2 插值与数值微分
Interpolation, Numerical Differentiation

何军辉
hejh@scut.edu.cn

背景

- 在工程技术中，经常会遇到只给定一个函数表，要求根据该函数表求出某点上函数值的问题

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

1. 根据上述表构造函数$\varphi(x)$来近似代替$f(x)$
2. 给出任意点x^*，可计算$\varphi(x^*)$来代替$f(x^*)$
3. 为了方便计算，构造代数多项式$p_n(x)$

2.1 线性插值与二次插值

□ 线性插值

- 给定$y = f(x)$的函数表，构造函数$p_1(x)$满足下面条件：

① $p_1(x)$*是一个不超过1次的代数多项式*

② $p_1(x_0) = y_0$，$p_2(x_1) = y_1$

x	x_0	x_1
$y = f(x)$	y_0	y_1

□ x_0和x_1称为插值节点，$f(x)$被插值函数，$p_1(x)$称为线性插值函数，条件①②称为插值条件

2.1 线性插值与二次插值

线性插值的Lagrange形式

- 线性插值的几何意义是用通过(x_0, y_0)和(x_1, y_1)两点的直线$y = p_1(x)$来近似曲线$y = f(x)$
- 直线方程的两点公式:

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 = l_0(x) y_0 + l_1(x) y_1$$

  - $p_1(x)$称为Lagrange型线性插值函数
  - $p_1(x)$是两个线性函数$l_0(x)$和$l_1(x)$的线性组合，$l_i(x)$被称为一次插值基函数

$$l_{0(x)} = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}$$

$$l_{1(x)} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

	x_0	x_1
$l_0(x)$	1	0
$l_1(x)$	0	1

2.1 线性插值与二次插值

□ 线性插值函数的Newton形式

定义： 若记$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}$，则称$f(x_i,x_j)$为函数$f(x)$在节点$x_i$和$x_j$处的**一阶差商**，$x_i$和$x_j$互异.

□ 一阶差商对称性：

$$f(x_i,x_j)=\frac{f(x_i)-f(x_j)}{x_i-x_j}=\frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}=f(x_j,x_i)$$

例： 当$\mathrm{i}=0$和$j=1$时，有

$$f(x_0,x_1)=f(x_1,x_0)$$

2.1 线性插值与二次插值

- 直线方程的点斜式：

$$
\begin{aligned}
p_1(x) &= y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) \\
&= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0)
\end{aligned}
$$

称为Newton型线性插值公式，对应的$p_1(x)$称为Newton型线性插值函数.

- Lagrange型和Newton型式线性插值函数$p_1(x)$的两种形式，尽管形式不同，但实质都一样，代表同一条直线.

□ 线性插值误差

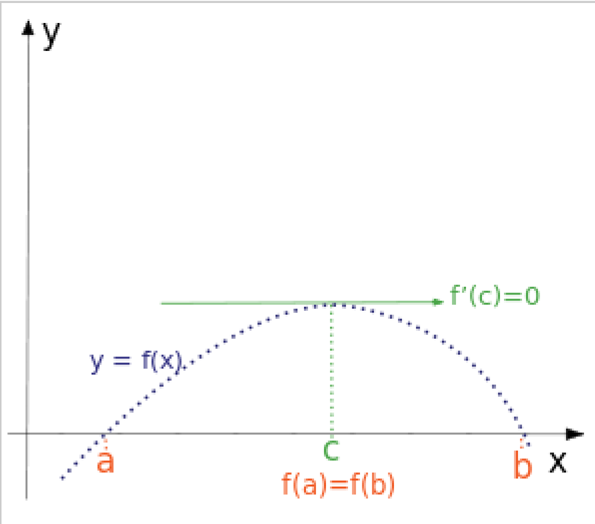
定理： 设$p_1(x)$是经过(x_0, y_0)和(x_1, y_1)两点的线性插值函数，$[a, b]$是包含$[x_0, x_1]$的任一区间，并设$f(x) \in C^1[a, b]$，$f''(x)$在$[a, b]$上存在，则对任意给定的$x \in [a, b]$，总存在一点$\xi \in (a, b)$，使得

$$R(x) = f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)$$

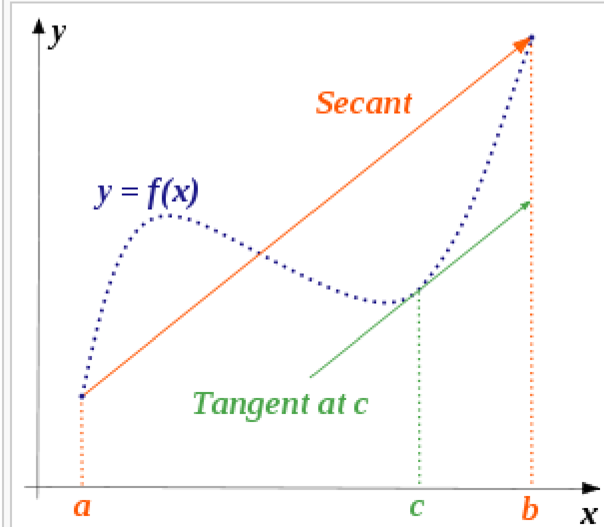
其中ξ依赖于x.

- $\varphi(t) = f(t) - p_1(t) - k(t - x_0)(t - x_1)$
- Rolle（洛尔）定理

相关定理



If a real-valued function f is continuous on a closed interval $[a, b]$, differentiable on the open interval (a, b), and $f(a) = f(b)$, then there exists a c in the open interval (a, b) such that : $f'(c) = 0.$



For any function that is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) there exists some c in the interval (a, b) such that the secant joining the endpoints of the interval $[a, b]$ is parallel to the tangent at c.

Rolle’s Theorem

Mean Value Theorem

2.1 线性插值与二次插值

例：给定下面函数表，用Lagrange型线性插值公式求ln(11.75)的近似值，并估计误差.

x	11	12
$y=\ln(x)$	2.3979	2.4849

2.1 线性插值与二次插值

二次插值

- 给定函数表，构造函数$p_2(x)$满足条件：

x	x_0	x_1	x_2
$y=f(x)$	y_0	y_1	y_2

① $p_2(x)$是一个不超过2次的代数多项式

② $p_2(x_0)=y_0, p_2(x_1)=y_1, p_2(x_2)=y_2$

其中：

- x_0, x_1, x_2称为插值节点
- $f(x)$称为被插值函数
- $p_2(x)$称为二次插值函数
- 条件①②称为插值条件

2.1 线性插值与二次插值

- 二次插值的目的是构造$p_2(x)$来近似代替$f(x)$.
  - 不妨假设

$$p_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

其中a_0, a_1和a_2为待定常数

- 利用插值条件②得到方程组

$$\begin{cases} p_2(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = y_0 \\ p_2(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ p_2(x_2) = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \end{cases}$$

- 系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

□ 二次插值函数的Lagrange形式

- 设$p_2(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + l_2(x)y_2$，其中$l_0(x)$，$l_1(x)$，$l_2(x)$为不超过2次的代数多项式，满足：

	x_0	x_1	x_2
$l_0(x)$	1	0	0
$l_1(x)$	0	1	0
$l_2(x)$	0	0	1

- 易验证$p_2(x)$满足插值条件.
- 如何构造$l_0(x), l_1(x), l_2(x)$?

2.1 线性插值与二次插值

□ 二次插值函数的Lagrange形式

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

其中

1. $l_0(x), l_1(x), l_2(x)$称为二次插值基函数
2. $p_2(x)$称为Lagrange型二次插值函数

□ 二次插值函数的Newton形式

定义： 若记$f(x_i,x_j,x_k)=\frac{f(x_i,x_j)-f(x_j,x_k)}{x_i-x_k}$，则称$f(x_i,x_j,x_k)$为函数$f(x)$在节点$x_i,x_j,x_k$处的二阶差商，其中$x_i,x_j,x_k$互异.

二阶差商对称性： 在求二阶差商时，无论x_i,x_j,x_k如何排列，它们的值是一样的.

$$p_2(x) = f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)$$

称为Newton型二次插值函数.

□ 二次插值误差

定理：设$p_2(x)$是经过$(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$三点的二次插值函数，$[a,b]$是包含$x_0,x_1,x_2$的任一区间，并设$f(x)\in C^2[a,b],f'''(x)$在$[a,b]$上存在，则对任意给定的$x\in[a,b]$，总存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$R(x)=f(x)-p_2(x)$$
$$=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

其中ξ依赖于x.

例：给定函数表，试用Newton型二次插值公式求$\ln(11.75)$的近似值，并估计误差.

x	11	12	13
$y=\ln(x)$	2.3979	2.4849	2.5649

- n次插值
  - 给定函数表，构造函数$p_n(x)$满足条件：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

① $p_n(x)$是一个不超过n次的代数多项式

② $p_n(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$

- x_i称为插值节点，$f(x)$称为被插值函数，$p_n(x)$称为n次插值函数.

- n次插值的目的是构造$p_n(x)$来近似代替$f(x)$.
  - 不妨假设

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

其中$a_0, a_1, \cdots, a_n$为待定常数

  - 利用插值条件②得到方程组

$$\begin{cases} p_n(x_0) = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n = y_0 \\ p_n(x_1) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n = y_1 \\ \vdots \\ p_n(x_n) = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

  - 系数行列式为Vandermonde范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

n次插值函数的Lagrange形式

- 设$p_n(x) = l_0(x)y_0 + l_1(x)y_1 + \cdots + l_n(x)y_n$，其中$l_i(x)$为不超过$n$次的代数多项式，且满足表

	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$l_0(x)$	1	0	$\cdots$	0
$l_1(x)$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$l_n(x)$	0	0	$\cdots$	1

- 容易验证$p_n(x)$满足插值条件.
- 如何构造$l_i(x)$?

- n次插值函数的Lagrange形式

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

其中$i=0,1,2,\cdots,n$

  - $l_i(x)$称为n次插值基函数
  - 满足插值条件的Lagrange型n次插值函数

$$p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}l_i(x)y_i,\quad p_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}y_i$$

其中

$$\omega(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$\omega'(x_i)=(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)$$

2.2 n次插值的Lagrange形式和Newton形式

- Lagrange型n次插值算法
  ① 读入插值节点$x_i, y_i(i = 0,1,\cdots,n)$和点$xx$
  ② $yy = 0$
  ③ 对$i = 0,1,\cdots,n$做如下工作
    - $t = 1$
    - 对$k = 0,1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$做
    - $t = t \times \frac{xx-x_k}{x_i-x_k}$
    - $yy = yy + t \times y_i$
  ④ 输出点xx相应的函数近似值yy

□ n次插值函数的Newton形式

定义：一般地，n阶差商的定义为

$$f(x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_n})=\frac{f(x_{i_0},x_{i_1},\cdots,x_{i_{n-1}})-f(x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_n})}{x_{i_0}-x_{i_n}}$$

特别地，当$i_0=0,i_1=1,\cdots,i_n=n$时有

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\frac{f(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})-f(x_1,x_2,\cdots,x_n)}{x_0-x_n}$$

- 由归纳法可证

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{\omega_k'(x_i)}$$

其中$\omega_k'(x_i)=(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)$

- 差商直接计算公式：

$$f[x_0] = f(x_0)$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)}$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdot(x_0 - x_2)\cdot(x_0 - x_3)} + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdot(x_1 - x_2)\cdot(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)\cdot(x_2 - x_1)\cdot(x_2 - x_3)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_0)\cdot(x_3 - x_1)\cdot(x_3 - x_2)}$$

$$f[x_0, \ldots, x_n] = \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{\prod_{k\in\{0,\ldots,n\}\setminus\{j\}}(x_j - x_k)}$$

- n次插值函数的Newton形式

$$f(x) = N_n(x) + R_n(x)$$

其中

$$N_n(x)$$
$$= f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1)$$
$$+ \cdots + f(x_0, x_1, \cdots, x_n)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})$$
$$R_n(x) = f(x_0, x_1, \cdots, x_n, x)(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$
$$N_n(x_i) = f(x_i) = y_i \ (i = 0,1, \cdots, n)$$

- $N_n(x)$称为满足插值条件的Newton型n次插值函数
- 在实际问题中，为了得到Newton型n次插值函数，通常需要构造一个差商表.

定理：设$p_n(x)$是过$(x_i, y_i)(i = 0,1,\cdots,n)$的$n$次插值函数，$[a,b]$是包含$x_0, x_1, \cdots, x_n$的任一区间，并设$f(x) \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}(x)$在$[a,b]$上存在，则对任意给定的$x \in [a,b]$，总存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$R(x) = f(x) - p_n(x)$$
$$= \frac{p^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

其中ξ依赖于x.

2.2 n次插值的Lagrange形式和Newton形式

例：已知函数表如下所示，求Newton型n次插值函数$N_n(x)$，并计算$f(0.6)$的近似值.

x	0.4	0.55	0.65	0.8	0.9
$y=f(x)$	0.41075	0.57815	0.69675	0.88811	1.02652

例：已知函数$f(x)=x^3-4x$，插值节点为$x_0=1,x_1=2,x_2=3$，求 Newton型2次插值.

- Newton型n次插值算法
  - ① 读入插值节点$x_i, y_i (i = 0,1,\cdots,n)$和点$xx$
  - ② $\omega = 1, V_0 = y_0, yy = y_0$
  - ③ 对$k = 1,2,\cdots,n$做如下工作
    - $V_k = y_k$
    - 对$i = 0,1,\cdots,k-1$做
    - $V_k = \frac{V_i - V_k}{x_i - x_k}$
    - $\omega = \omega \times (xx - x_{k-1})$
    - $yy = yy + \omega \times V_k$
  - ④ 输出插值点xx相应的函数近似值yy

2.3 分段线性插值

- 对于n次插值，随着插值节点的增加，插值多项式的次数也会增加
- 但是当$n \to \infty$时，$p_n(x)$不一定收敛到$f(x)$，也就是$p_n(x)$与$f(x)$的误差不一定越来越小

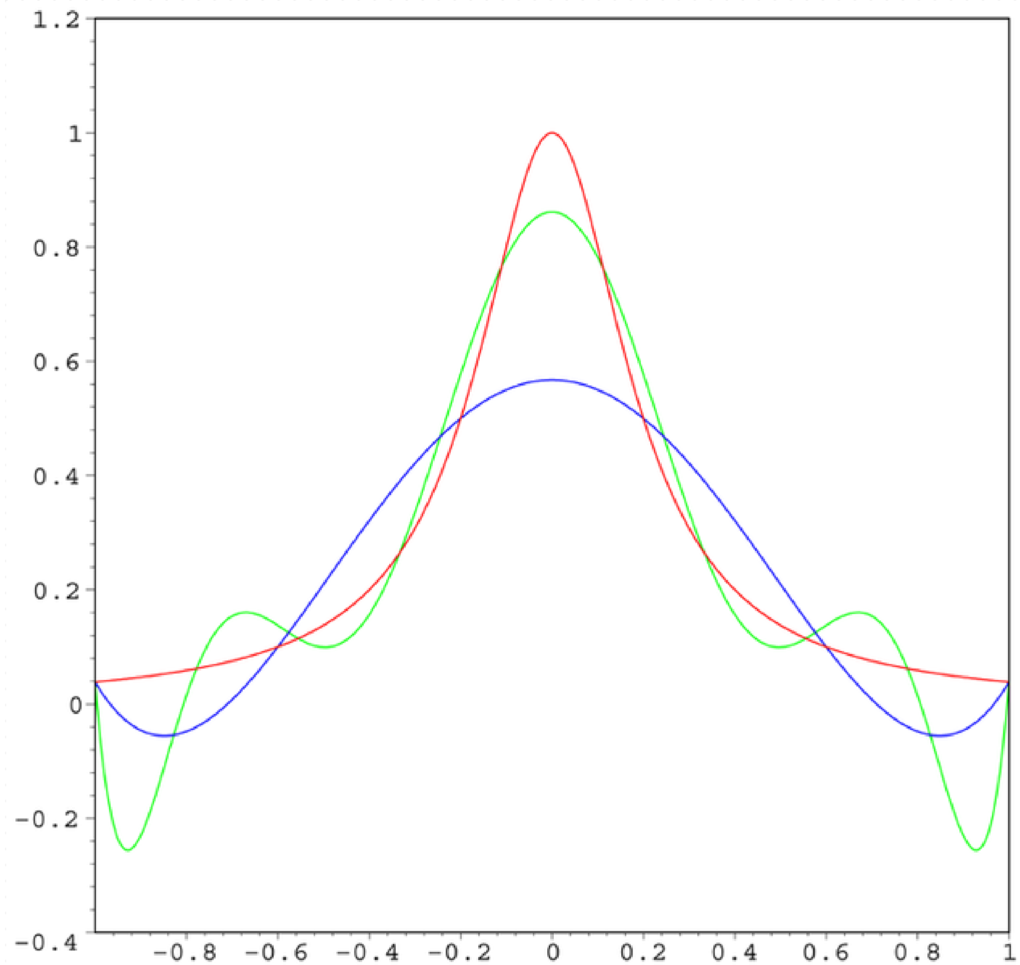
例：给定函数

$$f(x) = \frac{1}{1+25x^2} \quad (-1 \le x \le 1)$$

取等距 插值节点$x_i = -1 + \frac{1}{5} i (i = 0,1,\cdots,n)$，试建立插值多项式$p_n(x)$，并考察$p_n(x)$与$f(x)$的误差情况.

2.3 分段线性插值

- Runge（龙格）现象
  - 红色：$f(x)$
  - 蓝色：$p_5(x)$
  - 绿色：$p_9(x)$



高次插值多项式并不一定很好近似被插函数

1. 区间分段
2. 每分段低次插值

2.3 分段线性插值

定义： 给定函数表，构造函数$p(x)$满足条件：

① $p(x)$在$[x_i, x_{i+1}](i = 0,1,\cdots,n-1)$上为不超过一次的代数多项式

② $p(x_i) = y_i(i = 0,1,\cdots,n)$.

其中$p(x)$称为分段线性插值函数.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0 + \dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1 (x_0 \le x \le x_1) \\ \dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}y_1 + \dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}y_2 (x_1 < x \le x_2) \\ \vdots \\ \dfrac{x-x_n}{x_{n-1}-x_n}y_{n-1} + \dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}y_n (x_{n-1} < x \le x_n) \end{cases}$$

2.3 分段线性插值

- 分段线性插值函数表示为插值基函数的组合
  - 设$l_0(x), l_1(x), \cdots, l_n(x)$为不超过1次的代数多项式，且满足表：

	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$l_0(x)$	1	0	$\cdots$	0
$l_1(x)$	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$l_n(x)$	0	0	$\cdots$	1

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x) y_i; \qquad l_i(x_k) = \delta_{ik}$$

2.3 分段线性插值

$$l_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_1}{x_0 - x_1} \ (x_0 \le x \le x_1) \\ 0 \ (x_1 < x \le x_n) \end{cases}$$

$$l_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \ (x_{i-1} \le x \le x_i) \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \ (x_i < x \le x_{i+1}) \\ 0 \ x \in [a,b], x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\vdots$$

$$l_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \ (x_{n-1} \le x \le x_n) \\ 0 \ (x_0 \le x < x_{n-1}) \end{cases}$$

2.3 分段线性插值

例：给定函数$y = f(x)$的函数表，试用分段线性插值法求$y = f(x)$在$x = -0.9$处的近似值.

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	0
$y = f(x)$	0.03846	0.05882	0.1	0.2	0.5

2.3 分段线性插值

- 分段线性插值算法
  ① 读入插值节点$x_i, y_i (i = 0,1,\cdots,n)$和点$xx$
  ② 对$i = 1,2,\cdots,n$做:
    - 如果$xx < x_i$则
    - $yy = \frac{xx - x_i}{x_{i-1} - x_i} y_{i-1} + \frac{xx - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} y_i$
    - 输出点xx相应的函数近似值yy
    - 转到③
  ③ 结束

2.3 分段线性插值

□ 分段线性插值误差

定理： 设给定$y = f(x)$函数表，令$a = x_0, b = x_n, f(x) \in C^1[a, b]$，$f''(x)$在$[a, b]$上存在，$p(x)$是$f(x)$的分段线性插值函数，则有

$$|R(x)| = |f(x) - p(x)| \le \frac{h^2}{8} M$$

其中$h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|; M = \max\limits_{a \le x \le b} |f''(x)|$

2.4 Hermite插值

- 背景：
- 分段线性插值函数的导数是不连续的.
- 在某些实际问题中，为了保证插值函数更好地逼近被插值函数$f(x)$

① 插值函数在插值节点上的值与被插值函数$f(x)$在插值节点上的值相等

② 插值函数在插值节点上导数值与被插值函数$f(x)$在插值节点上的导数值相等

□ 三次Hermite插值

定义： 根据给定的$f(x)$的函数表，构造函数$H(x)$满足条件：

x	x_0	x_1
$y=f(x)$	y_0	y_1
$y'=f'(x)$	m_0	m_1

① $H(x)$为不超过3次的代数多项式

② $H(x_0)=y_0, H(x_1)=y_1, H'(x_0)=m_0, H'(x_1)=m_1$

其中$H(x)$称为三次Hermite插值函数.

2.4 Hermite插值

- 设$H(x) = y_0 h_0(x) + y_1 h_1(x) + m_0 H_0(x) + m_1 H_1(x)$，其中$h_0(x), h_1(x), H_0(x), H_1(x)$为不超过3次的代数多项式，且满足：

	函数值		导数值	
	x_0	x_1	x_0	x_1
$h_0(x)$	1	0	0	0
$h_1(x)$	0	1	0	0
$H_0(x)$	0	0	1	0
$H_1(x)$	0	0	0	1

- 如何构造$h_0(x), h_1(x), H_0(x), H_1(x)$?

2.4 Hermite插值

$$h_0(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$h_1(x) = \left(1 + 2\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$H_0(x) = (x - x_0)\left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right)^2$$

$$H_1(x) = (x - x_1)\left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right)^2$$

$$H(x) = y_0 h_0(x) + y_1 h_1(x) + m_0 H_0(x) + m_1 H_1(x)$$

2.4 Hermite插值

例：给定函数$y = f(x)$的函数表，构造一个三次Hermite插值函数，并求出$f\left(\frac{1}{2}\right)$的近似值.

x	0	1
$y = f(x)$	0	1
$y' = f'(x)$	3	9

□ Hermite插值误差

定理： 设$H(x)$是$f(x)$的三次Hermite插值函数，$[a,b]$是包含x_0, x_1的任一区间，并设$f(x) \in C^3[a,b]$，$f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上存在，则对任意给定的$x \in [a,b]$，总存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$R(x) = f(x) - H(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x - x_0)^2(x - x_1)^2$$

其中ξ依赖于x.

2.4 Hermite插值

$2n+1$次Hermite插值

- 给定$y=f(x)$函数表，构造函数$H(x)$满足条件：

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
$y'=f'(x)$	m_0	m_1	$\cdots$	m_n

① $H(x)$为不超过$2n+1$次的代数多项式

② $H(x_i)=y_i, H'(x_i)=m_i \ (i=0,1,\cdots,n)$

$H(x)$称为$2n+1$次Hermite插值函数.

$$H(x)=\sum_{i=0}^{n}[y_i h_i(x)+m_i H_i(x)]$$

2.4 Hermite插值

□ $h_i(x)$和$H_i(x)$取值

	函数值				导数值			
	x_0	x_1	$\cdots$	x_n	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$h_0(x)$	1	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
$h_1(x)$	0	1	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$h_n(x)$	0	0	$\cdots$	1	0	0	$\cdots$	0
$H_0(x)$	0	0	$\cdots$	0	1	0	$\cdots$	0
$H_1(x)$	0	0	$\cdots$	0	0	1	$\cdots$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
$H_n(x)$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$	1

2.5 分段三次Hermite插值

- 分段线性插值函数在节点处的导数不连续
- 分段三次Hermite插值

定义：给定函数$y=f(x)$的函数表，构造函数$q(x)$满足条件：

① $q(x)$在$[x_i,x_{i+1}]$$(i=0,1,\cdots,n-1)$上为3次代数多项式

② $q(x_i)=y_i$, **$q'(x_i)=m_i$** $(i=0,1,\cdots,n)$

③ $q(x)\in C^1[a,b]$，其中$a=x_0,b=x_n$

其中$q(x)$称为分段三次Hermite插值函数.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n
$y'=f'(x)$	m_0	m_1	$\cdots$	m_n

2.5 分段三次Hermite插值

- 根据分段三次Hermite插值条件和三次Hermite插值公式，区间$[x_i, x_{i+}]$上的$q(x)$为：

$$
\begin{aligned}
q(x)
&= \left(1 + 2\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 y_i \\
&+ \left(1 + 2\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 y_{i+1} \\
&+ (x - x_i)\left(\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 m_i \\
&+ (x - x_{i+1})\left(\frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 m_{i+1}
\end{aligned}
$$

2.5 分段三次Hermite插值

- 分段三次Hermite插值函数$q(x)$也可以写成插值基函数加权和的形式.
  - 在插值区间$[a,b]$上定义一组分段三次Hermite插值基函数$h_i(x)$和$H_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$，则

$$q(x)=\sum_{i=0}^{n}[y_ih_i(x)+m_iH_i(x)]$$

  - 其中$h_i(x)$和$H_i(x)$形式见教材P.39

2.5 分段三次Hermite插值

定理：给定函数表如下，令$a = x_0, b = x_n, f(x) \in C^3[a,b], f^{(4)}(x)$在$[a,b]$上存在，$q(x)$是$f(x)$的分段三次Hermite插值函数，则有

$$|R(x)| = |f(x) - q(x)| \le \frac{h^4}{384} M$$

其中

$$h = \max_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i|$$
$$M = \max_{a \le x \le b} \left| f^{(4)}(x) \right|$$

2.6 三次样条插值

- 背景：
  - 高次插值多项式：龙格现象
  - 分段线性插值：节点处导数不连续
  - 分段三次Hermite插值：节点处二阶导数不连续，并且实际问题中有时很难给出导数条件
- 如何提高插值函数在节点处的光滑度？
  - 插值函数在节点处连续
  - 其一阶导数节点处连续
  - 其二阶导数节点处连续
- 三次样条插值

2.6 三次样条插值

定义：给定$y=f(x)$的函数表如下所示，构造函数$s(x)$满足条件：

① 在$[x_i, x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$上为不超过3次的代数多项式.

② $s(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$.

③ $s(x)\in C^2[a,b]$，其中$a=x_0, b=x_n$.

其中$s(x)$称为三次样条插值函数.

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$y=f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

- 设$s(x)$在点$x_i(i=0,1,\cdots,n)$处的微商为$m_i(i=0,1,\cdots,n)$，则$s(x)$在每个小区间$[x_i,x_{i+1}]$上有：

$$s(x_i)=y_i,\ s'(x_i)=m_i,$$
$$s(x_{i+1})=y_{i+1}, s'(x_{i+1})=m_{i+1}$$

- 满足三次Hermite插值的两个条件,根据三次Hermite插值公式，在区间$[x_i,x_{i+1}]$上有：

$$\begin{aligned}
&s(x)\\
&=\left(1+2\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 y_i\\
&+\left(1+2\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 y_{i+1}+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\right)^2 m_i\\
&+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{x_{i+1}-x_i}\right)^2 m_{i+1}
\end{aligned}$$

- 为了求m_i，利用插值条件③，即利用$s(x)$在$x_i(i=0,1,\cdots,n)$上具有连续的二阶微商的性质
- 令$h_i=x_{i+1}-x_i$

$$s(x)$$
$$=\left(1+2\frac{x-x_i}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2 y_i$$
$$+\left(1-2\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 y_{i+1}+(x-x_i)\left(\frac{x-x_{i+1}}{h_i}\right)^2 m_i$$
$$+(x-x_{i+1})\left(\frac{x-x_i}{h_i}\right)^2 m_{i+1}$$

- 对$s(x)$求二阶导数，从而得到在$[x_i, x_{i+1}]$上有：

$$s''(x) = \left[\frac{6}{h_i^2} - \frac{12}{h_i^3}(x_{i+1} - x)\right] y_i + \left[\frac{6}{h_i^2} - \frac{12}{h_i^3}(x - x_i)\right] y_{i+1} + \left[\frac{2}{h_i} - \frac{6}{h_i^2}(x_{i+1} - x)\right] m_i - \left[\frac{2}{h_i} - \frac{6}{h_i^2}(x - x_i)\right] m_{i+1}$$

- 将下标i换成$i-1$，则在区间$[x_{i-1}, x_i]$上有：

$$s''(x) = \left[\frac{6}{h_{i-1}^2} - \frac{12}{h_{i-1}^3}(x_i - x)\right] y_{i-1} + \left[\frac{6}{h_{i-1}^2} - \frac{12}{h_{i-1}^3}(x - x_{i-1})\right] y_i + \left[\frac{2}{h_{i-1}} - \frac{6}{h_{i-1}^2}(x_i - x)\right] m_{i-1} - \left[\frac{2}{h_{i-1}} - \frac{6}{h_{i-1}^2}(x - x_{i-1})\right] m_i$$

2.6 三次样条插值

- 由$x_i \in [x_i, x_{i+1}]$可得

$$s''(x_i^+) = -\frac{6}{h_i^2}y_i + \frac{6}{h_i^2}y_{i+1} - \frac{4}{h_i}m_i - \frac{2}{h_i}m_{i+1}$$

- 由$x_i \in [x_{i-1}, x_i]$可得

$$s''(x_i^-) = \frac{6}{h_{i-1}^2}y_{i-1} - \frac{6}{h_{i-1}^2}y_i + \frac{2}{h_{i-1}}m_{i-1} + \frac{4}{h_{i-1}}m_i$$

- 由$s(x)$在x_i上具有连续的二阶微商，则有

$$s''(x_i^-) = s''(x_i^+)$$

$$\frac{m_{i-1}}{h_{i-1}} + 2\frac{h_{i-1}+h_i}{h_{i-1}h_i}m_i + \frac{m_{i+1}}{h_i} = 3\left(\frac{y_i - y_{i-1}}{h_{i-1}^2} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_i^2}\right)$$

- 两边乘以$\frac{h_{i-1}h_i}{h_{i-1}+h_i}$，令$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i}$可得

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}$$
$$=3\left[\frac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1})+\frac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right]$$

- 令$\beta_i=3\left[\frac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1})+\frac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right]$,可得

$$(1-\alpha_i)m_{i-1}+2m_i+\alpha_i m_{i+1}=\beta_i$$

其中$i=1,2,\cdots,n-1$

2.6 三次样条插值

- 三次样条关于m_i的方程组

$$
\begin{cases}
(1-\alpha_1)m_0 + 2m_1 + \alpha_1 m_2 = \beta_1 \\
(1-\alpha_2)m_1 + 2m_2 + \alpha_2 m_3 = \beta_2 \\
(1-\alpha_3)m_2 + 2m_3 + \alpha_3 m_4 = \beta_3 \\
\vdots \\
(1-\alpha_{n-2})m_{n-3} + 2m_{n-2} + \alpha_{n-2} m_{n-1} = \beta_{n-2} \\
(1-\alpha_{n-1})m_{n-2} + 2m_{n-1} + \alpha_{n-1} m_n = \beta_{n-1}
\end{cases}
$$

- 共有$n+1$个未知数， $n-1$个方程

2.6 三次样条插值

- 边界条件：
  1. 已知两个端点x_0和x_n处的一阶导数值，即给定
  $$f'(x_0) = m_0 = s'(x_0)$$
  $$f'(x_n) = m_n = s'(x_n)$$
  2. 已知两个端点x_0和x_n处的二阶导数值为0，即
  $$f''(x_0) = 0 = s''(x_0)$$
  $$f''(x_n) = 0 = s''(x_n)$$

- 由$s''(x_0^+) = 0$可得
$$2m_0 + m_1 = \frac{3}{h_0}(y_1 - y_0)$$
- 由$s''(x_n^-) = 0$可得
$$m_{n-1} + 2m_n = 3\frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

□ 统一三次样条关于m_i的方程组形式

$$
\begin{cases}
2m_0+\alpha_0 m_1=\beta_0\\
(1-\alpha_1)m_0+2m_1+\alpha_1 m_2=\beta_1\\
(1-\alpha_2)m_1+2m_2+\alpha_2 m_3=\beta_2\\
\vdots\\
(1-\alpha_{n-1})m_{n-2}+2m_n+\alpha_{n-1}m_n=\beta_{n-1}\\
(1-\alpha_n)m_{n-1}+2m_n=\beta_n
\end{cases}
$$

- 边界条件1：

$$\alpha_0=0,\beta_0=2m_0,\alpha_n=1,\beta_n=2m_n$$

- 边界条件2：

$$\alpha_0=1,\beta_0=\frac{3}{h_0}(y_1-y_0),\alpha_n=0,\beta_n=3\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}$$

- 追赶法求解三对角方程组
  - 由第一个方程得

$$m_0 = -\frac{\alpha_0}{2} m_1 + \frac{\beta_0}{2}$$

- 令$a_0 = -\frac{\alpha_0}{2}, b_0 = \frac{\beta_0}{2}$

$$m_0 = a_0 m_1 + b_0$$

  - 代入第二个方程得

$$m_1 = -\frac{\alpha_1}{2+(1-\alpha_1)a_0} m_2 + \frac{\beta_1-(1-\alpha_1)b_0}{2+(1-\alpha_1)a_0}$$

- 令$a_1 = -\frac{\alpha_1}{2+(1-\alpha_1)a_0}, \mathrm{b}_1 = \frac{\beta_1-(1-\alpha_1)b_0}{2+(1-\alpha_1)a_0}$

$$m_1 = a_1 m_2 + b_1$$

- 递推关系式

$$m_i = a_i m_{i+1} + b_i \ (i = 0,1,\cdots,n-1)$$

其中

$$a_0 = -\frac{\alpha_0}{2}, b_0 = \frac{\beta_0}{2},$$

$$a_i = -\frac{\alpha_i}{2+(1-\alpha_i)a_{i-1}}, b_i = \frac{\beta_i-(1-\alpha_i)b_{i-1}}{2+(1-\alpha_i)a_{i-1}}$$

- 将$m_{n-1} = a_{n-1}m_n + b_n$代入最后一个方程

$$m_n = b_n$$

$$m_i = a_i m_{i+1} + b_i \ (i = n-1,\cdots,1,0)$$

三次样条插值算法

① 读入插值节点$x_i, y_i (i = 0,1,\cdots,n)$和点$xx$

② 对$i = 0,1,\cdots,n-1$计算$h_i = x_{i+1} - x_i$

③ 计算α_i和$\beta_i (i = 0,1,\cdots,n)$

- 对第一种边界条件：

$$\alpha_0 = 0, \beta_0 = 2m_0;$$
$$\alpha_n = 1, \beta_n = 2m_n$$

- 对第二种边界条件：

$$\alpha_0 = 1, \beta_0 = \frac{3}{h_0}(y_1 - y_0);$$
$$\alpha_n = 0, \beta_n = \frac{3}{h_{n-1}}(y_n - y_{n-1})$$

三次样条插值算法

- 对$i=1,2,\cdots,n-1$做

$$\alpha_i=\frac{h_{i-1}}{h_{i-1}+h_i};\beta_i=3\left[\frac{1-\alpha_i}{h_{i-1}}(y_i-y_{i-1})+\frac{\alpha_i}{h_i}(y_{i+1}-y_i)\right]$$

④ 计算a_i和$b_i(i=0,1,\cdots,n)$

$$a_0=-\frac{\alpha_0}{2};b_0=\frac{\beta_0}{2}$$

- 对$i=1,2,\cdots,n$做

$$a_i=-\frac{\alpha_i}{2+(1-\alpha_i)a_{i-1}};\ b_i=\frac{\beta_i-(1-\alpha_i)b_{i-1}}{2+(1-\alpha_i)a_{i-1}}$$

□ 三次样条插值算法

⑤ 计算$m_i(i = 0,1,\cdots,n)$

$$m_n = b_n$$

$$m_i = a_i m_{i+1} + b_i \ (i = n-1,\cdots,1,0)$$

⑥ 判别点xx所在区间$[x_i, x_{i+1}](i = 0,1,\cdots,n-1)$，然后求出$s(x)$的值并输出

$$yy = s(xx)$$

$$= \left(1 + 2\frac{xx - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)\left(\frac{xx - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 y_i$$

$$+ \left(1 + 2\frac{xx - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)\left(\frac{xx - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 y_{i+1} + (xx - x_i)\left(\frac{xx - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}\right)^2 m_i$$

$$+ (xx - x_{i+1})\left(\frac{xx - x_i}{x_{i+1} - x_i}\right)^2 m_{i+1}$$

2.6 三次样条插值

例：给定函数表如下，边界条件$s''(x_0) = 0, s''(x_n) = 0$，求三次样条插值函数$s(x)$，并求$f(3)$的近似值.

x	1	2	4	5
$y = f(x)$	1	3	4	2

例：$s(x) = \begin{cases} x^3 + x^2, 0 \le x \le 1 \\ 2x^3 + ax^2 + bx - 1, 1 \le x \le 2 \end{cases}$

2.7 数值微分

- 背景:
- 对由表达式表示的函数求导数，大部分可直接使用函数求导公式来求解.
- 对由函数表格表示的函数求导数，只能使用近似方法来求$f(x)$的导数.
- 数值微分：近似方法求解函数的导数.

□ 使用n次插值函数求导数

- 给定函数表的函数$f(x)$可用n次插值函数$p_n(x)$来近似，则$f'(x)$可用$p_n'(x)$来近似.

$$f(x) \approx p_n(x) \Longrightarrow f'(x) \approx p_n'(x)$$

- 误差

$$R(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

其中$\xi \in [a,b]; \omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$

$$R'(x) = f'(x) - p_n'(x)$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x) + \frac{\omega(x)}{(n+1)!}\frac{d}{dx}f^{(n+1)}(\xi)$$

$$R'(x_k) = f'(x_k) - p_n'(x_k) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega'(x_k)$$

□ 两点公式（等距节点）

- 给定两点$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$可以构造线性插值函数

$$p_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \approx f(x)$$

- 两边求导，$h = x_1 - x_0$

$$p_1'(x) = \frac{1}{h}(y_1 - y_0)$$

- 节点处导数估计

$$p_1'(x_0) = \frac{1}{h}(y_1 - y_0),\ p_1'(x_1) = \frac{1}{h}(y_1 - y_0)$$

- 两点公式误差

$$R'(x_0)=f'(x_0)-p_1'(x_0)=\frac{f''(\xi_0)}{2!}(x_0-x_1)$$

$$=-\frac{h}{2}f''(\xi_0)\ (x_0<\xi_0<x_1)$$

$$R'(x_1)=f'(x_1)-p_1'(x_1)=\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)$$

$$=\frac{h}{2}f''(\xi_1)\ (x_0<x<x_1)$$

- 三点公式（等节点）
  - 给定三点$(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2)$可构造二次插值函数

$$p_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2$$

  - 两边求导，$h = x_1 - x_0 = x_2 - x_1$

$$p_2'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2)$$

$$p_2'(x_1) = \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$$

$$p_2'(x_2) = \frac{1}{2}(y_0 - 4y_1 + 3y_2)$$

2.7 数值微分

- 三点公式误差

$$R'(x_0)=f'(x_0)-p_2'(x_0)$$
$$=\frac{f'''(\xi_0)}{3}h^2\ (x_0<\xi_0<x_2)$$
$$R'(x_1)=f'(x_1)-p_1'(x_1)$$
$$=-\frac{f'''(\xi_1)}{6}h^2\ (x_0<x<x_2)$$
$$R'(x_2)=f'(x_2)-p_2'(x_2)$$
$$=\frac{f'''(\xi_2)}{3}h^2\ (x_0<\xi_2<x_2)$$

- 从误差估计式来看，h越小精度越高，但实际计算可能并非如此

2.7 数值微分

使用三次样条插值函数求导数

- n次插值函数求导不便于计算非节点处的导数值，也不能保证较小的误差.
- 构造三次样条插值函数$s(x)$来近似$f(x)$
- 用$s'(x)$来近似$f'(x)$
- 当$h = \max\limits_{0 \le i \le n-1} |x_{i+1} - x_i| \to 0$时，$s(x), s'(x), s''(x)$分别收敛于$f(x), f'(x), f''(x)$
- 缺点：当h较小时，解方程组计算量大.


Thank You!