関数空間の定理

hf_725

概要

1 Ascoli-Arzelà の定理

本節では K を空でない位相空間，(X,d) を空でない完備距離空間とする．$C(K,X)$ を K から X への連続写像全体の集合とする．

1.1

定義 1.1 $\mathscr{A} \subset C(K,X)$ が同程度連続であるとは，すべての $y \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して y の開近傍 U が存在し，

$$\sup_{(f,y') \in \mathscr{A} \times U} d(f(y), f(y')) < \varepsilon$$

が成立することをいう．

定義 1.2 $\mathscr{A} \subset C(K,X)$ が各点有界であるとは，すべての $y \in K$ で

$$\mathscr{A}_y = \{f(y) \mid f \in \mathscr{A}\}$$

が X の有界集合であることをいう．また，ある $M > 0$ が存在して

$$\sup_{f,g \in \mathscr{A}} \sup_{y \in K} d(f(y), g(y)) < M$$

が成立するとき，$\mathscr{A}$ は一様有界であるという．

定理 1.3（Ascoli-Arzelà の定理） K がコンパクト空間であるとする．このとき $C(K,X)$ に距離 ρ を

$$\rho(f,g) = \max_{y \in K} d(f(y), g(y))$$

で定めることができる．これによって $C(K,X)$ を距離空間と考えたとき，$\mathscr{A} \subset C(K,X)$ について以下は同値である．

(1) $\mathscr{A}$ は相対コンパクトである．
(2) $\mathscr{A}$ は同程度連続かつ各点有界である．
(3) $\mathscr{A}$ は同程度連続かつ一様有界である．

補題 1.4 定理 1.3 の仮定の下で，$\mathscr{A}$ が同程度連続であるとする．このとき，$\mathscr{A}$ が各点有界であることと一様有界であることは同値である．

証明　$\mathscr{A}$ が一様有界なら各点有界であることは明らかである．逆を示すため，$\mathscr{A}$ が各点有界であるとする．$\mathscr{A}$ が同程度連続であることから，各 $y \in K$ についてその近傍 U_y を十分小さくとるとすべての $f \in \mathscr{A}$ と $y' \in U_y$ について $d(f(y), f(y')) < 1$ が成立するようにできる．$\{U_y\}_{y \in K}$ は K の開被覆なので，K のコンパクト性から $y_1, \ldots, y_n \in K$ が存在して $\{U_{y_i}\}_{1 \leq i \leq n}$ が K の開被覆になる．$\mathscr{A}$ の各点有界性から $M > 0$ が存在して，すべての $1 \leq i \leq n$ と $f, g \in \mathscr{A}$ に対して

$$d(f(y_i), g(y_i)) < M$$

が成立する．このとき

$$\sup_{f,g \in \mathscr{A}} \sup_{y \in k} d(f(y), g(y)) \leq M + 2$$

が成立することを示す．任意に $y_0 \in K$ をとったとき，ある $1 \leq i \leq n$ が存在して $y \in U_{y_i}$ が成立する．したがってすべての $f, g \in \mathscr{A}$ について

$$\begin{aligned} d(f(y_0), g(y_0)) &\leq d(f(y_0), f(y_i)) + d(f(y_i), g(y_i)) + d(g(y_i), g(y_0)) \\ &< 1 + M + 1 = M + 2 \end{aligned}$$

がとなる．以上より $\mathscr{A}$ は一様有界である．　□

定理 1.3 の証明　(2) と (3) が同値であることは補題 1.4 で証明されている．また，$C(K, X)$ が完備距離空間であることから $\mathscr{A}$ が相対コンパクトであることと全有界であることは同値である．

(1) $\Longrightarrow$ (2)　$\mathscr{A}$ が相対コンパクトであるとする．まず $\mathscr{A}$ が各点有界であることを示す．$\mathscr{A}$ の全有界性から $\mathscr{A}$ の有限個の元 $f_1, \ldots f_n$ が存在して

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_1(f_i)$$

が成立する．ただし $f \in C(K, X)$ と $r > 0$ について

$$B_r(f) = \{g \in C(K, X) \mid \rho(f, g) < r\}$$

である．

$$M = \max\{\rho(f_i, f_j) \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

とおく．このとき任意の $f, g \in \mathscr{A}$ について $f \in B_1(f_i), g \in B_1(f_j)$ をみたす i, j がとれて，

$$\rho(f, g) \leq \rho(f, f_i) + \rho(f_i.f_j) + \rho(f_j, g) \leq M + 2$$

が成立する．これは $\mathscr{A}$ が各点有界であることを示している．

次に $\mathscr{A}$ が同程度連続であることを示す．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\mathscr{A}$ の全有界性より $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{A}$ をうまくとって

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\frac{\varepsilon}{4}}(f_i)$$

をみたすようにできる．$y \in K$ を任意にとる．y の開近傍 U を，$y' \in U$ ならすべての $1 \leq i \leq k$ で $d(f_i(y), f_i(y')) < \varepsilon/4$ となるようにとる．このとき任意に $f \in \mathscr{A}$ をとると $f \in B_{\varepsilon/4}(f_i)$ となる i が存在するので，任意の $y' \in U$ に対して

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &\leq d(f(y), f_i(y)) + d(f_i(y), f_i(y')) + d(f_i(y'), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

である．したがって，

$$\sup_{(f,y')\in\mathscr{A}\times U} d(f(y),f(y')) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

が成立し，これは $\mathscr{A}$ が全有界であることを示している．

$(3) \Longleftarrow (1)$

□

1.2

定理 1.5（Ascoli-Arzelà の定理） K が可分であるとし，S を K の可算稠密部分集合とする．$\mathscr{A}$ を同程度連続な $C(K,X)$ の部分集合で任意の $y\in S$ で $\mathscr{A}_y$ が相対コンパクトであるとする．このとき，任意の $\mathscr{A}$ 内の点列 $\{f_n\}_n$ について，その部分列 $\{g_n\}_n$ を K 上広義一様収束するようにとれる．

証明 S の元を $y_1,y_2,\ldots$ と番号づけしておく．$\{f_n(y_1)\}_n$ が相対コンパクトであることから，$\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{1,n}\}_n$ を $\{f_{1,n}(y_1)\}_n$ が収束するようにとれる．この操作を続けることで，任意の正整数 k について $\{f_{k,n}\}_n$ の部分列 $\{f_{k+1,n}\}_n$ を $\{f_{k+1,n}(y_{k+1})\}_n$ が収束するようにとれる．そこで $g_n = f_{n,n}$ とおくと，$\{g_n\}_n$ は $\{f_n\}_n$ の部分列であり任意の $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ で $\{g_n(y_k)\}_n$ は収束する．

この $\{g_n\}_n$ が K 上広義一様収束することを示す．L を任意の K のコンパクト集合とする．任意に $\varepsilon>0$ をとる．$\mathscr{A}$ の同程度連続性より，各 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ で y_k の開近傍 U_k を任意の $y\in U_k$ に対して

$$\sup_{f\in\mathscr{A}} d(f(y_k),f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

が成立するようにとれる．L はコンパクトだから，ある $N_1\in\mathbb{Z}_{>0}$ が存在して

$$L \subset \bigcup_{k=1}^{N_1} U_k$$

が成立する．このとき $N_2\in\mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きくとると任意の $m,n>N_2$ と $1\leq k\leq N_1$ に対して

$$d(g_m(y_k),g_n(y_k)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる．したがって $m,n\in N_2$ のとき，$y\in L$ ならば $y\in U_k$ となる $1\leq k\leq N_1$ を選ぶことができて

$$d(g_m(y),g_n(y)) \leq d(g_m(y),g_m(y_k)) + d(g_m(y_k),g_n(y_k)) + d(g_n(y_k),g_n(y)) < \varepsilon$$

が成立する．よって $\{g_n\}_n$ は L 上一様収束する． □

2 Stone-Weierstrass の定理

K で $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すことにする．X をコンパクト空間とし，$C(X,K)$ は sup ノルムで Banach 空間になっているとする．

定義 2.1 $\mathscr{A}\subset C(X,K)$ が $C(X,K)$ の非単位的部分代数であるとは，次の条件が成り立つことをいう．

(1) $f,g\in\mathscr{A}$ ならば $f+g\in\mathscr{A}$．

(2) $f \in \mathscr{A}, \alpha \in K$ ならば $\alpha f \in \mathscr{A}$.

さらに $1 \in \mathscr{A}$ であるならば $\mathscr{A}$ は $C(X,K)$ の部分代数であるという．

定理 2.2（Stone-Weierstrass の定理） $C(X,\mathbb{R})$ の非単位的部分代数 $\mathscr{A}$ が $C(X,\mathbb{R})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して，ある $f \in \mathscr{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する．
(2) 任意の $x \in X$ に対して，$g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathscr{A}$ が存在する．

定理 2.3（Stone-Weierstrass の定理） $C(X,\mathbb{C})$ の非単位的部分代数 $\mathscr{A}$ が $C(X,\mathbb{C})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して，ある $f \in \mathscr{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する．
(2) 任意の $x \in X$ に対して，$g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathscr{A}$ が存在する．
(3) $f \in \mathscr{A}$ ならば $\bar{f} \in \mathscr{A}$ である．

ここで，$f \in C(X,\mathbb{C})$ について，$\bar{f}$ は

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

で定まる $C(X,\mathbb{C})$ の元である．

注 2.4 文献によっては上の定理で X が Hausdorff 空間であることを仮定している場合があるが，実は Hausdorff 性の仮定は $\mathscr{A}$ の条件に内包されている．実際，上の定理の仮定 (1) をみたす $\mathscr{A}$ がとれるためには X は Hausdorff 空間でなければならないことが分かる．

補題 2.5 $\mathscr{A} \subset C(X,\mathbb{C})$ が非単位的部分代数のとき，$\bar{\mathscr{A}}$ は非単位的部分代数である．

証明 □

命題 2.6（Dini の定理） Y をコンパクト空間とする．$C(Y,\mathbb{R})$ の点列 $\{f_n\}_n$ について，任意の $y \in Y$ で $\{f_n(y)\}_n$ は広義単調増加で上に有界であるとする．このとき，$\{f_n\}_n$ はある関数に一様収束する．

証明 □

補題 2.7 $\sqrt{t} \in C([0,1],\mathbb{R})$ に収束する t の多項式の列 $\{h_n\}_n$ が存在する．

証明 $\{h_n\}_n$ を次の漸化式で定める．

$$h_{n+1}(t) = h_n(t) + \frac{t - h_n(t)^2}{2},\ h_0 = 0.$$

この関数列について

$$h_n(t) \leq \sqrt{t},\ h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$$

が成立することが帰納法で示せる．したがって Dini の定理によって $\{h_n\}_n$ はある関数に一様収束する．さらにその収束先が $\sqrt{t}$ であることが分かる． □

定理 2.2 の証明 □

定理 2.3 の証明 □