楕円型正則性

みつば (@mittlear1)

2021 年 3 月 13 日

目次

記法

$\mathbb{N}$：0 以上の整数全体.
$C^\infty(M,N)$：M から N への C^∞ 級写像全体.
$C_c^\infty(M)$：コンパクト台を持つ M 上の C^∞ 級関数全体.
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, C^m)$：$\mathbb{R}^n$ 上の $\mathbb{C}^m$ 値の Schwartz の急減少関数全体.

1　微分作用素

1.1　微分作用素の定義

1.2　主表象

1.3　形式的随伴作用素

2 Sobolev 空間

2.1 Euclid 空間上の Sobolev 空間

$(\cdot,\cdot)$ を $\mathbb{C}^m$ 上の標準的な Hermite 計量とする．

定義 2.1 $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ および $s \in \mathbb{R}$ に対して

$$\langle f, g\rangle_s = \int_{\mathbb{R}}^n (\hat{f}(\xi), \hat{g}(\xi))(1+|\xi|)^{2s} d\xi$$

で内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ を定め，ここからできるノルム $\|\cdot\|$ による $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ の完備化を $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ と書き，s 次の **Sobolev** 空間という．

補題 2.2 f に対して $\hat{f}(\xi)(1+|\xi|)^s$ を対応させることでできる $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ から $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ への線型写像は $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ から $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ への Hilbert 空間としての同型写像に一意的に延長される．

命題 2.3 $C^\infty_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ は $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ の中で稠密である．

命題 2.4 $s > t \in \mathbb{R}$ とする．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ からそれ自身への恒等写像は有界線型写像

$$\iota_{st} \colon L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to L^2_t(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$$

を誘導し，ι_{st} は単射である．

定義 2.5 位相線形空間 $L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ を

$$L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) = \varprojlim_{s\in\mathbb{R}} L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$$

で定める．命題 2.4 より，自然な写像 $\iota_s \colon L^2_\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ は単射である．

定義 2.6 $s \in \mathbb{N}$ のとき，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ に対して $\|f\|_{W^{s,2}}$ を

$$\|f\|^2_{W^{s,2}} = \sum_{|\alpha|\le s} \|\partial^\alpha f\|^2_{L^2}$$

で定める．これは $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ 上のノルムである．

命題 2.7 $s \in \mathbb{N}$ のとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ 上のノルムとして $\|\cdot\|_s$ と $\|\cdot\|_{W^{s,2}}$ は同値である．

命題 2.8 $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ に対して $M_\phi \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ を

$$M_\phi f = \phi f$$

で定めると，これは $L^2_s(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m)$ からそれ自身への有界線型写像に延長される．

命題 2.9 $(\cdot,\cdot)_{L^2} \colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^m) \to \mathbb{C}$ を

$$(f, g)_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} (f(x), g(x)) dx$$

で定めると，$(\cdot,\cdot)_{L^2}$ は任意の $s\in\mathbb{R}$ で連続な sesqui-linear form

$$(\cdot,\cdot)^s_{L^2}\colon L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\times L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to\mathbb{C}$$

を定める．また，任意の $f\in L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ について

$$\|f\|_s=\sup_{g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\setminus 0}\frac{|(f,g)^s_{L^2}|}{\|g\|_{-s}}$$

が成立する．

定義 2.10 (1) $k\in\mathbb{N}$ に対して $C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ を，C^k 級関数 $f\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}^m$ であって

$$|\alpha|\le k\Rightarrow\lim_{|x|\to\infty}|\partial^\alpha f|=0$$

をみたすもの全体のなすベクトル空間とする．また，$C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ 上のノルム $\|\cdot\|_{C^k_0}$ を

$$\|f\|_{C^k_0}=\sum_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|\partial^\alpha f|$$

で定める．

(2) $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ を

$$C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)=\bigcap_{k\in\mathbb{N}}C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$$

で定め，すべての $k\in\mathbb{N}$ で $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ が連続となる最弱の位相を入れる．

命題 2.11 $C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ は $\|\cdot\|_{C^k_0}$ によって Banach 空間になる．

定理 2.12（Sobolev の埋め込み定理） $k\in\mathbb{N},\ s>k+n/2$ のとき，自然な包含 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ は単射有界線型写像

$$\eta_{sk}\colon L^2_s(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)\to C^k_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$$

へと一意的に延長される．

系 2.13 $L^2_\infty(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ から $C^\infty_0(\mathbb{R}^n,\mathbb{C}^m)$ への単射連続線型写像 η であって，η_{sk} と整合的なものがただ一つ存在する．

2.2 コンパクト多様体上の Sobolev 空間

3　擬微分作用素

3.1　擬微分作用素の定義

3.2　表象の漸近展開

3.3　楕円性

4　楕円型正則性

4.1　局所正則性

4.2　大域正則性

5　Hodge 分解

参考文献

[1] M. Audin and M. Damian, *Morse theory and Floer homology*, Springer, 2014.

[2] R. Bott and L. W. Tu, *Differential forms in Algebraic Topology*, Springer, 1982.

[3] A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.

[4] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2000.

[5] J. Milnor, *Morse theory*, Princeton University Press, 1963.

[6] 今野宏,『微分幾何学』, 東京大学出版会, 2013.