
庄逸的数学与技术屋

GPA 计算的理论分析

Vortexer99

目录

1	预备知识	2
1.1	写在前面	2
1.2	名词解释	2
2	基础计算	3
2.1	绩点换算表	3
2.2	GPA 与均分计算	3
3	边际效应	4
3.1	一般情况	4
3.2	同学分的情况	5
3.3	同成绩同绩点的情况	5
3.4	同成绩同学分的情况	6
3.5	单课程的情况	6
3.6	单课程对 gpa 和均分的贡献	7
3.7	到达一定贡献需要的学分数	7
4	按属性分类计算	7
4.1	按学期分类	8
4.2	按课程类型分类	8
5	近似计算及误差分析	8
5.1	估算单课程的 gpa 影响	8
5.1.1	当前 gpa 估计的影响	8
5.1.2	总学分估计的影响	8
6	附录	10
6.1	估计总学分对单门课程 gpa 变化造成的影响	10

1 预备知识

1.1 写在前面

本篇文章专为 GPA 计算器提供理论支撑。下列理论仅适用国科大，勿随意用于其他学校。

本篇文章未完待续。欢迎大家提出各种创意。

1.2 名词解释

对于一个具体的同学来说，有许多隶属于他的课程，只考虑参与 gpa 和均分计算的课程，设课程数为 N , $N \in \mathbb{N}^+$ ，对于其中的第 i 门课程 ($1 \leq i \leq N$)，

- 学分 (credit) $cr[i]$: 是课程的一个基本属性，表示课程对应的学分。取值为非负数。
- (百分制) 成绩 (gr) $gr[i]$: 是课程的一个基本属性，表示这个同学在这门课得到的成绩。取值范围为 $[0, 100] \cap \mathbb{N}$ 和 “补考通过”。
- 学期 (semester) $sem[i]$: 是课程的一个基本属性，表示这门课所在的学期。取值范围为 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8，按照时间顺序分别表示大一至大四的秋季、春季学期。
- 类型 (type): 是课程的一个基本属性，本质上是一个关于 i 的检验 (取值为 0-1) 函数，具体见相关讨论 (暂时没有)。
- 绩点 (grade point) $gp[i]$: 是课程的一个属性，由成绩换算得到，即由换算函数 $grtoggp$ 决定。

$$gp[i] = grtoggp(gr[i]) \quad (1.1)$$

具体见[绩点换算表](#)。

- 绩点分 (credited grade point) $crgp[i]$: 是课程的一个属性，等于这门课的学分乘绩点。

$$crgp[i] = cr[i] \cdot gp[i] \quad (1.2)$$

- 成绩学分 (credited grade) $crgr[i]$: 是课程的一个属性，等于这门课的学分乘成绩。或简称成绩分。

$$crgr[i] = cr[i] \cdot gr[i] \quad (1.3)$$

对于这些课的总体，有以下一些统计量。

- 总学分 (total credit) $cr_{total} = cr$: 为所有课程的学分之和。
- 总绩点分 (total credited grade point) $crgp_{total} = crgp$: 为所有课程的绩点分之和。
- 总成绩分 (total credited grade) $crgr_{total} = crgr$: 为所有课程的成绩分之和。

- GPA (Grade point average) $gpa_{total} = gpa$: 为所有课程的绩点学分加权平均。又称平均绩点或加权平均绩点或总绩点。
- 平均成绩 (Grade average) $gra_{total} = gra$: 为所有课程的成绩学分加权平均。又称加权平均成绩、均绩或均分。

由于直接对成绩或绩点求平均无适用场景，因此为简便起见，下文凡是出现“平均”，“加权平均”等，均指“学分加权平均”。

在引入了总体统计量之后，对于课 i ，还能定义其对总体统计量的贡献。

- GPA 贡献：是课程的一个属性，为当前情况下计算所得的 GPA 与仅去掉该课程计算所得的 GPA 之差。
- 均分贡献：是课程的一个属性，为当前情况下计算所得的均分与仅去掉该课程计算所得的均分之差。

2 基础计算

2.1 绩点换算表

每门课的绩点由成绩换算得到，换算函数适合用变量-值的表格形式呈现。

成绩与绩点的换算表可从本科教育网教学管理栏目相关文件找到。截至目前（2019年7月17日），换算表见表 1

成绩 $gr[i]$	[90, 100]	[87, 89]	[85, 86]	[83, 84]	{82}	[80, 81]	[78, 79]	[76, 77]
绩点 $gp[i]$	4.0	3.9	3.8	3.7	3.6	3.5	3.4	3.3
成绩 $gr[i]$	{75}	{74}	{73}	{72}	{71}	[69, 70]	{68}	{67}
绩点 $gp[i]$	3.2	3.1	3.0	2.9	2.8	2.7	2.6	2.5
成绩 $gr[i]$	{66}	[64, 65]	{63}	{62}	{61}	{60}	[0, 59]	补考通过
绩点 $gp[i]$	2.4	2.3	2.2	2.1	1.8	1.6	0	1.0

表 1: 成绩与绩点换算表

2.2 GPA 与均分计算

GPA 的计算方式为绩点通过学分加权平均，即

$$gpa = \frac{\sum_{i=1}^N gp[i] \cdot cr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i]} \quad (2.1)$$

其中学分为基础信息，绩点通过[绩点换算表](#)由基础信息成绩得到。再由绩点分、总绩点分和总学分的定义，

$$gpa = \frac{\sum_{i=1}^N cr gp[i]}{\sum_{i=1}^N cr} = \frac{cr gp}{cr} \quad (2.2)$$

类似地，平均成绩的计算方式也为学分加权平均，即

$$gra = \frac{\sum_{i=1}^N gr[i] \cdot cr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i]} \quad (2.3)$$

其中学分、成绩均为基础已知信息。再由成绩分、总成绩分和总学分的定义，

$$gra = \frac{\sum_{i=1}^N crgr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i]} = \frac{crgr}{cr} \quad (2.4)$$

3 边际效应

很多时候我们比较关心多几门或少几门课会对我们的 gpa 和均分造成怎样的影响。

3.1 一般情况

考虑增加 $k(k \in \mathbb{N}^+)$ 门课程，对 N 门课之外的第 $i(1 \leq i \leq k)$ 门增加的课，设其学分为 $\delta cr[i]$ ，成绩为 $\delta gr[i]$ ，换算得到的绩点为 $\delta gp[i]$ ，其他属性和这 k 门课的总属性同理用撇表示。

则依照 GPA 的计算方式，有

$$gpa' = \frac{\sum_{i=1}^N gp[i] \cdot cr[i] + \sum_{i=1}^k \delta gp[i] \cdot \delta cr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i] + \sum_{i=1}^k \delta cr[i]} = \frac{crgp + \delta crgp}{cr + \delta cr} \quad (3.1)$$

对于减少课程的情况，设也减少这 k 门课程，有

$$gpa' = \frac{\sum_{i=1}^N gp[i] \cdot cr[i] - \sum_{i=1}^k \delta gp[i] \cdot \delta cr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i] - \sum_{i=1}^k \delta cr[i]} \quad (3.2)$$

可以将负号吸收进去，化为

$$gpa' = \frac{\sum_{i=1}^N gp[i] \cdot cr[i] + \sum_{i=1}^k \delta gp[i] \cdot (-\delta cr[i])}{\sum_{i=1}^N cr[i] + \sum_{i=1}^k (-\delta cr[i])} \quad (3.3)$$

由此可见，对于减少课程的情况，只需要令减少的课程学分取为负，则式 3.1 可以通用。

以后我们均这么处理，并只考虑增加课程的情况而忽略减少课程的情况。

下面计算与原 gpa 的差值

$$\Delta gpa = gpa' - gpa = \frac{crgp + \delta crgp}{cr + \delta cr} - \frac{crgp}{cr} \quad (3.4)$$

化简得

$$\Delta gpa = \frac{cr \cdot \delta crgp - \delta cr \cdot crgp}{cr(cr + \delta cr)} \quad (3.5)$$

注意到 $crgp = gpa \cdot cr$ ，得

$$\Delta gpa = \frac{\delta crgp - \delta cr \cdot gpa}{cr + \delta cr} = \frac{1}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k \delta cr[i](\delta gp[i] - gpa) \quad (3.6)$$

这是一个重要结论，因为这一公式表示总的 gpa 改变，是由每一门新增的课绩点与原 gpa 的差值乘上对应的学分系数求和，再乘以一个增加后总学分（如果 δcr 较小的话，就可以用当前学分近似）的倒数因子得到。从中可以得出以下浅显的结论：

1. 新的课程的绩点比原 gpa 越高，新 gpa（和原 gpa 的差值）就越高。
2. 新的课程的学分越多，提高/降低 gpa 的效果就越明显。
3. 所有课程总学分越多，提高/降低 gpa 的效果就越不明显。

对于均分，分析和结论是完全类似的，此处略去，仅列出结论。

$$gra' = \frac{\sum_{i=1}^N gr[i] \cdot cr[i] - \sum_{i=1}^k \delta gr[i] \cdot \delta cr[i]}{\sum_{i=1}^N cr[i] - \sum_{i=1}^k \delta cr[i]} \quad (3.7)$$

$$\Delta gra = \frac{\delta cr gr - \delta cr \cdot gra}{cr + \delta cr} = \frac{1}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k \delta cr[i] (\delta gr[i] - gra) \quad (3.8)$$

3.2 同学分的情况

若增加的课都是同一个学分，即 $\delta cr[i] \equiv \delta cr^* \quad 1 \leq i \leq k$ ，则

- 总增加的学分 $\delta cr = \sum_{i=1}^k \delta cr[i] = k \cdot \delta cr^*$
- 总增加的绩点分 $\delta cr gp = \sum_{i=1}^k \delta cr[i] \cdot \delta gp[i] = \delta cr^* \sum_{i=1}^k \delta gp[i] = \delta cr^* \cdot \delta gp$
- 总增加的成绩分 $\delta cr gr = \sum_{i=1}^k \delta cr[i] \cdot \delta gr[i] = \delta cr^* \sum_{i=1}^k \delta gr[i] = \delta cr^* \cdot \delta gr$

代入前面的结论，直接可得到

$$\Delta gpa = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k (\delta gp[i] - gpa) \quad (3.9)$$

同理，

$$\Delta gra = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k (\delta gr[i] - gra) \quad (3.10)$$

3.3 同成绩同绩点的情况

由于成绩到绩点的转换为一对一或多对一，同成绩可以推出同绩点，因此为避免重复，我们就直接研究同成绩的情况。

此时增加的课绩点均相同，即 $\delta gp[i] \equiv \delta gp^* \quad 1 \leq i \leq k$ ，则代入之前的结论，有

$$\Delta gpa = \frac{1}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k \delta cr[i] (\delta gp^* - gpa) = \frac{\delta cr}{cr + \delta cr} (\delta gp^* - gpa) \quad (3.11)$$

可以发现此时新增某一门课的具体学分和有多少门课已经不再重要，只需要抓住新课的总绩点和总新增学分即可。并且此时很容易就可看出新课绩点只要比以前高，gpa 就会

上升，反之亦然；前面的放缩系数也反映了新增课程的学分与原有总学分对 gpa 变化的影响。

对于均分，也类似有

$$\Delta gra = \frac{1}{cr + \delta cr} \sum_{i=1}^k \delta cr[i] (\delta gr^* - gra) = \frac{\delta cr}{cr + \delta cr} (\delta gr^* - gra) \quad (3.12)$$

3.4 同成绩同学分的情况

若增加的课学分、成绩、绩点分别均相同，即结合前两小节的条件，不难得出

$$\Delta gpa = \frac{k \cdot \delta cr^*}{cr + k \cdot \delta cr^*} (\delta gp^* - gpa) \quad (3.13)$$

此时 Δgpa 中 k 和 δcr^* 只出现在 $k \cdot \delta cr^*$ 中。根据之前的讨论，若考虑减少的情况，只需令学分为负。而

$$k \cdot (-\delta cr^*) = (-k) \cdot \delta cr^* \quad (3.14)$$

所以此时不仅可以令学分为负，还可以单独令新增课程数 k 为负，来计算减少的情况，而这是与直觉符合的——增加 -1 门课，就是减少 1 门课。

3.5 单课程的情况

当课程数为 1 时，显然满足同成绩同学分的要求。

$$\Delta gpa = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} (\delta gp^* - gpa) \quad (3.15)$$

其文字表达式为

$$\text{新 gpa} - \text{旧 gpa} = \frac{\text{新课学分}}{\text{新总学分}} \times (\text{新课绩点} - \text{旧 gpa}) \quad (3.16)$$

实际计算常用上式，但它可以写成漂亮的对称的比例式：

$$\frac{gpa' - gpa}{\delta gp^* - gpa} = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} \quad (3.17)$$

其文字表达式为

$$\frac{\text{新 gpa} - \text{旧 gpa}}{\text{新课绩点} - \text{旧 gpa}} = \frac{\text{新课学分}}{\text{新总学分}} \quad (3.18)$$

举例而言，如果当前 $gpa = 3.7$ ，总学分 $cr = 60$ 。如果多一门 1 学分的课，该课的绩点为 3.8，即 $\delta cr^* = 1$ ， $\delta gp^* = 3.8$ ，计算这一门课和原 gpa 的差值 $\delta gp^* - gpa = 0.1$ ，再计算放缩比例为该门课学分比上新总学分 $1/61 \approx 0.0164$ ，相乘即可得到 $\Delta gpa = 0.00164$ 。如果这门课是 4 学分，则放缩比例将会达到 $4/64 \approx 0.0625$ ，最后结果大约是之前的四倍即 $\Delta gpa = 0.00625$ 。而如果多一门 1 学分的课，绩点为 3.3，差值放大了 4 倍， $\delta gp^* - gpa = -0.4$ ，最后的结果和一门 4 学分 3.8 绩点的课大致持平，即造成 $\Delta gpa = -0.00656$ 。

对于均分有类似结论。

$$\Delta gra = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*}(\delta gr^* - gra) \quad (3.19)$$

$$\text{新均分}-\text{旧均分} = \frac{\text{新课学分}}{\text{新总学分}} \times (\text{新课成绩}-\text{旧均分}) \quad (3.20)$$

3.6 单课程对 gpa 和均分的贡献

一门课程（记为第 j 门）对 gpa 的贡献定义为现 gpa 与除去此课计算所得 gpa 之差，记为 $\Delta_j gpa$ 。由上一节的讨论，套用减少课程的情况，可知

$$\Delta_j gpa = gpa - gpa' = -\frac{-cr[j]}{cr - cr[j]}(gp[j] - gpa) = \frac{cr[j]}{cr - cr[j]}(gp[j] - gpa) \quad (3.21)$$

需要注意的是虽然这里是“减少课程 j ”，但是和平时所说的“多一门课 j 之后 gpa……”计算结果是一样的，因为此处的总学分已经考虑了课程 j ，显然在计算这一门课的贡献时这一门已经在工作表里了。

对均分的贡献，类似为

$$\Delta_j gra = gra - gra' = -\frac{-cr[j]}{cr - cr[j]}(gr[j] - gra) = \frac{cr[j]}{cr - cr[j]}(gr[j] - gra) \quad (3.22)$$

3.7 到达一定贡献需要的学分数

正如[小节 3.3](#)所述，同成绩或同绩点时课程门数及具体每门课的学分不再重要，只需要关心总新增的绩点即可。

$$\Delta gpa = \frac{\delta cr}{cr + \delta cr}(\delta gp^* - gpa) \quad (3.23)$$

不同的是，此时目标 $gpa(gpa')$ 已定，不确定的是 δcr 和 δgp^* 。一般而言，是通过给定 δgp^* 去求 δcr ，即要有多少学分的某某成绩才能达到多少 gpa。不难解得

$$\delta cr = cr \times \frac{gpa' - gpa}{\delta gp^* - gpa'} \quad (3.24)$$

对均分目标同理。

$$\delta cr = cr \times \frac{gra' - gra}{\delta gr^* - gra'} \quad (3.25)$$

4 按属性分类计算

没啥意思也不难有空再写。不就是按照一定规则把课程分类然后分别求和嘛？然后它们合起来还能是总的。

4.1 按学期分类

4.2 按课程类型分类

5 近似计算及误差分析

平时使用时，可以作一些近似简化公式以便记忆和计算。当然，在电脑中计算的都是准确值。

5.1 估算单课程的 gpa 影响

在单课程的情况中，我们已经得到了一门课影响 gpa 的公式。

$$\Delta gpa = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} (\delta gp^* - gpa) \quad (5.1)$$

此为准确值。

5.1.1 当前 gpa 估计的影响

首先来考察如果现有 gpa 不准会对结果造成多少影响。显然，一般人只会记选课系统里查到的两位小数，比较在意的同学会自己计算记到三四位小数，不太可能会有人直接记精确的分数。因此，假设 gpa 有 0.01 的误差，记 $\Delta = |\Delta gpa - \Delta' gpa|$ ，显然有

$$\Delta = \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} |gpa_1 - gpa_2| = 0.01 \times \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} \quad (5.2)$$

作为一个比较高的精度，如果我们希望 $\Delta < 0.001$ ，那么可以解得

$$9\delta cr^* < cr \quad (5.3)$$

目前一门课学分最高的为 5 分的毛概，代入可得条件为 $\delta cr > 45$ ，而毛概课是大二下的课程，此时学分早已过百，条件是满足的。如果按照最高是 4 学分计算，条件为 $\delta cr > 36$ ，这大约在大一上结束时可以勉强达到，在大一下出分时基本适用。同时，如果有 $cr = 90$ 的学分，那么一次性可以将 10 个学分的同绩点的课合并计算而满足要求。

注意到分式永远小于 1，一定有 $\Delta < |gpa_1 - gpa_2|$ ，换句话说，就是在别的量均为精确值的情况下，由 gpa 估计值引起的增量 gpa 误差一定不会超过本身估计值的精度。例如如果你记住了三位小数的现有 gpa，那么计算出的 Δgpa 一定至少有三位小数的精度。

5.1.2 总学分估计的影响

在影响新 gpa 的公式中，注意到分母有新学分项。一方面，计算时需要加上新课的学分，不是非常方便；另一方面，在估计时当前学分也有不少误差，例如选课系统中下学期选的课，讲座不计入 gpa 计算等造成的误差。下面进行一些研究。

设 cr 表示总学分的准确值, cr' 表示代入分母的总估计值, 令

$$\Delta = \left(\frac{\delta cr^*}{cr'} - \frac{\delta cr^*}{cr + \delta cr^*} \right) |\delta gp^* - gpa| \quad (5.4)$$

$$= \frac{(cr + \delta cr^* - cr')}{cr'(cr + \delta cr^*)} \delta cr^* |\delta gp^* - gpa| \quad (5.5)$$

令 $cr + \delta cr^* - cr' = \Delta cr$, 代掉 cr' , 得

$$\Delta = \frac{\Delta cr \delta cr^*}{(cr + \delta cr^* - \Delta cr)(cr + \delta cr^*)} |\delta gp^* - gpa| \quad (5.6)$$

对于关于学分的分数项, 可以证明它基本上是关于 δcr^* 的增函数。证明如下。将分子的 δcr^* 除下去, 分母为

$$(cr + \delta cr^* - \Delta cr)(cr/\delta cr^* + 1) = \delta cr^* + \frac{(cr - \Delta cr)cr}{\delta cr^*} + \text{const} \quad (5.7)$$

求导可知其为减函数的充要条件为

$$\delta cr^{*2} \leq cr^2 - cr \Delta cr \quad (5.8)$$

解得

$$\frac{\Delta cr}{cr} \leq 1 - \frac{\delta cr^{*2}}{cr^2} \quad (5.9)$$

就算学分的估计有 36% 的误差, 即取 $\Delta cr/cr = 0.36$ 代入, 得

$$\delta cr^* \leq 0.8cr \quad (5.10)$$

一门课按最大学分为 4 算, 只需要有 5 个总学分即可达标。而 36% 的学分误差, 若约为 1/3, 相当于 60 学分估计成 40 – 80 学分, 120 学分估计成 80 – 160 学分, 这是一个很大的范围。最后既然分母是减函数, 那么学分项就是关于 δcr^* 的增函数。

下面直接列表。先将公式变形为

$$\Delta' = \frac{\Delta}{10 |\delta gp^* - gpa|} = \frac{\Delta cr \delta cr^*}{10(cr + \delta cr^* - \Delta cr)(cr + \delta cr^*)} \quad (5.11)$$

解得

$$\Delta cr = \frac{(cr + \delta cr^*)^2}{(cr + \delta cr^*) + \delta cr^*/10\Delta'} \quad (5.12)$$

考虑 $|\Delta'| \leq \alpha$ 的条件, 以解出对应的学分估计偏差 Δcr 的范围。为此, 分别代入 $\Delta' = \alpha$ 和 $\Delta' = -\alpha$ 的情况, 解得两个边界值。

对于 $0 < \Delta' \leq \alpha$ 的情况, 因为各项都是整数, 最后可以顺利得到一个正数 β , 使得 $\Delta cr \leq \beta$ 。但是对于负数的情况, 有时会造成一定的问题。一般而言, 我们希望在 $\Delta' = -\alpha$ 的时候解出一个负数 β , 从而使得 $\Delta cr \geq \beta$ 等价于 $\Delta' \geq -\alpha$ 。但是, 当 Δ' 比较小的时候如 $\Delta' = -0.1$, 分母就直接是 cr , 最后结果却是一个正数。怎么回事呢?

我们先将式 5.11 进行变形, 得

$$\frac{\delta cr^*}{10\Delta'} = \frac{(cr + \delta cr^*)^2}{\Delta cr} - (cr + \delta cr^*) \quad (5.13)$$

对于 $\Delta' \geq -\alpha$ ，成立

$$\frac{\delta cr^*}{10\Delta'} \leq \frac{\delta cr^*}{10(-\alpha)} \quad (5.14)$$

于是

$$\frac{(cr + \delta cr^*)^2}{\Delta cr} - (cr + \delta cr^*) \leq -\frac{\delta cr^*}{10(\alpha)} \quad (5.15)$$

如果已经有

$$-(cr + \delta cr^*) \leq -\frac{\delta cr^*}{10(\alpha)} \quad (5.16)$$

那么可以看出，无论 Δcr 取负多少，不等式总成立。反而是它取正数的时候才有可能取到等号。但是取正数的时候应当受另一边边界控制。故可以直接认为 $0 > \Delta cr > -\infty$

回过头来再看最开始的式子 [式 5.1](#)，在式子中我们将分母 $cr + \delta cr^*$ 用 cr' 替换，而 $\Delta cr = cr + \delta cr^* - cr'$ ， Δcr 趋向负无穷，意味着 cr' 趋向正无穷，于是式子的分母越来越大，整个式子越来越趋向于零。但是，如果其本身精确值就小于要求的精确度，代入学分越大，其值越来越小，显然总是在要求的精确度内的。

以下将依照新增课程学分从 1 至 4，在一定学分 cr 的情况下，为达到 Δ' 的准确度，估计的偏差 $-\Delta cr$ 的上限与下限共八张表。注意，实际准确度 Δ 还需要从 Δ' 乘以一个 gpa 差值的十倍绝对值 $10|\delta gp^* - gpa|$ 。对于 1.5 学分的课程，其要求低于 2 学分的课程，但高于 1 学分的课程。

作为一个例子，从选课系统上看到的总学分，由于讲座课程、新学期课程等因素，往往比实际计入 gpa 的总学分要多。设多出 20 学分，若我们直接代入公式计算 gpa 的变化，对于一个实际计入 gpa 的有 60 学分的同学，一门 2 学分的课而言，先找到 $\delta cr^* = 2$ 的上限表，然后找到 $cr = 60$ 的一行，发现 $11 < 20 < 28$ ，因此如果代入选课系统显示的 $60 + 20 = 80$ 学分，可以保证 $|\Delta'| < 0.001$ 。如果这门课绩点减去旧 gpa 是 0.3，那么实际的误差上限是 Δ' 的上限乘以其十倍，即 $|\Delta| < 0.003$ 。

从上限表中也可看出，如果总学分多到一定程度，对于特定精度上限可以达到无穷。也就是说，可以随意往上估计而不超准确度。

有一个大问题是，在估计总学分时，显然并不清楚总学分具体多少，就没法依靠 cr 去查表。不过仍然可以大致估计，如在上面的例子中只知道显示的学分是 80，找 $cr = 80$ 和 $cr = 60$ 一起参考。

最后还能简单看一下 gpa 变化的比值，即

$$\frac{gpa'}{gpa} = \frac{cr + \delta cr^*}{cr'} = 1 + \frac{\Delta cr}{cr'} \quad (5.17)$$

貌似没什么用。

6 附录

6.1 估计总学分对单门课程 gpa 变化造成的影响

使用方法见 [小节 5.1.2](#) 最后。

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	1	1	3	13	∞	∞	∞
20	0	0	1	2	6	15	∞	∞	∞	∞
30	0	1	2	6	14	51	∞	∞	∞	∞
40	1	2	4	11	28	187	∞	∞	∞	∞
50	1	3	6	17	53	∞	∞	∞	∞	∞
60	2	4	8	27	95	∞	∞	∞	∞	∞
70	3	5	12	39	174	∞	∞	∞	∞	∞
80	3	7	16	55	345	∞	∞	∞	∞	∞
90	4	9	20	76	920	∞	∞	∞	∞	∞
100	5	11	26	103	∞	∞	∞	∞	∞	∞
110	7	14	32	138	∞	∞	∞	∞	∞	∞
120	8	17	39	185	∞	∞	∞	∞	∞	∞
130	9	20	47	249	∞	∞	∞	∞	∞	∞
140	11	23	55	337	∞	∞	∞	∞	∞	∞
150	12	27	65	465	∞	∞	∞	∞	∞	∞
160	14	31	76	665	∞	∞	∞	∞	∞	∞
170	16	35	89	1008	∞	∞	∞	∞	∞	∞
180	18	40	103	1724	∞	∞	∞	∞	∞	∞
190	20	45	118	4053	∞	∞	∞	∞	∞	∞
200	22	51	135	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
210	25	56	154	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
220	27	63	175	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
230	30	69	198	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
240	33	77	224	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
250	36	84	253	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
260	39	92	285	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
270	42	101	321	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
280	46	110	361	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
290	50	119	405	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞
300	53	130	455	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞

表 2: $\delta_{cr^*} = 1$ 时估计学分与准确学分差值的上限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	-1	-1	-2	-4	-6	-8	-9
20	0	0	-1	-2	-4	-6	-11	-14	-17	-19
30	0	-1	-2	-4	-7	-12	-19	-23	-27	-29
40	-1	-2	-3	-7	-12	-18	-28	-33	-37	-39
50	-1	-2	-5	-10	-17	-26	-37	-43	-46	-49
60	-2	-4	-7	-14	-23	-34	-46	-52	-56	-59
70	-2	-5	-9	-19	-29	-42	-55	-62	-66	-69
80	-3	-6	-11	-23	-36	-50	-65	-72	-76	-79
90	-4	-8	-14	-28	-43	-59	-75	-82	-86	-89
100	-5	-9	-17	-34	-51	-68	-84	-92	-96	-99
110	-6	-11	-20	-40	-58	-77	-94	-102	-106	-109
120	-7	-13	-24	-46	-66	-86	-104	-112	-116	-119
130	-8	-15	-27	-52	-74	-95	-114	-122	-126	-129
140	-9	-17	-31	-58	-82	-104	-123	-132	-136	-139
150	-11	-20	-35	-65	-91	-113	-133	-142	-146	-149
160	-12	-22	-39	-72	-99	-123	-143	-152	-156	-159
170	-13	-25	-44	-79	-108	-132	-153	-162	-166	-169
180	-15	-28	-48	-86	-117	-142	-163	-172	-176	-179
190	-17	-31	-53	-93	-125	-151	-173	-181	-186	-189
200	-18	-34	-58	-101	-134	-161	-183	-191	-196	-199
210	-20	-37	-63	-108	-143	-171	-193	-201	-206	-209
220	-22	-40	-68	-116	-152	-180	-203	-211	-216	-219
230	-24	-43	-73	-124	-161	-190	-213	-221	-226	-229
240	-26	-47	-78	-132	-170	-200	-223	-231	-236	-239
250	-28	-50	-84	-140	-179	-209	-232	-241	-246	-249
260	-30	-54	-90	-148	-189	-219	-242	-251	-256	-259
270	-32	-58	-95	-156	-198	-229	-252	-261	-266	-269
280	-35	-62	-101	-164	-207	-239	-262	-271	-276	-279
290	-37	-66	-107	-172	-217	-248	-272	-281	-286	-289
300	-39	-70	-113	-181	-226	-258	-282	-291	-296	-299

表 3: $\delta_{cr^*} = 1$ 时估计学分与准确学分差值的下限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	1	2	5	18	∞	∞
20	0	0	0	1	3	6	27	∞	∞	∞
30	0	1	1	3	6	15	128	∞	∞	∞
40	0	1	2	5	11	30	∞	∞	∞	∞
50	1	1	3	8	18	56	∞	∞	∞	∞
60	1	2	4	11	28	101	∞	∞	∞	∞
70	1	3	6	16	40	185	∞	∞	∞	∞
80	2	4	7	21	57	374	∞	∞	∞	∞
90	2	4	9	27	78	1058	∞	∞	∞	∞
100	3	5	12	35	106	∞	∞	∞	∞	∞
110	3	7	14	44	143	∞	∞	∞	∞	∞
120	4	8	17	54	191	∞	∞	∞	∞	∞
130	5	9	20	65	256	∞	∞	∞	∞	∞
140	5	11	24	78	348	∞	∞	∞	∞	∞
150	6	13	27	93	481	∞	∞	∞	∞	∞
160	7	14	31	110	691	∞	∞	∞	∞	∞
170	8	16	36	130	1057	∞	∞	∞	∞	∞
180	9	18	40	152	1840	∞	∞	∞	∞	∞
190	10	20	46	177	4608	∞	∞	∞	∞	∞
200	11	23	51	206	∞	∞	∞	∞	∞	∞
210	12	25	57	239	∞	∞	∞	∞	∞	∞
220	13	28	63	277	∞	∞	∞	∞	∞	∞
230	14	30	70	320	∞	∞	∞	∞	∞	∞
240	16	33	77	371	∞	∞	∞	∞	∞	∞
250	17	36	85	429	∞	∞	∞	∞	∞	∞
260	18	39	93	497	∞	∞	∞	∞	∞	∞
270	20	43	102	578	∞	∞	∞	∞	∞	∞
280	21	46	111	674	∞	∞	∞	∞	∞	∞
290	23	50	120	789	∞	∞	∞	∞	∞	∞
300	25	54	131	931	∞	∞	∞	∞	∞	∞

表 4: $\delta_{cr^*} = 2$ 时估计学分与准确学分差值的上限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	-1	-1	-3	-4	-7	-9
20	0	0	0	-1	-2	-4	-8	-12	-15	-19
30	0	-1	-1	-2	-4	-8	-14	-20	-24	-28
40	0	-1	-2	-4	-7	-12	-22	-28	-34	-38
50	-1	-1	-3	-6	-11	-18	-29	-38	-44	-48
60	-1	-2	-4	-8	-15	-24	-38	-47	-53	-58
70	-1	-3	-5	-11	-19	-30	-46	-56	-63	-68
80	-2	-3	-6	-14	-24	-37	-55	-66	-73	-78
90	-2	-4	-8	-17	-29	-44	-64	-76	-83	-88
100	-3	-5	-9	-21	-34	-52	-73	-85	-93	-98
110	-3	-6	-11	-24	-40	-59	-83	-95	-103	-108
120	-4	-7	-13	-29	-46	-67	-92	-105	-113	-118
130	-4	-8	-15	-33	-52	-75	-101	-115	-123	-128
140	-5	-9	-18	-37	-59	-83	-111	-124	-133	-138
150	-6	-11	-20	-42	-66	-92	-120	-134	-143	-148
160	-6	-12	-23	-47	-72	-100	-130	-144	-153	-158
170	-7	-14	-25	-52	-80	-109	-140	-154	-163	-168
180	-8	-15	-28	-57	-87	-117	-149	-164	-173	-178
190	-9	-17	-31	-62	-94	-126	-159	-174	-182	-188
200	-10	-19	-34	-68	-102	-135	-169	-184	-192	-198
210	-11	-20	-37	-73	-109	-144	-178	-194	-202	-208
220	-12	-22	-40	-79	-117	-153	-188	-204	-212	-218
230	-13	-24	-44	-85	-125	-162	-198	-214	-222	-228
240	-14	-26	-47	-91	-132	-171	-208	-224	-232	-238
250	-15	-28	-51	-97	-140	-180	-217	-233	-242	-248
260	-16	-30	-54	-104	-149	-190	-227	-243	-252	-258
270	-17	-33	-58	-110	-157	-199	-237	-253	-262	-268
280	-19	-35	-62	-117	-165	-208	-247	-263	-272	-278
290	-20	-37	-66	-123	-173	-218	-257	-273	-282	-288
300	-21	-40	-70	-130	-182	-227	-267	-283	-292	-298

表 5: $\delta_{cr^*} = 2$ 时估计学分与准确学分差值的下限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	1	1	4	10	84	∞
20	0	0	0	1	2	4	14	76	∞	∞
30	0	0	1	2	4	9	40	∞	∞	∞
40	0	1	1	3	7	17	109	∞	∞	∞
50	0	1	2	5	11	29	401	∞	∞	∞
60	1	1	3	7	17	46	∞	∞	∞	∞
70	1	2	4	10	23	69	∞	∞	∞	∞
80	1	2	5	13	32	103	∞	∞	∞	∞
90	1	3	6	17	42	152	∞	∞	∞	∞
100	2	4	8	21	54	226	∞	∞	∞	∞
110	2	4	9	26	68	345	∞	∞	∞	∞
120	3	5	11	32	85	560	∞	∞	∞	∞
130	3	6	13	38	106	1041	∞	∞	∞	∞
140	3	7	15	45	130	2921	∞	∞	∞	∞
150	4	8	17	52	159	∞	∞	∞	∞	∞
160	5	9	20	61	194	∞	∞	∞	∞	∞
170	5	11	23	70	236	∞	∞	∞	∞	∞
180	6	12	25	80	286	∞	∞	∞	∞	∞
190	6	13	28	92	348	∞	∞	∞	∞	∞
200	7	15	32	104	425	∞	∞	∞	∞	∞
210	8	16	35	117	521	∞	∞	∞	∞	∞
220	9	18	39	132	646	∞	∞	∞	∞	∞
230	9	20	43	148	810	∞	∞	∞	∞	∞
240	10	21	47	165	1036	∞	∞	∞	∞	∞
250	11	23	51	184	1362	∞	∞	∞	∞	∞
260	12	25	56	205	1869	∞	∞	∞	∞	∞
270	13	27	61	228	2760	∞	∞	∞	∞	∞
280	14	29	66	253	4711	∞	∞	∞	∞	∞
290	15	32	71	280	12264	∞	∞	∞	∞	∞
300	16	34	77	309	∞	∞	∞	∞	∞	∞

表 6: $\delta_{cr^*} = 3$ 时估计学分与准确学分差值的上限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	-1	-1	-2	-4	-6	-9
20	0	0	0	-1	-2	-3	-6	-10	-14	-18
30	0	0	-1	-2	-3	-6	-12	-17	-23	-28
40	0	-1	-1	-3	-5	-10	-18	-25	-32	-38
50	0	-1	-2	-4	-8	-14	-25	-34	-41	-48
60	-1	-1	-3	-6	-11	-19	-32	-43	-51	-58
70	-1	-2	-3	-8	-14	-24	-40	-52	-61	-67
80	-1	-2	-4	-10	-18	-30	-48	-61	-70	-77
90	-1	-3	-5	-12	-22	-36	-57	-70	-80	-87
100	-2	-3	-7	-15	-26	-42	-65	-80	-90	-97
110	-2	-4	-8	-18	-31	-49	-74	-89	-100	-107
120	-2	-5	-9	-21	-36	-55	-83	-99	-110	-117
130	-3	-6	-11	-24	-41	-63	-92	-109	-120	-127
140	-3	-7	-12	-28	-46	-70	-101	-118	-129	-137
150	-4	-7	-14	-31	-52	-77	-110	-128	-139	-147
160	-4	-8	-16	-35	-57	-85	-119	-138	-149	-157
170	-5	-9	-18	-39	-63	-93	-128	-147	-159	-167
180	-5	-11	-20	-43	-69	-101	-138	-157	-169	-177
190	-6	-12	-22	-47	-76	-109	-147	-167	-179	-187
200	-7	-13	-24	-51	-82	-117	-157	-177	-189	-197
210	-7	-14	-26	-56	-88	-125	-166	-187	-199	-207
220	-8	-15	-29	-60	-95	-133	-176	-197	-209	-217
230	-9	-17	-31	-65	-102	-142	-185	-206	-219	-227
240	-9	-18	-34	-70	-109	-150	-195	-216	-229	-237
250	-10	-20	-37	-75	-116	-159	-205	-226	-239	-247
260	-11	-21	-39	-80	-123	-167	-214	-236	-249	-257
270	-12	-23	-42	-85	-130	-176	-224	-246	-259	-267
280	-13	-24	-45	-91	-137	-185	-233	-256	-269	-277
290	-14	-26	-48	-96	-145	-194	-243	-266	-279	-287
300	-15	-28	-51	-102	-152	-203	-253	-276	-289	-297

表 7: $\delta_{cr^*} = 3$ 时估计学分与准确学分差值的下限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	1	1	3	8	33	∞
20	0	0	0	1	2	3	10	36	∞	∞
30	0	0	1	2	3	7	25	193	∞	∞
40	0	0	1	3	5	12	54	∞	∞	∞
50	0	1	1	4	8	20	112	∞	∞	∞
60	1	1	2	6	12	30	256	∞	∞	∞
70	1	1	3	8	17	43	913	∞	∞	∞
80	1	2	4	10	22	61	∞	∞	∞	∞
90	1	2	5	13	29	83	∞	∞	∞	∞
100	1	3	6	16	37	113	∞	∞	∞	∞
110	2	3	7	19	45	151	∞	∞	∞	∞
120	2	4	8	23	56	202	∞	∞	∞	∞
130	2	5	10	27	68	272	∞	∞	∞	∞
140	3	5	11	32	81	370	∞	∞	∞	∞
150	3	6	13	37	96	516	∞	∞	∞	∞
160	3	7	15	42	114	747	∞	∞	∞	∞
170	4	8	17	48	134	1164	∞	∞	∞	∞
180	4	9	19	55	157	2116	∞	∞	∞	∞
190	5	10	21	62	183	6273	∞	∞	∞	∞
200	5	11	23	70	212	∞	∞	∞	∞	∞
210	6	12	26	78	246	∞	∞	∞	∞	∞
220	6	13	28	87	285	∞	∞	∞	∞	∞
230	7	15	31	97	330	∞	∞	∞	∞	∞
240	8	16	34	107	382	∞	∞	∞	∞	∞
250	8	17	37	118	442	∞	∞	∞	∞	∞
260	9	19	40	130	512	∞	∞	∞	∞	∞
270	10	20	43	143	596	∞	∞	∞	∞	∞
280	10	22	47	156	695	∞	∞	∞	∞	∞
290	11	23	51	171	815	∞	∞	∞	∞	∞
300	12	25	54	186	963	∞	∞	∞	∞	∞

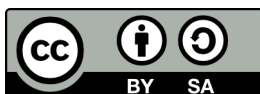
表 8: $\delta_{cr^*} = 4$ 时估计学分与准确学分差值的上限

$cr \backslash \Delta' $	0.00005	0.0001	0.0002	0.0005	0.001	0.002	0.005	0.01	0.02	0.05
10	0	0	0	0	0	-1	-2	-4	-6	-9
20	0	0	0	-1	-1	-3	-6	-9	-13	-18
30	0	0	-1	-1	-3	-5	-10	-16	-21	-28
40	0	0	-1	-2	-4	-8	-16	-23	-30	-37
50	0	-1	-1	-3	-6	-11	-22	-31	-39	-47
60	-1	-1	-2	-5	-9	-16	-28	-39	-49	-57
70	-1	-1	-3	-6	-12	-20	-36	-48	-58	-67
80	-1	-2	-3	-8	-15	-25	-43	-57	-68	-77
90	-1	-2	-4	-10	-18	-30	-51	-66	-78	-87
100	-1	-3	-5	-12	-21	-36	-59	-75	-87	-97
110	-2	-3	-6	-14	-25	-41	-67	-84	-97	-107
120	-2	-4	-7	-17	-29	-47	-75	-94	-107	-116
130	-2	-4	-8	-19	-34	-54	-84	-103	-117	-126
140	-3	-5	-10	-22	-38	-60	-93	-113	-126	-136
150	-3	-6	-11	-25	-43	-67	-101	-122	-136	-146
160	-3	-6	-12	-28	-48	-74	-110	-132	-146	-156
170	-4	-7	-14	-31	-53	-81	-119	-141	-156	-166
180	-4	-8	-16	-34	-58	-88	-128	-151	-166	-176
190	-5	-9	-17	-38	-63	-96	-137	-161	-176	-186
200	-5	-10	-19	-41	-69	-103	-147	-171	-186	-196
210	-6	-11	-21	-45	-75	-111	-156	-180	-196	-206
220	-6	-12	-23	-49	-80	-118	-165	-190	-206	-216
230	-7	-13	-25	-53	-86	-126	-174	-200	-216	-226
240	-7	-14	-27	-57	-92	-134	-184	-210	-226	-236
250	-8	-15	-29	-61	-99	-142	-193	-219	-235	-246
260	-8	-16	-31	-66	-105	-150	-203	-229	-245	-256
270	-9	-18	-33	-70	-111	-158	-212	-239	-255	-266
280	-10	-19	-35	-74	-118	-167	-222	-249	-265	-276
290	-10	-20	-38	-79	-125	-175	-231	-259	-275	-286
300	-11	-21	-40	-84	-131	-183	-241	-269	-285	-296

表 9: $\delta_{cr^*} = 4$ 时估计学分与准确学分差值的下限

声明

1. 博客内容仅为经验之谈，如认为有问题请带着批判性思维自行辨别或与我讨论，本人不负责因盲目应用博客内容导致的任何损失。
2. 虽然文章的思想不一定是原创的，但是写作一定是原创的，如有雷同纯属巧合。
3. 本作品采用[知识共享署名-相同方式共享 4.0 国际许可协议](#)进行许可。



博客信息 此文章的博客来源: <https://vortexer99.github.io/>

自豪地采用 $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$!