楕円型正則性

みつば (@mittlear1)

2021 年 3 月 15 日

目次

記法

$\mathbb{N}$：0 以上の整数全体.

$C^\infty(M, N)$：M から N への C^∞ 級写像全体.

$C_c^\infty(M)$：コンパクト台を持つ M 上の C^∞ 級関数全体.

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, C^m)$：$\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^m$ 値の Schwartz の急減少関数全体.

1　微分作用素

1.1　微分作用素の定義

1.2　主表象

1.3　形式的随伴作用素

2 Sobolev 空間

2.1 Euclid 空間上の Sobolev 空間

$(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{C}^m$ 上の標準的な Hermite 計量とする．

定義 2.1 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ および $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^n} (\hat{f}(\xi), \hat{g}(\xi))(1+|\xi|)^{2s} d\xi$$

で内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ を定め，ここからできるノルム $\|\cdot\|_s$ による $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ の完備化を $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ と書き，s 次の **Sobolev 空間**という．

各 $s \in \mathbb{R}$ において $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ から $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ への自然な単射がある．これによって $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ を $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ の部分集合とみなす．

補題 2.2 f に対して $\hat{f}(\xi)(1+|\xi|)^s$ を対応させることでできる $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ から $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ への線型写像は $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ から $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ への Hilbert 空間としての同型写像に一意的に延長される．

命題 2.3 $C^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ は $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ の中で稠密である．

命題 2.4 $s > t \in \mathbb{R}$ とする．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ からそれ自身への恒等写像は有界線型写像

$$\iota_{st} \colon L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to L^2_t(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$$

を誘導し，ι_{st} は単射である．

定義 2.5 位相線形空間 $L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ を

$$L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) = \varprojlim_{s\in\mathbb{R}} L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$$

で定める．命題 2.4 より，自然な写像 $\iota_s \colon L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ は単射である．

定義 2.6 $s \in \mathbb{N}$ のとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ に対して $\|f\|_{W^{s,2}}$ を

$$\|f\|^2_{W^{s,2}} = \sum_{|\alpha|\le s} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2}$$

で定める．これは $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ 上のノルムである．

命題 2.7 $s \in \mathbb{N}$ のとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ 上のノルムとして $\|\cdot\|_s$ と $\|\cdot\|_{W^{s,2}}$ は同値である．

命題 2.8 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ に対して $M_\phi \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ を

$$M_\phi f = \phi f$$

で定めると，これは $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ からそれ自身への有界線型写像に延長される．

命題 2.9　$(\cdot,\cdot)_{L^2}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}$ を

$$(f,g)_{L^2}=\int_{\mathbb{R}^n}(f(x),g(x))dx$$

で定めると，$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は任意の $s\in\mathbb{R}$ で連続な sesqui-linear form

$$(\cdot,\cdot)^s_{L^2}\colon L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\times L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}$$

を定める．また，任意の $f\in L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ について

$$\|f\|_s=\sup_{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\setminus 0}\frac{|(f,g)^s_{L^2}|}{\|g\|_{-s}}$$

が成立する．

定義 2.10　(1) $k\in\mathbb{N}$ に対して $C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ を，C^k 級関数 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^m$ であって

$$|\alpha|\le k\Rightarrow\lim_{|x|\to\infty}|\partial^\alpha f|=0$$

をみたすもの全体のなすベクトル空間とする．また，$C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ 上のノルム $\|\cdot\|_{C^k_0}$ を

$$\|f\|_{C^k_0}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f|$$

で定める．

(2) $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ を

$$C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$$

で定め，すべての $k\in\mathbb{N}$ で $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ が連続となる最弱の位相を入れる．

命題 2.11　$C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ は $\|\cdot\|_{C^k_0}$ によって Banach 空間になる．

定理 2.12（Sobolev の埋め込み定理）　$k\in\mathbb{N},\ s>k+n/2$ のとき，自然な包含 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ は単射有界線型写像

$$\eta_{sk}\colon L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$$

へと一意的に延長される．

系 2.13　$L^2_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ から $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ への単射連続線型写像 η であって，η_{sk} $(s>k+n/2)$ たちと整合的なものがただ一つ存在する．

定義 2.14　$\mathbb{R}^n$ の開集合 U に対して $L^2_s(U,\mathbb{C}^m)$ を $C^\infty_c(U,\mathbb{C}^m)$ の $L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ での閉包で定義する．

定理 2.15（Rellich の補題）　U を $\mathbb{R}^n$ の相対コンパクト開集合とする．$s>t$ のとき，包含 $\iota_{st}\colon L^2_s(U,\mathbb{C}^m)\to L^2_t(U,\mathbb{C}^m)$ はコンパクト作用素である．

2.2　コンパクト多様体上の Sobolev 空間

本節では，M を n 次元コンパクト多様体，E を M 上の階数 m の複素ベクトル束とする．2.1 節で考察したことをコンパクト多様体上に拡張するのが本節の目的である．

定義 2.16 (U, κ, τ) が E の total trivialization であるとは，(U, κ) が M のチャートであり，(U, τ) が E の局所自明化であることをいう．

E 上の Sobolev 空間を定義するため，まずは $\Gamma(E)$ 上の内積を定義する．E の total trivialization からなる有限族 $\{(U_i, \kappa_i, \tau_i)\}_{1 \leq i \leq N}$ を $\{(U_i)\}$ が M の開被覆となるようにとり，U_i に従属する 1 の分割 $\{\phi_i\}$ をとる．さらに $\sigma_i \colon \Gamma(E) \to C^\infty \kappa_i(U_i), \mathbb{C}^m$ を，$f \in \Gamma(E)$, $x \in \kappa_i(U_i)$ に対して

$$(x, \sigma_i(f)(x)) = \tau_i(f(\kappa_i^{-1}(x))) \in U_i \times \mathbb{C}^m$$

をみたすように定める．以上のデータを用いて，$s \in \mathbb{Z}$ に対して $\langle \cdot, \cdot \rangle_s^E \colon \Gamma(E) \times \Gamma(E) \to \mathbb{C}$ を

$$\langle f, g \rangle_s^E = \sum_{1 \leq i \leq N} \langle \sigma_i(\phi_i f), \sigma_i(\phi_i g) \rangle_s$$

で定め，この内積が定めるノルムを $\|\cdot\|_s^E$ と書く．

命題 2.17 $s \in \mathbb{Z}$ のとき，$\|\cdot\|_s^E$ の同値類は (U_i, κ_i, τ_i) および ϕ_i のとり方によらない．

定義 2.18 $s \in \mathbb{Z}$ について，$\Gamma(E)$ の $\|\cdot\|_s^E$(と同値なノルム) による完備化を $L_s^2(E)$ と書き，E 上の s 次の Sobolev 空間という．

2.1 節のときと同様に，各 $s \in \mathbb{Z}$ に対して $\Gamma(E)$ は $L_s^2(E)$ の部分集合とみなすことにする．

以下，本節では $\{U_i, \kappa_i, \tau_i\}$ と $\{\phi_i\}$ を 1 つ固定し，各 $s \in \mathbb{Z}$ に対して $\langle \cdot, \cdot \rangle_s$ をこれらのデータからできる内積とする．

3　擬微分作用素

3.1　擬微分作用素の定義

定義 3.1　$d \in \mathbb{R}$ とする．$p(x,\xi)\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathrm{Hom}(C^{m_1}, \mathbb{C}^{m_1})$ が次数 d の表象 **(symbol)** であるとは，次の条件をすべてみたすことをいう．

(1) p は C^∞ 級である．
(2) 任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ に対して定数 $C_{\alpha\beta}$ が存在して

$$\forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad \|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(s,\xi)\| \le C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{d-|\xi|}$$

をみたす．ここで $\|\cdot\|$ は $\mathrm{Hom}(\mathbb{C}^{m_1}, \mathbb{C}^{m_2})$ の作用素ノルムである．

次数 d の表象全体のなすベクトル空間を $S^d = S^d(m_1, m_2)$ と書き，

$$S^\infty = \bigcup_{d\in\mathbb{R}} S^d, \qquad S^{-\infty} = \bigcap_{d\in\mathbb{R}} S^d$$

とおく．

$p \in S^d$ とする．このとき，$f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_1})$ に対して $\Psi_p f \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_2})$ が

$$\Psi_p f(x) = \int_{\mathbb{R}}^n e^{ix\xi} p(x,\xi)\hat{f}(\xi) dxi$$

で定まる．

定義 3.2　$\Psi_p\colon C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_1}) \to C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_1})$ を p の定める d 次の擬微分作用素 **(pseudo-diffirential operator)** という．d 次の擬微分作用素全体のなすベクトル空間を Ψ^d と書き，

$$\Psi^\infty = \bigcup_{d\in\mathbb{R}} \Psi^d, \quad \Psi^{-\infty} = \bigcap_{d\in\mathbb{R}} \Psi^d$$

とおく．

補題 3.3　p に Ψ_p を対応させる線型写像 $S^d \to \Psi^d$ は全単射である．

定義 3.4　$\sigma\colon \Psi^d \to S^d$ を補題 3.3 の全単射の逆写像とし，全表象写像という．

命題 3.5　$p \in S^d$ を x 方向の台がコンパクトな表象とする．このとき，任意の $s \in \mathbb{R}$ で Ψ_p は $L_s^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_1})$ から $L_{s-d}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m_2})$ への有界線型写像に一意的に延長できる．

証明のため，今後繰り返し使うことになる基本的な不等式を導入する．

補題 3.6（Peetre の不等式）　任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$(1+|x+y|)^s \le (1+|x|)^{|s|}(1+|y|)^s$$

が成立する．

3.2 表象の漸近展開

3.3 楕円性

4　楕円型正則性

4.1　局所正則性

4.2　大域正則性

5 Hodge 分解

参考文献

[1] M. Audin and M. Damian, *Morse theory and Floer homology*, Springer, 2014.
[2] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.
[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
[4] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2000.
[5] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.
[6] 今野宏,『微分幾何学』, 東京大学出版会, 2013.