

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas + 15 min	

Nome: _____ Número: _____

Observações:

A avaliação desta Unidade Curricular, na modalidade de avaliação durante o período letivo, contempla os três elementos e respetivas ponderações: 35% Teste 1 + 35% Teste 2 + 30% Trabalho Prático.

Para a realização desta prova o estudante pode usar um formulário manuscrito e criado pelo próprio.

O formulário pode ter até uma **página A4** (ou duas páginas A5).

No final da prova, **têm de ser entregues** o enunciado, as folhas de resposta e de rascunho, assim como o formulário, todos **devidamente identificados** com o nome e número de estudante.

Deve responder às questões colocadas neste enunciado, expeto para as devidamente indicadas.

Apresente todas as justificações.

Bom trabalho!

Eliana Costa e Silva e Isabel Cristina Duarte

1. Considere os conjuntos $X = \{x^2 + 2 : x \in \{1, 3\}\}$ e $Y = \{\emptyset, 0, 1, \{1\}, 3, \{3, 10\}\}$

1.1. [0.8] Complete, sem justificar, os espaços com $\in, \notin, \subseteq, \supseteq, =, \neq$ por forma a obter afirmações verdadeiras:

\emptyset _____ X $\{1, 3\}$ _____ X $\{1, 3\}$ _____ Y $\mathcal{P}(X)$ _____ $\mathcal{P}(Y)$

1.2. [0.8] Diga, justificando, se a função $f: \{1, 3\} \rightarrow \mathcal{P}(X \cup \{1, 3\})$, tal que $f(x) = \{x\} \cap \{3, 10\}$ é bijetiva.

1.3. [1.0] Determine X^2 e $\mathcal{P}(X) - \mathcal{P}(Y)$.

2. [0.8] Dê três exemplos de conjuntos infinitos enumeráveis.


 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas+15 min	

3. [1.8] Tendo em conta as igualdades apresentadas ao lado, determine:

$$\sum_{i=7}^{52} (i^2 - i^3) + \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{2}{3}\right)^i - 7 \prod_{i=20}^{89} 3$$

$\sum_{i=0}^n ar^i, r \neq 0$ (PG)	$a \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}, r \neq 1$
$\sum_{i=1}^n i$ (PA)	$\frac{n(n+1)}{2}$
$\sum_{i=1}^n i^2$	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
$\sum_{i=1}^n i^3$	$\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

4. [1.0] Sejam X, Y e W conjuntos tais que $Y \subseteq W$, $\#(X^2) = 36$, $\#(\mathcal{P}(Y)) = 16$ e $\#W = 7$. Determine $\#(X \times (Y \oplus W))$

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas + 15 min	

Nome: _____ Número: _____

5. [1.4] Mostre, recorrendo a indução Matemática que, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{j=1}^n (10j - 5) = 5n^2$$

6. [1.4] Considere a fórmula de recorrência dada por:

$$\begin{cases} S(1) = 3 \\ S(n) = 4S(n-1) + 5, \quad n \geq 2 \end{cases}$$

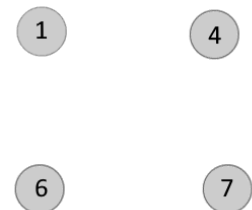
Recorrendo ao algoritmo EGV (*Expand, Guess, Verify*), encontre a fórmula fechada correspondente.

 <small>ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO</small>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas+15 min	

7. Considere o conjunto $A = \{1,4,6,7\}$, e as duas relações seguintes definidas em A :

$$R = \{(x, y) : |x - y| \text{ é divisível por } 3\} \text{ e } S = \{(1,4), (1,7), (4,4), (4,6), (6,7), (7,6), (7,7)\}$$

7.1. [1.0] Represente a relação S sob a forma de uma matriz e represente relação R graficamente;




7.2. [1.4] Indique, justificando, se alguma das relações é de equivalência e em caso afirmativo escreva o seu conjunto quociente;

7.3. [0.6] Indique, justificando, se alguma das relações é de ordem parcial;

7.4. [1.2] Calcule $R^{-1} \cup S$ e $S^2 \circ (S \cap R)$.

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas + 15 min	

Nome: _____ Número: _____

8. Considere o fragmento de código  onde são definidas as matrizes de adjacência M1 e M2 de dois grafos com vértices $V1=\{a,b,c,d,e,f\}$ e $V2=\{A,B,C,D\}$, respetivamente. Com base no output, responda às questões seguintes.


<pre>--> M1=[1 0 0 1 0 1; > 1 0 0 0 0 0; > 1 1 0 0 0 1; > 0 0 1 0 1 0; > 0 0 1 0 0 1; > 1 1 0 1 1 0]; --> M2=[1 0 2 1 > 0 0 1 0 > 2 1 1 0 > 1 0 0 1];</pre>	<pre>--> M1^2 ans = 2. 1. 1. 2. 2. 1. 1. 0. 0. 1. 0. 1. 3. 1. 0. 2. 1. 1. 1. 1. 1. 0. 0. 2. 2. 2. 0. 1. 1. 1. 2. 0. 2. 1. 1. 2. --> M1^4 ans = 16. 9. 6. 10. 8. 12. 5. 2. 4. 3. 3. 5. 13. 7. 7. 9. 8. 11. 10. 2. 5. 7. 5. 7. 11. 5. 5. 8. 6. 9. 17. 7. 7. 11. 9. 11.</pre>	<pre>--> M2^2 ans = 6. 2. 4. 2. 2. 1. 1. 0. 4. 1. 6. 2. 2. 0. 2. 2. --> M2^4 ans = 60. 18. 54. 24. 18. 6. 15. 6. 54. 15. 57. 24. 24. 6. 24. 12. --> M2+M2^2+M2^3+M2^4 ans = 83. 24. 78. 35. 24. 8. 23. 8. 78. 23. 79. 32. 35. 8. 32. 19.</pre>
--	---	---

8.1. [1.2] Relativamente ao grafo definido pela matriz M1, indique, justificando:
i) todos os caminhos de comprimento 2 do terceiro para o quarto vértice;

ii) o número de caminhos de comprimento 4 do quarto para o quinto vértice;

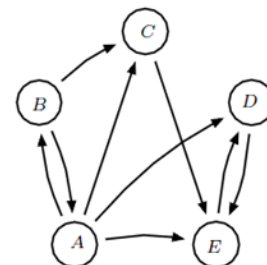
8.2. [1.2] Relativamente ao grafo definido pela matriz M2, justifique se se trata de:
i) de um grafo fortemente conexo;

ii) de um grafo euleriano.

 <div> ESCOLA SUPERIOR DE TECNOLOGIA E GESTÃO </div>	Tipo de Prova Teste 1	Ano letivo 2021/2022	Data 11-04-2022
	Curso LSIRC+LEI	Hora 15:00	
	Unidade Curricular Matemática Discreta	Duração 1,5 horas+15 min	

9. Relativamente ao grafo apresentado ao lado:

9.1. [1.0] classifique-o, indique o conjunto dos vértices e das arestas, assim como sua ordem e dimensão;



9.2. [1.0] determine a matriz de adjacências e, com base nessa matriz, determine o grau de cada vértice.

9.3. [1.0] averigue, justificando, se se trata de um grafo euleriano ou semi-euleriano, e, se possível, determine um circuito ou caminho de Euler, recorrendo ao Algoritmo de Fleury.

10. [1.4] Uma multinacional pretende testar todas as ligações de circuitos dedicados entre as suas filiais sediadas em 7 países (A - Alemanha, B - Bélgica, C - Canadá, D - Dinamarca, E - Espanha, F - Finlândia e G - Grécia), utilizando uma mensagem de diagnóstico que terá de percorrer todas as ligações. As ligações entre as diferentes filiais são dadas na figura ao lado. Verifique se é possível que a mensagem parta da Dinamarca, D, percorra todas as ligações exatamente uma vez e retorne à Dinamarca. Caso seja possível, indique um circuito que o permita fazer.

