

関数空間の定理

みつば (@mittlear1)

2020 年 10 月 1 日

概要

関数空間についての重要な定理 2 つの証明を記した.

1 Ascoli–Arzelà の定理

本節では K を空でない位相空間, (X, d) を空でない距離空間とする. $C(K, X)$ を K から X への連続写像全体の集合とする.

1.1 Ascoli–Arzelà その 1

定義 1.1 $\mathcal{A} \subset C(K, X)$ が同程度連続であるとは, すべての $y \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して y の開近傍 U が存在し,

$$\sup_{(f, y') \in \mathcal{A} \times U} d(f(y), f(y')) < \varepsilon$$

が成立することをいう.

定義 1.2 $\mathcal{A} \subset C(K, X)$ が各点相対コンパクトであるとは, すべての $y \in K$ で

$$\mathcal{A}_y = \{f(y) \mid f \in \mathcal{A}\}$$

が X の相対コンパクト集合であることをいう.

定理 1.3 (Ascoli–Arzelà の定理) K がコンパクト空間であるとする. このとき $C(K, X)$ に距離 ρ を

$$\rho(f, g) = \max_{y \in K} d(f(y), g(y))$$

で定めることができる. これによって $C(K, X)$ を距離空間と考えたとき, $\mathcal{A} \subset C(K, X)$ について以下は同値である.

- (1) \mathcal{A} は相対コンパクトである.
- (2) \mathcal{A} は同程度連続かつ各点相対コンパクトである.

証明 (1) \implies (2) \mathcal{A} が相対コンパクトであるとする. まず \mathcal{A} が同程度連続であることを示す. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. \mathcal{A} の全有界性より $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A}$ をうまくとって

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\varepsilon/4}(f_i)$$

をみたすようにできる. $y \in K$ を任意にとる. f_i たちの連続性から, y の開近傍 U を, $y' \in U$ ならすべての $1 \leq i \leq k$ で $d(f_i(y), f_i(y')) < \varepsilon/4$ となるようにとることができる. このとき任意に $f \in \mathcal{A}$ をとると $f \in B_{\varepsilon/4}(f_i)$ となる i が存在するので, 任意の $y' \in U$ に対して

$$\begin{aligned} d(f(y), f(y')) &\leq d(f(y), f_i(y)) + d(f_i(y), f_i(y')) + d(f_i(y'), f(y)) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

である. したがって,

$$\sup_{(f, y') \in \mathcal{A} \times U} d(f(y), f(y')) \leq \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon$$

が成立し, これは \mathcal{A} が同程度連続であることを示している.

次に \mathcal{A} が各点相対コンパクトであることを示す. $y \in K$ を任意にとる. \mathcal{A}_y 内の任意の点列 $\{x_n\}_n$ が収束部分列を持つことを示せばよい. \mathcal{A} の定義から, 各 x_n について $f_n \in \mathcal{A}$ を $f_n(y) = x_n$ となるようにとれる. こうしてできる \mathcal{A} 内の点列 $\{f_n\}_n$ は収束部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ を持つ. この収束先を $f \in C(K, X)$ と書くと, $\{x_n\}_n$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は $f(y)$ に収束する.

(2) \implies (1) \mathcal{A} が同程度連続かつ各点相対コンパクトであるとする. \mathcal{A} 内の任意の点列 $\{f_n\}_n$ について収束部分列が存在することを示せばよい. \mathcal{A} の同程度連続性から, 任意の $y \in K$ についてその近傍 U_y を, $y' \in U_y$ ならすべての $g \in \mathcal{A}$ で

$$d(g(y), g(y')) < \frac{1}{6}$$

になるようにとれる. K はコンパクトだから開被覆 $\{U_y\}_{y \in K}$ の有限部分被覆 $\{U_{y_i}\}_{1 \leq i \leq l}$ がとれる. 各 \mathcal{A}_{y_i} は相対コンパクトだから, $\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ をすべての $1 \leq i \leq l$ で $\{f_{n_k}(y_i)\}_k$ が収束するようにとれる. さらにその部分列 $\{f_{1,n}\}_n$ をとることによって, $m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならすべての $1 \leq i \leq l$ で

$$d(f_{1,m}(y_i), f_{1,n}(y_i)) < \frac{1}{6}$$

となるようにできる. このとき任意の $y \in K$ について $y \in U_{y_i}$ となる i をとることによって

$$d(f_{1,m}(y), f_{1,n}(y)) \leq d(f_{1,m}(y), f_{1,m}(y_i)) + d(f_{1,m}(y_i), f_{1,n}(y_i)) + d(f_{1,n}(y_i), f(y)) < \frac{1}{2}$$

すなわち

$$\rho(f_{1,m}, f_{1,n}) \leq \frac{1}{2}$$

が分かる. この操作を続けることによって, $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\{f_{k-1,n}\}_n$ の部分列 $\{f_{k,n}\}_n$ を

$$\rho(f_{k,m}, f_{k,n}) \leq 2^{-k}$$

となるようにとれる. $g_n = f_{n,n}$ とおくとこれは $C(K, X)$ の Cauchy 列で, \mathcal{A} の各点相対コンパクト性から各点収束極限 $g: K \rightarrow X$ が存在する. $\{g_n\}_n$ が Cauchy 列であったことから, g は $\{g_n\}_n$ の一様収束極限であることが分かる. したがって $g \in C(K, X)$ であり, $\{g_n\}_n$ は $C(K, X)$ の中で g に収束することが分かる.

($*$ $> \Delta <$)

1.2 Ascoli–Arzera その 2

定理 1.4 (Ascoli–Arzelà の定理) S を K の可算稠密部分集合, X を完備距離空間とする. 同程度連続な $C(K, X)$ の部分集合 \mathcal{A} について, 任意の $y \in S$ で \mathcal{A}_y が相対コンパクトであると仮定する. このとき, 任意の \mathcal{A} 内の点列 $\{f_n\}_n$ は K 上広義一様収束する部分列を持つ.

証明 S の元を y_1, y_2, \dots と番号づけしておく. $\{f_n(y_1)\}_n$ が相対コンパクトであることから, $\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{1,n}\}_n$ を $\{f_{1,n}(y_1)\}_n$ が収束するようにとれる. この操作を続けることで, 任意の正整数 k について $\{f_{k,n}\}_n$ の部分列 $\{f_{k+1,n}\}_n$ を $\{f_{k+1,n}(y_{k+1})\}_n$ が収束するようにとれる. そこで $g_n = f_{n,n}$ とおくと $\{g_n\}_n$ は $\{f_n\}_n$ の部分列であり, 任意の $y \in S$ で $\{g_n(z)\}_n$ は収束する.

この $\{g_n\}_n$ が K 上広義一様収束することを示す. L を任意の K のコンパクト集合とする. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. \mathcal{A} の同程度連続性より, 各 $x \in L$ の開近傍 U_x を

$$\sup_{(f, x') \in \mathcal{A} \times U_x} d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{6}$$

が成立するようにとれる. L はコンパクトだから, 有限個の点 x_1, x_2, \dots, x_N をうまく選んで, $\{U_{x_i}\}_{1 \leq i \leq N}$ が L を被覆するようにできる. $S \cap U_{x_i}$ は空でないから, この中から一つ元を選んで z_i と名づける.

このとき $N' \in \mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きくとると, 任意の $m, n > N'$ と $1 \leq i \leq N$ に対して

$$d(g_m(z_i), g_n(z_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる. したがって $m, n > N'$ のとき, $y \in L$ ならば $y \in U_{x_i}$ となる $1 \leq i \leq N$ を選ぶことができ

$$\begin{aligned} d(g_m(y), g_n(y)) &\leq d(g_m(y), g_m(x_i)) + d(g_m(x_i), g_m(z_i)) + d(g_m(z_i), g_n(z_i)) \\ &\quad + d(g_n(z_i), g_n(x_i)) + d(g_n(x_i), g_n(y)) < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する. よって $\{g_n\}_n$ は L 上の一様 Cauchy 列であり, X は完備だったからある関数に一様収束する. (*>\Delta<*)

2 Stone–Weierstrass の定理

\mathbb{K} で \mathbb{R} または \mathbb{C} を表すことにする. X をコンパクト空間とし, $C(X, \mathbb{K})$ は \sup ノルム $\|\cdot\|$ で Banach 空間になっていると考える.

定義 2.1 $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{K})$ が $C(X, \mathbb{K})$ の非単位的部分代数であるとは, 次の条件が成り立つことをいう.

- (1) $f, g \in \mathcal{A}$ ならば $f + g \in \mathcal{A}$.
- (2) $f \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{K}$ ならば $\alpha f \in \mathcal{A}$.

さらに $1 \in \mathcal{A}$ ならば \mathcal{A} は $C(X, \mathbb{K})$ の部分代数であるという.

定理 2.2 (Stone–Weierstrass の定理) $C(X, \mathbb{R})$ の非単位的部分代数 \mathcal{A} が $C(X, \mathbb{R})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである.

- (1) 任意の $x, y \in X$ に対して, ある $f \in \mathcal{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する.

(2) 任意の $x \in X$ に対して, $g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathcal{A}$ が存在する.

特に部分代数 \mathcal{A} が (1) をみたせば, \mathcal{A} は $C(X, \mathbb{R})$ の中で稠密である.

定理 2.3 (Stone–Weierstrass の定理) $C(X, \mathbb{C})$ の非単位的部分代数 \mathcal{A} が $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである.

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して, ある $f \in \mathcal{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する.

(2) 任意の $x \in X$ に対して, $g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathcal{A}$ が存在する.

(3) $f \in \mathcal{A}$ ならば $\bar{f} \in \mathcal{A}$ である.

ここで, $f \in C(X, \mathbb{C})$ について, \bar{f} は

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

で定まる $C(X, \mathbb{C})$ の元である.

特に部分代数 \mathcal{A} が (1) と (3) をみたせば, \mathcal{A} は $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密である.

注 2.4 文献によっては上の定理で X が Hausdorff 空間であることを仮定している場合があるが, 実は Hausdorff 性の仮定は \mathcal{A} の条件に内包されている. 実際, 上の定理の仮定 (1) をみたす \mathcal{A} がとれるためには X は Hausdorff 空間でなければならないことが分かる.

補題 2.5 $\mathcal{A} \subset C(X, \mathbb{R})$ が非単位的部分代数であるとき, その閉包 $\overline{\mathcal{A}}$ は非単位的部分代数である.

証明 明らかである.

(*>\Delta<*)

命題 2.6 (Dini の定理) Y をコンパクト空間とする. $C(Y, \mathbb{R})$ の点列 $\{f_n\}_n$ について, 任意の $y \in Y$ で $\{f_n(y)\}_n$ は広義単調増加で上に有界であるとする. このとき, $\{f_n\}_n$ はある関数 f に一様収束する.

証明 $\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加かつ上に有界であることから, この関数列には各点収束する. その収束先を f とおく. $\{f_n\}_n$ が f に一様収束することを示す. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. この ε に対して

$$A_n = \{y \in Y \mid |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon\}$$

と定めると, f は $\{f_n\}_n$ の各点収束先だから $\{A_n\}_n$ は Y の開被覆となる. よって Y のコンパクト性から Y は有限個の A_n たちで覆える. $\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加であることから任意の $n \in \mathbb{N}$ で $A_n \subset A_{n+1}$ が成立することと合わせると, ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $A_N = Y$ となる. $\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加であることから, これは

$$\forall n \geq N \quad \forall y \in Y \quad |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

を意味している.

(*>\Delta<*)

補題 2.7 $\sqrt{t} \in C([0, 1], \mathbb{R})$ に収束する t の多項式の列 $\{h_n\}_n$ が存在する.

証明 $\{h_n\}_n$ を次の漸化式で定める.

$$h_{n+1}(t) = h_n(t) + \frac{t - h_n(t)^2}{2}, \quad h_0 = 0.$$

この関数列について

$$h_n(t) \leq \sqrt{t}, \quad h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$$

が成立することが帰納法で示せる．したがって Dini の定理によって $\{h_n\}_n$ はある関数に一樣収束する．さらにその収束先が \sqrt{t} であることが分かる． $(^*>\Delta<)$

補題 2.8 \mathcal{A} が $C(X, \mathbb{R})$ の非単位的部分代数であるとき, $f \in \mathcal{A}$ に対して

$$|f|(x) = |f(x)|$$

で定まる関数 $|f|: X \rightarrow \mathbb{R}$ は $\overline{\mathcal{A}}$ の元である．また, $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{A}$ ならば $\max\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ および $\min\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ は $\overline{\mathcal{A}}$ の元である．

証明 補題 2.7 の条件をみたす $\{h_n\}_n$ をとる． $f \in \mathcal{A}$ について $|f| \in \overline{\mathcal{A}}$ を示す． $f = 0$ なら $|f| = 0 \in \mathcal{A}$ だから, $f \neq 0$ の場合を考えればよい．このとき $\|f\| \neq 0$ だから

$$f_n(x) = h_n(\|f\|^{-2} f(x)^2)$$

は well-defined な連続関数で, \mathcal{A} が非単位的部分代数であることからすべての $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ で $f_n \in \mathcal{A}$ である．さらに $\{h_n\}_n$ が \sqrt{t} に一樣収束することから $\{f_n\}_n$ は $|f|/\|f\|$ に一樣収束する．このことと $\overline{\mathcal{A}}$ が非単位的部分代数であることから

$$f = \|f\| \cdot f/\|f\| \in \overline{\mathcal{A}}$$

であることが分かる．

後半を示す． $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ について $\max\{f_1, f_2\}, \min\{f_1, f_2\} \in \overline{\mathcal{A}}$ であることを示せば十分である．これは

$$\max\{f_1, f_2\} = \frac{(f_1, f_2) + |f_1 - f_2|}{2}, \min\{f_1, f_2\} = \frac{(f_1 + f_2) - |f_1 - f_2|}{2}$$

であることと前半の結果から分かる． $(^*>\Delta<)$

定理 2.2 の証明 まず, 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ と任意の $a, b \in \mathbb{R}$ について $f(x) = a, f(y) = b$ となる $f \in \overline{\mathcal{A}}$ が存在することを示す．(1), (2) より $u, v \in \mathcal{A}$ を

$$u(x) \neq u(y), v(x) \neq 0$$

をみたすようにとれる． $\lambda \in \mathbb{R}$ をうまくとると, $h_1 = u + \lambda v$ について

$$h_1(x) \neq h_1(y), h_1(x) \neq 0$$

をみたすようにできる．このとき $\alpha = h_1(x)^2 - h_1(x)h_1(y) \neq 0$ であり, $f_1 \in \mathcal{A}$ を $f_1 = \alpha^{-1}(h_1^2 - h_1(y)h_1)$ で定義すると $f_1(x) = 1, f_1(y) = 0$ をみたす．同様に $f_2 \in \mathcal{A}$ を $f_2(x) = 0, f_2(y) = 1$ となるようにとれるから, $f = af_1 + bf_2$ と定めればこれが求める関数である．

$f \in C(X, \mathbb{R})$ を任意にとる．任意の $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$ に対して, $h \in \overline{\mathcal{A}}$ を $h(x_0) = f(x_0)$ かつすべての $x \in X$ で $h(x) > f(x) - \varepsilon$ となるようにとれることを示す． $\mathcal{A}(x_0)$ を, $g(x_0) = f(x_0)$ をみたす $g \in \mathcal{A}$ 全体の集合とする．各 $g \in \mathcal{A}(x_0)$ について

$$M_\varepsilon(g) = \{x \in X \mid g(x) > f(x) - \varepsilon\}$$

とおく．初めに示したことから任意の $x \in X$ について $g(x) = f(x)$ をみたす $g \in \mathcal{A}(x_0)$ が存在し, このとき $x \in M_\varepsilon(g)$ であるから, $\{M_\varepsilon(g)\}_{g \in \mathcal{A}(x_0)}$ は X の開被覆である． X のコンパクト性から g_1, g_2, \dots, g_k をうま

く選んで $X = \bigcup_{i=1}^k M_\varepsilon(g_i)$ となるようにできる. $h = \max\{g_1, g_2, \dots, g_k\} \in \mathcal{A}$ とおけばこれが求めるものである.

$\overline{\mathcal{A}}$ の元 h で, すべての $x \in X$ に対して $h(x) > f(x) - \varepsilon$ をみたすものの全体を $\overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ と書く. $h \in \overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ に対して

$$N_\varepsilon(h) = \{x \in X \mid h(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

とおく. 前段落で示したことから, 任意に与えられた $x \in X$ に対して $\overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ の元 h を $h(x) = f(x)$ が成り立つようにとれる. このことは $\{N_\varepsilon(h)\}_{h \in \overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)}$ が X の開被覆であることを示しており, 再び X のコンパクト性から $h_1, h_2, \dots, h_l \in \overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ を $X = \bigcup_{i=1}^l N_\varepsilon(h_i)$ が成り立つようにとれる. そこで $f_0 = \min\{h_1, h_2, \dots, h_l\} \in \overline{\mathcal{A}}(\varepsilon)$ とおくと, とり方から $\|f - f_0\| \leq \varepsilon$ であることが分かる. したがって f は $\overline{\mathcal{A}}$ の元の一様収束極限として書けるが, $\overline{\mathcal{A}}$ は $C(X, \mathbb{R})$ の閉集合であるから $f \in \overline{\mathcal{A}}$ であることが分かる. (*> Δ <)

定理 2.3 の証明 \mathcal{A} が定理の仮定をみたすとき,

$$\operatorname{Re} \mathcal{A} = \{\operatorname{Re} f \mid f \in \mathcal{A}\}, \operatorname{Im} \mathcal{A} = \{\operatorname{Im} f \mid f \in \mathcal{A}\}$$

について $\operatorname{Re} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ が成立し, しかも $\operatorname{Re} f \in C(X, \mathbb{R})$ は定理 2.2 の仮定をみたす. したがって, 任意の $f \in C(X, \mathbb{C})$ と $\varepsilon > 0$ について $\operatorname{Re} \mathcal{A} = \operatorname{Im} \mathcal{A}$ の元 u, v をうまくとって

$$\|\operatorname{Re} f - u\| < \varepsilon/2, \|\operatorname{Im} f - v\| < \varepsilon/2$$

が成り立つようにできる. このとき

$$\|(f - (u + iv))\| < \varepsilon$$

かつ $u + iv \in \mathcal{A}$ である. したがって \mathcal{A} は $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密である. (*> Δ <)

参考文献

- [1] 内田伏一, 『集合と位相』, 裳華房, 1986.
- [2] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Co., New York, 1973.