流体力学　第 1 次作业

庄逸

2017K8009907061　　理论与应用力学专业

1. 使两个半径分别为 a_1 及 a_2 的球形肥皂泡合并，合并后肥皂泡内的气体温度恢复到初始值，试证明合并后的肥皂泡半径 r 满足：

$$p_0 r^3 + 4\sigma r^2 = p_0(a_1^3 + a_2^3) + 4\sigma(a_1^2 + a_2^2) \tag{1}$$

其中 p_0 为环境压强，σ 为空气-液体表面处的张力系数。

设合并前肥皂泡内部气压分别为 p_1, p_2，合并后内部气压为 p，根据 Young-Laplace 方程有

$$p_1 = p_0 + \frac{4\sigma}{a_1} \tag{2a}$$

$$p_2 = p_0 + \frac{4\sigma}{a_2} \tag{2b}$$

$$p = p_0 + \frac{4\sigma}{r} \tag{2c}$$

再根据理想气体方程，有

$$\frac{4}{3}\pi a_1^3 p_1 = n_1 RT \tag{3a}$$

$$\frac{4}{3}\pi a_2^3 p_2 = n_2 RT \tag{3b}$$

$$\frac{4}{3}\pi r^3 p = nRT \tag{3c}$$

由物质的量守恒，

$$n = n_1 + n_2 \tag{4}$$

于是得

$$p_1 a_1^3 + p_2 a_2^3 = p r^3 \tag{5}$$

再代入 式 2 ，即得

$$p_0 r^3 + 4\sigma r^2 = p_0(a_1^3 + a_2^3) + 4\sigma(a_1^2 + a_2^2) \tag{6}$$

2. 若两小固体漂浮在液面上。试说明，当两固体均被液体浸润或当它们均不被浸润时，表面张力的作用是使相邻两固体相互接近；当一个是被浸润而另一个不被浸润时，表面张力是使它们彼此远离。

以下内容根据文章 [1] 总结得到。

简单来说，这一现象是由浸润和不浸润的物体，使液面产生不同形状的变形而导致的。考虑一个浮在液面下的气泡和浮在水面的回形针，气泡有向上浮的趋势，但表面张力使得气泡被束缚在液面上，使得液面产生一个向上的弧度，即可视为是浸润的状况，而回形针有下沉的趋势，表面张力托着它不下沉，而液体则产生向下的变形，对于不浸润的状况。当气泡遇到回形针时，由于回形针处液面向下弯曲，而气泡是有向上运动的趋势，因此气泡会向液面较高处，即远离回形针运动。而两个回形针相遇时，由于回形针有下沉的趋势，而另一回形针使得液面向下弯曲，故两个回形针会互相吸引。

但是，这一命题不完全正确。在一个实验中，当两个带塑料盖的图钉漂浮在水面上时，两个图钉会互相吸引；而当把一个图钉和其塑料盖分离，仅让塑料盖和另一个带盖的图钉漂浮在水面上时，此二者又相互排斥。在两种情况下，物体的浸润情况都由塑料盖决定，而与是否含图钉无关。但实验结果与预期相违背，说明还有未考虑到的因素。从实验中可发现物体的密度发生了较大变化，因此还需要把浮力加入考虑范围内。

两球形粒子。漂浮在液面上时，通过液面变形形成相互作用能，相互作用力由 式 7

$$F = -2\pi\gamma R B^{3/2} K_1(l/L_c)(B\Sigma_1)(B\Sigma_2) \tag{7}$$

给出，式中 γ 为表面张力系数，B 为 Bond number，l 为距离，L_c 为 Capillary Length。Σ 表征密度和浸润性质的影响，即

$$\Sigma_i = \frac{2\rho_s/\rho - 1}{3} - \frac{1}{6}\cos\theta\left(2+\sin^2\theta\right) \tag{8}$$

其中 ρ 为液体密度，ρ_s 为物体密度，θ 为接触角。可以看到，当物体密度为液体一半时，第一项消失，Σ_i 完全由接触角决定，且接触角小于 $90°$，表示浸润，Σ_i 就小于零；反之在不浸润的情况下则大于零。因此，在此密度条件下，两物体浸润性质不同，$\Sigma_1\Sigma_2$ 就小于零，F 就大于零，表示排斥力；性质相同，F 就小于零，表示吸引力。

但是在密度取其他值时，情况就有些不同。 式 8中接触角项取值范围为 $\pm 1/3$ 之间，在物体密度接近液体密度时，Σ_i 几乎总是正的，而在物体密度接近零时，Σ_i 几乎总是负的。也就是说，在上面的实验中，物体密度变小，即浸润特性没有变化，Σ_i 也可能发生变号，导致吸引变为排斥。

3. 表征流体三种输运能力的三个宏观属性系数分别为粘性系数 μ，热传导系数 k，和扩散系数 D，试通过调研，提出三个系数的实验测量方案。

粘性系数 μ 的测量

实验原理 利用小雷诺数近似，可得小球在粘性流体中运动时会受到如 式 9所示的粘性力 [2]。

$$F_f = 6\pi r\mu v \tag{9}$$

其中 r 为小球半径，v 为运动速度。故小球仅在重力作用下，在流体中运动时，运动规律受到粘性力、浮力、重力支配，运动方程为

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - F_b - 6\pi r\mu v \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{6\pi r\mu}{m}v = \frac{(mg - F_b)}{m} \tag{10}$$

其中 ρ 为液体密度，F_b 为浮力，g 为重力加速度。由 式 10，考虑 $v(0) = 0$，可解得

$$v = \frac{mg - F_b}{6\pi r\mu}\left(1 - \mathrm{e}^{-6\pi r\mu t/m}\right) \tag{11}$$

再积分一次，由 $x(0) = 0$，解得时间 t 内经过的路程

$$x = \frac{mg - F_b}{6\pi r\mu}\left(t + \frac{m}{6\pi r\mu}\mathrm{e}^{-6\pi r\mu t/m} - \frac{m}{6\pi r\mu}\right) \tag{12}$$

让小球悬在液体中不同高度，开始下落时计时，听到碰底声音时停止计时，即得到一组 $x - t$ 数据。由于粘度系数对运动的影响是单向的，故由一组 $x - t$ 数据有且仅能数值方法解出一个 μ 值。改变高度进行实验，可多次测量检验。

实验器材 待测液体，密度较大的可栓细线小球，细线若干，铁架台，剪刀，较大截面积、底面平坦的敞口亚克力或其他硬质材料容器，弹簧测力计，游标卡尺，卷尺，停表。

实验步骤

1. 用游标卡尺量出小球直径，算出半径 r；
2. 向容器中注适量的待测液体；
3. 在小球上挂上细线，悬在空气中，用弹簧测力计测出重力 mg，查出当地重力加速度 g，算出质量 m；
4. 让弹簧测力计挂着小球，并让小球浸入液体中，测出重力与浮力之差 $mg - F_b$；
5. 将小球悬挂在铁架台上，慢慢向下放细绳，直到小球刚好碰到容器底，在此时悬挂点的绳子上用做一个记号；
6. 回拉细绳并再次悬挂，将小球提升一定高度，不要超出页面，在此时悬挂点的绳子上再做一个记号；
7. 用剪刀剪断小球上方细绳，并同时开始计时；
8. 当听到小球碰底的声音或看到小球碰底（若液体透明）时，停止计时，得到时间 t；

9. 将上段绳子拉直，量出细绳上两记号点之间长度，得到距离 x。
10. 由 $x-t$ 和式 式 12用数值方法解出 μ。换用新的细绳，重复实验。

实验评价 和传统的落球法相比，本实验方案的优势在于可以测量不透明液体的粘度系数，也不需要很长的运动时间使得小球达到最终速度，并且用到的实验设备也较为简单。但是通过声音来判断小球到达底部可能存在一定误差，小球拴上细绳后对流场也可能有一定影响，数值求解也有一定误差。

热导率 k 的测量

实验原理 在盛满待测液体的容器中的金属丝，在通电时会产生热量，使得液体温度升高，进而导致金属丝温度升高，表现为电阻值发生变化。通过测量金属丝电阻变化规律，可得到液体的热传导系数为 [3]

$$k = \frac{I^3}{4\pi L}\frac{\mathrm{d}R_w}{\mathrm{d}T}\frac{R_w s}{R_w + s}\Bigg/\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}\ln t} \tag{13}$$

式中 I 为通过金属丝的电流，L 为金属丝的长度，$\frac{\mathrm{d}R_w}{\mathrm{d}T}$ 为金属丝的电阻随温度一阶变化率，R_w 为金属丝阻值，s 为电桥内阻。

实验器材 待测液体，带固定金属丝装置的可密封圆柱形容器，电压表，可调电源，电桥，金属丝，导线若干。

实验步骤

1. 将金属丝固定在圆柱形容器中，量出容器中金属丝的长度 L，将容器充满待测液体后密封；
2. 将金属丝两端和电压表连接到电桥上，连接上电源；
3. 打开电源，给一微小电流，由电压和电流测出当前金属丝的电阻值 R_w，关闭电源后等待一段时间；
4. 打开电源，持续供给电流，约为 $22-23$mA（对铂丝而言），即得 I；
5. 每隔一定时间记录下经过的时间和当前电压表读数。结束后关闭电源；
6. 用作图法等方法求出 $\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}\ln t}$,查出材料对应的电阻温度系数 $\frac{\mathrm{d}R_w}{\mathrm{d}T}$,电桥内阻 s,由 式 13计算出热导率。

实验评价 本方案原理较难，可密封且可固定金属丝的容器较难获得，输入参量也较难控制，但是电路的组装较为简便。也可用电压记录仪来自动记录电压-时间线。

扩散系数 D 的测量

实验原理 一维待测液体中的扩散现象满足扩散方程

$$t = Dxx \tag{14}$$

其中 $c(x,t)$ 为扩散物质的浓度。当由物质由一点开始扩散时，近似为初值条件

$$c(x,0) = \delta(x) \tag{15}$$

待测液体装在玻璃细管中，在扩散短时间内两端可视为无限长，得到扩散方程的解为

$$c(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{D\pi t}}\mathrm{e}^{-x^2/4Dt} \tag{16}$$

于是在原点处浓度变化规律为

$$c(0,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi Dt}} \tag{17}$$

浓度可先由激光发生器和检测器检测穿过不同标准溶液前后光强比值的对数 [4] 制成表查得。

实验器材 待测液体，用于扩散的液体（如黑墨水），激光发射器和检测器，T 形三通玻璃细管，相同直径的玻璃细管，滴管，夹持装置，用于封住玻璃管的弹性膜等。

实验步骤

1. 首先制表备查。测出玻璃细管的体积，将其充满待测液体，加入一定物质的量的用于扩散的液体，封住两端；
2. 在混合均匀后，将玻璃细管水平夹持，让激光发射器发射垂直细管，通过直径的激光，测量通过细管前后的光强比值的对数；
3. 将玻璃细管一端启封，再加入一定物质的量用于扩散的液体，重复测量，制得不同浓度下通过细管后光强比值的对数表。
4. 将 T 形三通玻璃管水平两端封住，另一端竖直向上，用夹持装置固定。从上口装入待测液体，直至液体刚好充满倒 T 形玻璃管的底部两端玻璃管。
5. 让激光发射器通过 T 形玻璃管交点中心，先用检测器检测激光发射时光强，再安置在另一端，记录光强随时间的变化规律。
6. 用滴管从 T 形玻璃管上口快速加入适量用于扩散的液体，观察光强随时间变化规律，一段时间后关闭，收拾整理装置。
7. 将光强随直接的变化规律除以激光刚射出时的光强，再取对数，相应查表插值得出浓度随时间变化规律。

8. 选择合适的数据范围，根据 式 17求出扩散系数 D。

实验评价 本实验原理基于扩散方程的求解，但实际情况可能与扩散方程有一定差距，例如初始条件不完全适合用 δ 函数近似，扩散距离也并非是完全一维无限长。另外，由于混合情况可能很复杂，光强比值可能变化不明显或不是浓度的单值函数，或甚至不透光，用制作标准溶液然后查表的方式来确定浓度也不完全合适。如果在 T 形玻璃管中间交点处采集数据效果不佳，可以采用别的点。

参考文献

[1] **D. Vella and L. Mahadevan**.
The 'Cheerios effect'.
In: *American Journal of Physics* 73.9 (2004): 817–825.

[2] Viscometer - Wikipedia.
https://en.wikipedia.org/wiki/Viscometer.
(Accessed on 09/16/2019).

[3] **Y. Nagasaka and A. Nagashima**.
Simultaneous measurement of the thermal conductivity and the thermal diffusivity of liquids by the transient hot-wire method.
In: *Review of Scientific Instruments* 52.2 (1981): 229–232. DOI: 10.1063/1.1136577.

[4] En.wikipedia.org.
https://en.wikipedia.org/wiki/Beer-Lambert_law.
(Accessed on 09/16/2019).