	Tipo de Prova Teste 1 - Proposta de resolução Versão 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
P.PORTO ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO	Curso LSIRC+LEI		Hora 15:00
	Unidade Curricular Matemática Discreta		Duração 1,5 horas

Nome: ______________________________ **Número:** ________

Observações:

A avaliação desta Unidade Curricular, na modalidade de avaliação durante o período letivo, contempla os três elementos e respetivas ponderações: 35% Teste 1 + 35% Teste 2 + 30% Trabalho Prático.

Para a realização desta prova o estudante pode usar um formulário manuscrito e criado pelo próprio.
O formulário pode ter até uma **página** A4 (ou duas páginas A5).
No final da prova, **têm de ser entregues** o enunciado, as folhas de resposta e de rascunho, assim como o formulário, todos **devidamente identificados** com o nome e número de estudante.
Deve responder às questões colocadas neste enunciado, expeto para as devidamente indicadas.
Apresente todas as justificações.

Bom trabalho!
Eliana Costa e Silva e Isabel Cristina Duarte

1. Considere os conjuntos $X = \{x^2 + 2 : x \in \{1,3\}\}$ e $Y = \{\emptyset, 0, 1, \{1\}, 3, \{3,10\}\}$

1.1. [0.8] Complete os espaços com $\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =, \neq$ por forma a obter afirmações verdadeiras:

$\emptyset \subseteq$ ou $\notin$ ou $\neq X$ $\quad\quad$ $\{1,3\} \neq X$ $\quad\quad$ $\{1,3\} \subseteq Y$ $\quad\quad$ $\mathcal{P}(X) \neq \mathcal{P}(Y)$

Proposta de resolução:

Atenção: O estudante **não tem** de apresentar justificações.

Temos que $X = \{x^2 + 2 : x \in \{1,3\}\} = \{1^2 + 2,\ 3^2 + 2\} = \{3,11\}$, portanto, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{3\}, \{11\}, \{3,11\}\}$.

Temos que $\{11\}$ é subconjunto de X e {11} não é subconjunto de Y portanto, $\{11\} \notin \mathcal{P}(Y)$.

Temos que $\{0\}$ é subconjunto de Y e {0} não é subconjunto de X portanto, $\{0\} \notin \mathcal{P}(X)$.

Concluímos assim que $\mathcal{P}(X) \neq \mathcal{P}(Y)$.

1.2. [0.8] Diga, justificando, se a função $f: \{1,3\} \longrightarrow \mathcal{P}(X \cup \{1,3\})$, tal que $f(x) = \{x\} \cap \{3,10\}$ é bijetiva.

Proposta de resolução:

Temos que $X = \{x^2 + 2 : x \in \{1,3\}\} = \{1^2 + 2,\ 3^2 + 2\} = \{3,11\}$

$$\mathcal{P}(X \cup \{1,3\}) = \mathcal{P}(\{1,3,11\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{11\}, \{1,3\}, \{1,11\}, \{3,11\}, \{1,3,11\}\}$$

$$f(1) = \{1\} \cap \{3,10\} = \{\ \ \}$$

$$f(3) = \{3\} \cap \{3,10\} = \{3\}$$

Temos que f é injetiva pois $f(1) \neq f(3)$.

Por outro lado, f não é sobrejetiva, porque não existe um $x \in \{1,3\}$, tal que, por exemplo, $f(x)$={1}.

Podemos assim concluir que f **não é bijetiva**.

1.3. [1.0] Determine X^2 e $\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)$.

Proposta de resolução:

$$X^2 = X \times X = \{(3,3), (3,11), (11,3), (11,11)\}$$
$$\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, \{3\}, \{11\}, \{3,11\}\} \backslash \mathcal{P}(Y) = \{\{11\}, \{3,11\}\}$$

2. [0.8] Dê três exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis.

Proposta de resolução:

Por exemplo, $\mathbb{Z}$, {dos números ímpares positivos} e {dos números múltiplos de 3}, são conjuntos infinitos enumeráveis.

3. [1.8] Tendo em conta as igualdades apresentadas ao lado, determine:

$$\sum_{i=7}^{52}(i^2-i^3)+\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^i-7\prod_{i=20}^{89}3$$

$\sum_{i=0}^{n} ar^i, r\neq 0$ (PG)	$a\times\frac{1-r^{n+1}}{1-r}, r\neq 1$
$\sum_{i=1}^{n} i$ (PA)	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^{n} i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^{n} i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Proposta de resolução:

$$\sum_{i=7}^{52}(i^2-i^3)+\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^i-7\prod_{i=20}^{89}3$$

Temos que:

$$\sum_{i=7}^{52}(i^2-i^3)=\sum_{i=7}^{52}i^2-\sum_{i=7}^{52}i^3=\sum_{i=1}^{52}i^2-\sum_{i=1}^{6}i^2-\sum_{i=7}^{52}i^3+\sum_{i=1}^{6}i^3$$

$$=\frac{52\times(52+1)\times(2\times52+1)-6\times(6+1)\times(2\times6+1)}{6}-\frac{52^2\times(52+1)^2-6^2\times(6+1)^2}{4}$$

$$=\frac{52\times53\times105-6\times7\times13}{6}-\frac{52^2\times53^2-6^2\times7^2}{4}=48\,139-1\,898\,443=-1\,850\,304$$

$$\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^i=\sum_{i=0}^{99}\left(\frac{2}{3}\right)^{i+1}=\sum_{i=0}^{99}\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^i=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}{\frac{1}{3}}=2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right)$$

$$7\prod_{i=20}^{89}3=7\times3^{89-20+1}=7\times3^{70}$$

Logo,

$$\sum_{i=7}^{52}(i^2-i^3)+\sum_{i=1}^{100}\left(\frac{2}{3}\right)^i-7\prod_{i=20}^{89}3=-1\,838\,424+2\times\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{100}\right)-7\times3^{70}$$

4. [1.0] Sejam X, Y e W conjuntos tais que $Y\subseteq W$, $\#(X^2)=36$, $\#(\mathcal{P}(Y))=16$ e $\#W=7$. Determine $\#(X\times(Y\oplus W))$.

Proposta de resolução:

Temos que

$$Y\subseteq W \Rightarrow Y\oplus W=(Y\cup W)-(Y\cap W)=W-Y$$

$$\#(X^2)=36\Leftrightarrow \#X=6$$

$$\#(\mathcal{P}(Y))=16=2^4\Leftrightarrow \#Y=4$$

$$\#W=7$$

Assim,

$$\#(X\times(Y\oplus W))=\#X\times(\#W-\#Y)=6\times(7-4)=6\times3=18$$

5. **[1.4]** Mostre, recorrendo a indução Matemática que, para todo $n \in I\!N$:

$$\sum_{j=1}^{n}(10j-5)=5\,n^2$$

Proposta de resolução:

Passo base

P(1) verifica-se pois,

$$\sum_{j=1}^{1}(10j-5)=10\times 1-5=10-5=5=5\times 1^2$$

Passo indutivo $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$

Hipótese de Indução P(k):

$$\sum_{j=1}^{k}(10j-5)=5k^2$$

Tese P(k+1):

$$\sum_{j=1}^{k+1}(10j-5)=5(k+1)^2$$

Temos que,

$$\sum_{j=1}^{k+1}(10j-5)=\left[\sum_{j=1}^{k}(10j-5)\right]+(10\times(k+1)-5)$$

$=5k^2+(10k+10-5)$, por Hipótese de indução

$=5k^2+10k+5=5\,(k^2+2k+1)=5(k+1)^2$

Portanto,

$$P(k)\Longrightarrow P(k+1)$$

Visto que P(1) é verificado e $P(k)\Longrightarrow P(k+1)$, temos por indução matemática que, para todo $n \in I\!N$:

$$\sum_{j=1}^{n}(10j-5)=5\,n^2$$

6. **[1.4]** Considere a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 3 \\ S(n) = 4\,S(n-1) + 5, \;\; n \geq 2 \end{cases}$$

Recorrendo ao algoritmo EGV (*Expand*, *Guess*, *Verify*), encontre a fórmula fechada correspondente.

Proposta de Resolução:

$$\begin{cases} S(1) = 3 \\ S(n) = 4\,S(n-1) + 5, \;\; n \geq 2 \end{cases}$$

Expand

Temos que

$$\begin{aligned} S(n) &= 4\,S(n-1) + 5 = 4(4\,S(n-2) + 5) + 5 = \\ 4^2 S(n-2) &+ 4 \times 5 + 5 = 4^2(4\,S(n-3) + 4 \times 5 + 5) + 5 \\ &= 4^3 S(n-3) + 4^2 \times 5 + 4 \times 5 + 5 \;= \cdots \\ &= 4^k S(n-k) + 4^{k-1} \times 5 + \cdots + 4 \times 5 + 5 \\ &= 4^k S(n-k) + 5 \times \sum_{i=0}^{k-1} 4^j \end{aligned}$$

Cálculos auxiliares

$$\sum_{i=0}^{k-1} 4^j = 1 \times \frac{1 - 4^{k-1+1}}{1-4} = \frac{1-4^k}{-3} = \frac{4^k - 1}{3}$$

Guess

$$S(n) = 4^k S(n-k) + \frac{5}{3}(4^k - 1)$$

Para $n - k = 1$, ou seja, $k = n - 1$ temos

$$S(n) = 4^{n-1} S(1) + \frac{5}{3}(4^{n-1} - 1) = 4^{n-1} \times 3 + \frac{5}{3}(4^{n-1} - 1) = 4^{n-1}\left(3 + \frac{5}{3}\right) - \frac{5}{3} = \frac{14}{3} \times 4^{n-1} - \frac{5}{3}$$

Verify – Indução Matemática

Passo base

P(1) verifica-se pois,

$$S(1) = \frac{14}{3} \times 4^{1-1} - \frac{5}{3} = \frac{14}{3} - \frac{5}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

Passo indutivo $\;\; P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

Hipótese de Indução P(k):

$$S(k) = \frac{14}{3} \times 4^{k-1} - \frac{5}{3}$$

Tese P(k+1):

$$S(k+1) = \frac{14}{3} \times 4^k - \frac{5}{3}$$

Temos que,

$$S(k+1) = 4S(k) + 5 = 4\left(\frac{14}{3} \times 4^{k-1} - \frac{5}{3}\right) + 5 = \frac{14}{3} \times 4^k - \frac{20}{3} + \frac{15}{3} = \frac{14}{3} \times 4^k - \frac{5}{3}$$

Portanto, $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

Visto que P(1) é verificado e $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$, temos por indução matemática que, para todo $n \in I\!N$

$$S(n) = \frac{14}{3} \times 4^{n-1} - \frac{5}{3}$$

7. Considere o conjunto $A = \{1,4,6,7\}$, e as duas relações seguintes definidas em A:

$R = \{(x, y): |x - y| \text{é divisível por 3}\}$ e $S = \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$

7.1. [1.0] Represente a relação S sob a forma de uma matriz e represente relação R graficamente;

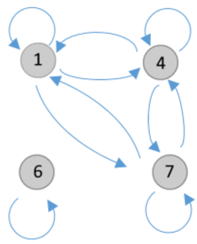
Proposta de resolução:

Como $S = \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$, definida em $A = \{1,4,6,7\}$, a matriz de adjacências é:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $R = \{(x, y): |x - y| \text{é divisível por 3}\}$ definida em $A = \{1,4,6,7\}$.

|x-y|	1	4	6	7
1	**|1-1|=0**	**|1-4|=3**	|1-6|=5	**|1-7|=6**
4	**|4-1|=3**	**|4-4|=0**	|4-6|=2	**|4-7|=3**
6	|6-1|=5	|6-4|=2	**|6-6|=0**	|6-7|=1
7	**|7-1|=6**	**|7-4|=3**	|7-6|=1	**|7-7|=0**



Logo,

$$R = \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7)\}$$

7.2. [1.4] Indique, justificando, se alguma das relações é de equivalência e em caso afirmativo escreva o seu conjunto quociente;

Proposta de resolução:

Para que uma relação seja de equivalência tem de ser: reflexiva; simétrica e transitiva.

Comecemos por considerar a relação $R = \{(x, y): |x - y| \text{é divisível por 3}\}$

- Para qualquer $x \in A = \{1,4,6,7\}$, temos que $|x - x| = 0$, portanto $(x, x) \in R$.

  Logo, R é reflexiva.
- Para quaisquer $x, y \in A = \{1,4,6,7\}$, se $(x, y) \in R$ temos que $|x - y|$ é divisível por 3. Mas, $|x - y| = |y - x|$, donde $(y, x) \in R$.

  Logo, R é simétrica.
- Para quaisquer $x, y, z \in A = \{1,4,6,7\}$,

  se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ temos que $|x - y|$ é divisível por 3 e $|y - z|$ é divisível por 3
  - Se $x = y$ então $|x - z| = |y - z|$, donde $(x, z) \in R$
  - Se $z = y$ então $|x - z| = |x - y|$, donde $(x, z) \in R$
  - Se $x \neq y \neq z$ então $|x - y|$ é divisível por 3 e $|y - z|$ é divisível por 3, acontece apenas para os seguintes casos

    $(1,4) \in R$ e $(4,7) \in R$, donde $(1,7) \in R$ porque |1-7|=6 é divisível por 3

    $(1,7) \in R$ e $(7,4) \in R$, donde $(1,4) \in R$ porque |1-4|=3 é divisível por 3

  Logo, R é transitiva.

Concluímos assim que R é uma relação de equivalência e o conjunto quociente é $[A]_R = \{\{1,4,7\}, \{6\}\}$.

A relação S não é reflexiva, pois a matriz encontrada na alínea anterior tem entradas nulas na diagonal.
Logo,

S não é relação de equivalência.

7.3. [0.6] Indique, justificando, se alguma das relações é de ordem parcial;

Proposta de resolução:

Para que uma relação seja de ordem parcial tem de ser: reflexiva; anti-simétrica e transitiva.

A relação R não é de ordem parcial pois é relação de equivalência.

A relação S não é reflexiva, portanto não é relação de ordem parcial.

7.4. [1.2] Calcule $R^{-1} \cup S$ e $S^2 \circ (S \cap R)$.

Proposta de resolução:

Temos $R = \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7)\}$, então $R^{-1} = R$.

$R^{-1} \cup S$
$= \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7)\} \cup \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$
$= \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7), (4,6), (6,7), (7,6)\}$

$S = \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$
$S^2 = S \circ S = \{(1,4), (1,7), (1,6), (4,4), (4,6), (4,7), (6,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$ pois

$(1,4) \in S$ e $(4,4) \in S$ então $(1,4) \in S^2$
$(1,4) \in S$ e $(4,6) \in S$ então $(1,6) \in S^2$

$(1,7) \in S$ e $(7,6) \in S$ então $(1,6) \in S^2$
$(1,7) \in S$ e $(7,7) \in S$ então $(1,7) \in S^2$

$(4,4) \in S$ e $(4,4) \in S$ então $(4,4) \in S^2$
$(4,4) \in S$ e $(4,6) \in S$ então $(4,6) \in S^2$

$(4,6) \in S$ e $(6,7) \in S$ então $(4,7) \in S^2$

$(6,7) \in S$ e $(7,6) \in S$ então $(6,6) \in S^2$
$(6,7) \in S$ e $(7,7) \in S$ então $(6,7) \in S^2$

$(7,6) \in S$ e $(6,7) \in S$ então $(7,7) \in S^2$

$(7,7) \in S$ e $(7,7) \in S$ então $(7,7) \in S^2$
$(7,7) \in S$ e $(7,6) \in S$ então $(7,6) \in S^2$

$S \cap R = \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\} \cap \{(1,1), (1,4), (1,7), (4,1), (4,4), (4,7), (6,6), (7,1), (7,4), (7,7)\}$
$= \{(1,4), (1,7), (4,4), (7,7)\}$

$S^2 \circ (S \cap R) = \{(1,4), (1,6), (1,7), (4,4), (4,6), (4,7), (7,6), (7,7)\}$ pois

$(1,4) \in S \cap R$ e $(4,4) \in S^2$ então $(1,4) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(1,4) \in S \cap R$ e $(4,6) \in S^2$ então $(1,6) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(1,4) \in S \cap R$ e $(4,7) \in S^2$ então $(1,7) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(1,7) \in S \cap R$ e $(7,6) \in S^2$ então $(1,6) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(1,7) \in S \cap R$ e $(7,7) \in S^2$ então $(1,7) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(4,4) \in S \cap R$ e $(4,4) \in S^2$ então $(4,4) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(4,4) \in S \cap R$ e $(4,6) \in S^2$ então $(4,6) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(4,4) \in S \cap R$ e $(4,7) \in S^2$ então $(4,7) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(7,7) \in S \cap R$ e $(7,6) \in S^2$ então $(7,6) \in S^2 \circ (S \cap R)$
$(7,7) \in S \cap R$ e $(7,7) \in S^2$ então $(7,7) \in S^2 \circ (S \cap R)$

Considere o fragmento de código Scilab onde são definidas as matrizes de adjacência M1 e M2 de dois grafos com vértices V1={a,b,c,d,e,f} e V2={A,B,C,D}, respetivamente. Com base no output, responda às questões seguintes.

```
--> M1=[1 0 0 1 0 1;
  > 1 0 0 0 0 0;
  > 1 1 0 0 0 1;
  > 0 0 1 0 1 0;
  > 0 0 1 0 0 1;
  > 1 1 0 1 1 0];

--> M2=[1 0 2 1
  > 0 0 1 0
  > 2 1 1 0
  >  1 0 0 1];
```

```
--> M1^2
 ans  =
   2.   1.   1.   2.   2.   1.
   1.   0.   0.   1.   0.   1.
   3.   1.   0.   2.   1.   1.
   1.   1.   1.   0.   0.   2.
   2.   2.   0.   1.   1.   1.
   2.   0.   2.   1.   1.   2.
--> M1^4
 ans  =
   16.   9.   6.   10.   8.   12.
   5.    2.   4.   3.    3.   5.
   13.   7.   7.   9.    8.   11.
   10.   2.   5.   7.    5.   7.
   11.   5.   5.   8.    6.   9.
   17.   7.   7.   11.   9.   11.
```

```
--> M2^2
 ans  =
   6.   2.   4.   2.
   2.   1.   1.   0.
   4.   1.   6.   2.
   2.   0.   2.   2.
--> M2^4
 ans  =
   60.   18.   54.   24.
   18.   6.    15.   6.
   54.   15.   57.   24.
   24.   6.    24.   12.
--> M2+M2^2+M2^3+M2^4
 ans  =
   83.   24.   78.   35.
   24.   8.    23.   8.
   78.   23.   79.   32.
   35.   8.    32.   19.
```

7.5. **[1.2]** Relativamente ao grafo definido pela matriz M1, indique, justificando:

i) todos os caminhos de comprimento 2 do terceiro para o quarto vértice;

Proposta de resolução:

Por observação da matriz M1^2, mais concretamente 3.ª linha e 4.ª coluna, temos que existem dois caminhos de comprimento 2 do terceiro para o quarto vértice;

Os caminhos são: c,a,d e c,f,d

ii) o número de caminhos de comprimento 4 do quarto para o quinto vértice;

Proposta de resolução:

Por observação da matriz M1^4, mais concretamente 4.ª linha e 5.ª coluna, temos que existem cinco caminhos de comprimento 4 do quarto para o quinto vértice;

7.6. **[1.2]** Relativamente ao grafo definido pela matriz M2, justifique se se trata de:

i) de um grafo fortemente conexo;

Proposta de resolução:

A matriz M2 é simétrica pelo que o seu grafo é não orientado. A matriz `M2+M2^2+M2^3+M2^4` não tem nenhuma entrada nula, pelo que o grafo é conexo.

ii) de um grafo euleriano.

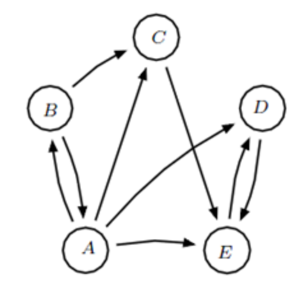
Proposta de resolução:

A matriz M2 é simétrica pelo que o seu grafo é não orientado. Os graus dos seus vértices são grau(A)=2x1+0+2+1=5; grau(B)=0+2x0+1+0=1; grau(C)=2+1+2x1+0=5 e grau(D)=1+0+0+2x1=3.

Todos os vértices têm grau ímpar por isso não existe nenhum circuito (nem nenhum caminho) de Euler.

Logo, o grafo não é euleriano (nem semi-euleriano)

8. Relativamente ao grafo apresentado ao lado:



8.1. **[1.0]** Classifique-o, indique o conjunto dos vértices e das arestas, assim como sua ordem e dimensão;

Proposta de resolução:

- Grafo orientado
- Conjunto de vértices: {A, B, C, D, E}
- Conjunto de arestas: {(A,B), (A,C), (A,D), (A,E), (B,A), (B,C), (C,E), (D,E), (E,D)}
- Ordem = |V| = 5
- Dimensão = |E| = 9

8.2. **[1.0]** Determine a matriz de adjacências e, com base nessa matriz, determine o grau de cada vértice.

Proposta de resolução:

Matriz de adjacências: $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$grau^e(A) = 0+1+0+0+0 = 1$$
$$grau^e(B) = 1+0+0+0+0 = 1$$
$$grau^e(C) = 1+1+0+0+0 = 2$$
$$grau^e(D) = 1+0+0+0+1 = 2$$
$$grau^e(E) = 1+0+1+1+0 = 3$$

$$grau^s(A) = 0+1+1+1+1 = 4$$
$$grau^s(B) = 1+0+1+0+0 = 2$$
$$grau^s(C) = 0+0+0+0+1 = 1$$
$$grau^s(D) = 0+0+0+0+1 = 1$$
$$grau^s(E) = 0+0+0+1+0 = 1$$

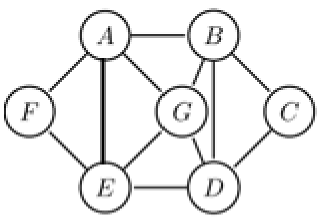
8.3. **[1.0]** Averigue, justificando, se se trata de um grafo euleriano ou semi-euleriano, e, se possível, determine um circuito ou caminho de Euler, recorrendo ao Algoritmo de Fleury.

Proposta de resolução:

- Um multigrafo orientado diz-se euleriano se admitir um circuito de Euler. Para tal, tem de ser conexo e cada vértice ter o mesmo grau de entrada e saída. Como, por exemplo, $grau^e(A) \neq grau^s(A)$, o grafo não é euleriano.
- Um multigrafo orientado diz-se semi-euleriano se admitir um caminho euleriano. Para tal, tem de ser conexo e todos os vértices têm o mesmo grau de entrada e saída, exceto dois vértices que têm graus de entrada e de saída que diferem de 1, sendo que um dos vértices tem um grau de entrada a mais do que o grau de saída e o outro tem um grau de saída a mais do que o grau de entrada.

Neste caso, nenhum vértice tem o mesmo grau de entrada e saída. Portanto, o grafo não é semi-euleriano.

9. **[1.4]** Uma multinacional pretende testar todas as ligações de circuitos dedicados entre as suas filiais sediadas em 7 países (A – Alemanha, B – Bélgica, C – Canadá, D – Dinamarca, E – Espanha, F –Finlândia e G – Grécia), utilizando uma mensagem de diagnóstico que terá de percorrer todas as ligações. As ligações entre as diferentes filiais são dadas pelo grafo abaixo.



Verifique se é possível que a mensagem parta da Dinamarca, D, percorra todas as ligações exatamente uma vez e retorne à Dinamarca. Caso seja possível, indique um circuito que o permita fazer.

Proposta de resolução:

As ligações entre as filiais são representadas pelas arestas do grafo (não orientado).

Os graus dos vértices do grafo são os seguintes:

$grau(A) = grau(B) = grau(D) = grau(E) = grau(G) = 4$ e $grau(C) = grau(F) = 2$.

Como todos os vértices têm grau par o grafo admite um circuito euleriano. Assim, podemos percorrer todas as arestas exatamente uma vez. Deste modo, é possível que a mensagem parta da Dinamarca (D), percorra todas as ligações exatamente uma vez e retorne à Dinamarca.

Um circuito que o permite fazer é, por exemplo, D, C, B, D, G, B, A, G, E, A, F, E, D.