

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova: Exame Curso: LEI/LSIRC Unidade Curricular: Álgebra Linear e Geometria Analítica	Ano Letivo 2021/2022 Data: 03/02/2022 Hora: 10:00 Duração: 1h15m
---	--	--

Observações: Na resposta às questões deve apresentar todos os cálculos que efetuar e todas as justificações necessárias.

1. Considere as matrizes  $A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -1 \\ k & 2 & k \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ .

(a) **[2V]** Discuta a característica da matriz  $A$  em função do parâmetro  $k \in \mathbb{R}$ .

(b) **[1.5V]** Resolva em ordem a  $X$  a equação matricial  $\left[(B^T)^{-1}X\right]^T + (BA)^{-1} = I_3$ , onde  $I_3$  é a matriz identidade de ordem 3.

(c) **[2.5V]** Considerando  $k = 2$ , determine  $A^{-1}$  e  $X$ .

2. **[1.5V]** Utilizando as propriedades dos determinantes mostre que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b).$$

3. Considere o sistema de equações lineares  $\begin{cases} x + 2ay - 3z = 1 \\ x + ay + z = b \\ y - 2z = a \end{cases}$ , com  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(a) **[2.5V]** Discuta o sistema em função dos parâmetros  $a$  e  $b$ .

(b) **[1V]** Usando a regra de Cramer e considerando  $a = 1$  e  $b = 5$ , calcule o valor de  $y$ .

4. Considere a matriz  $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

(a) **[1V]** Calcule o valor de  $k$  de forma a que  $\lambda = 0$  seja valor próprio da matriz  $D$ .

(b) **[1.5V]** Calcule os restantes valores próprios da matriz  $D$  (no caso de não ter resolvido a alínea (a), considere  $k = 1$ ).

(c) **[1V]** Nas condições da alínea (a), calcule o vetor próprio associado ao valor próprio  $\lambda = 0$ .

5. Considere o conjunto  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$ .

(a) **[1.5V]** Mostre que  $A$  é um subespaço vetorial de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) **[1V]** Determine a base de  $A$  e indique a sua dimensão.

6. **[1V]** Considere o seguinte output do Scilab.

