$;

	10AbrilV1	10AbrilV2		
G1	Não orientado V(G_1) = {a, b, c, d, e} e E(G_1) = { (a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)}	Orientado V($\vec{G}_1$) = {a, b, c, d, e} e E($\vec{G}_1$) = { (a, a), (a, b), (a, e), (b, c), (c, d), (c, e), (d, e)}	Não orientado V(G_1) = {a, b, c, d, e} e E(G_1) = { (a, b), (a, e), (b,b),(b, c), (b, d), (c, e), (d, e)}	Orientado V($\vec{G}_1$) ={a, b, c, d, e} e E($\vec{G}_1$) = { (a, b), (a, e), (b,b),(b, c), (b, d), (c, e), (d, e)}

```
MG3=[1 1 0 0; 1 0 0 2; 1 1 0 0; 1 0 0 1]
MG3^5
--> M^5
 ans  =

   24.   11.   0.   18.
   29.   13.   0.   22.
   24.   11.   0.   18.
   20.   9.    0.   15.
```

Existem 11 caminhos

5.5. Indique, justificando quais dos grafos são grafos simples;

Um grafo simples é um grafo que não tem arestas múltiplas nem lacetes. Assim, nenhum dos grafos é simples.

5.6. ~~Indique, justificando quais dos grafos são grafos conexos ou fortemente conexos~~.

Diga, justificando se $\vec{G}_3$ é fortemente conexo.

G_1

Corolário 1:

Um grafo não orientado é conexo (fortemente conexo) se o fecho transitivo da sua matriz de adjacências não tiver entradas nulas.

$$M_{G_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{G_1} = M_{G_1} + M_{G_1}^2 + M_{G_1}^3 + M_{G_1}^4 + M_{G_1}^5 =$

```
MG1=[1 1 0 0 1;1 0 1 0 0;0 1 0 1 1;0 0 1 0 1;1 0 1 1 0]
FG3=MG1+MG1^2+MG1^3+MG1^4+MG1^5
    60.    45.    47.    38.    58.
    45.    26.    40.    27.    36.
    47.    40.    42.    38.    54.
    38.    27.    38.    29.    40.
    58.    36.    54.    40.    51.
```

A matriz fecho não tem entradas nulas, logo o grafo G_1 é conexo.

$\vec{G}_2$

Corolário 1:

Um grafo orientado é fortemente conexo se o fecho transitivo da sua matriz de adjacências não tiver entradas nulas.

$$M_{\vec{G_2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$F_{\vec{G_2}} = M_{\vec{G_2}} + M_{\vec{G_2}}^2 + M_{\vec{G_2}}^3 + M_{\vec{G_2}}^4 + M_{\vec{G_2}}^5 =$

```
MG2=[1 0 0 1 0;1 0 0 0 0;1 1 1 0 0;0 0 1 0 1;0 0 1 0 0]
FG2=MG2+MG2^2+MG2^3+MG2^4+MG2^5
    24.    9.     17.    11.    5.
    11.    4.     9.     5.     3.
    33.    11.    24.    17.    9.
    26.    8.     16.    13.    6.
    17.    5.     11.    9.     4.
```

A matriz fecho não tem entradas nulas, logo o grafo $\vec{G}_2$ é fortemente conexo.

$\vec{G}_3$

```
MG3=[1 1 0 0; 1 0 0 2; 1 1 0 0; 1 0 0 1]
FG2=MG3+MG3^2+MG3^3+MG3^4
```

$F_3 = M + M^2 + M^3 + M^4$=

```
ans  =

   19.    9.     0.    14.
   23.    10.    0.    18.
   19.    9.     0.    14.
   16.    7.     0.    12.
```

Tem gralha.
Falta corrigir

A matriz fecho da matriz de adjacências do grafo $\vec{G}_3$ tem entradas nulas, pelo que o grafo não é fortemente conexo. Vejamos se é conexo, analisando o fecho da matriz de adjacências do grafo suporte:

```
MG3S=[1 2 1 1;2 0 1 2;1 1 0 0;1 2 0 1]
FG2S=MG3S+MG3S^2+MG3S^3+MG3S^4
 FG2S  =
```

```
153.   146.   71.   137.
146.   155.   66.   129.
71.    66.    33.   63.
137.   129.   63.   124.
```

A matriz fecho do grafo suporte ao grafo $\vec{G}_3$ não tem entradas nulas, pelo que o grafo $\vec{G}_3$ é conexo.

~~**5.7.** Averigue se os grafos são Eulerianos ou semi-Eulerianos.~~

Averigue se o grafo $\vec{G}_3$ é Euleriano ou semi-Euleriano.

Teorema 14:

Um multigrafo conexo, com pelos menos dois vértices, é Euleriano se e só se todos os seus vértices têm grau par.

O grafo G_1 é conexo, pela alínea anterior e

G_1

$$grau(a) = 4; grau(b) = 2; grau(c) = 3; grau(d) = 2; grau(e) = 3$$

Pela alínea 5.3, logo existindo vértices de grau impar tem-se que o grafo G_1 não é Euleriano.

Teorema 15:

Um grafo conexo é semi-Euleriano (e não Euleriano) se e só se possuir exatamente dois vértices de grau ímpar.

Como o grafo G_1 é conexo e possui 2 vértices de grau ímpar (c, e), pela alínea anterior e

G_1

$$grau(a) = 4; grau(b) = 2; grau(c) = 3; grau(d) = 2; grau(e) = 3$$

Pela alínea 5.3, logo existindo vértices de grau impar tem-se que o grafo G_1 não é Euleriano.

$\vec{G}_3$

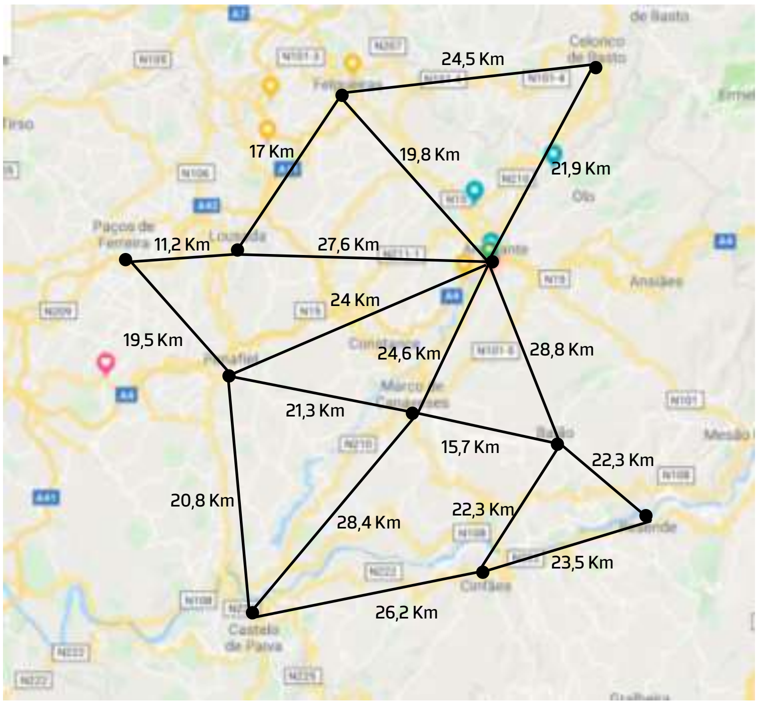
Teorema de Euler - Um grafo orientado admite um circuito de Euler sse for fortemente conexo e pseudo-simétrico, isto é, qualquer um dos vértices tem grau de entrada igual ao grau de saída.

Um grafo orientado contém um caminho de Euler sse é fortemente conexo e todos menos 2 vértices têm o mesmo grau de entrada e de saída, e os 2 vértices têm graus de entrada que diferem de 1.

<table>
<tr><td rowspan="3">P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</td><td>Tipo de Prova
Teste 1</td><td>Ano letivo
2018/2019</td><td>Data
12-04-2019</td></tr>
<tr><td colspan="2">Curso
Licenciatura em Engenharia Informática
Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores</td><td>Hora
00:00</td></tr>
<tr><td colspan="2">Unidade Curricular
Matemática Discreta</td><td>Duração
1,5 horas</td></tr>
</table>

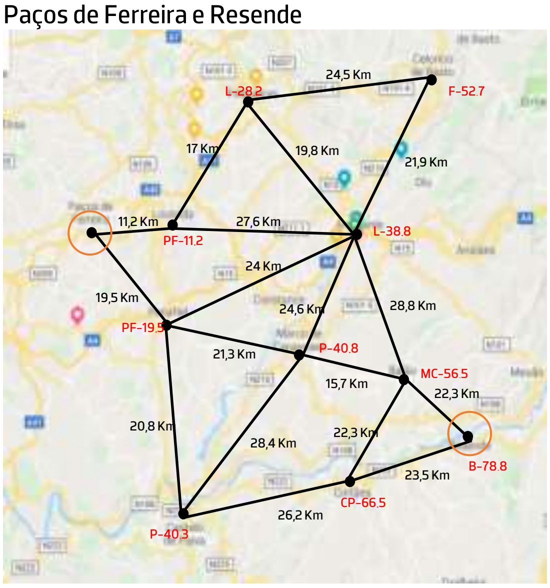
6. Considere o grafo apresentado na **Figura 2** onde estão representados os Concelhos da Região do Tâmega e Sousa e algumas das distâncias em km entre cada um deles.

Concelhos	Vértice
Amarante	A
Baião	B
Castelo de Paiva	CP
Celorico de Basto	CB
Cinfães	C
Felgueiras	F
Lousada	L
Marco de Canaveses	MC
Paços de Ferreira	PF
Penafiel	P
Resende	R

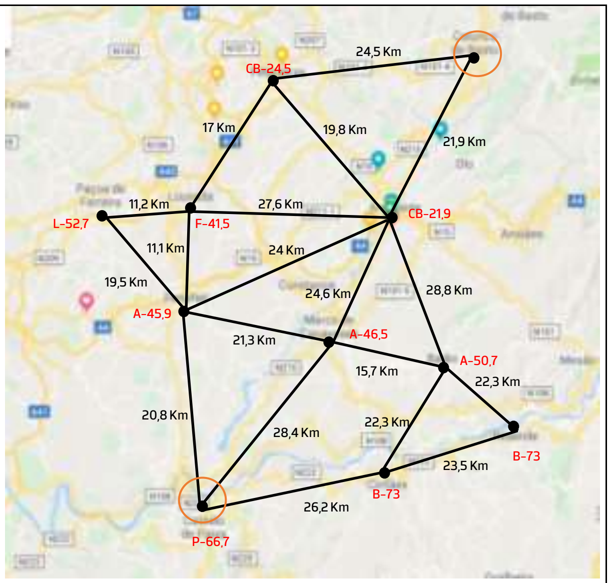


6.1. Identifique um caminho de comprimento 6 que inicie em Penafiel e termine em Celorico de Basto. Indique o número de km percorridos.

6.2. Use o algoritmo de Dijkstra para encontrar o caminho mais curto entre Paços de Ferreira e Resende.

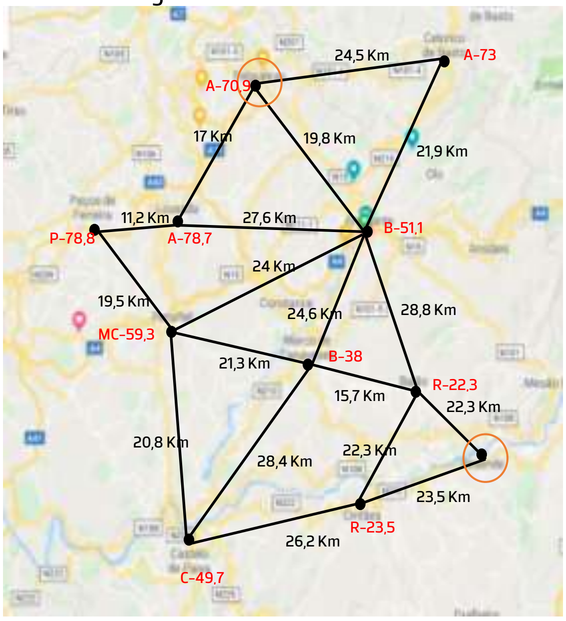
<table>
<tr><td></td><td>6.1</td><td>6.2</td></tr>
<tr><td>10AbrilV1</td><td>comprimento 6 – de Penafiel para Celorico
(P,CP,MC,B,A,F,CB) ->
(20,8+28,4+15,7+28,8+19,8+24,5) Km=
138Km</td><td>Paços de Ferreira e Resende


O caminho mais curto entre Paços de Ferreira e Resende tem 78,8 km e é:
PF,P,MC,B,R
Paços de Ferreira, Penafiel, Marco de Canavezes, Baião, Resende</td></tr>
<tr><td>10AbrilV2</td><td>comprimento 7 – de Paços de Ferreira para Resende</td><td>Celorico de Basto e Castelo de Paiva</td></tr>
</table>

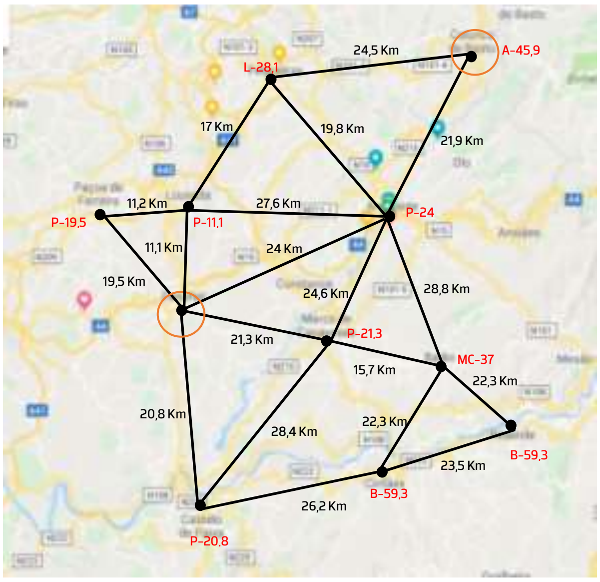
	(PF,L,F,CB,A,B,C,R) -> 11,2+17+24,5+21,9+28,8+22,3+23,5=149,2 Km	 O caminho mais curto entre Celorico de Basto e Castelo de Paiva tem 66,7 km e é: CB,A,P,CP

<table>
<tr><td></td><td>Tipo de Prova
Teste 1</td><td>Ano letivo
2018/2019</td><td>Data
12-04-2019</td></tr>
<tr><td>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</td><td colspan="2">Curso
Licenciatura em Engenharia Informática
Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores</td><td>Hora
00:00</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Unidade Curricular
Matemática Discreta</td><td>Duração
1,5 horas</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>6.1</td><td>6.2</td></tr>
<tr><td>12AbrilV3</td><td>Comprimento 5 – de Celorico de Basto para Castelo de Paiva
(CB,F,A,MC,P,CP)->
24,5+19,8+24,6+21,3+20,8=111km</td><td>Resende e Felgueiras



O caminho mais curto entre Resende e Felgueiras tem 70,9 km e é:
F,A,B,R</td></tr>
<tr><td>12AbrilV4</td><td>Comprimento 8 – de Resende e para Felgueiras
(R,C,B,MC,P,CP,MC,A,F)->
23,5+22,3+15,7+21,3+20,8 +28,4 +24,6+19,8=176,4km</td><td>Penafiel e Celorico de Basto



O caminho mais curto entre Penafiel e Celorico de Basto tem 45,9 km e é:
P,A,CB</td></tr>
</table>