Morse 理論

hf_725

2019 年 7 月 25 日

1　準備

定義 1.1　X を Hausdorff 空間とし，$\{\varphi_\lambda \colon D_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$ を n_λ 次元円板 D_λ から X への連続写像の族とする．組 $(X, \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda})$ が CW 複体であるとは次の条件を満たすことをいう．

(1) すべての λ に対して φ_λ の $\operatorname{Int} D_\lambda$ への制限は単射であり，X は集合として $e_\lambda = \varphi_\lambda(\operatorname{Int} D_\lambda)$ たちの直和になる．
(2) 各 $\varphi_\lambda(\partial D)$ は有限個の e_μ たちとしか交わらず，しかもそのような μ に対して必ず $n_\mu < n_\lambda$ が成立する．
(3) $X^n = \bigcup_{n_\lambda \leq n} e_\lambda$ とおく．$F \subset X$ が X の閉集合であることと，すべての $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で $F \cap X^n$ が X^n の閉集合であることは同値である．

定義 1.2　M を n 次元多様体，$f \colon M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級関数とする．f の臨界点 $p \in M$ に対してこの点での Hesse 形式 $f_{**} \colon T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を次のように定義する．$v, w \in T_pM$ を任意にとり，$\tilde{v}, \tilde{w}$ を p の近傍で定義されたベクトル場で $\tilde{v}_p = v, \tilde{w}_p = w$ をみたすものとするとき

$$f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f)).$$

命題 1.3　上の定義は $\tilde{v}, \tilde{w}$ のとり方によらない．また，f_{**} は T_pM 上の対称双線型形式であり，局所座標をとって行列表示すると f の Hesse 行列となる．

注 1.4　Hesse 形式は f の臨界点以外では well-defined にならない．

定義 1.5　一般に対称双線型形式 $b \colon V \times V \to \mathbb{R}$ を考える．V の部分空間 W であって b の W への制限が不定値になるようなもののうち極大なものの次元を b の指数 (index) という．また，V の部分空間

$$\{v \in V \mid \forall w \in V b(v, w) = 0\}$$

を b の null space といい，その次元を退化次数 (nullity) という．

　また，定義 1.2 の状況で，臨界点 $p \in M$ での Hesse 形式 f_{**} の指数を単に f の p での指数という．

定義 1.6　M 上の C^∞ 級関数 f の臨界点 p で Hesse 形式が非退化であるとき，p は f の非退化臨界点であるという．すべての臨界点が非退化であるとき，f は Morse 関数であるという．

定理 1.7（Morse の補題）　$f \colon M \to R$ を C^∞ 級関数とし，$p \in M$ を指数 λ の非退化臨界点とする．このと

き，p を中心とするチャート $(U; x^1, x^2, \cdots, x^n)$ をうまくとると，U 上

$$f = f(p) - (x^1)^2 - \cdots - (x^\lambda)^2 + (x^\lambda)^2 + \cdots (x^n)^2$$

と表される．

M 上の関数 f について M^a で f の値が a 以下の点全体の集合を表すことにする．

定理 1.8　f を M 上の C^∞ 級関数とする．$a < b$ について $f^{-1}([a,b])$ はコンパクトでしかもこの中に臨界点はないとする．このとき，M^a と M^b は微分同相である．また，M^a は M^b の変位レトラクトである．

定理 1.9　f を M 上の C^∞ 級関数とする．c を f の臨界値とし，$f^{-1}(c)$ に含まれる臨界点は有限個ですべて非退化であるとする．さらに，ε を十分小さくとれば $f^{-1}([c-\varepsilon, c+\varepsilon])$ はコンパクトで $[c-\varepsilon, c+\varepsilon]$ の中の臨界値は c だけであるようにできると仮定する．さらに各臨界点の指数を $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ とするとき，十分小さい ε に対して，$M^{c+\varepsilon}$ は $M^{c-\varepsilon}$ に λ_1 次元円板,$\ldots$,λ_k 次元円板をつけた空間とホモトピー同値である．

定理 1.10　f を Morse 関数で，任意の $a \in \mathbb{R}$ で M^a がコンパクトになるようなものとする．このとき，M は次のような CW 複体 K とホモトピー同値である．すなわち，K の λ 胞体の数は指数 λ の臨界点の個数に等しい．

注 1.11　上の定理で指数 λ の臨界点は無数にあることもあるが，その場合でも高々可算である．この場合は可算無限個の胞体があると解釈する．

定理 1.12（Morse 関数の存在）　定理 1.10 の仮定をみたすような Morse 関数は存在する．

略証　Whitney の埋め込み定理から M は Euclid 空間に閉集合として埋め込める．$p \in \mathbb{R}$ に対して関数 $l_p \colon M \to \mathbb{R}$ を

$$l_p(q) = \|q - p\|^2$$

で定義する．これがほとんどすべての p について Morse 関数になることが言える．M は閉に埋め込んであったから，この関数が定理 1.10 の仮定をみたすことが分かる．　□

2　無限次元 Morse 理論

本章では (M, g) を連結な n 次元 Riemann 多様体とする．

2.1　曲線全体の空間

定義 2.1　$p, q \in M$ とする．区分的 C^∞ 級写像 $\omega \colon [0,1] \to M$ で $\omega(0) = p, \omega(1) = q$ をみたすもの全体を $\Omega(M; p, q)$ と書く．$\Omega(M)$ や Ω と書くこともある．

定義 2.2　$0 \leq a \leq b \leq 1$ とする．$L_a^b \colon \Omega \to \mathbb{R}$ を弧長汎関数すなわち

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

で定義し，特に $L = L_0^1$ とおく．また，$E_a^b\colon \Omega \to R$ を

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt$$

で定義する．特に $E = E_0^1$ とおき，これをエネルギー汎関数という．

注 2.3　文献によっては上の定義の 1/2 倍を E と定めている．E は ω を粒子の軌跡と思ったときの作用積分のことなので，その意味ではこちらの定義の方が自然である．

定義 2.4　g から定まる M 上の距離を ρ で表す．すなわち

$$\rho(p,q) = \inf_{\omega \in \Omega(M;p,q)} L(\omega)$$

とおく．ただし，$L(\omega)$ は曲線の長さを表す．このとき，$\Omega(M;p,q)$ 上の距離 d を

$$d(\omega_1, \omega_2) = \max_{t \in [0,1]} \rho(\omega_1, \omega_2) + \left(\int_0^1 \left(\left\| \frac{d\omega_1}{dt} \right\| - \left\| \frac{d\omega_2}{dt} \right\| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

で定める．

命題 2.5　上の d は確かに Ω 上の距離関数である．また，この距離から定まる位相に関して E_a^b は連続である．

証明　d が距離であることは容易に示せる．後半を示す．三角不等式から

$$\left| \left(\int_a^b \left(\left\| \frac{d\omega_1}{dt} \right\| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\int_a^b \left(\left\| \frac{d\omega_2}{dt} \right\| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right| \leq \left(\int_a^b \left(\left\| \frac{d\omega_1}{dt} \right\| - \left\| \frac{d\omega_2}{dt} \right\| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

なので $\sqrt{E_a^b}$ は連続である．よって E_a^b も連続である．　□

注 2.6　d から定まる Ω 上の位相はそこまで不自然なものではない．実際，この空間は p と q を結ぶ連続曲線全体に sup ノルムで位相を入れた空間とホモトピー同値になる (詳細は略).

こうして定まった $\Omega(M;p,q)$ という空間のホモトピー型を記述するのが目標である．

2.2　変分公式

$\Omega(M;p,q)$ の位相を調べるときの基本的なアイデアは，この空間を「無限次元の多様体」と思い，E を Ω 上の「Morse 関数」と考えて理論を展開することである．このアイデアをそのまま使うわけではないが，この意識のもとに種々の概念を定義していく．

定義 2.7　$\pi\colon TM \to M$ を自然な射影，$\omega \in \Omega$ とする．

(1) ω に沿ったベクトル場とは，区分的 C^∞ 級写像 $W\colon [0,1] \to TM$ であって $\pi \circ W = \omega$ をみたすもののことをいう．

(2) ω に沿ったベクトル場 W が $W(0) = 0, W(1) = 0$ をみたすとき，W は ω に沿った変分ベクトル場であるという．ω に沿った変分ベクトル場全体を $T_\omega\Omega$ で表す．$T_\omega\Omega$ は自然にベクトル空間の構造を持つ．

(3) $O \subset \mathbb{R}^N$ を 0 を含む開集合とする．$\bar{\alpha}\colon O \to \Omega$ が ω の N パラメータ変分であるとは，次の条件をみたすことをいう．

(i) $\bar{\alpha}(0) = \omega$.

(ii) $\alpha\colon O \times [0,1] \to M$ を $\alpha(u,t) = \bar{\alpha}(u)(t)$ で定めるとき，$[0,1]$ の分割

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1$$

が存在して，α は各 $O \times [t_i, t_{i+1}]$ 上 C^∞ 級である．

特に 1 パラメータ変分のことを単に変分という．

命題 2.8 ω の変分 $\bar{\alpha}$ に対して $W\colon [0,1] \to \Omega$ を

$$W_t = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)_t = \frac{\partial\bar{\alpha}}{\partial u}(0,t)$$

で定めると $W \in T_\omega\Omega$ である．また，任意の $W \in T_\omega\Omega$ に対し，ω のある変分 $\bar{\alpha}$ で $W = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$ をみたすものが存在する．

証明 前半は条件をチェックすればよい．後半については $[0,1]$ のコンパクト性に注意するとある $\varepsilon \geq 0$ について

$$\alpha(u,t) = \exp_{\omega(t)}(uW(t))$$

が $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1]$ 上で well-defined になる．この α から定まる変分 $\bar{\alpha}$ が条件をみたす． □

定理 2.9（第一変分公式） $\bar{\alpha}$ を $\omega \in \Omega$ の変分とする．

$$V = \frac{d\omega}{dt},\ W = \frac{d\bar{\alpha}}{dt},\ \Delta_{t_i} V = V(t_i + 0) - V(t_i - 0)$$

とおくと，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{du}E(\bar{\alpha}(u))\bigg|_{u=0} = -\sum_{i=1}^{k-1} g\left(W_{t_i}, \Delta_{t_i} V\right) - \int_0^1 g\left(W, \frac{DV}{dt}\right) dt$$

である．

定義 2.10 M 上の曲線 γ が測地線であるとは

$$\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

をみたすことをいう．

命題 2.11 $\gamma \quad \in \Omega$ について，γ が測地線であることと γ が E の臨界点であることは同値である．ここで，γ が E の臨界点であるとは任意の γ の変分 $\bar{\alpha}$ について

$$\frac{d}{du}E(\bar{\alpha}(u))\bigg|_{u=0} = 0$$

をみたすことである．

命題 2.12 $\gamma \in \Omega$ が最短測地線ならば，E は γ で最小値をとる．

次に，E の臨界点における Hesse 形式を定義したい．有限次元多様体のときを思い出せば，次のような定義をするのが妥当であると考えられる．

定義 2.13　$\gamma \in \Omega$ を測地線とする．γ における E の Hesse 形式 E_{**} を次のように定義する．$W_1, W_2 \in T_\gamma \Omega$ に対して 2 パラメータ変分 $\bar{\alpha}$ を

$$W_1 = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_1}(0,0),\ W_2 = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_2}(0,0)$$

をみたすようにとり，

$$E_{**}(W_1, W_2) = \left. \frac{\partial^2}{\partial u_1 u_2} E(\bar{\alpha}(u)) \right|_{(u_1,u_2)=(0,0)}$$

とおく．

この定義が $\bar{\alpha}$ のとり方によらないことは，次の定理から分かる．

定理 2.14（第二変分公式）　$\gamma \in \Omega$ を測地線，$\bar{\alpha}$ を 2 パラメータ変分とする．

$$W_1 = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_1}(0,0),\ W_2 = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_2}(0,0)$$

とおくと

$$\begin{aligned} &\left. \frac{\partial^2}{\partial u_1 \partial u_2} E(\bar{\alpha}(u_1, u_2)) \right|_{(u_1,u_2)=(0,0)} \\ &= -\sum_{i=1}^{k-1} g\left(W_2(t_i), \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}\right) - \int_0^1 g\left(W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(W_1, V)V\right) dt \end{aligned}$$

となる．

命題 2.15　E_{**} の定義は変分 $\bar{\alpha}$ のとり方によらない．また，E_{**} は対称双線型形式である．

証明　E_{**} が well-defined であることとその双線型性は第二変分公式から分かる．また，

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$$

であるから E_{**} は対称である．　□

2.3　Jacobi 場

定義 2.16　γ を測地線とする．γ に沿ったベクトル場 J が Jacobi 場であるとは，Jacobi 方程式

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R\left(J, \frac{d\gamma}{dt}\right)\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

をみたすことをいう．

注 2.17　Jacobi 方程式は二階の線型常微分方程式だから，この方程式の初期値問題の解の定義域は γ の定義域全体にとれる．また，測地線を一つ固定するときその測地線に沿った Jacobi 場全体のなすベクトル空間の次元は $2n$ であり，特に有限次元である．

次の命題は，E が γ で「退化」していることを γ に沿った変分 Jacobi 場の存在で特徴づけられることを示している．

命題 2.18　J を測地線 γ に沿った変分ベクトル場とする．このとき J が Jacobi 場であることと J が E_{**} の null space の元であることは同値である．

Jacobi 場を考えることは，局所的には測地線の族による変分を考えることと同じである．これを示そう．

命題 2.19　$\bar{\alpha}$ を測地線 $\gamma \in \Omega$ の変分とする．すべての u で $\bar{\alpha}(u)$ が測地線ならば，

$$W = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$$

は Jacobi 場である．

証明　まず

$$0 = \frac{D}{\partial u}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial u}\frac{\partial \alpha}{\partial t} = R\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\frac{\partial \alpha}{\partial u}$$

である．この式に $u = 0$ を代入して

$$\frac{D^2 W}{dt} + R\left(W, \frac{d\gamma}{dt}\right)\frac{d\gamma}{dt} = 0$$

を得る． □

命題 2.20　$\pi\colon TM \to M$ を自然な射影とする．M の開集合 U と TM の開集合 $\mathscr{U}$ を $\pi(\mathscr{U}) = U$ かつ $\exp\colon \mathscr{U} \to U \times U$ が微分同相になるようにとる (以下このことを U 上の 2 点を結ぶ最短測地線は端点になめらかに依存する，と表現する)．さらに $\gamma\colon [0,1] \to U$ を測地線とすると，γ に沿った Jacobi 場全体のなすベクトル空間 $\mathscr{J}$ と $T_pM \oplus T_qM$ は自然に同型である．

2.4　接空間の有限次元近似

本節では，E_{**} が負定値となる $T_\gamma\Omega$ の部分空間が有限次元空間であることを示す．つまり，$T_\gamma\Omega$ の元のうちほとんどは無視してもかまわないのである．この事実は，Ω 自体を有限次元多様体で近似できることの証明の第一歩になる．

$\gamma \in \Omega$ を測地線とする．各点 $\gamma(t)$ についてその開近傍 U を，U の 2 点を結ぶ最短測地線が端点になめらかに依存するようにとれる．Lebesgue の被覆補題より $[0,1]$ の分割

$$0 = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k = 1$$

をすべての $0 \leq i \leq k-1$ について $\gamma([t_i, t_{i+1}])$ がこのような U に含まれるようにできる．$W \in T\gamma\Omega$ であって，すべての $0 \leq i \leq k-1$ で $W|_{[t_i, t_{i+1}]}$ が $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ に沿った Jacobi 場であるようなもの全体のなすベクトル空間を $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ で表す．また，すべての $0 \leq i \leq k$ で $W(t_i) = 0$ をみたす $W \in T_\gamma\Omega$ 全体のなすベクトル空間を T' と書く．

命題 2.21　$T_\gamma\Omega$ は $T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ と T' の直和に書ける．また，この二つの部分空間は E について直交していて，さらに T' 上 E は正定値である．

証明　$W \in T_\gamma\Omega$ に対して Jacobi 場 $J \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ を

$$J(t_i) = W(t_i)$$

がすべての $0 \le i \le k$ で成立するようにとる．すると $W - J \in T'$ だから，

$$W = J + (W - J) \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) + T'$$

となる．また，$W \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \cap T'$ なら，各 $[t_i, t_{i+1}]$ 上 W は端点で消える Jacobi 場であるから恒等的に 0 である．結局 $W = 0$ となるので，

$$T_\gamma\Omega = T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k) \oplus T'$$

であることが分かった．

$T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ と T' が直交していることを示す．$W_1 \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k), W_2 \in T'$ とする．$[0, 1]$ の分割 $0 = \tau_0 \le \tau_1 \le \cdots \le \tau_l$ を W_2 がなめらかでないような t をすべて含む $0 = t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_k = 1$ の細分とする．このときすべての $0 \le j \le l$ で

$$\Delta_{\tau_j} \frac{DW_1}{dt} = 0$$

または

$$W_2(\tau_j) = 0$$

が成立する．W_1 が区分的に Jacobi 場であることに注意すると，第二変分公式から

$$E_{**}(W_1, W_2) = -\sum_{i=1}^{k-1} g\left(W_2(t_i), \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}\right) - \int_0^1 g\left(W_2, \frac{D^2W_1}{dt^2} + R(W_1, V)V\right) dt = 0$$

となる．

最後に T' 上 E が正定値であることを示そう．まずは半正定値性を示す．$W \in T'$ とする．W に対応する γ の変分 $\bar{\alpha}$ を，すべての $0 \le i \le k$ で $\alpha(u.t_i)$ が u によらず $\gamma(t_i)$ となるようにとることができる．各 $[t_i, t_{i+1}]$ 上では γ が最短線であることに注意すると

$$\begin{aligned} E(\bar{\alpha}(u)) &= \sum_{i=0}^{k-1} E_{t_i}^{t_{i+1}}(\bar{\alpha}(u)) \ge \sum_{i=0}^{k-1} L_{t_i}^{t_{i+1}}(\bar{\alpha}(u)) \\ &\ge \sum_{i=0}^{k-1} L_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma) = \sum_{i=0}^{k-1} E_{t_i}^{t_{i+1}}(\gamma) = E(\gamma) \end{aligned}$$

であることが分かる．これの二回微分を計算すれば

$$E_{**}(W, W) \ge 0$$

を得る．

あとは $E_{**}(W, W) = 0$ なら $W = 0$ であることを示せばよい．これには任意の $W' \in T_\gamma\Omega$ に対して $E_{**}(W, W') = 0$ であることを示せば W が γ に沿った Jacobi 場であることが分かり，先に示した直和分解から $W = 0$ となうことが分かる．再び先の直和分解と E の双線型性から，$W' \in T_\gamma\Omega(t_0, t_1, \ldots, t_k)$ のときと $W' \in T'$ のときに場合分けして示せばよい．前者の場合はすでに示してあるので，後者の場合を考える．任意の $c \in \mathbb{R}$ について $W + cW' \in T'$ であるから，すでに示した半正定値性から

$$E_{**}(W + cW', W + cW') \ge 0$$

であり，これを展開すると

$$2cE_{**}(W, W') + c^2E_{**}(W', W') \ge 0$$

が分かる．$c > 0$ のもとでこの式を c で割り，$c \to 0$ とすることで

$$E_{**}(W, W') \geq 0$$

を得る．$c < 0$ においても同様のことをすると

$$E_{**}(W, W') \leq 0$$

となるから，$E_{**}(W, W') = 0$ が分かる． $\square$