4 数值积分
Numerical Integration

何军辉
hejh@scut.edu.cn

背景

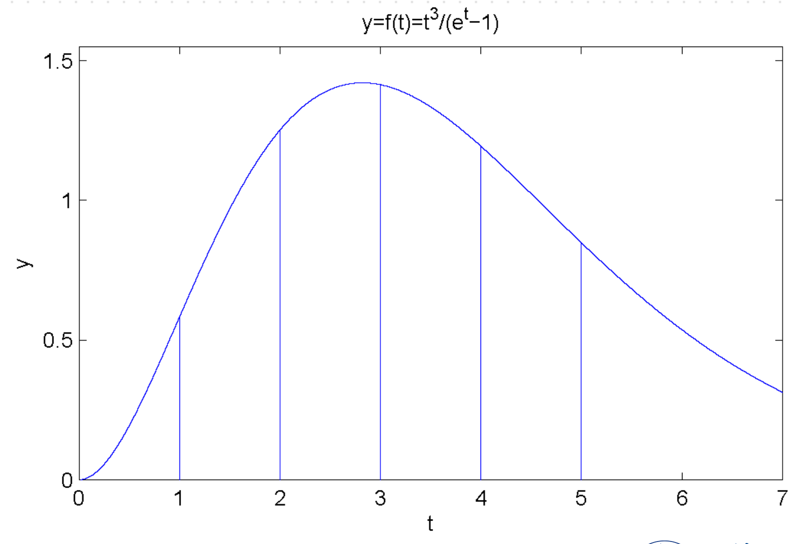
- 计算积分的基本公式

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

其中$F(x)$为被积函数$f(x)$的原函数

- 问题：有些函数的原函数无法用初等函数来表示，或者用函数表表示的函数积分也不能通过求原函数的方法计算

例：$\int_0^5 \frac{t^3}{e^t-1}dt = ?$



背景

- 数值积分基本思想：
  1. 根据代数插值法，对于任一被积函数$f(x)$，都可以构造一个插值多项式$p(x)$来近似代替，即
  $$f(x) \approx p(x)$$
  2. 两边积分
  $$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx$$
  3. 多项式函数$p(x)$的定积分容易计算.

4.1 梯形求积公式

- 由代数插值法，用两点$(a, f(a)), (b, f(b))$构造线性函数$p_1(x)$近似代替$f(x)$

$$f(x) \approx p_1(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_1(x)dx = \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)\right] dx = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

- 梯形求积公式的几何意义是用梯形区域的面积来代替曲边梯形区域面积.

4.1 Simpson求积公式

- 由代数插值法，用三点$(a, f(a))$, $\left(\frac{a+b}{2}, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $(b, f(b))$构造二次多项式$p_2(x)$近似代替$f(x)$.

$$f(x) \approx p_2(x)$$

$$= \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(a-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

$$+ \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)} f(b)$$

4.1 Simpson求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

- 把积分区间$[a,b]$划分n等分，得到$n+1$个分点$x_i = a + ih(i = 0,1,\cdots,n)$，其中$h = \frac{b-a}{n}$.
- 由代数插值法，以$n+1$个分点作为插值节点构造n阶多项式$p_n(x)$近似代替$f(x)$.

$$f(x) \approx p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)} f(x_i)$$

其中:

$$\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$\omega'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n)$$

4.1 Newton-Cotes求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} f(x_i)\, dx$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left[\int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} dx \right] f(x_i) = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

其中$A_i = \int_a^b \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} dx$

- 如何求A_i?

令$x = a + th$，则 $x - x_i = a + th - (a + ih) = (t - i)h$

$$\begin{aligned}\omega(x) &= (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)\\ &= (t)h(t-1)h\cdots(t-n)h\\ &= h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)\end{aligned}$$

$$\omega'(x_i) = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_n) = ih(i-1)h\cdots h(-h)\cdots[-(n-i)]h = (-1)^{n-i}h^n i!\,(n-i)!$$

- 如何求A_i?

$$A_i=\int_a^b\frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)}dx\xRightarrow{x=a+th}$$

$$\int_0^n\frac{h^{n+1}t(t-1)\cdots(t-n)}{(t-i)h(-1)^{n-i}h^n i!\,(n-i)!}hdt$$

$$=\frac{(-1)^{n-i}(b-a)}{n\cdot i!\,(n-i)!}\int_0^n\frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}dt$$

- 记 $c_i^{(n)} = \frac{(-1)^{n-i}}{n \cdot i!(n-i)!}\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-n)}{t-i}dt$，则有

$$A_i = (b-a)c_i^{(n)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p_n(x)dx = \sum_{i=0}^{n}(b-a)c_i^{(n)}f(x_i)$$

称为Newton-Cotes（牛顿-科特斯）公式，其中 $c_i^{(n)}$称为Newton-Cotes系数.

- $c_i^{(n)}$仅依赖于n和 i，不依赖于被积函数$f(x)$和积分区间$[a,b]$，可以预先计算构成Newton-Cotes系数表.

例：用梯形公式、Simpson求积公式和Newton-Cotes求积公式（取$n = 4$）计算定积分

$$\int_{0.5}^{1} \sqrt{x}\, dx$$

4.2 求积公式的代数精度

定义：对一般求积公式，如果当$f(x)$为 任意一个次数不高于n次的代数多项式时，积分近似公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{m} A_k f(x_k)$$

精确成立，而当$f(x)$为$n+1$次代数多项式时不精确成立，则称该积分近似公式具有n次代数精度.

定理：梯形求积公式具有1次代数精度.

① 当$f(x)$为任意一个不超过一次的代数多项式时，梯形求积公式精确成立.

② 当$f(x)$为二次代数多项式时，梯形求积公式不精确成立.

$$f(x)-p_1(x)=\frac{f''(\xi)}{2!}(x-a)(x-b)$$

定理：Newton-Cotes求积公式至少具有n次代数精度，当n为偶数时，积分代数精度至少为$n+1$次

$$f(x)-p_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$$

定理：Simpson求积公式的代数精度为3.

加权积分定理

- 如果f在$[a,b]$连续，g在$[a,b]$可积并且$g(x) \geq 0$，$\forall x \in [a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\, g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x)\, dx$$

这里c是$[a,b]$中适当的点.

- 参考：张筑生，《数学分析新讲》第二册，P89

4.3 梯形和Simpson求积公式误差估计

定理：若$f(x) \in C^2[a,b]$，梯形公式误差估计为：

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12}f''(\eta)$$

其中$a \leq \eta \leq b$

1. $R(x) = \frac{f''(\xi)}{2}(x-a)(x-b)$
2. 加权积分中值定理

思考： 求满足$P(x_i)=f(x_i)(i=0,1,2)$及$P'(x_1)=f'(x_1)$的插值多项式及其余项表达式.

$$
\begin{aligned}
&P(x)\\
&=f(x_0)+f(x_0,x_1)(x-x_0)\\
&+f(x_0,x_1,x_2)(x-x_0)(x-x_1)+A(x-x_0)(x\\
&-x_1)(x-x_2)
\end{aligned}
$$

$$
R(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)
$$

定理：若$f(x) \in C^4[a,b]$，Simpson公式误差估计

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$= -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\eta)$$

其中$a \le \eta \le b$

1. 构造三次插值多项式$p_3(x)$满足：$p_3(a) = f(a), p_3(b) = f(b), p_3\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right), p_3'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.
2. 加权积分中值定理

- 梯形和Simpson求积公式会产生较大的误差：从几何意义观察
- 对Newton-Cotes公式来说，当$n \to \infty$时，并非对所有$f(x)$都有：

$$\int_a^b f(x)dx - \sum_{i=0}^{n}(b-a)c_i^{(n)}f(x_i) \to 0$$

  - Newton-Cotes求积公式的收敛性对某些被积函数$f(x)$得不到保证.
  - 当$n \geq 8$时，Newton-Cotes求积公式的稳定性得不到保证.

□ 复合梯形求积公式

定义：把积分区间$[a,b]$划分n等分，记$n+1$个分点为$x_0,x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n$，其中$x_k=a+kh$ $(k=0,1,\cdots,n;h=\frac{b-a}{n})$. 使用这些分点将$[a,b]$分为$n$个小区间$[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x_{k+1}-x_k}{2}[f(x_k)+f(x_{k+1})]$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})] = \frac{h}{2}\left[f(a)+f(b)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(a+kh)\right]$$

称为复合梯形求积公式，记为T_n

- 复合梯形公式求积算法：

① 输入a, b和n

② $h = \frac{b-a}{n}$

③ $sum = 0$

- 对$k = 1,2,\cdots,n-1$做

$$sum = sum + f(a + kh)$$

④ $T = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2 * sum]$

⑤ 输出T

□ 复合梯形求积公式误差

定理： 若$f(x) \in C^2[a,b]$，则对复合梯形求积公式T_n有：

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta)$$

其中$h = \frac{b-a}{n}, a \le \eta \le b.$

应用： 使用误差估计式判断n应该 取多大才能满足所要求的精度要求.

例：计算积分$\int_0^1 e^x dx$的近似值，要求保证有5位有效数字，若用复合梯形求积公式计算，n应取多少.

1. $\int_a^b f(x)dx - T_n = -\frac{b-a}{12}h^2 f''(\eta).$
2. 有效数字与 误差限的关系$|x*-x| \le \frac{1}{2} \times 10^{p-n}$

定理： 积分近似值T_n与T_{2n}有如下 关系：

$$T_{2n} = \frac{1}{2}\left[T_n + h\sum_{k=1}^{n} f(a + (2k-1)\frac{b-a}{2n})\right]$$

其中$h = \frac{b-a}{n}$.

□ 复合Simpson求积公式

- 把积分区间$[a,b]$划分n等分，n为偶数，设$n=2m(m=1,2,\cdots)$，则分点为$x_0,x_1,\cdots,x_{2m}$.其中$x_k=a+kh; k=0,1,\cdots,2m$; $h=\frac{b-a}{n}$.
- 使用这些分点把$[a,b]$分为m个小区间$[x_0,x_2],[x_2,x_4],\cdots,[x_{2(m-1)},x_{2m}]$.在每个小区间$[x_{2(k-1)},x_{2k}](k=1,2,\cdots,m)$上使用Simpson求积公式得

$$\int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k}} f(x)dx \approx \frac{x_{2k}-x_{2k-2}}{6}[f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]$$

$$=\frac{h}{3}[f(x_{2k-2})+4f(x_{2k-1})+f(x_{2k})]$$

4.4 复合求积公式

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{2(m-1)}}^{x_{2m}} f(x)dx$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{2(k-1)}}^{x_{2k}} f(x)dx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{m} \frac{h}{3}[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(a) + f(b) + 4\sum_{k=1}^{m} f(x_{2k-1}) + 2\sum_{k=1}^{m-1} f(x_{2k})\right]$$

称为复合Simpson求积公式，记为S_n.

4.4 复合求积公式

定理： 若$f(x) \in C^4[a,b]$，则对复合Simpson求积公式S_n有

$$\int_a^b f(x)dx - S_n = -\frac{b-a}{2880}(2h)^4 f^{(4)}(\eta)$$

其中$h = \frac{b-a}{n}; a \le \eta \le b.$

- 复合Simpson公式求积算法：
  ① 输入a, b和n
  ② 计算$h = \frac{b-a}{n}$
  ③ $S1 = 0, S2 = 0$
    - 对$k = 1,2,\cdots,m$做
      $S1 = S1 + f(a + (2 * k - 1) * h)$
    - 对$k = 1,2,\cdots,m-1$做
      $S2 = S2 + f(a + 2 * k * h)$
  ④ 计算$S = \frac{h}{3}(f(a) + f(b) + 4 * S1 + 2 * S2)$
  ⑤ 输出S

4.5 自动选取步长梯形法

- 复合梯形公式在求积分之前必须选定n
  - 可通过误差估计来确定n

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| = \frac{b-a}{12}h^2|f''(\eta)|$$

$$\le \frac{b-a}{12}h^2 \max_{a\le x\le b}|f''(x)|$$

    - 如果n取得太大，虽然能使误差变小，但计算量就会增加
    - 如果n取得太小，误差就会很大，积分精度难以得到保证
  - 使用自动选取步长梯形法

4.5 自动选取步长梯形法

- 积分近似值T_{2n}和T_n的关系：

$$T_{2n}=\frac{1}{2}\left[T_n+h\sum_{k=1}^{n}f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right)\right],(h=\frac{b-a}{n})$$

- 自动步长选取法

$$\int_a^b f(x)dx\ -T_n=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta)\ \ (a\le\eta_n\le b)$$

$$\int_a^b f(x)dx\ -T_{2n}=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2 f''(\eta_{2n})\ (a\le\eta_{2n}\le b)$$

$$T_{2n}-T_n=-\frac{b-a}{12}\left(\frac{h}{2}\right)^2[4f''(\eta_n)-f''(\eta_{2n})]$$

$$\frac{1}{3}(T_{2n}-T_n)\approx\int_a^b f(x)dx\ -T_{2n}$$

精度要求：$\left|\int_a^b f(x)dx-T_{2n}\right|<\epsilon$；可用$|T_{2n}-T_n|<3\epsilon$近似判断

4.5 自动选取步长梯形法

- 自动选取步长梯形算法：
  - ① 输入a, b和ϵ
  - ② 计算$h = \frac{b-a}{2}$，$T1 = \big(f(a) + f(b)\big) * h, n = 1$
  - ③ 计算$T0 = T1$，$S = 0$（$T0$表示前次积分近似值，$T1$表示后次积分近似值）
  - ④ 对$k = 1,2,\cdots,n$计算
    $S = S + f(a + (2 * k - 1) * h/n)$
  - ⑤ $T1 = \frac{T0}{2} + S * \frac{h}{n}$
  - ⑥ 若$|T1 - T0| < 3\epsilon$，则输出$T1$的值，结束计算，否则$n = 2n$，返回③

- 假设有一个量F^*（可以是函数/微分/积分等），现用一个以步长h为变量的函数$F_0(h)$近似代替它，并设F^*与h无关.

- F^*与$F_0(h)$的误差表示为

$$F^* - F_0(h) = a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + \cdots$$

其中 $0 < p_1 < p_2 < \cdots < p_k < \cdots; a_k \neq 0(k = 1,2,\cdots)$是与$h$无关的常数.

  - 当h适当小时，h^{p_1}对误差影响最大.
  - 称为F^*与函数$F_0(h)$的误差的阶

- 如何构造新的函数$F_1(h), F_2(h), \cdots$，使得新函数与F^*之间误差的阶幂更高?

4.6 Richardson理查森外推法

1. 用qh代替h.

$$F^* - F_0(h) = a_1 h^{p_1} + a_2 h^{p_2} + \cdots + a_k h^{p_k} + \cdots$$

$$F^* - F_0(qh) = a_1 (qh)^{p_1} + a_2 (qh)^{p_2} + \cdots + a_k (qh)^{p_k} + \cdots$$

其中q为常数，并满足$1 - q^{p_1} \neq 0$

2. 消去含有h^{p_1}的项.

$$q^{p_1} F^* - q^{p_1} F_0(h)$$
$$= a_1 (qh)^{p_1} + a_2 q^{p_1} h^{p_2} + \cdots + a_k q^{p_1} h^{p_k} + \cdots$$

$$(1 - q^{p_1}) F^* - [F_0(qh) - q^{p_1} F_0(h)]$$
$$= a_2 (q^{p_2} - q^{p_1}) h^{p_2} + a_3 (q^{p_3} - q^{p_1}) h^{p_3} + \cdots$$
$$+ a_k (q^{p_k} - q^{p_1}) h^{p_k} + \cdots$$

$$F^* - \frac{F_0(qh) - q^{p_1} F_0(h)}{1 - q^{p_1}} = \frac{a_2 (q^{p_2} - q^{p_1}) h^{p_2}}{1 - q^{p_1}} + \cdots$$

$$F^* - \frac{F_0(qh) - q^{p_1}F_0(h)}{1 - q^{p_1}} = \frac{a_2(q^{p_2} - q^{p_1})h^{p_2}}{1 - q^{p_1}} + \cdots$$

3. 取新函数如下

$$F_1(h) = \frac{F_0(qh) - q^{p_1}F_0(h)}{1 - q^{p_1}}$$

$$a_k^{(1)} = \frac{a_k(q^{p_k} - q^{p_1})}{1 - q^{p_1}} \quad (k = 2,3,\cdots)$$

$$F^* - F_1(h) = a_2^{(1)}h^{p_2} + a_3^{(1)}h^{p_3} + \cdots + a_k^{(1)}h^{p_k} + \cdots$$

其中$a_k^{(1)}$是与h无关的常数.

4. 以此类推，构造出$F_2(h), F_3(h), \cdots$

□ Richardson外推一般形式：

$$F_m(h)=\frac{F_{m-1}(qh)-q^{p_m}F_{m-1}(h)}{1-q^{p_m}}\quad(m=1,2,\cdots)$$

其中q为常数，并满足$1-q^{p_m}\neq 0.$

□ 对应的误差阶幂

$$F^*-F_m(h)=a_{m+1}^{(m)}h^{p_{m+1}}+a_{m+2}^{(m)}h^{p_{m+2}}+\cdots$$

其中$a_k^{(m)}=\frac{a_k^{(m-1)}(q^{p_k}-q^{p_m})}{1-q^{p_m}}\ \ (k=m+1,m+2,\cdots)$，是与$h$无关的常数.

□ Romberg序列的推导

- 复合梯形公式误差可以表示为

$$\int_a^b f(x)dx - T_n = a_2h^2 + a_4h^4 + a_6h^6 + \cdots$$

其中$h=\frac{b-a}{n}, a_2, a_4, a_6, \cdots$都是与步长$h$无关的常数.

- 复合梯形公式序列

$$T_n = \frac{h}{2}\left[f(a) + +f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a+kh)\right] = T_0(h)$$

$$T_{2n} = \frac{h}{2^2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{2n-1} f(a+k\frac{h}{2})\right] = T_0\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$T_0(h), T_0\left(\frac{h}{2}\right), T_0\left(\frac{h}{2^2}\right), \cdots$$

- 取$m=1, q=\frac{1}{2}$，应用Richardson外推算法

$$T_1(h)=\frac{T_0\left(\frac{h}{2}\right)-\frac{1}{2^2}T_0(h)}{1-\frac{1}{2^2}}$$

$$T_1\left(\frac{h}{2}\right)=\frac{T_0\left(\frac{h}{2^2}\right)-\frac{1}{2^2}T_0\left(\frac{h}{2}\right)}{1-\frac{1}{2^2}}$$

- 新的函数序列

$$T_1(h), T_1\left(\frac{h}{2}\right), T_1\left(\frac{h}{2^2}\right), \cdots$$

4.7 Romberg求积法

- 不断应用Richardson外推得到一系列函数序列

$$T_0(h), T_0\left(\frac{h}{2}\right), T_0\left(\frac{h}{2^2}\right), \cdots$$
$$T_1(h), T_1\left(\frac{h}{2}\right), T_1\left(\frac{h}{2^2}\right), \cdots$$
$$T_m(h), T_m\left(\frac{h}{2}\right), T_m\left(\frac{h}{2^2}\right), \cdots$$

- 统一公式

$$T_m\left(\frac{h}{2^k}\right) = \frac{T_{m-1}\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2^{2m}} T_{m-1}\left(\frac{h}{2^k}\right)}{1 - \frac{1}{2^{2m}}}$$
$$= \frac{4^m T_{m-1}\left(\frac{h}{2^{k+1}}\right) - T_{m-1}\left(\frac{h}{2^k}\right)}{4^m - 1}$$

其中$T_0(h) = T_n, T_0\left(\frac{h}{2}\right) = T_{2n}, \cdots; m = 1,2,, \cdots; k = 0,1, \cdots$

□ Romberg求积法的计算

$T_n = T_0(h)$				
$T_{2n} = T_0\left(\frac{h}{2}\right)$	$T_1(h)$			
$T_{4n} = T_0\left(\frac{h}{2^2}\right)$	$T_1\left(\frac{h}{2}\right)$	$T_2(h)$		
$T_{8n} = T_0\left(\frac{h}{2^3}\right)$	$T_1\left(\frac{h}{2^2}\right)$	$T_2\left(\frac{h}{2}\right)$	$T_3(h)$	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

- 直到$|T_m(h) - T_{m-1}(h)| < \epsilon$

例：使用Romberg求积法计算积分$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx$的值（给定$\epsilon = 0.01$，且取$n = 1$）

Romberg求积法算法

① 输入a, b和ϵ

② 计算$T_0^{(0)}$：

$$T(0,0)=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

③ $k=1$(其中k用来记录把积分区间$[a,b]$2等分的次数)

④ 按复化梯形公式计算$T_0^{(k)}$：

$$T(0,k)=\frac{1}{2}\left[T(0,k-1)+\frac{b-a}{2^{k-1}}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f\left(a+(2i-1)\times\frac{b-a}{2^k}\right)\right]$$

⑤ 计算第$k+1$行元素$T_m^{(k-m)}$：

$$T(m,k-m)=\frac{4^m T(m-1,k-m+1)-T(m-1,k-m)}{4^m-1}$$

其中$m=1,2,\cdots,k$

⑥ 精度控制：

- 对指定的精度ϵ，若$|T(k,0)-T(k-1,0)|<\epsilon$，即$\left|T_k^{(0)}-T_{k-1}^{(0)}\right|<\epsilon$，则终止计算，并取$T(k,0)$即$T_k^{(0)}$作为满足精度要求的积分近似值；否则$k=k+1$，转回④继续计算.

- 以n个不等距的节点$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_i \in [a, b]$作为插值节点，根据代数插值理论有

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} + f(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)\omega_n(x)$$

其中$\omega_n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)$.

- 乘以权函数$\rho(x)$并积分

$$\int_a^b \rho(x) f(x) dx$$

$$= \int_a^b \rho(x) \left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{\omega_n(x)}{(x - x_k)\omega_n'(x_k)} \right] dx$$

$$+ \int_a^b \rho(x) f(x, x_1, x_2, \cdots, x_n)\omega_n(x) dx$$

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\int_a^b \frac{\rho(x)\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}dx$$
$$+\int_a^b \rho(x)f(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)\omega_n(x)dx$$

令$A_k=\int_a^b \frac{\rho(x)\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}dx$，$R[f]=\int_a^b \rho(x)f(x,x_1,x_2,\cdots,x_n)\omega_n(x)dx$，则有

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + R[f]$$

- 当$f(x)$为不超过$n-1$次多项式时，余项为0，即有：

$\int_a^b \rho(x)f(x)dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$，积分精度至少为$n-1$

如何选择x_k和权函数使得积分精度从$n-1$提高到$2n-1$?

4.8 Gauss 型求积公式

定理：若对任何一个不超过$n-1$次的代数多项式$q(x)$满足

$$\int_a^b \rho(x)q(x)\omega_n(x)dx = 0$$

则求积公式$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$具有$2n-1$次代数精度.

1. $f(x)$次数不高于$2n-1$：$f(x) = \omega_n(x)q(x) + r(x)$
2. $f(x)$为$2n$次代数多项式：$f(x) = \omega_n^2(x)$

- 选取x_k满足$\int_a^b \rho(x)q(x)\omega_n(x)dx = 0$，并取

$$A_k = \int_a^b \frac{\rho(x)\omega_n(x)}{(x-x_k)\omega_n'(x_k)}dx$$

则求积公式

$$\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

具有$2n-1$次积分精度.

  - x_k称为Gauss点，
  - $\int_a^b \rho(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$称为Gauss型求积公式.

- Gauss-Legendre高斯勒让得求积公式
  - Legendre多项式

$$L_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n,\ \text{其中}L_0(x)=1.$$

  - $L_n(x)$是在区间$[a,b]$上关于权函数$\rho(x)=1$的正交多项式簇
  - $L_n(x)$的n个零点就是积分节点.

$$\int_a^b f(x)dx\approx\sum_{k=1}^{n}A_k f(x_k)$$

$$A_k=\frac{2}{\left(1-x_k^2\right)\left(\omega_n'(x_k)\right)^2}$$

□ Gauss-Leguerre高斯拉盖尔求积公式

- Leguerre多项式

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

- $L_n(x)$是在区间$[0, \infty)$上关于权函数$\rho(x) = e^{-x}$的正交多项式簇
- $L_n(x)$的n个零点就是积分节点.

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \frac{(n!)^2}{x_k[L_n'(x_k)]^2}$$

Gauss-Hermite求积公式

- Hermite多项式

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$$

- $H_n(x)$是在区间$(-\infty, +\infty)$上关于权函数$\rho(x) = e^{-x^2}$的正交多项式簇.
- $H_n(x)$的n个零点就是积分节点.

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

$$A_k = \frac{2^{n+1} n! \sqrt{\pi}}{[H_n'(x_k)]^2}$$


Thank You!