$$+\int_{t_0}^{t_f}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}+\dot{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\delta x+\left(\frac{\partial H}{\partial u}\right)^{\mathrm{T}}\delta u\right]\mathrm{d}t \tag{10-45}$$

根据泛函极值的必要条件，令式(10-45)为零，考虑到宗量变分 δx，δu 和 $\delta x(t_f)$ 的任意性，及变分预备定理，得如下广义泛函取极值的必要条件，欧拉方程

$$\dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x} \tag{10-46}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}=0 \tag{10-47}$$

横截条件

$$\lambda(t_f)=\frac{\partial \varphi}{\partial x(t_f)}+\frac{\partial \psi^{\mathrm{T}}}{\partial x(t_f)}\gamma \tag{10-48}$$

由于引进哈密顿函数形式(10-43)，使得

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda}=f(x,u,t) \tag{10-49}$$

上式与式(10-46)形成正则形式，其右端都是哈密顿函数的适当偏导数，故将式(10-49)和式(10-46)称为正则方程。因为式(10-49)是众知的状态方程，故称式(10-46)为协态方程，相应的乘子向量 $\lambda(t)$ 称为协态向量。

正则方程(10-49)和方程(10-46)是 $2n$ 个一阶微分方程组，初始条件 $x(t_0)=x_0$ 和横截条件(10-48)正好为正则方程提供 $2n$ 个边界条件，根据对 $f(\cdot)$，$L(\cdot)$ 和 $\varphi(\cdot)$ 的连续性和可微性假设，正则方程可以唯一确定状态向量 $x(t)$ 和协态向量 $\lambda(t)$。

对于确定的 $x(t)$ 和 $\lambda(t)$，哈密顿函数 $H(\cdot)$ 是控制向量 $u(t)$ 的函数。式(10-47)表明，最优控制 $u^*(t)$ 使哈密顿函数 $H(\cdot)$ 取驻值，因此式(10-47)通常称为极值条件或控制方程。由极值条件(10-47)，可以确定最优控制 $u^*(t)$ 与最优轨线 $x^*(t)$ 和协态向量 $\lambda^*(t)$ 之间的关系。

应当指出，正则方程(10-49)、(10-46)与极值条件(10-47)，形成变量间相互耦合的方程组，其边界条件由初始条件、横截条件(10-48)和目标集(10-42)提供，其中目标集条件(10-42)用于联合确定待定的拉格朗日乘子向量 γ。

上述讨论，可以归纳为如下定理。(为便于书写，今后凡不致混淆之处，均省略"*"号)。

定理 10-6 对于如下最优控制问题：

$$\min_{u(t)} J=\varphi[x(t_f)]+\int_{t_0}^{t_f}L(x,u,t)\mathrm{d}t$$

$$\text{s.t.}\quad ① \ \dot{x}(t)=f(x,u,t),\quad x(t_0)=x_0$$

$$② \ \psi[x(t_f)]=0$$

式中，$x\in\mathbf{R}^n$；$u\in\mathbf{R}^m$，无约束且在 $[t_0,t_f]$ 上连续；$\psi\in\mathbf{R}^r$，$r\leqslant n$；在 $[t_0,t_f]$ 上，$f(\cdot)$，$\psi(\cdot)$，$\varphi(\cdot)$ 和 $L(\cdot)$ 连续且可微；t_f 固定。最优解的必要条件为

1) $x(t)$ 和 $\lambda(t)$ 满足正则方程

$$\dot{x}(t)=\frac{\partial H}{\partial \lambda},\qquad \dot{\lambda}(t)=-\frac{\partial H}{\partial x}$$

式中

$$H(x,u,\lambda,t)=L(x,u,t)+\lambda^{\mathrm{T}}(t)f(x,u,t)$$

2) 边界条件与横截条件

$$x(t_0)=x_0,\qquad \psi[x(t_f)]=0$$