Proposta de Resolução – Exame Época Normal - Matemática I - 2016/2017

1.

$$y = \sqrt{x}$$

$$4x - 2y + \tfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow y = 2x + \tfrac{1}{4} \longrightarrow m = 2 \text{ (declive)}$$

$$y' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = m \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{16} \longrightarrow y = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{4} = 2\left(x - \frac{1}{16}\right)$$

A reta tangente é $y = 2x + \frac{1}{8}$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \dfrac{3}{2}x^2 & , \quad x \geq 0 \\ \operatorname{sen}(x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

(a) $D_f = \mathbb{R}$. No primeiro ramo temos uma função polinomial e no segundo ramo temos uma função seno, ambas com domínio $\mathbb{R}$.

(b)

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 + 3x & , \quad x > 0 \\ \cos(x) & , \quad x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} (3x^2 + 3x) = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} (\cos(x)) = 1$$

Como $f'(0) \neq f'(0^+)$, a função não é diferenciável no ponto $x = 0$.

(c)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}\pi \vee x = -\frac{\pi}{2}$$

Fazendo a tabela dos sinais, concluímos que a função f tem um máximo, y=1, em $x = -\frac{3}{2}\pi$ e tem um mínimo, y=-1, em $x = -\frac{\pi}{2}$.

$$f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \text{ e } f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\pi$$

Fazendo a tabela dos sinais, concluímos que a função f tem um ponto de inflexão, $(-\pi, 0)$.

3.

$$f(x) = \begin{cases} x+3 & , \quad x \le 2 \\ cx+6 & , \quad x > 2 \end{cases}$$

A função f é definida por dois polinómios em cada um dos dois ramos, logo é contínua em cada um dos dois ramos. No ponto de mudança de ramo, $x = 2$, $f(2) = 5$, $\lim_{x \to 2^-}(x+3) = 5$ e $\lim_{x \to 2^+}(cx+6) = 2c + 6$, logo a função é contínua em $x = 2$, se $2c + 6 = 5 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{2}$.

4.

$$\int \frac{e^{\operatorname{arctg}(x)}}{1+x^2}\,dx = \int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{u'} e^{\overbrace{\operatorname{arctg}(x)}^{u}}\,dx = e^{\operatorname{arctg}(x)} + C, C \in \mathbb{R}$$

5.

Cálculo Auxiliar:

$u = x \to P(u) = \frac{x^2}{2}$

$v = \ln(x+1) \longrightarrow v' = \frac{1}{x+1}$

$$\int x \ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx \underbrace{=}_{\substack{divisão \\ polinómios}}$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln|x+1|\right) + C$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C, C \in \mathbb{R}$$

6.

$$\int \frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 5x^2}\,dx \underbrace{=}_{\substack{coeficientes \\ indeterminados}} \int \left(\frac{2}{5x} - \frac{1}{x^2} - \frac{3}{5(x-5)}\right)dx =$$

$$= \frac{2}{5}\ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{3}{5}\ln|x-5| + C, C \in \mathbb{R}$$

Cálculo Auxiliar Coeficientes Indeterminados:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 5x^2} = \frac{x^2 - 3x + 5}{x^2(x-5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-5}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 5 = (A + C)x^2 + (B - 5A)x - 5B$$

$$\begin{cases} A + C = 1 \\ B - 5A = -3 \\ -5B = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} C = \frac{3}{5} \\ A = \frac{2}{5} \\ B = -1 \end{cases}$$

7.

Cálculo Auxiliar Mudança Variável:

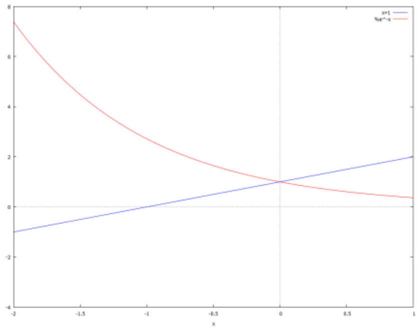
$t = 1 + x \Leftrightarrow x = t - 1 \longrightarrow dx = dt$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx = \int \frac{\mathrm{t}-1}{\sqrt{t}}\,dt$$

$$= \int \left(\frac{t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt = \int \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right) dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} - 2\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(1+x)\sqrt{1+x} - 2\sqrt{1+x} + C, C \in \mathbb{R}$$

8.



Área$=\int_{-2}^{0}[e^{-x} - (x+1)]dx + \int_{0}^{1}[(x+1) - e^{-x}]dx$

9.

$$\int_{e}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{t\to+\infty} \int_{e}^{t} \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'} (\underbrace{\ln x}_{u})^{-2} dx = \lim_{t\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-2+1}}{-2+1}\right]_{e}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left[-\frac{1}{\ln(x)}\right]_{e}^{t} = \lim_{t\to+\infty} \left(-\underbrace{\frac{1}{\ln(t)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{\ln(e)}}_{=1}\right) = 1$$

O integral impróprio é convergente.

10.

$$D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x-y}{y-1} > 0, y - 1 \neq 0\right\}$$

$$(x - y > 0 \wedge y - 1 > 0) \vee (x - y < 0 \wedge y - 1 < 0), y \neq 1$$

$$(x > y \wedge y > 1) \vee (x < y \wedge y < 1)$$