计算方法 2007-2008 学年第一学期试题

1 填空（15 分）

1） 设近似数 $x_1^* = 9.2270$， $x_2^* = 0.8009$ 都是四舍五入得到的，则相对误差 $\left| e_r(x_1^* x_2^*) \right| \le$ 6.78×10⁻⁵

2）拟合三点 A(3,1), B(1,3)，C(2,2)的平行于 y 轴的直线方程为 $x=2$.

3) 近似数 $x^* = 0.0351$ 关于真值 $x = 0.0349$ 有 4 为有效数字.

4） 插值型求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n-1} A_k f(x_k)$ 至少有 n−2 次代数精确度.

5） Simpson(辛浦生)求积公式有 3 次代数精确度.

$x_{n+1} = 0.684670$
$x_n = 0.6846643667$

2. （10 分）已知曲线 $y = x^3 + 2.89$ 与 $y = 2.4x^2 + 0.51x$ 在点（1.6,6.9）附近相切，试用牛顿迭代法求切点横坐标的近似值 x_{n+1}，当 $\left| x_{n+1} - x_n \right| \le 10^{-5}$ 误差小于 10^{-4} 时停止迭代。 $e = 3.658\times10^{-5} < 0.5\times10^{-4}$

3. （10 分）用最小二乘法确定 $y = ax^2 + b\ln x$ 中的常数 a 和 b，使得该函数曲线拟合于下面四个点 (1，2.01), (2，7.3), (3,16.9), (4,30.6) (计算结果保留到小数点后 4 位)

$354a + 34.8408b = 672.91$
$34.8408a + 3.6092b = 66.0471$

4.~~(10 分) 用乘幂法求矩阵~~ $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ 的按模最大的特征值 λ_1 的第 k 次近似值 $\lambda_1^{(k)}$ 及相应的~~特征向量~~ $x_1^{(k)}$。要求取初始向量 $u_0 = (1,2,1)^T$，且 $\left| \lambda_1^{(k)} - \lambda_1^{(k-1)} \right| \le 0.1$。

5. （10 分）设有方程组

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 3 \\ 1 & a & 2 \\ -3 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (a \ne 0)$$

$X^{k+1} = (D-L)^{-1}UX^k + (D-L)^{-1}b$

展开

（1） 写出与 Jacobi 迭代法对应的 Gauss-Seidel 方法的迭代格式；

（2） Jacobi 方法的迭代矩阵为: $\rightarrow D^{-1}(L+U)$

（3） 当参数 a 满足什么条件时，Jacobi 方法对任意的初始向量都收敛。

6. （10 分）已知四阶连续可导函数 $y = f(x)$ 的如下数据：

x_i	1	2
$f(x_i)$	0	5
$f'(x_i)$	1	10

试求满足插值条件 $p(x_i) = f(x_i), p'(x_i) = f'(x_i)$ 的三次插值多项式 $p(x)$，并写出截断误差 $R(x) = f(x) - p(x)$ 的导数型表达式（不必证明）。

7. （15 分）设有积分 $I=\int_1^2 x^3 e^x dx$

1）取 7 个等距节点（包括端点 1 和 2），列出被积函数在这些节点上的函数值表（小数点后至少保留 4 位）；

2）用复化 simpson 公式求该积分的近似值，并由截断误差公式估计误差大小。

8. （10 分）

给定初值问题

$$y'-\frac{y^2}{x}=0,\qquad y(1)=1,\qquad 1<x\le 1.4$$

a) 写出欧拉（Euler）预估-校正的计算格式；

b) 取步长 $h=0.2$，求 $y(1.4)$ 的近似值。

9. （10 分）

用迭代法的思想证明：

$\lim_{k\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2$ （等号左边有 k 个 2）。

2008 —2009 学年第 2 学期试题

1. （每小题 3 分，共 15 分）填空

（1） $2n$ 个求积节点的插值型求积公式，其代数精确度至少为 $2n-1$ 次；

（2） 为提高数值计算精度，当正数 x 充分小时，应将 $\frac{1-\cos x}{\sin x}$ 改写为 $\frac{1}{2}\tan\frac{x}{2}$；

（3） 拟合三点 A（0，1），B（1，3），C（2，2）的平行于 y 轴的直线方程为 $x=1$；

（4）求积公式 $\int_{-1}^{1} f(x)dx\approx 2f(0)$ 有 2 次代数精确度；

（5）求方程 $x=f(x)$ 的根的 Newton 迭代格式是 $x=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$。

2. （15 分）曲线 $y=x^3-2.4x^2-0.51x+2.89$ 在点 $x_0=1.6$ 附近与 x 轴相切于 α 点，

试用 Newton 迭代法求 α 的近似值 x_{n+1}，使 $|x_{n+1}-x_n|\le 10^{-5}$。

3. （10 分）求一经过原点的抛物线，使其按最小二乘原理拟合于如下数据

x_i	1	2	3	4
y_i	0.8	1.5	1.8	2.0

并求平方逼近误差 δ^2.（运算结果小数点后至少保留 4 位）

解：（1）矛盾方程组为：

（2）正规方程组为：

（3）所求抛物线为：

（4）平方逼近误差δ^2：

4．（10分）用乘幂法求矩阵$A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$的按模最大的特征值$\lambda_1$的第$k$次近似值$\lambda_1^{(k)}$及相应的特征向量$x_1^{(k)}$。要求取初始向量$u_0=(1,1)^T$，且$\left|\lambda_1^{(k)}-\lambda_1^{(k-1)}\right|\le 0.001$。

解：乘幂法的计算格式为：

计算过程列表如下：

所以：$\lambda_1^{(k)}=$　　　　　，$x_1^{(k)}\approx t(1.000\ ,\qquad)^T\ ,t\neq 0$

5（10分）试用三角分解求解线性方程组

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\ 3\\ 17\\ 7\end{pmatrix}$$

（1）将系数矩阵进行三角分解：

（2）用三角分解法求该方程组的解：

6．（10分）已知四阶连续可导函数$y=f(x)$的如下数据：

x_i	0 1
$f(x_i)$	0 1
$f'(x_i)$	0

	1

试求满足插值条件　　$p(x_i)=f(x_i)$，$p'(x_i)=f'(x_i)$

的三次插值多项式 $p(x)$，并写出截断误差 $R(x)=f(x)-p(x)$ 的导数型表达式(不必证明)。

7．（15 分）若用复化 Simpson 公式求积分 $\int_0^1 e^x dx$ 的近似值，为使该近似值有 4 位有效数字，问至少应知道多少个结点的 e^x 值？并由此求 $\int_0^1 e^x dx$ 的近似值.（小数点后至少取 4 位）.

解:（1）复化 Simpson 公式的截断误差为:

（2）计算所需要的节点数目:

（3）按（2）中的节点数计算 $\int_0^1 e^x dx$。

8．（10 分）给定初值问题

$$y'=x+y^2,\quad y(0)=1$$

（1）写出欧拉(Euler)预估- 校正法的计算格式。

（2）取步长 $h=0.1$，求 $y(0.2)$ 的近似值（小数点后至少保留 4 位）。

9．（5 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数，试建立如下数值积分公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{a-b}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{4}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

并证明有余项表达式 $R[f]=\frac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi),\xi\in(a,b)$.

07/08 第一学期试题参考答案： 1: (1)6.78×10^{-5},　(2) x=2　(3) 2　（4）n-2　(5) 3

2. 切线斜率相等： $3x^2=4.8x+0.51$，$3x^2-4.8x-0.51=0$

牛顿迭代格式： $x_{n+1}=x_n-\dfrac{3x_n^2-4.8x_n-0.51}{6x_n-4.8}$

取 $x_0=1.6$，得 $x_1=1.70625, x_2=1.70002, x_3=1.70000, x_4=1.70000$

3. 矛盾方程组：$\begin{cases} a=2.01 \\ 4a+b\ln 2=7.3 \\ 9a+b\ln 3=16.9 \\ 16a+b\ln 4=30.8 \end{cases}$

正则方程组：$\begin{pmatrix} 354 & 34.84081 \\ 34.84081 & 3.60921 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 672.91 \\ 66.04713 \end{pmatrix}$

$a\approx 1.9997, b\approx -1.0042$

4. 取初始向量 $\mathbf{V}^{(0)}=(1\quad 2\quad 1)^T$，用乘幂法公式进行计算，且取 $\lambda_1^{(k)}=\dfrac{V_1^{(k+1)}}{V_1^{(k)}}$，得

$\lambda_1\approx 11.0$， $x\approx V^{(4)}=(13516,27032,20226)^T$

5.(1)迭代格式为

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)}=\dfrac{1}{a}\left(b_1-x_2^{(k)}-3x_3^{(k)}\right) \\ x_2^{(k+1)}=\dfrac{1}{a}\left(b_2-x_1^{(k+1)}-2x_3^{(k)}\right) \\ x_3^{(k+1)}=\dfrac{1}{a}\left(b_3+3x_1^{(k+1)}-2x_2^{(k+1)}\right) \end{cases}$$

(2)Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$\mathbf{B}_J=\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{1}{a} & -\dfrac{3}{a} \\ -\dfrac{1}{a} & 0 & -\dfrac{2}{a} \\ \dfrac{3}{a} & -\dfrac{2}{a} & 0 \end{pmatrix}$$

(3) $$|\lambda\mathbf{I}-\mathbf{B}_J|=\begin{vmatrix} \lambda & \dfrac{1}{a} & \dfrac{3}{a} \\ \dfrac{1}{a} & \lambda & \dfrac{2}{a} \\ -\dfrac{3}{a} & \dfrac{2}{a} & \lambda \end{vmatrix}=\left(\lambda^2+\dfrac{4}{a^2}\right)\lambda$$

谱半径 $\rho(\mathbf{B}_J)=\dfrac{2}{|a|}$. 由 $\rho(\mathbf{B}_J)<1$ 得

$$|a|>2$$

此时 Jacobi 迭代法对任意初始向量都收敛.

6. $p(x)=x^3-2x+1, R(x)=f(x)-p(x)=\dfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-1)^2(x-2)^2, \xi(x)\in(1,2)$

7. 20.2174 $\quad |R(f)|\le 0.0048$

8. （1）Euler 预-校法的计算格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n\,,y_n) = y_n + h\dfrac{y_n^2}{x_n} \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n,y_n) + f(x_{n+1}\,,y_{n+1}^{(0)})\right] = y_n + \dfrac{h}{2}\left(\dfrac{y_n^2}{x_n} + \dfrac{(y_{n+1}^{(0)})^2}{x_{n+1}}\right) \end{cases}$$

（2）将 $h = 0.2$ ，$f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ 代入，则

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.2\dfrac{y_n^2}{x_n} \\ y_{n+1} = y_n + 0.1\left(\dfrac{y_n^2}{x_n} + \dfrac{(y_{n+1}^{(0)})^2}{x_{n+1}}\right) \end{cases}$$

代入 $x_0 = 1, y_0 = 1$ 得

$\begin{cases} y_1^{[0]} = 1.2 \\ y(1.2) \approx y_1 = 1.22 \end{cases}$ ，$\begin{cases} y_2^{[0]} = 1.4681 \\ y(1.4) \approx y_2 = 1.49798 \end{cases}$

9．**证明**　考虑迭代格式 $x_0 = 0, x_{k+1} = \sqrt{2 + x_k}, k = 0,1,\cdots$，则

$$x_1 = \sqrt{2}，\ x_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}，\ \ldots，\ x_k = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}\quad（k\text{ 个 }2）$$

设 $\varphi(x) = \sqrt{2+x}$，则当 $x\in[0,2]$时，$\varphi(x)\in[\varphi(0),\varphi(2)]=[\sqrt{2},2]\in[0,2]$;

由 $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{2+x}}$，则当 $x\in[0,2]$时，$|\varphi'(x)| \le |\varphi'(0)| = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} < 1$．

所以，由迭代格式 $x_0 = 0, x_{k+1} = \sqrt{2+x_k}$ 产生的序列收敛于方程 $x = \sqrt{2+x}$ 在[0,2]内的根 α.

设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \alpha$，则有 $\alpha = \sqrt{2+\alpha}$，即 $\alpha^2 = 2 + \alpha$．解之得 $\alpha = 2, \alpha = -1$．舍去不合题意的负根，有

$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 2$，即 $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} = 2$

08/09 第二学期试题参考答案：

1.略

2．在切点 (x,y) 处，曲线 $y = x^3 - 2.4x^2 - 0.51x + 2.89$ 与直线 $y = 0$ 的切线斜率必相等

$$3x^2 - 4.8x - 0.51 = 0$$

Newton 迭代法

$$x_{k+1} = x_k - \frac{3x_k^2 - 4.8x_k - 0.51}{6x_k - 4.8}\quad,\quad k = 0,1,2,\cdots$$

由 $x_0 = 1.75$ 计算得

$$x_1 = 1.7011961, x_2 = 1.700001, x_3 = 1.700000, x_4 = 1.700000$$

显然 $x_4 = 1.700000$ 已满足误差要求，即有 $\alpha \approx 1.700000$.

3．由题意知，拟合函数为 $\varphi(x) = ax + bx^2$，基函数为 $\varphi_0 = x$, $\varphi_1 = x^2$，相应的正规方程组为

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \end{bmatrix}$$

亦即

$$\begin{bmatrix} 30 & 100 \\ 100 & 354 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17.2 \\ 55 \end{bmatrix}$$

由此解得 $a \approx 0.9497$, $b \approx -0.1129$．由平方误差的定义算得平方误差

$$\|\delta\|_2^2 = \sum_{i=1}^{4} (\varphi(x_i) - y_i)^2 = 0.005226$$

由平方误差公式 $\|\delta\|_2^2 = (y,y) - (a,b)\begin{pmatrix} (y,\varphi_0) \\ (y,\varphi_1) \end{pmatrix} = 0.00466$.

4．$\boldsymbol{\lambda_1^{(k)} = 7.000}$ ， $\boldsymbol{x_1 \approx t(1\,,2.000\,)^T}$ ， $\boldsymbol{t \neq 0}$

5．**解** 由矩阵 Doolittle 分解的紧凑记录形式有

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 7 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

回代求解得

$$x_4 = \frac{4}{2} = 2 \ , \ x_3 = \frac{1}{2}(6 - 1 \cdot x_4) = 2$$

$$x_2 = \frac{3 - 0x_3 - 1x_4}{1} = 1 \ , \quad x_1 = \frac{5 - 0x_2 - 2x_3 - 0x_4}{1} = 1$$

方程组的解向量为 $\mathbf{x} = (1, 1, 2, 2)^T$.

6．**满足插值条件**

$$\boldsymbol{p(0) = f(0)\ ,\quad p(1) = f(1)}$$
$$\boldsymbol{p'(0) = f'(0)\ ,\ p'(1) = f'(1)}$$

的 3 次插值多项式 $p_3(x)$. 造重节点差商表:

x_i	y_i	一阶差商	二阶差商	三阶差商
0	**0**			
0	**0**	**0**		
1	**1**	**1**	**1**	

1	**1**	**1**	**0**	**−1**

由 **Newton** 插值公式得

$$\boldsymbol{p_3(x) = 0 + 0\cdot(x-0) + 1\cdot(x-0)(x-0) + (-1)(x-0)(x-0)(x-1)}$$
$$\boldsymbol{= 2x^2 - x^3}$$

7．由于 $1 \le \int_0^1 e^0 dx \le \int_0^1 e^x dx \le \int_0^1 e^1 dx = e$，要使积分近似值具有 4 位有效数字，即截断误差应满足

$$\left| -\frac{1-0}{180}\left(\frac{h}{2}\right)^4 f^{(4)}(\eta) \right| \le \frac{1}{2}\times 10^{1-4}$$

而 $\max\limits_{0\le x\le 1}\left|f^{(4)}(x)\right| = \max\limits_{0\le x\le 1} e^x = e$，要使上式成立，只需

$$\frac{h^4}{2880} e \le \frac{1}{2}\times 10^{1-4}$$

将 $h = (1-0)/n$ 代入得到

$$n \ge \sqrt[4]{\frac{e}{1440}10^3} \approx 1.172$$

取 $n = 2$，这样复化 Simpson 公式共需要 $2n+1 = 5$ 个求积节点.

计算数据列于表中

x_i	$f(x_i)$	Simpson 公式求积系数
0	1.00000	1
0.25	1.28402	4
0.5	1.64872	2
0.75	2.11700	4
1	2.71828	1

积分值

$$\int_0^1 e^x dx \approx \frac{0.5}{6}\times(1.00000 + 4\times 1.28402 + 2\times 1.64872 + 4\times 2.11700 + 2.71828)$$
$$\approx 1.7183$$

8．Euler 预-校法的计算格式为

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)})\right] \end{cases}$$

将$h=0.1$，$f(x,y)=x+y^2$ 代入，则

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + 0.1(x_n + y_n^2) \\ y_{n+1} = y_n + 0.05\left(x_n + y_n^2 + x_{n+1} + \left(y_{n+1}^{(0)}\right)^2\right) \end{cases}$$

代入$x_0=0$，$y_0=1$得

$$\begin{cases} y_1^{[0]} = 1.1 \\ y(0.1) \approx y_1 = 1.1155 \end{cases}, \quad \begin{cases} y_2^{[0]} = 1.2499 \\ y(0.2) \approx y_2 = 1.2708 \end{cases}$$

9. **解** 对于$x\in[a,b]$，由 Taylor 公式

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\quad \xi_1\in(a,b)$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2,\quad \xi_2\in(a,b)$$

得到表达式

$$f(x)=\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f'(a)(x-a)+f'(b)(x-b)}{2}+\frac{f''(\xi_1)}{4}(x-a)^2+\frac{f''(\xi_2)}{4}(x-b)^2$$

对上式两端积分，计算得到

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{a-b}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{4}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$
$$+\frac{1}{4}\int_a^b f''(\xi_1)(x-a)^2dx+\frac{1}{4}\int_a^b f''(\xi_2)(x-b)^2dx$$

这样得到数值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx=\frac{a-b}{2}[f(a)+f(b)]+\frac{1}{4}(b-a)^2[f'(a)-f'(b)]$$

以及求积余项

$$R[f]=\frac{1}{4}\int_a^b f''(\xi_1)(x-a)^2dx+\frac{1}{4}\int_a^b f''(\xi_2)(x-b)^2dx$$

余项中的两项均满足第二积分中值定理条件，于是有

$$R[f]=\frac{f''(\eta_1)}{4}\int_a^b(x-a)^2dx+\frac{f''(\eta_2)}{4}\int_a^b(x-b)^2dx$$
$$=\frac{(b-a)^3}{12}\left(f''(\eta_1)+f''(\eta_2)\right),\qquad \eta_1,\eta_2\in(a,b)$$

因二阶导函数连续，利用介值定理，存在介于η_1和η_2间的点ξ，使得有

$$\frac{f''(\eta_1)+f''(\eta_2)}{2}=f''(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$

结合以上两式，有求积余项

$$R[f]=\frac{(b-a)^3}{6}f''(\xi),\quad \xi\in(a,b)$$