関数空間の定理

みつば (@mittlear1)

2020 年 10 月 1 日

概要

関数空間についての重要な定理 2 つの証明を記した．

1 Ascoli–Arzelà の定理

本節では K を空でない位相空間，(X, d) を空でない距離空間とする．$C(K, X)$ を K から X への連続写像全体の集合とする．

1.1 Ascoli–Arzelà その 1

定義 1.1 $\mathscr{A} \subset C(K, X)$ が同程度連続であるとは，すべての $y \in K$ と $\varepsilon > 0$ に対して y の開近傍 U が存在し，

$$\sup_{(f, y') \in \mathscr{A} \times U} d(f(y), f(y')) < \varepsilon$$

が成立することをいう．

定義 1.2 $\mathscr{A} \subset C(K, X)$ が各点相対コンパクトであるとは，すべての $y \in K$ で

$$\mathscr{A}_y = \{f(y) \mid f \in \mathscr{A}\}$$

が X の相対コンパクト集合であることをいう．

定理 1.3（Ascoli–Arzelà の定理） K がコンパクト空間であるとする．このとき $C(K, X)$ に距離 ρ を

$$\rho(f, g) = \max_{y \in K} d(f(y), g(y))$$

で定めることができる．これによって $C(K, X)$ を距離空間と考えたとき，$\mathscr{A} \subset C(K, X)$ について以下は同値である．

(1) $\mathscr{A}$ は相対コンパクトである．
(2) $\mathscr{A}$ は同程度連続かつ各点相対コンパクトである．

証明 (1) $\Longrightarrow$ (2) $\mathscr{A}$ が相対コンパクトであるとする．まず $\mathscr{A}$ が同程度連続であることを示す．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．$\mathscr{A}$ の全有界性より $f_1, \ldots, f_k \in \mathscr{A}$ をうまくとって

$$\mathscr{A} \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\varepsilon/4}(f_i)$$

をみたすようにできる．$y \in K$ を任意にとる．f_i たちの連続性から，y の開近傍 U を，$y' \in U$ ならすべての $1 \le i \le k$ で $d(f_i(y), f_i(y')) < \varepsilon/4$ となるようにとることができる．このとき任意に $f \in \mathscr{A}$ をとると $f \in B_{\varepsilon/4}(f_i)$ となる i が存在するので，任意の $y' \in U$ に対して

$$
\begin{aligned}
d(f(y), f(y')) &\le d(f(y), f_i(y)) + d(f_i(y), f_i(y')) + d(f_i(y'), f(y)) \\
&\le \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}
\end{aligned}
$$

である．したがって，

$$
\sup_{(f,y') \in \mathscr{A} \times U} d(f(y), f(y')) \le \frac{3\varepsilon}{4} < \varepsilon
$$

が成立し，これは $\mathscr{A}$ が同程度連続であることを示している．

次に $\mathscr{A}$ が各点相対コンパクトであることを示す．$y \in K$ を任意にとる．$\mathscr{A}_y$ 内の任意の点列 $\{x_n\}_n$ が収束部分列を持つことを示せばよい．$\mathscr{A}$ の定義から，各 x_n について $f_n \in \mathscr{A}$ を $f_n(y) = x_n$ となるようにとれる．こうしてできる $\mathscr{A}$ 内の点列 $\{f_n\}_n$ は収束部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ を持つ．この収束先を $f \in C(K, X)$ と書くと，$\{x_n\}_n$ の部分列 $\{x_{n_k}\}_k$ は $f(y)$ に収束する．

(2) $\Longrightarrow$ (1)　$\mathscr{A}$ が同程度連続かつ各点相対コンパクトであるとする．$\mathscr{A}$ 内の任意の点列 $\{f_n\}_n$ について収束部分列が存在することを示せばよい．$\mathscr{A}$ の同程度連続性から，任意の $y \in K$ についてその近傍 U_y を，$y' \in U_y$ ならすべての $g \in \mathscr{A}$ で

$$
d(g(y), g(y')) < \frac{1}{6}
$$

になるようにとれる．K はコンパクトだから開被覆 $\{U_y\}_{y \in K}$ の有限部分被覆 $\{U_{y_i}\}_{1 \le i \le l}$ がとれる．各 $\mathscr{A}_{y_i}$ は相対コンパクトだから，$\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ をすべての $1 \le i \le l$ で $\{f_{n_k}(y_i)\}_k$ が収束するようにとれる．さらにその部分列 $\{f_{1,n}\}_n$ をとることによって，$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ ならすべての $1 \le i \le l$ で

$$
d(f_{1,m}(y_i), f_{1,n}(y_i)) < \frac{1}{6}
$$

となるようにできる．このとき任意の $y \in K$ について $y \in U_{y_i}$ となる i をとることによって

$$
d(f_{1,m}(y), f_{1,n}(y)) \le d(f_{1,m}(y), f_{1,m}(y_i)) + d(f_{1,m}(y_i), f_{1,n}(y_i)) + d(f_{1,n}(y_i), f(y)) < \frac{1}{2}
$$

すなわち

$$
\rho(f_{1,m}, f_{1,n}) \le \frac{1}{2}
$$

が分かる．この操作を続けることによって，$k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\{f_{k-1,n}\}_n$ の部分列 $\{f_{k,n}\}_n$ を

$$
\rho(f_{k,m}, f_{k,n}) \le 2^{-k}
$$

となるようにとれる．$g_n = f_{n,n}$ とおくとこれは $C(K, X)$ の Cauchy 列で，$\mathscr{A}$ の各点相対コンパクト性から各点収束極限 $g\colon K \to X$ が存在する．$\{g_n\}_n$ が Cauchy 列であったことから，g は $\{g_n\}_n$ の一様収束極限であることが分かる．したがって $g \in C(K, X)$ であり，$\{g_n\}_n$ は $C(K, X)$ の中で g に収束することが分かる．

(*>△<)

1.2　Ascoli–Arzerà その 2

定理 1.4（Ascoli–Arzelà の定理）　S を K の可算稠密部分集合，X を完備距離空間とする．同程度連続な $C(K,X)$ の部分集合 $\mathscr{A}$ について，任意の $y \in S$ で $\mathscr{A}_y$ が相対コンパクトであると仮定する．このとき，任意の $\mathscr{A}$ 内の点列 $\{f_n\}_n$ は K 上広義一様収束する部分列を持つ．

証明　S の元を $y_1, y_2, \ldots$ と番号づけしておく．$\{f_n(y_1)\}_n$ が相対コンパクトであることから，$\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{1,n}\}_n$ を $\{f_{1,n}(y_1)\}_n$ が収束するようにとれる．この操作を続けることで，任意の正整数 k について $\{f_{k,n}\}_n$ の部分列 $\{f_{k+1,n}\}_n$ を $\{f_{k+1,n}(y_{k+1})\}_n$ が収束するようにとれる．そこで $g_n = f_{n,n}$ とおくと $\{g_n\}_n$ は $\{f_n\}_n$ の部分列であり，任意の $y \in S$ で $\{g_n(z)\}_n$ は収束する．

　この $\{g_n\}_n$ が K 上広義一様収束することを示す．L を任意の K のコンパクト集合とする．任意に $\varepsilon > 0$ をとる．$\mathscr{A}$ の同程度連続性より，各 $x \in L$ の開近傍 U_x を

$$\sup_{(f,x') \in \mathscr{A} \times U_x} d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{6}$$

が成立するようにとれる．L はコンパクトだから，有限個の点 $x_1, x_2 \ldots, x_N$ をうまく選んで，$\{U_{x_i}\}_{1 \leq i \leq N}$ が L を被覆するようにできる．$S \cap U_{x_i}$ は空でないから，この中から一つ元を選んで z_i と名づける．

　このとき $N' \in \mathbb{Z}_{>0}$ を十分大きくとると，任意の $m, n > N'$ と $1 \leq i \leq N$ に対して

$$d(g_m(z_i), g_n(z_i)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

となる．したがって $m, n > N'$ のとき，$y \in L$ ならば $y \in U_{x_i}$ となる $1 \leq i \leq N$ を選ぶことができて

$$\begin{aligned} d(g_m(y), g_n(y)) \leq d(g_m(y), g_m(x_i)) + d(g_m(x_i), g_m(z_i)) + d(g_m(z_i), g_n(z_i)) \\ + d(g_n(z_i), g_n(x_i)) + d(g_n(x_i), g_n(y)) < \varepsilon \end{aligned}$$

が成立する．よって $\{g_n\}_n$ は L 上の一様 Cauchy 列であり，X は完備だったからある関数に一様収束する．　(*>△<)

2　Stone–Weierstrass の定理

　$\mathbb{K}$ で $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すことにする．X をコンパクト空間とし，$C(X,\mathbb{K})$ は sup ノルム $\|\dot{}\|$ で Banach 空間になっていると考える．

定義 2.1　$\mathscr{A} \subset C(X,\mathbb{K})$ が $C(X,\mathbb{K})$ の非単位的部分代数であるとは，次の条件が成り立つことをいう．

(1) $f, g \in \mathscr{A}$ ならば $f + g \in \mathscr{A}$.
(2) $f \in \mathscr{A}, \alpha \in \mathbb{K}$ ならば $\alpha f \in \mathscr{A}$.

さらに $1 \in \mathscr{A}$ ならば $\mathscr{A}$ は $C(X,\mathbb{K})$ の部分代数であるという．

定理 2.2（Stone–Weierstrass の定理）　$C(X,\mathbb{R})$ の非単位的部分代数 $\mathscr{A}$ が $C(X,\mathbb{R})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して，ある $f \in \mathscr{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する．

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathscr{A}$ が存在する．

特に部分代数 $\mathscr{A}$ が (1) をみたせば，$\mathscr{A}$ は $C(X, \mathbb{R})$ の中で稠密である．

定理 2.3（Stone–Weierstrass の定理） $C(X, \mathbb{C})$ の非単位的部分代数 $\mathscr{A}$ が $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密であるための必要十分条件は次が成立することである．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して，ある $f \in \mathscr{A}$ で $f(x) \neq f(y)$ となるものが存在する．
(2) 任意の $x \in X$ に対して，$g(x) \neq 0$ となる $g \in \mathscr{A}$ が存在する．
(3) $f \in \mathscr{A}$ ならば $\bar{f} \in \mathscr{A}$ である．

ここで，$f \in C(X, \mathbb{C})$ について，$\bar{f}$ は

$$\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$$

で定まる $C(X, \mathbb{C})$ の元である．

特に部分代数 $\mathscr{A}$ が (1) と (3) をみたせば，$\mathscr{A}$ は $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密である．

注 2.4 文献によっては上の定理で X が Hausdorff 空間であることを仮定している場合があるが，実は Hausdorff 性の仮定は $\mathscr{A}$ の条件に内包されている．実際，上の定理の仮定 (1) をみたす $\mathscr{A}$ がとれるためには X は Hausdorff 空間でなければならないことが分かる．

補題 2.5 $\mathscr{A} \subset C(X, \mathbb{K})$ が非単位的部分代数であるとき，その閉包 $\overline{\mathscr{A}}$ は非単位的部分代数である．

証明 明らかである． (*>△<)

命題 2.6（Dini の定理） Y をコンパクト空間とする．$C(Y, \mathbb{R})$ の点列 $\{f_n\}_n$ について，任意の $y \in Y$ で $\{f_n(y)\}_n$ は広義単調増加で上に有界であるとする．このとき，$\{f_n\}_n$ はある関数 f に一様収束する．

証明 $\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加かつ上に有界であることから，この関数列には各点収束する．その収束先を f とおく．$\{f_n\}_n$ が f に一様収束することを示す．$\varepsilon > 0$ を任意にとる．この ε に対して

$$A_n = \{y \in Y \mid |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon\}$$

と定めると，f は $\{f_n\}_n$ の各点収束先だから $\{A_n\}_n$ は Y の開被覆となる．よって Y のコンパクト性から Y は有限個の A_n たちで覆える．$\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加であることから任意の $n \in \mathbb{N}$ で $A_n \subset A_{n+1}$ が成立することと合わせると，ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $A_N = Y$ となる．$\{f_n\}_n$ が各点で広義単調増加であることから，これは

$$\forall n \geq N\ \forall y \in Y \quad |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon$$

を意味している． (*>△<)

補題 2.7 $\sqrt{t} \in C([0,1], \mathbb{R})$ に収束する t の多項式の列 $\{h_n\}_n$ が存在する．

証明 $\{h_n\}_n$ を次の漸化式で定める．

$$h_{n+1}(t) = h_n(t) + \frac{t - h_n(t)^2}{2},\ h_0 = 0.$$

この関数列について

$$h_n(t) \leq \sqrt{t},\ h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$$

が成立することが帰納法で示せる．したがって Dini の定理によって $\{h_n\}_n$ はある関数に一様収束する．さらにその収束先が $\sqrt{t}$ であることが分かる． (*>△<)

補題 2.8 $\mathscr{A}$ が $C(X,\mathbb{R})$ の非単位的部分代数であるとき，$f\in\mathscr{A}$ に対して

$$|f|(x)=|f(x)|$$

で定まる関数 $|f|\colon X\to\mathbb{R}$ は $\overline{\mathscr{A}}$ の元である．また，$f_1,f_2,\dots,f_n\in\mathscr{A}$ ならば $\max\{f_1,f_2\dots,f_n\}$ および $\min\{f_1,f_2,\dots f_n\}$ は $\overline{\mathscr{A}}$ の元である．

証明 補題 2.7 の条件をみたす $\{h_n\}_n$ をとる．$f\in\mathscr{A}$ について $|f|\in\overline{\mathscr{A}}$ を示す．$f=0$ なら $|f|=0\in\mathscr{A}$ だから，$f\neq 0$ の場合を考えればよい．このとき $\|f\|\neq 0$ だから

$$f_n(x)=h_n(\|f\|^{-2}f(x)^2)$$

は well-defined な連続関数で，$\mathscr{A}$ が非単位的部分代数であることからすべての $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ で $f_n\in\mathscr{A}$ である．さらに $\{h_n\}_n$ が $\sqrt{t}$ に一様収束することから $\{f_n\}_n$ は $|f|/\|f\|$ に一様収束する．このことと $\overline{\mathscr{A}}$ が非単位的部分代数であることから

$$f=\|f\|\cdot f/\|f\|\in\overline{\mathscr{A}}$$

であることが分かる．

後半を示す．$f_1,f_2\in\mathscr{A}$ について $\max\{f_1,f_2\},\min\{f_1,f_2\}\in\overline{\mathscr{A}}$ であることを示せば十分である．これは

$$\max\{f_1,f_2\}=\frac{(f_1,f_2)+|f_1-f_2|}{2},\ \min\{f_1,f_2\}=\frac{(f_1+f_2)-|f_1-f_2|}{2}$$

であることと前半の結果から分かる． (*>△<)

定理 2.2 の証明 まず，任意の異なる 2 点 $x,y\in X$ と任意の $a,b\in\mathbb{R}$ について $f(x)=a,f(y)=b$ となる $f\in\overline{\mathscr{A}}$ が存在することを示す．(1)，(2) より $u,v\in\mathscr{A}$ を

$$u(x)\neq u(y),\ v(x)\neq 0$$

をみたすようにとれる．$\lambda\in\mathbb{R}$ をうまくとると，$h_1=u+\lambda v$ について

$$h_1(x)\neq h_1(y),\ h_1(x)\neq 0$$

をみたすようにできる．このとき $\alpha=h_1(x)^2-h_1(x)h_1(y)\neq 0$ であり，$f_1\in\mathscr{A}$ を $f_1=\alpha^{-1}(h_1^2-h_1(y)h_1)$ で定義すると $f_1(x)=1,f_1(y)=0$ をみたす．同様に $f_2\in\mathscr{A}$ を $f_2(x)=0,f_2(y)=1$ となるようにとれるから，$f=af_1+bf_2$ と定めればこれが求める関数である．

$f\in C(X,\mathbb{R})$ を任意にとる．任意の $\varepsilon>0$，$x_0\in X$ に対して，$h\in\overline{\mathscr{A}}$ を $h(x_0)=f(x_0)$ かつすべての $x\in X$ で $h(x)>f(x)-\varepsilon$ となるようにとれることを示す．$\mathscr{A}(x_0)$ を，$g(x_0)=f(x_0)$ をみたす $g\in\mathscr{A}$ 全体の集合とする．各 $g\in\mathscr{A}(x_0)$ について

$$M_\varepsilon(g)=\{x\in X\mid g(x)>f(x)-\varepsilon\}$$

とおく．初めに示したことから任意の $x\in X$ について $g(x)=f(x)$ をみたす $g\in\mathscr{A}(x_0)$ が存在し，このとき $x\in M_\varepsilon(g)$ であるから，$\{M_\varepsilon(g)\}_{g\in\mathscr{A}(x_0)}$ は X の開被覆である．X のコンパクト性から $g_1,g_2,\dots,g_k$ をうま

く選んで $X = \cup_{i=1}^{k} M_\varepsilon(g_i)$ となるようにできる．$h = \max\{g_1, g_2 \ldots, g_k\} \in \mathscr{A}$ とおけばこれが求めるものである．

$\overline{\mathscr{A}}$ の元 h で，すべての $x \in X$ に対して $h(x) > f(x) - \varepsilon$ をみたすもの全体を $\overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)$ と書く．$h \in \overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)$ に対して

$$N_\varepsilon(h) = \{x \in X \mid h(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

とおく．前段落で示したことから，任意に与えられた $x \in X$ に対して $\overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)$ の元 h を $h(x) = f(x)$ が成り立つようにとれる．このことは $\{N_\varepsilon(h)\}_{h \in \overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)}$ が X の開被覆であることを示しており，再び X のコンパクト性から $h_1, h_2, \ldots, h_l \in \overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)$ を $X = \cup_{i=1}^{l} N_\varepsilon(h_i)$ が成り立つようにとれる．そこで $f_0 = \min\{h_1, h_2, \ldots, h_l\} \in \overline{\mathscr{A}}(\varepsilon)$ とおくと，とり方から $\|f - f_0\| \leq \varepsilon$ であることが分かる．したがって f は $\overline{\mathscr{A}}$ の元の一様収束極限として書けるが，$\overline{\mathscr{A}}$ は $C(X, \mathbb{R})$ の閉集合であるから $f \in \overline{\mathscr{A}}$ であることが分かる． (*>△<)

定理 2.3 の証明　$\mathscr{A}$ が定理の仮定をみたすとき，

$$\mathrm{Re}\,\mathscr{A} = \{\mathrm{Re}\, f \mid f \in \mathscr{A}\}, \mathrm{Im}\,\mathscr{A} = \{\mathrm{Im}\, f \mid f \in \mathscr{A}\}$$

について $\mathrm{Re}\,\mathscr{A} = \mathrm{Im}\,\mathscr{A} \subset \mathscr{A}$ が成立し，しかも $\mathrm{Re}\, f \subset C(X, \mathbb{R})$ は定理 2.2 の仮定をみたす．したがって，任意の $f \in C(X, \mathbb{C})$ と $\varepsilon > 0$ について $\mathrm{Re}\,\mathscr{A} = \mathrm{Im}\,\mathscr{A}$ の元 u, v をうまくとって

$$\|\mathrm{Re}\, f - u\| < \varepsilon/2,\ \|\mathrm{Im}\, f - v\| < \varepsilon/2$$

が成り立つようにできる．このとき

$$\|(f - (u + iv)\| < \varepsilon$$

かつ $u + iv \in \mathscr{A}$ である．したがって $\mathscr{A}$ は $C(X, \mathbb{C})$ の中で稠密である． (*>△<)

参考文献

[1] 内田伏一，『集合と位相』，裳華房，1986.

[2] Rudin, W., *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill Co., New York, 1973.