Formulário Diferenciação Numérica

- Primeira derivada 2 pontos

  - Fazendo $h = x_1 - x_0$, obtém-se a **diferença finita progressiva** de primeira ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$
  - Com erro $E_1(x_0) = -\frac{h}{2}f''(\xi)$ e $\xi \in [x_0, x_0+h]$.
  - Do mesmo modo obtém-se a **diferença finita regressiva** de primeira ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h}.$$
  - Com um erro $E_1(x_0) = \frac{h}{2}f''(\xi)$ e $\xi \in [x_0-h, x_0]$.
  - Analogamente, obtém-se a **diferença finita central** de primeira ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$
  - Com erro $E_1(x_0) = -\frac{h^2}{6}f^{(3)}(\xi)$ e $\xi \in [x_0-h, x_0+h]$.

- Primeira Derivada 3 pontos
  - Considerando $h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$, obtêm-se as **diferenças finitas progressivas** de segunda ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{-3f(x_0) + 4f(x_0+h) - f(x_0+2h)}{2h}.$$
  - Com um erro $E_2(x) = \frac{1}{3}h^2 f^{(3)}(\xi)$ e $\xi \in [x_0, x_0+2h]$.
  - Analogamente, obtêm-se as **diferenças finitas regressivas** de segunda ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{3f(x_0) - 4f(x_0-h) + f(x_0-2h)}{2h}.$$
  - Com um erro $E_2(x) = \frac{1}{3}h^2 f^{(3)}(\xi)$ e $\xi \in [x_0-2h, x_0]$.
  - Analogamente, obtêm-se as **diferenças finitas centrais** de segunda ordem
  $$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}.$$
  - Com um erro $E_2(x) = -\frac{1}{6}h^2 f^{(3)}(\xi)$ e $\xi \in [x_0-h, x_0+h]$.

- Primeira Derivada 5 pontos
  1. $f'(x_0) = \frac{1}{12h}(f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)) + \frac{h^4}{30}f^5(\xi)$, com $\xi \in [x_0-2h, x_0+2h]$.
  2. $f'(x_0) = \frac{1}{12h}(-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) -$ $-3f(x_0+4h)) + \frac{h^4}{5}f^5(\xi)$, com $\xi \in [x_0, x_0+4h]$.

- Segunda derivada, **diferenças finitas centrais**

  - A derivação algébrica de fórmulas para a aproximação da segunda derivada é muito moroso.
  - $f''(x_0) = \frac{1}{h^2}(f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0+h)) - \frac{h^2}{12}f^4(\xi)$, $\xi \in [x_0-h, x_0+h]$.