高 1D 第一週 宿題 (平面ベクトルにおける内積の復習)

(1) 平面ベクトル $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ の内積 $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を正射影を使って定義し、$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}$ を $|\overrightarrow{a}|, |\overrightarrow{b}|$ および $\overrightarrow{a}$ と $\overrightarrow{b}$ のなす角 θ を用いて表せ。

(2) 三角形 OAB について、$\mathrm{OA} = 8,\ \mathrm{OB} = 5,\ \angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ であるとする。また、AB の中点を M とし、$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。

(i) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ および $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|$ を求めよ。

(ii) $\theta = \angle\mathrm{AOM}$ とおくとき、$\cos\theta$ の値を求めよ。

解答

(1) 自分のとったノートを見返して確認してください。

(2) (i) まず、

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 20$$

である。$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ なので

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}|a|^2 + \frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} \times 64 + \frac{1}{2} \times 20 = \boxed{42}$$

となる。また

$$\begin{aligned}|\mathrm{OM}|^2 &= \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \\ &= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2) \\ &= \frac{1}{4}(64 + 40 + 25) \\ &= \frac{129}{4}\end{aligned}$$

なので

$$|\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = \boxed{\frac{\sqrt{129}}{2}}$$

である。

(ii) $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OM}} = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OM}}| \cos\theta$ なので

$$42 = 8 \times \frac{\sqrt{129}}{2} \times \cos\theta$$

となる。よって

$$\cos\theta = \boxed{\frac{21}{2\sqrt{129}}}$$

である。