《数学物理方法》公式整理

第一章 复变函数

> $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)\qquad z=x+\mathrm{i}y$

- **柯西-黎曼方程（C-R 条件）：** 复变函数可导的必要条件

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

- **极坐标系中，柯西-黎曼方程：**

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial v}{\partial \rho}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}.$$

- **解析函数性质：**
  - 1. 若函数 $f(z)=u+\mathrm{i}v$ 在区域 B 上解析，则

$$u(x,y)=C_1\ ,\ v(x,y)=C_2$$

    是 B 上的两组正交曲线族。即：

$$\nabla u\cdot\nabla v=0$$

  - 2. 若函数 $f(z)=u+iv$ 在区域 B 上解析，则 u,v 均为 B 上的**调和函数**。即：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

- **二元函数 $v(x,y)$ 的微分式：**

$$\mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$$

  - 根据 **C-R** 条件可以改写为：

$$\mathrm{d}v=-\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y$$

第二章 复变函数的积分

- **积分不等式：**

$$\left|\int_l f(z)\mathrm{d}z\right| \le \int_l |f(z)||\mathrm{d}z| \le ML$$

- **单连通区域柯西定理**：如果函数 $f(z)$ 闭单连通区域 $\bar{B}$ 上任一分段光滑闭合曲线 l（也可以是 $\bar{B}$ 的边界），有

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 0$$

- **复连通区域柯西定理**：如果函数 $f(z)$ 是闭单连通区域上的单值解析函数，则

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n}\oint_{l_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

  式中 l 为区域外边界线， l_i 为区域内边界线

- 计算 $I = \oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z$ **(n 为整数)**

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha} = \begin{cases} 0 & (l\text{ 不包围 }\alpha) \\ 1 & (l\text{ 包围 }\alpha) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = 0 \quad (n \ne -1)$$

- **柯西公式**：若 $f(\zeta)$ 在闭单连通区域 $\bar{B}$ 上解析，l 为 $\bar{B}$ 的边界线，z 为 $\bar{B}$ 内的任一点，则

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta$$

  - 求导得：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi\mathrm{i}}\oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\mathrm{d}\zeta$$

第三章 幂级数展开

- **以 z_0 为中心的$f(z)$ 泰勒展开**

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k \qquad (|z-z_0|<R)$$

- **在 z_0 的邻域上将下列级数展开**：（前三收敛半径均为 ∞ ）

$$f(z)=e^z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}$$

$$f(z)=\sin z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$f(z)=\cos z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!}$$

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k \qquad (|z|<1)$$

- **洛朗级数展开:** 设 $f(z)$ 在环形区域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 的内部单值解析，则对环域上任一点 z ，$f(z)$可展为幂级数：

$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$a_k=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta$$

  C 为环域内沿逆时针方向绕内圆一周的任一闭回线

第四章 留数定理

- **留数定理**：设函数 $f(z)$ 在回路 l 上所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1, b_2, ..., b_n$ 外解析，在闭区域 $\bar{B}$ 外连续，则

$$\oint_l f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Res}f(b_j)$$

- **判断 z_0 是否单极点、留数**

$$\lim_{z\to z_0}[(z-z_0)f(z)] = \text{非零有限值，即 } \mathrm{Res}f(z_0)$$

- 若 $f(z)$ 表示为 $P(z)/Q(z)$，且 $P(z)$和$Q(z)$ 都在 z_0 解析，z_0 是 $Q(z)$ 的一阶零点，$P(z_0) \neq 0$，从而 z_0 是 $f(z)$ 的一阶极点，则

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

- **函数 $f(z)$ 在 m 阶极点的留数**：

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{1}{(m-1)!}\left\{\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\right\}$$

- **实变定积分**：
    - **类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$**

      > 作自变数代换 $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

    - **类型二 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$**

      > $f(z)$在实轴上没有奇点，
      > 在上半平面除有限个奇点外是解析的，
      > 当 z 在上半平面及实轴上 $\to \infty$ 时，$zf(z)$ 一致地 $\to 0$

$$I = 2\pi\mathrm{i}\{f(z)\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}$$

    - **类型三 $\int_0^{\infty} F(x)\cos mx\,\mathrm{d}x, \int_0^{\infty} G(x)\sin mx\,\mathrm{d}x$**

      > 偶函数 $F(z)$ 和奇函数 $G(z)$ 在实轴上没有奇点，
      > 在上半平面除有限个奇点外是解析的，
      > 当 z 在上半平面及实轴上 $\to \infty$ 时，$F(z), G(z)$ 一致地 $\to 0$

$$\int_0^{\infty} F(x)\cos mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$$

$$\int_0^{\infty} G(x)\sin mx \mathrm{d}x = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}mx}\mathrm{d}x$$

- **若实轴上有有限个单极点**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{\text{上半平面}}\mathrm{Res}f(z) + \pi\mathrm{i}\sum_{\text{实轴上}}\mathrm{Res}f(z)$$

第五章 傅里叶(Fourier)变换

$\S 5.1$ 傅里叶级数

- **周期函数的傅里叶展开**

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

展开的傅里叶系数

$$\begin{cases}a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\ a_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\\ b_k=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi\end{cases}$$

- **复数形式的傅里叶级数**

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{k\pi x}{l}}$$

展开的傅里叶系数

$$c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k\pi\xi}{l}}\mathrm{d}\xi$$

$\S 5.2$ 傅里叶积分与傅里叶变换

- **非周期函数的傅里叶积分表达式**

$$f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega x\,\mathrm{d}\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x\,\mathrm{d}\omega$$

其傅里叶变换式为

$$\begin{cases}A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi\mathrm{d}\xi\\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi\mathrm{d}\xi\end{cases}$$

- **复数形式的傅里叶积分**

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}\omega$$

其傅里叶变换式为

$$F(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x$$

- **傅里叶变换的基本性质**

> 记 $\mathscr{F}[f(x)]=F(\omega)$

  - 导数定理

$$\mathscr{F}[f'(x)]=\mathrm{i}\omega F(\omega)$$

  - 积分定理

$$\mathscr{F}\left[\int^{(x)}f(\xi)\mathrm{d}\xi\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)$$

  - 相似性定理

$$\mathscr{F}[f(ax)]=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

  - 延迟定理

$$\mathscr{F}[f(x-x_0)]=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega)$$

  - 位移定理

$$\mathscr{F}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0 x}f(x)]=F(\omega-\omega_0)$$

  - 卷积定理
    若 $\mathscr{F}[f_1(x)]=F_1(\omega),\mathscr{F}[f_2(x)]=F_2(\omega),$，则

$$\mathscr{F}[f_1(x)*f_2(x)]=2\pi F_1(\omega)F_2(\omega)$$

$\S 5.3\ \delta$ 函数

- δ 函数

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & (x\neq 0)\\ \infty & (x=0)\end{cases}$$

- δ **函数的挑选性 ★**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x=f(0)$$

第六章 拉普拉斯(Laplace)变换

- **拉普拉斯变换：**

$$\bar{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t$$

- **特殊拉氏变换**

原函数	像函数
1	$\frac{1}{p}$
$t^n \quad (\text{n为整数})$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p-\lambda}$
$\sin\,\omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos\,\omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\,\omega t$	$\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$
$e^{-\lambda t}\sin\,\omega t$	$\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$

- **线性定理：**

$$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t) \risingdotseq c_1\bar{f}_1(p)+c_2\bar{f}_2(p)$$

- **导数定理：★**

$$f'(t)\risingdotseq p\bar{f}(p)-f(0)$$

$$f^{(n)}(t)\risingdotseq p^n\bar{f}(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-pf^{(n-2)}(0)-f^{n-1}(0)$$

- **积分定理：**

$$\int_0^t \Psi(\tau)\,\mathrm{d}(\tau)\risingdotseq\frac{1}{\mathrm{p}}\mathscr{L}[\Psi(\mathrm{t})]$$

- **相似性定理：**

$$f(at)\risingdotseq\frac{1}{a}\bar{f}(\frac{p}{a})$$

- **位移定理：**

$$e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq \bar{f}(p+\lambda)$$

- **延迟定理：**

$$f(t-t_0) \risingdotseq e^{-p t_0} \bar{f}(p)$$

- **卷积定理：** 若$f_1(t) \risingdotseq \bar{f}_1(p)$, $f_1(t) \risingdotseq \bar{f}_1(p)$, 则

$$f_1(t) * f_2(t) \risingdotseq \bar{f}_1(p) \bar{f}_2(p)$$

  其中

$$f_1(t) * f_2(t) \equiv \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) \, \mathrm{d}(\tau)$$

  称为 $f_1(t)$和$f_2(t)$ 的卷积

第七章 数学物理定解问题

$\S 7.1$ 数学物理方程的导出 ★

- **波动方程：**

$$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$$

  - 均匀弦的微小横振动：

$$a=\sqrt{\frac{F_T}{\rho}}\qquad F_T\text{：弦张力；}\rho\text{：线密度}$$

  - 均匀杆的纵振动：

$$a=\sqrt{\frac{E}{\rho}}\qquad E:\text{弹性模量；}\rho\text{：体密度}$$

  - 理想传输线方程（电报方程）：

$$a^2=\frac{1}{LC}\qquad L,C\text{：单位电压下、单位长度的电感，电容}$$

    - 电压和电流的关系：

$$\begin{cases}j_x=-Cv_t\\v_x=-Lj_t\end{cases}$$

- **输运方程：**(一维)（无源无汇）

$$u_t-a^2u_{xx}=0$$

  - 扩散方程：

$$a^2=D\qquad D\text{：扩散系数}$$

  - 热传导方程（物质均匀）：

$$a^2=\frac{k}{c\rho}\qquad k\text{：热传导系数；}c\text{：比热容；}\rho\text{：密度}$$

- **稳定场方程：**

- 稳定浓度分布：

$$D\Delta u = -F(x,y,z)$$

- 稳定温度分布：

$$k\Delta u = -F(x,y,z) \qquad \text{泊松方程}$$

$$\Delta u = 0 \qquad \text{拉普拉斯方程}$$

- 静电场：

$$\Delta V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$$

$\S 7.2$ 定解条件

- 初始条件 ★
  - 输运过程（扩散、传导）：

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$$

  - 振动过程
    - 初始位移:

$$u(x,y,z,t)|_{t=0} = \varphi(x,y,z)$$

    - 初始速度:

$$u_t(x,y,z,t)|_{t=0} = \psi(x,y,z)$$

- 边界条件
  - 第一类边界条件 ★
    - 弦的两端固定；细杆导热端点处恒温等
  - 第二类边界条件 ★
    - 作纵振动的杆的某个端点 $x=a$ 受有沿端点外发现方向的外力 $f(t)$，该端点的张应力与外力的关系为：

$$(Eu_n)|_{x=a}S = f(t)$$

    - 细杆导热，若某个端点 $x=a$ 有热流 $f(t)$ 沿该端点外法线方向流出：

$$-ku_n|_{x=a} = f(t)$$

      - 如热流流入：

$$-ku_n|_{x=a} = -f(t)$$

- 如端点绝热：

$$u_n|_{x=a} = 0$$

- 第三类边界条件
  - 细杆导热，如果杆的某端自由冷却，周围介质温度 θ，h 为热交换系数：

$$-ku_n|_{x=a} = h(u|_{x=a} - \theta)$$

  - 作纵振动的杆，某端通过弹性体连接到固定物上，k 为劲度系数：

$$\left(u + \frac{ES}{k}u_n\right)|_{x=a} = 0$$

- 衔接条件

$\S 7.4$ 达朗贝尔公式 定解问题

- 达朗贝尔(d'Alembert)公式（均匀弦的横振动、均匀杆的纵振动、理想传输线方程）
  - 通解：

$$u = f_1(x+at) + f_2(x-at)$$

  - 特解（**达朗贝尔公式**）（行波解）★：

> 假定无边界条件，所研究的弦、杆、传输线是"无限长的"
> 设初始条件为
>
> $$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

- 端点的反射
  - 半无限长弦的自由振动，端点固定

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geqslant 0) \\ -\varphi(-x) & (x < 0) \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geqslant 0) \\ -\psi(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

  - 半无限长杆的自由振动，端点自由

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & (x \geqslant 0) \\ \varphi(-x) & (x < 0) \end{cases} \qquad \Psi(x) = \begin{cases} \psi(x) & (x \geqslant 0) \\ \psi(-x) & (x < 0) \end{cases}$$

第八章 分离变数法

§8.1 齐次方程的分离变数法 ★

- 过程：
  - 偏微分方程 $\to$ 分离变数 $\to$ 常微分方程（解）
  - 其次边界条件 $\to$ 分离变数 $\to$ 本征值问题（本征函数）
  - 初始条件 $\to$ 确定叠加系数 $\to$

$$\text{所求解} = \sum_{\text{本征值}} \text{本征解}$$

> 注意 λ 的取值范围

- 区间两端均为第一类齐次边界条件的定解问题
  > 研究两端固定的均匀弦的自由振动
  - 定解问题
    - 泛定方程：$u_{tt}-a^2u_{xx}=0 \qquad (a^2=F_T/\rho)$
    - 边界条件：$\begin{cases} u|_{x=0}=0 \\ u|_{x=l}=0 \end{cases}$
    - 初始条件：$\begin{cases} u|_{t=0}=\varphi(x) \\ u_t|_{t=0}=\psi(x) \end{cases} \qquad (0<x<l)$
  - 分离关于 X，T 的常微分方程

$$\begin{cases} X''+\lambda X=0 \\ X(0)=0, X(l)=0 \end{cases}$$

$$T''+\lambda a^2 T=0$$

  - 本征值

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}. \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

  - 所求解

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$\begin{cases} A_n = \varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \\ \\ B_n = \frac{l}{n\pi a}\cdot\psi_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \end{cases}$$

- 区间两端均为第二类齐次边界条件的定解问题

  > 研究两端自由的均匀杆的自由纵振动

  - 定解问题
    - 泛定方程：$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (a^2 = E/\rho)$
    - 边界条件：$\begin{cases} u_x|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$
    - 初始条件：$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad (0 < x < l)$
  - 分离关于 X，T 的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X'(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0$$

  - 本征值

$$\lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}. \quad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

  - 所求解

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l} + B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

$$\begin{cases} A_0 & = \frac{1}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \\ \\ B_0 & = \frac{1}{l}\int_0^l \psi(\xi)\mathrm{d}\xi \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_n & = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \\ \\ B_n & = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l \psi(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}\mathrm{d}\xi \end{cases}$$

- 区间一端为第一类齐次边界条件，另一端为第二类齐次边界条件

  > 研究细杆导热问题 初始时刻杆的一端温度为零度，另一端为 u_0，杆上温度梯度均匀，零度的一端温度保持不变，另一端跟外界绝热

- 定解问题
  - 泛定方程： $u_t - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (a^2 = k/c\rho)$
  - 边界条件： $\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u_x|_{x=l} = 0 \end{cases}$
  - 初始条件： $u|_{t=0} = u_0 x/l \qquad (0 < x < l)$
- 分离关于 X，T 的常微分方程：

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = 0, X'(l) = 0 \end{cases}$$

$$T' + \lambda a^2 T = 0$$

- 本征值：

$$\lambda = \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 \pi^2}{l^2}. \quad (p = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

- 所求解：

$$u(x,t) = \frac{2u_0}{\pi^2} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2} \mathrm{e}^{-\frac{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t} \sin \frac{\left(p + \frac{1}{2}\right) \pi x}{l}$$

- 关于稳定场

> 研究横截面的稳定温度分布 散热片的横截面为矩形 一边 $y = b$ 处于较高温度 U，其他三边 $y = 0, x = 0, x = a$ 则处于较低温度 u_0

  - 令 $u(x,y) = u_0 + v(x,y)$
  - 转化后的定解问题
    - 泛定方程： $v_{xx} + v_{yy} = 0$
    - 边界条件： $\begin{cases} v|_{x=0} = 0, v|_{x=a} = 0 \\ v|_{y=0} = 0, v|_{y=b} = U - u_0 \end{cases}$
  - 分离关于 $X(x)Y(y)$ 的常微分方程

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, X(a) = 0; \end{cases}$$
$$Y'' - \lambda Y = 0$$

  - 本征值

$$\lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}. \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

- 所求解
- 关于平面极坐标系

  > 研究匀强静电场的改变 带电的云跟大地之间的静电场近似匀强静电场 $\boldsymbol{E}_0$(竖直)，水平架设输电线(导体圆柱)处在之中

  - 令 $u(x,y)=u(\rho,\varphi)$
  - 转化后的定解问题
    - 泛定方程：$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (\rho>a)$
    - 边界条件：$\begin{cases} u|_{\rho=a}=0; \\ u|_{\rho\to\infty}\sim u_0+\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{1}{\rho}-E_0\rho\cos\varphi \end{cases}$
  - 分离关于 $R(\rho)\Phi(\varphi)$ 的常微分方程：

$$\begin{cases} \Phi''+\lambda\Phi=0 \\ \Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi) \end{cases}$$
$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0 \qquad \text{欧拉方程}$$

  - 本征值：

$$\lambda=m^2 \qquad (m=0,1,2,\ldots)$$

  - 所求解：

$$u(\rho,\varphi)=\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{a}{\rho}-E_0\rho\cos\varphi+E_0\frac{a^2}{\rho}\cos\varphi$$

- 关于没有初始条件

第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题

§9.1 特殊函数常微分方程

- **拉普拉斯方程**

> $\Delta u=0$

- 球坐标系
  - 拉普拉斯在球坐标系下的表达式：

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$$

  - $u(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$，得到的常微分方程：（本征值 $l(l+1)$）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)-l(l+1)R=0,\qquad \text{欧拉方程}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\theta^2}\frac{\partial^2 \mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0\quad \text{球函数方程}$$

  - $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\mathit{\Theta}(\theta)\mathit{\Phi}(\varphi)$，得到的常微分方程：（本征值 m^2）

$$\mathit{\Phi}''+m^2\mathit{\Phi}=0,$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}\theta}\right)+[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\mathit{\Theta}=0$$

  - 求解结果：★

$$\begin{cases}R(r)=Cr^l+D\frac{1}{r^{l+1}}\\ \mathit{\Phi}(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi\qquad (m=0,1,2\ldots)\end{cases}$$

    l 阶连带Legendre方程：(代换：$x=\cos\theta$)

$$\left(1-x^2\right)\ \frac{\mathrm{d}^2\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\mathit{\Theta}=0$$

- 柱坐标系
  - 拉普拉斯在柱坐标系下的表达式：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

- $u(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\varPhi(\varphi)Z(z)$，得到常微分方程：(本征值：$m^2$)

$$\begin{gathered}\varPhi''+m^2\varPhi=0,\\ Z''-\mu Z=0,\\ \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0\end{gathered}$$

- 求解结果：★

$$\varPhi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi\qquad(m=0,1,2...)$$

(1) $\mu=0$

$$\begin{gathered}Z(z)=C+D(z)\\ R(\rho)=\begin{cases}E+F\ln\rho & (m=0)\\ E\rho^m+F/\rho^m & (m=1,2,3...)\end{cases}\end{gathered}$$

(2) $\mu>0$
m 阶贝塞尔方程： (代换：$x=\sqrt{\mu}\rho$)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0$$

↑与 $\rho=\rho_0$ 处的齐次边界条件构成本征值问题

$$Z(z)=C\mathrm{e}^{\sqrt{\mu}z}+D\mathrm{e}^{-\sqrt{\mu}z}$$

(3) $-\mu\equiv h^2>0$

$$Z(h)=C\cos hz+D\sin hz$$

↑与 $z=z_1,z=z_2$ 处的齐次边界条件构成本征值问题
m 阶虚宗量贝塞尔方程： (代换：$x=h\rho$)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2+m^2)R=0$$

- **波动方程**

> $u_{tt}-a^2\Delta u=0$

- $u(\boldsymbol{r},t)=T(t)v(\boldsymbol{r})$，分离时间变数 t 和空间变数 $\boldsymbol{r}$，得到常微分方程：（常数 $-k^2$）

$$
\begin{aligned}
T''+k^2a^2T=0,\\
\Delta v+k^2v=0.
\end{aligned}
$$

- $T(t)$ 的解：

$$
\begin{cases}
T(t)=C\cos kat+D\sin kat & (k\neq 0)\\
T(t)=C+Dt & (k=0)
\end{cases}
$$

- **输运方程**

> $u_t-a^2\Delta u=0$

- $u(\boldsymbol{r},t)=T(t)v(\boldsymbol{r})$，分离时间变数 t 和空间变数 $\boldsymbol{r}$，得到常微分方程：（常数 $-k^2$）

$$
\begin{aligned}
T'+k^2a^2T=0,\\
\Delta v+k^2v=0.
\end{aligned}
$$

- $T(t)$ 的解：

$$
T(t)=C\mathrm{e}^{-k^2a^2t}
$$

- **亥姆霍兹(Helmholtz)方程**

> $\Delta v+k^2v=0$

- 球坐标系
  - 利用 Δ ，表达式：

$$
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial v}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 v}{\partial^2\varphi}+k^2v=0
$$

  - $v(r,\theta,\varphi)=R(r)\mathrm{Y}(\theta,\varphi)$，得到的常微分方程：（本征值 $l(l+1)$）

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right)+[k^2r^2-l(l+1)]R=0,
$$

$$
\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0
$$

  - $\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=\mathit{\Theta}(\theta)\mathit{\Phi}(\varphi)$，得到的常微分方程：（本征值 m^2）

$$
\mathit{\Phi}''+m^2\mathit{\Phi}=0,
$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+[l(l+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}]\Theta=0$$

- 求解结果：★

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi \qquad (m=0,1,2...)$$

l 阶连带Legendre方程：(代换：$x=\cos\theta$)

$$(1-x^2)\ \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0$$

l 阶球贝塞尔方程：（代换：$x=kr, R(r)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[x^2-\left(l+\frac{1}{2}\right)^2\right]y=0$$

- 柱坐标系
  - 利用 Δ，表达式：

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+k^2v=0$$

  - $v(\rho,\varphi,z)=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$ 分离变数得到：

$$\Phi''+m^2\Phi=0$$
$$Z''-\mu Z=0$$
$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}\right)+\left(k^2+\mu-\frac{m^2}{\rho^2}\right)R=0$$

  - 求解结果：★（设边界条件全为齐次的，$-\mu\equiv h^2\geqslant 0$）

$$\Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi \qquad (m=0,1,2...)$$

$$\begin{cases} Z(z)=C+Dz & (h=0)\\ Z(z)=C\cosh hz+D\sinh hz & (h>0)\end{cases}$$

m 阶贝塞尔方程：（代换 $x=\sqrt{k^2-h^2}\rho$)

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)R=0$$

$\S 9.2$ 常点邻域上的级数解法

> 复变函数 $w(z)$ 的线性二阶常微分方程
>
> $$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$
>
> $$w(z_0)=C_0,\quad w'(z_0)=C_1$$

- 在常点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 上存在唯一的解析解，$w(z)$ 可表成此邻域上的泰勒级数形式：★

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

§9.3 正则奇点邻域上的级数解法

- 在正则奇点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$ 上存在两个线性独立解，级数表达式只有有限个负幂项：

$$w_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^{s_1+k}$$
$$w_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$$
$$\text{或}\quad w_1(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$$

  其中 $s_1,s_2,A,a_k,b_k(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 为常数
- 在 $x_0=0$ 的邻域上求解 ν 阶贝塞尔方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

  - 判定方程

$$s(s-1)+s-\nu^2=0,\quad \text{即}s^2-\nu^2=0$$

    两个根 $s1=\nu,s2=-\nu$
- （1）$s1-s2=2\nu\neq$ 正整数和零
  - ν 阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

  - $-\nu$ 阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_{-\nu}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!\Gamma(-\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

- ν 阶诺伊曼函数

$$\mathrm{N}_{\nu}(x)=\frac{\mathrm{J}_{\nu}(x)\mathrm{cos}\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\mathrm{sin}\nu\pi}$$

- ν 阶贝塞尔方程通解

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_{\nu}(x)+C_2\mathrm{J}_{-\nu}(x),\text{或}$$

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_{\nu}(x)+C_2\mathrm{N}_{\nu}(x)$$

- （2） $s1-s2=2\nu=2l+1\quad(l=0,1,2...)$ 即 $\nu=l+\frac{1}{2}$ 为半奇数
  - $(l+\frac{1}{2})$ 阶贝塞尔方程通解

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_{l+1/2}(x)+C_2\mathrm{J}_{-(l+1/2)}(x)$$

- （3） $s1-s2=2\nu=2m\quad(m=0,1,2...)$ 即 $\nu=m$ 为整数 ★
  - m 阶贝塞尔方程通解

$$y(x)=C_1\mathrm{J}_{m}(x)+C_2\mathrm{N}_{m}(x)$$

  - m 阶贝塞尔函数

$$\mathrm{J}_{m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k}\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

- Γ 函数（第二类欧拉积分）

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t\quad(\mathrm{Re}z>0),$$
$$\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),$$
$$\Gamma(z)=\frac{1}{z(z+1)...(z+n-1)}\Gamma(z+n),\quad[\mathrm{Re}(z+n)>0]$$
$$\begin{cases}\Gamma(1)=1\\ \Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}\end{cases}$$

§9.4 施图姆-刘维尔本征值问题

> 本征值：满足边界条件的非零解仅在方程的参数取本征值时存在
> 本征函数：相应的非零解为本征函数
> 本征值问题：求本征值和本征函数的问题

- 施图姆-刘维尔本征值问题
  - 施图姆-刘维尔型方程：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[k(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-q(x)y+\lambda\rho(x)y=0\qquad(a\leqslant x\leqslant b)$$

  - (1) $a=0$，$b=l$；$k(x)=$ 常数，$q(x)=0$，$\rho(x)=$ 常数

$$\begin{cases}y''+\lambda y=0,\\ y(0)=0\text{，}y(l)=0\end{cases}$$

  - (2) $a=-1$，$b=+l$；$k(x)=1-x^2$，$q(x)=0$，$\rho(x)=1$
    或 $a=0$，$b=\pi$；$k(\theta)=\sin\theta$，$q(x)=0$，$\rho(x)=\sin\theta$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+\lambda y=0,\\ y(-1)\text{有限，}y(+1)\text{有限}\end{cases}$$

$$\text{或}$$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)+\lambda\sin\theta\,\Theta=0\\ \Theta(0)\text{有限，}\Theta(\pi)\text{有限}\end{cases}$$

  - (3) $a=-1$，$b=+l$；$k(x)=1-x^2$，$q(x)=\frac{m^2}{1-x^2}$，$\rho(x)=1$
    或 $a=0$，$b=\pi$；$k(\theta)=\sin\theta$，$q(x)=\frac{m^2}{\sin\theta}$，$\rho(x)=\sin\theta$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]-\frac{m^2}{1-x^2}y+\lambda y=0,\\ y(-1)\text{有限，}y(+1)\text{有限}\end{cases}$$

$$\text{或}$$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin\theta}\Theta+\lambda\sin\theta\,\Theta=0\\ \Theta(0)\text{有限，}\Theta(\pi)\text{有限}\end{cases}$$

  - (4) $a=0$，$b=\xi_0$；$k(\xi)=\xi$，$q(\xi)=\frac{m^2}{\xi}$，$\rho(\xi)=\xi$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\xi\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\xi}\right)-\frac{m^2}{\xi}y+\lambda\xi y=0,\\ y(0)\text{有限，}y(\xi_0)=0\end{cases}$$

- 施图姆-刘维尔本征值问题的共同性质

  > 条件：$k(x),q(x),\rho(x)\geqslant 0$

  - 所有本征值 $\lambda\geqslant 0$
  - 相应于不同本征值 λ_m 和 λ_n 的本征函数 $y_m(x)$ 和 $y_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上带权重 $\rho(x)$ 正交，即

$$\int_a^b y_m(x)y_n(x)\rho(x)\mathrm{d}x = 0 \quad (n \neq m)$$

- 本征函数族是完备的

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n y_n(x)$$

- 广义傅里叶级数

> $f_n(n = 1, 2, ...)$ 广义傅里叶系数
> $y_n(n = 1, 2, ...)$ 级数展开的基

  - $y_n(x)$ 的模

$$N_n^2 = \int_a^b [y_n(\xi)]^2 \rho(\xi)\mathrm{d}\xi$$

  - 广义傅里叶系数的计算公式

$$f_n = \frac{1}{N_m^2}\int_a^b f(\xi)y_n(\xi)\rho(\xi)\mathrm{d}\xi$$

第十章 球函数

> 球函数方程
>
> $$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \mathrm{Y}}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\mathrm{Y}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)\mathrm{Y}=0$$
>
> 球函数
>
> $$\mathrm{Y}(\theta,\varphi)=(A\cos m\varphi+B\sin m\varphi)\mathit{\Theta}(\theta)$$
>
> 连带勒让德方程($x=\cos\theta$)
>
> $$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\mathit{\Theta}=0$$

§10.1 轴对称球函数 ★

> $m=0$，勒让德方程
>
> $$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}\mathit{\Theta}}{\mathrm{d}x}+l(l+1)\mathit{\Theta}=0$$

- l 阶勒让德多项式表达式：

$$\mathrm{P}_l(x)=\sum_{k=0}^{[l/2]}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k}$$

- 奇偶性：

$$P_l(-\xi)=(-1)^l P_l(\xi)$$

- 特殊值：
  - $\mathrm{P}_l(1)=1$
  - $\mathrm{P}_0(x)=1$
  - $\mathrm{P}_1(x)=x=\cos\theta$
  - $\mathrm{P}_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)=\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)$
  - $\mathrm{P}_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)=\frac{1}{8}(5\cos 3\theta+3\cos\theta)$
  - $\mathrm{P}_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)=\frac{1}{64}(35\cos 4\theta+20\cos 3\theta+9)$
- 正交关系：

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad (k \neq l)$$

即

$$\int_{-1}^{+1} \mathrm{P}_k(\theta)\mathrm{P}_l(\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta = 0 \qquad (k \neq l)$$

- 微分表示（罗德里格斯公式）：

$$\mathrm{P}_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}(x^2-1)^l$$

- 模方：

$$N_l^2 = \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1} \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots)$$

- 以 $\mathrm{P}_l(x)$ 为基，将定义在 x 的区间 [-1,1] 上的函数 $f(x)$ 展开为广义傅里叶级数：

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\mathrm{P}_l(x) \\ \text{系数} f_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x)\mathrm{P}_l(x)\mathrm{d}x \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\mathrm{P}_l(\cos\theta) \\ \text{系数} f_l = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\theta)\mathrm{P}_l(\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta \end{cases}$$

- 例题 + 步骤

> 以勒让德多项式为基，在区间 $[-1,1]$ 把 $f(x) = 2x^3+3x+4$ 展开为傅里叶级数

  - 解：可以表示为 $\mathrm{P}_0(x), \mathrm{P}_1(x), \mathrm{P}_3(x)$ 的线性组合
  - 答案：

$$f(x) = \mathrm{P}_0(x) + \frac{21}{5}\mathrm{P}_1(x) + \frac{4}{5}\mathrm{P}_3(x)$$

> 以勒让德多项式为基，在 $[-1,1]$ 把 $f(x) = |x|$ 展开为广义傅里叶级数

  - 解：一般公式解法；
    - 令 $-\eta = \xi$，利用奇偶性简化；
    - 利用微分表达式进行分部积分；

    - 利用二项式定理

$$(\xi^2-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}(\xi^2)^{n-k}(-1)^{-k}$$

      解出零点处积分；
    - 注意 $n=0$ 处的系数 f_0；
  - 答案：

$$|x|=\frac{1}{2}\mathrm{P}_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2x-1)(2n+2)!!}\mathrm{P}_{2n}(x)$$

> 在半径为 $r=r_0$ 的球的内部求解 $\Delta u=0$ 使满足边界条件 $u|_{r=r_0}=\cos^2\theta$

  - 解：边界条件与 φ 无关，解形式为

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l+B_l\frac{1}{r^{l+1}}\right)\mathrm{P}_l(\cos\theta)$$

    - 考虑自然边界条件：$u|_{r=0}=\text{有限值}$，确定 $B_l=0$；
    - 利用边界条件确定 A_l；
  - 答案：

$$u(r,\theta)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{r_0^2}\cdot r^2\mathrm{P}_2(\cos\theta)$$

> 半径为 r_0 的半球，其球面上温度保持为 $u_0\cos\theta$，底面绝热，试求这个半球的稳定温度分布

  - 解：建立球坐标系，使边界条件与 φ 无关，定解问题为

$$\begin{cases}\Delta u=0\\ u|_{r=r_0}=u_0\cos\theta\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right),\text{即}u|_{r=r_0}=u_0u(0<x\leqslant 1)\\ \frac{\partial u}{\partial\theta}|_{\theta=\pi/2}=0,\text{即}u_x|_{x=0}=0\end{cases}$$

    - 利用偶延拓，把定解问题延拓到整个球形区域；
    - 利用轴对称情况下在球内区域有限的一般解；
    - 利用 $|x|$ 展开结论；
  - 答案：

$$|x|=\frac{1}{2}u_0+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-1)!!}{(2x-1)(2n+2)!!}\cdot\frac{u_0}{r_0^{2n}}\cdot r^{2n}\mathrm{P}_{2n}(\cos\theta)\qquad\left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\S 10.2$ 连带勒让德函数

- 连带勒让德函数表达式：

$$\mathrm{P}_l^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \mathrm{P}_l^{[m]}(x)$$

$$(l = m, m+1, ..., \text{对确定的} m)$$

$$(m = 0, 1, 2, ..., l, \text{对确定的} l)$$

- 特殊值：
  - $\mathrm{P}_l^0(x) = \mathrm{P}_l(x)$
  - $\mathrm{P}_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2} = \sin\theta$
  - $\mathrm{P}_2^1(x) = (1-x^2)^{1/2}(3x) = \frac{3}{2}\sin 2\theta$
  - $\mathrm{P}_2^2(x) = 3(1-x^2) = 3\sin^2\theta$

第十一章 柱函数

§11.1 三类柱函数

> ν 阶贝塞尔方程的线性无关解
>
> $$y(x)=C_1\mathrm{J}_\nu(x)+C_2\mathrm{J}_{-\nu}(x)$$
> $$y(x)=C_1\mathrm{J}_\nu(x)+C_2\mathrm{N}_\nu(x)$$
> $$y(x)=C_1\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)+C_2\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$$
>
> ν 阶贝塞尔函数表达式
>
> $$\mathrm{J}_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$
>
> ν 阶诺伊曼函数表达式
>
> $$\mathrm{N}_\nu(x)=\frac{\mathrm{J}_\nu(x)\cos\nu\pi-\mathrm{J}_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

- 三类柱函数
  - 第一类 - 贝塞尔(Bessel)函数
  - 第二类 - 诺伊曼(Neumann)函数
  - 第三类 - 汉克尔(Hankel)函数
    - 第一种汉克尔函数

      $$\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)+\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x)$$

    - 第二种汉克尔函数

      $$\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)=\mathrm{J}_\nu(x)-\mathrm{i}\mathrm{N}_\nu(x)$$

    - ν 阶贝塞尔方程通解3

      $$y(x)=C_1\mathrm{H}_\nu^{(1)}(x)+C_2\mathrm{H}_\nu^{(2)}(x)$$

- $x\to0$ 时的行为

  $$\mathrm{J}_0(x)\to1,\qquad \mathrm{J}_\nu(x)\to0,\qquad \mathrm{J}_{-\nu}(x)\to\infty,$$
  $$\mathrm{N}_0(x)\to-\infty,\qquad \mathrm{N}_\nu(x)\to\pm\infty,\qquad (\nu\neq0)$$

- 递推函数

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{Z}_\nu(x)/x^\nu] = -\mathrm{Z}_{\nu+1}(x)/x^\nu \\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[x^\nu \mathrm{Z}_\nu(x)] = x^\nu \mathrm{Z}_{\nu-1}(x) \\
&\mathrm{Z}_{\nu-1}(x) - \mathrm{Z}_{\nu+1}(x) = 2\mathrm{Z}_\nu'(x) \\
&\mathrm{Z}_{\nu+1}(x) - 2\nu \mathrm{Z}_\nu(x)/x + \mathrm{Z}_{\nu-1}(x) = 0
\end{aligned}
$$

$\S 11.2$ 贝塞尔方程

> 对于圆柱内部问题，如果柱侧有齐次的边界条件，只需考虑 $\mu \geqslant 0$
> 那么 $R(\rho)$ 应是整数 m 阶贝塞尔方程
>
> $$x^2\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{R}}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2 - m^2)R = 0 \qquad (x = \sqrt{\mu}\rho)$$
>
> 的解，由于圆柱轴上的自然边界条件，取
>
> $$R(\rho) = \mathrm{J}_m(x) = \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu}\rho) \qquad (m \geqslant 0)$$

> m 阶贝塞尔函数表达式
>
> $$\mathrm{J}_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!(m+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}$$

- 贝塞尔函数的零点
  - 本征值

    $$\mu_n^{(m,\sigma)} = \left(\frac{x_n^{(m,\sigma)}}{\rho_0}\right)^2 \qquad (\sigma = 1,2,3)$$

    > 记 $x_0 = \sqrt{\mu}\rho_0$

  - 第一类齐次边界条件 $R(\rho_0) = 0$
    - $x_n^{(m,1)}$ 表示 $\mathrm{J}_m(x)$ 在满足第一类齐次边界条件下方程

      $$\mathrm{J}_m(x_0) = 0$$

      的第 n 个正根
  - 第二类齐次边界条件 $R'(\rho_0) = 0$
    - $x_n^{(m,2)}$ 表示 $\mathrm{J}_m(x)$ 在满足第一类齐次边界条件下方程

      $$\mathrm{J}_m'(x_0) = 0$$

的第 n 个正根

    - $$\mathrm{J}_0'(x) = -\mathrm{J}_1(x) \qquad x_n^{(0,2)} = x_n^{(1)}$$
    - $$\mathrm{J}_m'(x) = \frac{1}{2}[\mathrm{J}_{m-1} - \mathrm{J}_{m+1}]$$

  - 第三类齐次边界条件 $R(\rho_0) + HR'(\rho_0) = 0$
    - $x_n^{(m,3)}$ 表示 $\mathrm{J}_m(x)$ 在满足第一类齐次边界条件下方程

$$\mathrm{J}_m(x_0) = \frac{x_0}{h+m}\mathrm{J}_{m+1}(x_0)$$

的第 n 个正根，$h = \rho_0/H$

- 奇偶性：

$$\mathrm{J}_m(-x) = (-1)^m \mathrm{J}_m(x)$$

- 正交性：

$$\int_0^{\rho_0} \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n}\rho)\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_l}\rho)\rho\mathrm{d}\rho = 0 \qquad (n \neq l)$$

- 模方：
  - 第一类

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2[\mathrm{J}_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2$$

  - 第二类

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}}\right)[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2$$

  - 第三类

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2}\left(\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} + \frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(m)}H}\right)[\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0)]^2$$

- 傅里叶-贝塞尔级数
  - 区间 $[0, \rho_0]$ 上的函数 $f(\rho)$ 的傅里叶-贝塞尔级数

$$
\begin{cases}
f(\rho)=\sum_{m=1}^{\infty} f_n \mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho) \\
\text{系数} \quad f_n=\frac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\int_0^{\rho_0} f(\rho)\mathrm{J}_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)\rho\rho
\end{cases}
$$

- 常用不定积分

$$
\int x^{-m}\mathrm{J}_{m+1}(x)\mathrm{d}x=-x^{-m}\mathrm{J}_m(x)+C
$$

$$
\int \mathrm{J}_1(x)\mathrm{d}x=-\mathrm{J}_0(x)+C
$$

$$
\int x^{m}\mathrm{J}_{m-1}(x)\mathrm{d}x=x^{m}\mathrm{J}_m(x)+C
$$

- 对于 $\rho_0 \to \infty$, 有傅里叶-贝塞尔积分

$$
\begin{cases}
f(\rho)=\int_0^{\infty} F(\omega)\mathrm{J}_m(\omega\rho)\omega\mathrm{d}\omega \\
\text{系数} \quad F(\omega)=\int_0^{\infty} F(\omega)\mathrm{J}_m(\omega\rho)\rho\mathrm{d}\rho
\end{cases}
$$