Taller 3 Análisis numérico

Heyling Burgos

Fabian Olarte

Johan Rosero

David Suárez

Andrés Vásquez

Introducción:

El taller consta de tres partes por un lado tenemos un punto del taller de interpolación, elegido aleatoriamente específicamente el punto 2 donde se calcula un polinomio de grado tres de acuerdo con diferentes puntos dados por el enunciado.

Por el otro lado tenemos un caso un ejercicio el cual consiste en poder determinar un informe fiscal que permita por medio de la interpolación justificar una revaluación con el fin de aplicar un tipo marginal intermedio en el pago a hacienda.

Finalmente, tenemos el punto de poder graficar por medio de diferentes interpolaciones con el fin de generar recrear una serie curvas que pueda por este medio graficar este caso un perro acostado denominado Picasso.

Punto 2

Para el desarrollo de este punto se empleó el método de diferencias divididas que obtiene un polinomio de grado menor a la cantidad de puntos que da el ejercicio. En este caso, el enunciado nos da una cantidad de 3 puntos y una recta tangente que pasa por el punto inicial x_0, por tal motivo, adicionamos un punto demás por la derivada que nos da este ejercicio, de esa forma, el punto inicial se duplica y se obtienen 4 puntos distintos para lograr el polinomio de grado 3 que se busca.

Las condiciones usadas son las siguientes:

$$f[x_0, x_1, \dots.., x_k] = \begin{cases} x_0 \neq x_k, & f[x_0, x_1, \dots.., x_k] = \dfrac{f[x_1, x_2, \dots., x_k] - f[x_0, x_1, \dots\dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0} \\ x_0 = x_k, & \dfrac{f^k(x_0)}{k!} \end{cases}$$

Ecuación. 1 Condiciones iniciales del método de Diferencias Divididas.

Donde con cualquier valor distinto del valor inicial se hace la diferencia de la función evaluada empezando desde 1 hasta el índice del valor donde se encuentra y el valor inicial hasta el anterior al índice donde estamos. De caso contrario, cuando el valor es el inicial se usa la derivada que en este caso es la tangente que el enunciado nos da. Por tal motivo, cada una de las iteraciones quedan de la siguiente forma:

Debido a la condición inicial del primer elemento, y como fue planteado el ejercicio según la tangente que es la derivada en 1, se replica este primer valor obteniendo la siguiente ecuación.

$$p_o = f(x_0) = 10$$

Donde el primer valor que es el 0 tiene como resultado el 10, por tal motivo esta ecuación da como resultado 10, por otro lado, en las siguientes iteraciones se colocan las tablas respectivas de acuerdo a las condiciones iniciales para obtener su función y de igual forma, se emplean las ecuaciones de cada uno donde el resultado final contiene la solución que buscamos del polinomio de grado 3.

- **Primera iteración**

$[x_0, x_0]$	$f[x_0, x_0]$
[0,0]	1
[0,1]	5
[1,2]	-10

Tabla 1 Evaluación de condiciones iniciales - primera iteración.

$$p_1 = p_0(x) + f[x_0, x_0] * (x - x_0) = f(0) + f[0,0] * (x - 0) = 10 + x$$

Ecuación. 2 Polinomio resultante - primera iteración.

- **Segunda iteración**

$[x_0, x_1]$	$[x_0, x_0]$	$f[x_0, x_0]$	$[x_1, x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$x_0 - x_1$	$f[x_0, x_1]$
[0,0,1]	[0,0]	1	[0,1]	5	-1	4
[0,1,2]	[0,1]	5	[1,2]	-10	-2	-7.5

Tabla 2 Evaluación de condiciones iniciales - segunda iteración.

$$p_2 = p_1(x) + f[x_0, x_0, x_1] * (x - x_0) * (x - x_0) = p_1(x) + f[0,0,1] * (x - 0) * (x - 0)$$
$$= 10 + x + 4x^2$$

Ecuación. 3 Polinomio resultante - segunda iteración.

- **Tercera iteración**

$[x_0, x_2]$	$[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$x_0 - x_2$	$f[x_0, x_2]$
[0,0,1,2]	[0,0,1]	4	[0,1,2]	7,5	-2	-5,75

Tabla 3 Evaluación de condiciones iniciales - tercera iteración.

$$p_3 = p_2(x) + f[x_0, x_0, x_1, x_2] * (x - x_0) * (x - x_0) * (x - x_1)$$
$$= p_2(x) + f[0,0,1,2] * (x - 0) * (x - 0) * (x - x_1)$$
$$= 10 + x + 4x^2 - 5.75x^2(x - 1) = 10 + x - 1.75x^2 - 5.75x^3$$

Ecuación. 4 Evaluación de condiciones iniciales - tercera iteración.

A continuación, se presenta el resultado sujeto a las condiciones iniciales.

```
El polinomio de grado 3 que pasa por los puntos (0,10),(1,15) y (2,5) es:

-5.75*x**3 + 4.0*x**2 + 1.0*x + 10.0
```

Ilustración 1 Resultados punto 2.

Punto 13

Por el punto nos dan una escala de gravamen del impuesto a la renta el cual cuenta con una base imponible una cuota íntegra un tipo que representa el porcentaje, necesitamos una cuota integral referente al impuesto sobre la renta la cual está integrada por medio de una fórmula basada en la interpolación lineal, para este ejercicio el caso de un contribuyente este tiene una base imponible igual a 5’000.000 pero es ejercicio termina generando conozco los mostrados en el ejercicio qué el impuesto sobre la renta es progresivo le genera un conveniente al contribuyente debido a que según él no se está aplicando la base más próxima a su escala y así poder tener un mayor beneficio.

Resultados:

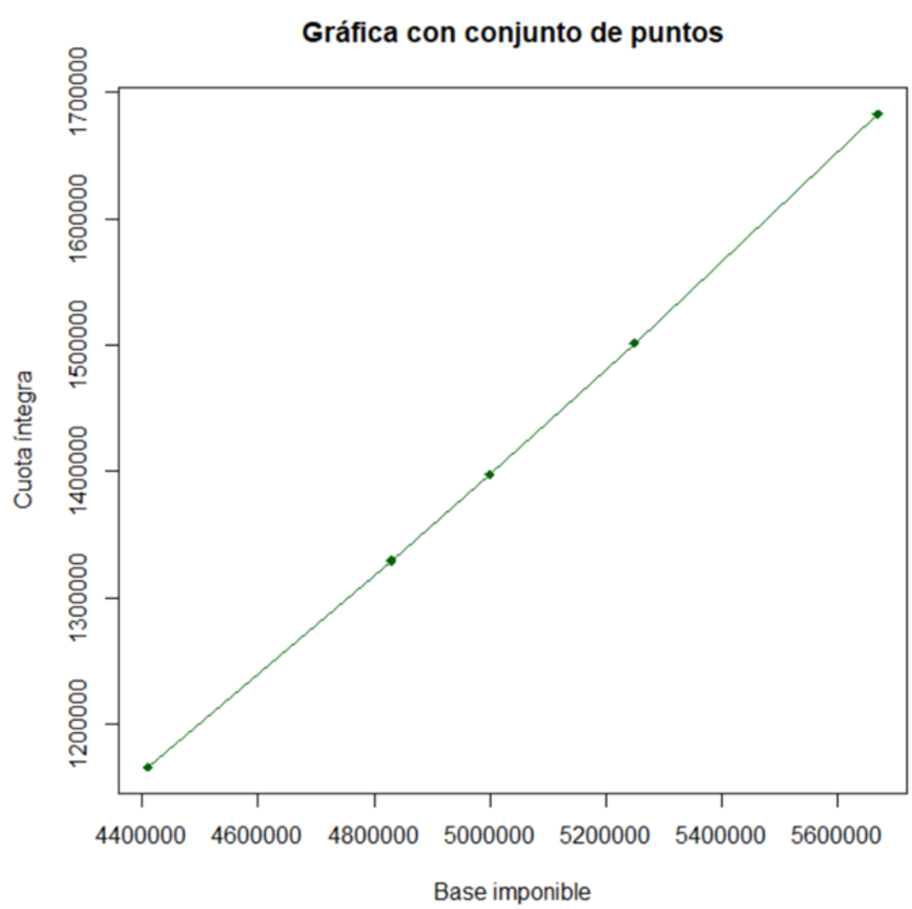


Ilustración 2 Conjunto de puntos.

En esta grafica podemos observar los puntos que nos están brindando referente a la base imponible y la cuota íntegra en esta podemos encontrar que los puntos intermedios dados existen una diferencia entre la longitud de los diversos datos.

Data	
matriz_incog	num [1:3, 1:3] 1.94e+13 2.33e+13 2.76e+13 4.41e+06 4.83e+06
matriz_incog2	num [1:4, 1:4] 8.58e+19 1.13e+20 1.45e+20 8.58e+19 1.94e+13
Values	
cuotasIntegras	num [1:3] 1165978 1329190 1501474
cuotasIntegras2	num [1:4] 1165978 1329190 1501474 1682830
x	num [1:5] 4410000 4830000 5000000 5250000 5670000
y	num [1:5] 1165978 1329190 1397831 1501474 1682830

Ilustración 3 Información para obtener la función de interpolación.

En la tabla podemos encontrar las dos matrices incógnitas que consisten en obtener la base imponible de las diversas formas con el fin de realizar la función interpolación

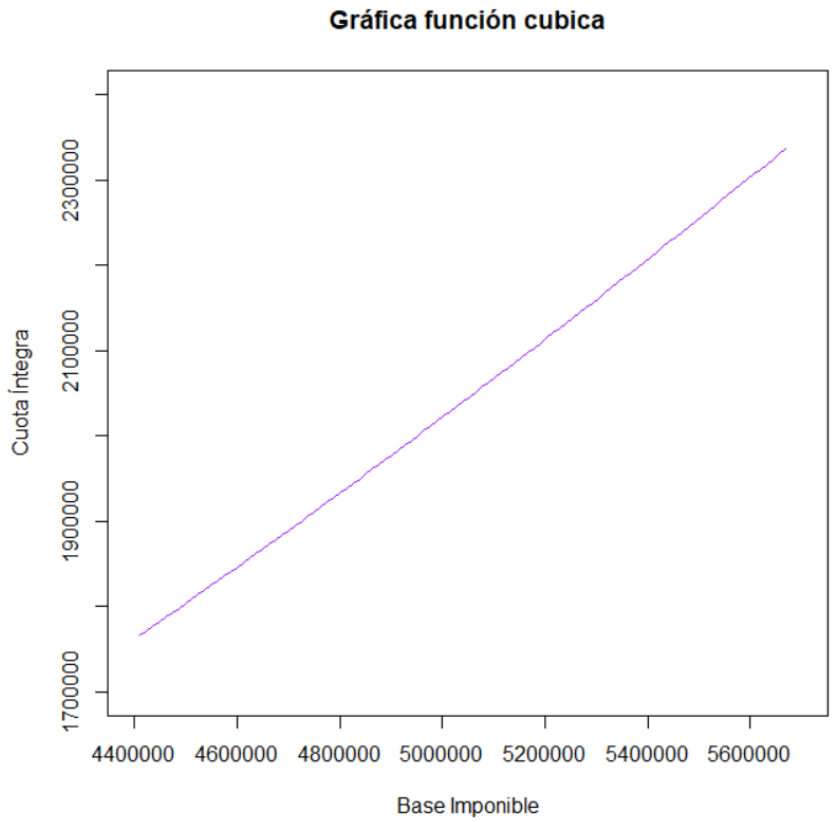


Ilustración 4 Función cubica.

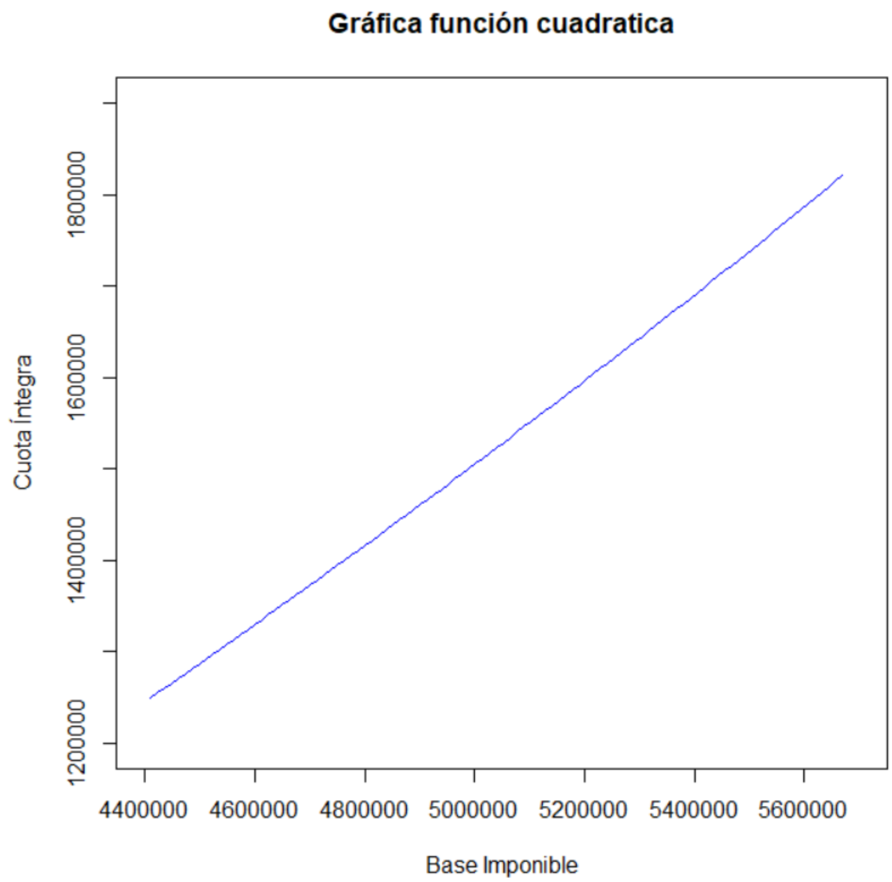
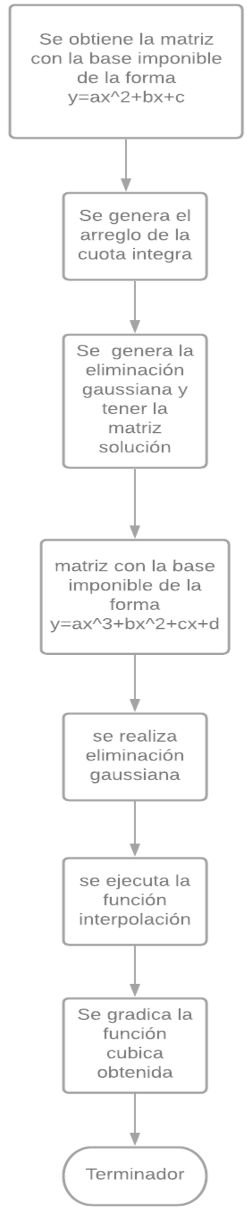


Ilustración 5 Función cuadrática.

El diagrama de flujo dado consiste en poder obtener y guardar en una matriz con los diversos datos “base imponible” y también el arreglo de “cuota íntegra”, estos nos permiten poder generar la eliminación y de esta forma poder obtener la matriz solución con estos datos también podemos derivar las funciones cubica y cuadrática correspondiente.



Punto de la silueta de "Picasso"

Para la solución de este ejercicio se empleó el método de interpolación de Lagrange que obtiene un polinomio dado unos puntos dados, en este caso con 3 curvas distintas.

Cada una de estas 3 curvas son dadas con diferentes X y su valor obtenido al evaluarlo en la función que son las Y.

Por tal motivo, se empieza a ver el comportamiento de la función graficando los puntos de cada una de las curvas dando como resultado una silueta con picos perdiendo la suavidad en la línea. Dado dicho resultado, se vio la necesidad de buscar un método de interpolación que suavice la curva y la haga más exacta creando la silueta más parecida a la que estamos buscando. Este método usa una matriz de Vandermomde que genera una progresión geométrica en cada fila. Esta fue usada para determinar la función de cada una de las gráficas dando como resultado una función interpolada.

Del mismo modo, se usó la librería interpolate de scipy especialmente la interpolación de Lagrange para obtener las siguientes ecuaciones de cada una de las curvas:

```
->Curva 1 Superior.
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

           6          5           4          3         2
-2.426e-05 x + 0.0014 x - 0.03086 x + 0.3185 x - 1.536 x + 3.434 x + 0.8128

->Curva 1 Inferior.
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

         4          3         2
-0.01831 x + 0.2783 x - 1.332 x + 2.213 x + 1.859

->Curva 1.2 Inferior.
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

         3          2
0.008639 x - 0.3253 x + 3.892 x - 12.61

->Curva 2 Superior.
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

          5          4         3       2
-0.001158 x + 0.1279 x - 5.593 x + 121 x - 1293 x + 5466

->Curva 2 Inferior.
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

         3          2
0.006641 x - 0.4259 x + 8.932 x - 59.39
```

```
->Curva 3 Superior
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

         2
-0.4783 x + 27.12 x - 380.1

->Curva 3 Inferior
Polinomio mediante interpolacion de lagrange:

     2
0.3 x - 17.2 x + 249
```

La siguiente imagen representa la silueta del perro interpolada y no interpolada, donde la línea azul segmentada significa la función sin interpolar por los puntos dados y la línea roja representa la función suavizada de cada una de las curvas con la interpolación: