| P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO | Tipo de Prova<br>Teste 1 | Ano letivo<br>2016/2017 | Data<br>07-04-2017 |
|---|---|---|---|
| | Curso<br>Licenciatura em Segurança Informática de Redes de Computadores | | Hora<br>13:10 |
| | Unidade Curricular<br>Matemática Discreta | | Duração<br>1,5 horas |

N.º de aluno: _____________ Nome: ________________________________________________________________________________

| Questão | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | TOTAL |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Cotação | 1,4+1,4+1,4 | 1,6 | 1,2 | 1,6 | 1,4+1,4 | 1,6+1,6+1+0,9+1 | 2,5 | 20 |

**1.** Considere o conjunto $A = \{x, \{\emptyset\}, \{y\}\}$, com $x, y \in \mathbb{N}$.

**a)** Determine $\mathcal{P}(A)$ e $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Proposta de Resolução:

Como #A=3 então $\#\mathcal{P}(A) = 2^3 = 8$ e $\#\mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) = 2^8$

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{x\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\{y\}\}, \{x, \{\emptyset\}\}, \{x, \{y\}\}, \{\{\emptyset\}, \{y\}\}, A\}$$

**b)** Complete os espaço por forma a obter afirmações verdadeiras:

$\emptyset$ _ ∈ _ $\mathcal{P}(A)$ $\{\emptyset, y\}$ __ ∉ ___ $\mathcal{P}(A)$

$\{x, \{y\}\}$ _ ⊆ _ $A$ $\{\{y\}\}$ __ ∈ ___ $\mathcal{P}(A)$

**c)** Diga, justificando, se a função $f: \{x, \{y\}\} \longrightarrow \mathcal{P}(A)$, tal que $f(a) = \{a\} \cap \{\emptyset, a\}$ é injetiva, sobrejetiva ou bijetiva.

Proposta de Resolução:

Temos que $f(x) = \{x\} \cap \{\emptyset, x\} = \{x\}$ e $f(\{y\}) = \{\{y\}\} \cap \{\emptyset, \{y\}\} = \{\{y\}\}$.

Como $f(x) \neq f(\{y\})$ temos que a função é injetiva. No entanto, a função não é sobrejetiva uma vez que, por exemplo, não existe nenhum elemento $a$ de $\{x, \{y\}\}$ tal que $f(a) = \emptyset$. Como a função não é sobrejetiva também não é bijetiva.

**2.** Considere o conjunto universo $U = \{x \in \mathbb{Z}^+ : [x + 0{,}1] < 12\}$ e os seus subconjuntos:

$A = \{x \in U: 4 \leq x^3 \leq 10\}$, $B = \{x \in U: x \text{ é divisor de } 3\}$ e $C = \{x: x \text{ é positivo e } x \text{ múltiplo de } 4\}$.

Determine $C \times \overline{A \cap B}$ e $A \oplus (B \cup C)$.

Proposta de Resolução:

$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{2\}$, $B = \{1,3\}$ e $C = \{4,8\}$.

$$A \cap B = \{\,\}$$
$$\overline{A \cap B} = U$$
$$C \times \overline{A \cap B} = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (4,9), (4,10), (8,1), (8,2), (8,3), (8,4), (8,5), (8,6), (8,7), (8,8), (8,9), (8,10)\}$$

$$B \cup C = \{1,3,4,8\}$$
$$A \oplus (B \cup C) = \{1,2,3,4,8\}$$

**3.** Determine:

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\prod_{j=10}^{11}(-1)^j \times k\right) - \sum_{i=21}^{501} 3$$

$$\sum_{k=0}^{2}\left(\prod_{j=10}^{11}(-1)^j \times k\right) - \sum_{i=21}^{501} 3$$
$$= \sum_{k=0}^{2}((-1)^{10} \times k \times (-1)^{11} \times k) - 3 \times (501 - 21 + 1) = \sum_{k=0}^{2}(-k^2) - 3 \times 481 =$$
$$= (-0^2) + (-1^2) + (-2^2) - 3 \times 481 = -1448$$

**4.** Considere a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} G(1) = 2 \\ G(n) = 5\,G(n-1) + 1, \quad n > 1 \end{cases}$$

Recorrendo ao algoritmo EGV(*Expand*, *Guess*, *Verify*), encontre a fórmula fechada.

Proposta de Resolução:

**Expand**

$$G(n) = 5\,G(n-1) + 1 = 5[5\,G(n-2) + 1] + 1 = 5^2 G(n-2) + 5 + 1$$

$=5^2[5\,G(n-3) + 1] + 5 \times 1 + 1 = 5^3 G(n-3) + 5^2 + 5 + 1$

$=5^3[5\,G(n-4) + 1] + 5^2 + 5 + 1 = 5^4 G(n-4) + 5^3 + 5^2 + 5 + 1$

**Guess**

$$G(n) = 5^k G(n-k) + 5^{k-1} + 5^{k-2} + \cdots + 5^1 + 5^0$$

Se $n - k = 1$, temos

$$G(n) = 5^{n-1} G(1) + 5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 5^1 + 5^0 = 2 \times 5^{n-1} + 5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 5^1 + 5^0, n \geq 1$$

**Verify**

Passo Base - $G(1) = 2 \times 5^0 = 2$ Verdadeiro

Passo indutivo – Hipótese: $G(k) = 2 \times 5^{k-1} + 5^{k-2} + \cdots + 5^1 + 5^0$

Tese: $G(k+1) = 2 \times 5^k + 5^{k-1} + \cdots + 5^1 + 5^0$

Temos que

$G(k+1) = 5G(k) + 1$, por definição de G

$= 5[2 \times 5^{k-1} + 5^{k-2} + \cdots + 5^1 + 5^0] + 1$, pela hipótese de indução

$= 2 \times 5^k + 5^{k-1} + \cdots + 5^1 + 5^0$ c.q.m.

Logo, a formula fechada para a recorrência apresentada é $G(n) = 2 \times 5^{n-1} + 5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 5^1 + 5^0$, ou seja,

$$G(n) = 2 \times 5^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} 5^i$$

Como

$$\sum_{i=0}^{n-2} 5^i = 1 \times \frac{1 - 5^{n-2+1}}{1-5} = -\frac{1 - 5^{n-1}}{4}$$

(soma de uma progressão geométrica – ver Teorema 5 da pág. 28)

Temos que $G(n) = 2 \times 5^{n-1} - \frac{1-5^{n-1}}{4} = -\frac{1}{4} + \left(2 + \frac{1}{4}\right) \times 5^{n-1} = -\frac{1}{4} + \frac{9}{4} \times 5^{n-1}, n \geq 1$

**5.** Considere as seguintes relações binárias definidas sobre $\{a, b, c, d\}$:

$R = \{(b,b), (a,c), (b,d)\}$ e $S = \{(a,a), (b,b), (c,c), (c,a), (a,c), (a,d), (d,d), (d,a)\}$.

a) Determine, caso seja possível $(R^{-1} \cap S) \circ S$ e reflexivo$(R)$.

Proposta de Resolução:

$R^{-1} = \{(b,b), (c,a), (d,b)\}$

$R^{-1} \cap S = \{(b,b), (c,a), (d,b)\} \cap \{(a,a), (b,b), (c,c), (c,a), (a,c), (a,d), (d,d), (d,a)\} = \{(b,b), (c,a)\}$

$$(R^{-1} \cap S) \circ S = \{(b,b), (c,a), (a,a)\}$$

Reflexivo$(R)$= $R \cup \{(a,a), (c,c), (d,d)\}$

b) Justifique se alguma uma das relações, $R$ ou $S$, é de equivalência e indique a classe de equivalência do elemento $d$.

Proposta de Resolução:

R não é uma relação de equivalência uma vez que R não é reflexiva porque, por exemplo, $(a,a) \notin R$.

S não é uma relação de equivalência uma vez que:

– é reflexiva, porque $(x,x) \in S$ para todo o $x \in \{a,b,c,d\}$.

– é simétrica, porque $(a,c) \in S$ e $(c,a) \in S$, $(a,d) \in S$ e $(d,a) \in S$

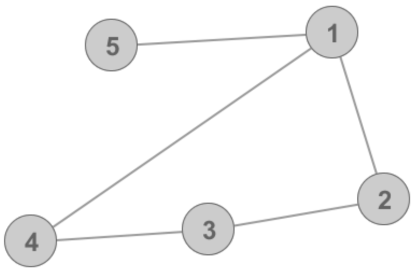
– não é transitiva, porque, por exemplo, $(c,a) \in S$ e $(a,d) \in S$ mas $(c,d) \notin S$

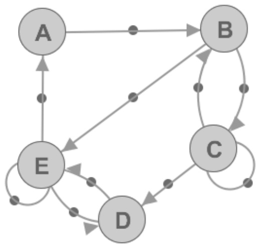
**6.** Considere os grafos seguintes:

$G_1$ : V ($G_1$) = {1, 2, 3, 4, 5} e E($G_1$) = {(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (3, 4)}

$\vec{G}_2$: V ($\vec{G}_2$) = {A, B, C, D, E} e E($\vec{G}_2$) = {(A, B), (B, C), (B, E), (C, B), (C, C), (C, D), (D, E), (E, E), (E, D), (E, A)}

a) Represente-os graficamente e indique as suas matrizes de adjacências.




$$M_{G1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{\vec{G}2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Usando a matriz de adjacências determinada na alínea anterior, calcule os graus de cada vértice.

Proposta de Resolução:

Grafo G1:

grau(1) = $2 \times 0 + 1 + 0 + 1 + 1 = 3$

grau(2)=grau(3)=grau(4)=2

grau(5)=1

Grafo $\vec{G}$2:

grau$^s$(A) =1

grau$^s$(B)=2

grau$^s$(C)=3

grau$^s$(D)=1

grau$^s$(E)=3

O grau de saída é dado pela soma dos elementos de cada linha

grau$^e$(A) =1

grau$^e$(B)=2

grau$^e$(C)=2

grau$^e$(D)=2

grau$^e$(E)=3

O grau de entrada é dado pela soma dos elementos de cada coluna

c) Para o grafo $\vec{G}_2$ calcule o número de caminhos de comprimento 4 do segundo para o primeiro vértice.

Proposta de Resolução:

Como $M^4_{\vec{G}2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 5 & 7 & 10 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, existem 4 caminhos do segundo para o primeiro vértice. (Na matriz ao lado é o elemento da linha 2 coluna 1).

```
--> M2^4
 ans  =

   1.    2.    2.    2.    4. 
   4.    3.    4.    6.    8. 
   4.    5.    5.    7.    10.
```

```
2.   1.   1.   2.   4.
4.   3.   2.   5.   7.
```

d) Algum dos grafos é fortemente conexo? Justifique.

Proposta de Resolução:

Como o grafo G1 não é orientado não é fortemente conexo.

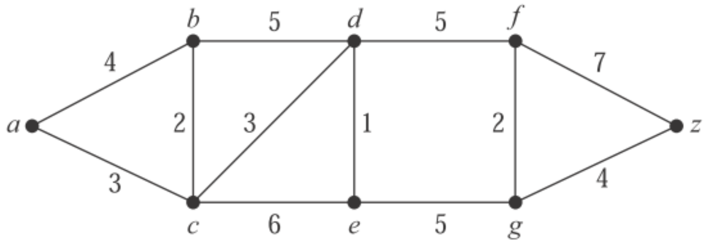
Por sua vez o grafo $\vec{G}2$ é fortemente conexo porque como $M_{\vec{G}2}^4$ não tem nenhuma entrada zero também $F = M_{\vec{G}2} + M_{\vec{G}2}^2 + M_{\vec{G}2}^3 + M_{\vec{G}2}^4 + M_{\vec{G}2}^5$ não tem entradas nulas e portanto existem caminhos de A, B, C,D e E para cada qualquer vértice.

e) O grafo $G_1$ é semi-Euleriano? Justifique.

Proposta de Resolução:

O grafo G1 é semi-Euleriano porque grau(2)=grau(3)=grau(4)= 2 e grau(1)=3 e grau(5)=1, i.e., tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

**7.** Usando o Algoritmo de ***Dijkstra*** encontre o caminho mais curto entre $a$ and $z$ para o seguinte grafo:




| Iteração | Vértice | Caminhos / Custo | Caminhos mínimos |
|---|---|---|---|
| | a | (a,b) → 4<br>(a,c) → 3 | {(a,b), (a,c)}<br>4 3 |
| 1 | c | (a ,c, b)→5<br>(a ,c, d)→6<br>(a ,c, e)→9 | {(a,b), (a,c,d), (a,c,e)}<br>4 6 9 |
| 2 | b | (a ,b, d)→9 | {(a,c,d), (a,c,e)}<br>6 9 |
| 3 | d | (a ,c, d, e)→7<br>(a ,c, d, f)→11 | {(a,c,d,e), (a,c,d,f)}<br>7 11 |
| 4 | e | (a ,c, d, e, g)→12 | {(a,c,d,f), (a, c, d, e, g)}<br>11 12 |
| 5 | f | (a ,c, d, f, z)→18<br>(a ,c, d, f, g)→14 | {(a,c,d, e, g), (a, c, d, f, z)}<br>12 18 |
| 6 | g | (a ,c, d, e, g, z)→16 | {(a ,c, d, e, g, z)}<br>16 |

O caminho mais curto é (a ,c, d, e, g, z) e o custo é de 16.

*Eliana Costa e Silva e Flora Ferreira*