【悬赏 001】

求证：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n = n! \quad (\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*)$$

请找出纯代数证法。

【等价命题】

$$\mathrm{A}: \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n = n! \quad (\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*)$$

$$\mathrm{B}: \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k}\mathrm{C}_n^k (n-k)^n = n! \quad (\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*)$$

$$\mathrm{C}: \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}k^n}{k!\,(n-k)!} = 1 \quad (\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*)$$

【说明】

很神奇，利用正整数的幂次和组合数表示出了阶乘。

举几个例子：$1! = \mathrm{C}_1^1 1^1 = 1$

$2! = -\mathrm{C}_2^1 1^2 + \mathrm{C}_2^2 2^2 = -2 + 4 = 2$

$3! = \mathrm{C}_3^1 1^3 - \mathrm{C}_3^2 2^3 + \mathrm{C}_3^3 3^3 = 3 - 24 + 27 = 6$

$4! = -\mathrm{C}_4^1 1^4 + \mathrm{C}_4^2 2^4 - \mathrm{C}_4^3 3^4 + \mathrm{C}_4^4 4^4$

$\quad = -4 + 96 - 324 + 256 = 24$

【问题背景】

① m 个不同的球放进 n 个不同的盒子里，

要求每个盒子至少有一个球，方案总数

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^m$$

当 m=n 时，每个盒子里只能装一个球，

显然方案总数为 n!，于是

$$f(n,n) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n = n!$$

注：这是一种证法，但比较好奇有没有

不构造实际情景，纯代数的证法。

② 一号数学研究指出，n 次幂可以分解成阶乘和

$$n^m = \sum_{s=0}^{m-1} x_{m,s} \prod_{q=0}^{s}(n-q)$$

其中$x_{m,s}$为第二类斯特林数

$$x_{m,s} = \frac{1}{s!}\sum_{k=0}^{s}(-1)^k \mathrm{C}_s^k (s-k)^m$$

命题等价于求证$x_{m,m} = 1$

③ 一号数学研究指出，n 次幂可以分解成阶乘和

而所需证明的等式是用阶乘和合成 n 次幂，

似乎有互逆关系。

【悬赏 001】

求证：

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^n=n!\quad(\mathrm{n}\in\mathbf{N}^*)$$

请找出纯代数证法。

【证】

引理

范德蒙行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}\left(x_j-x_i\right)$

证略。

断言 $\sum_{j=0}^{n}(-1)^j f\left(b_j\right)C_n^j=(-1)^n a_n n!\,d^n$

其中 $f(x)=a_n x^n+\cdots+a_0,\{b_n\}$是公差为$d$的等差数列$,d\neq 0$

令$f(x)=x^n,b_n=n,$则$d=1$

即得到$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j j^n C_n^j=(-1)^n n!$

断言的证明：

记$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_{n+1}^n\end{vmatrix}$$,$由引理$,D=\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(b_j-b_i\right)$

记D第$n+1$行j列位置$\left(\text{即}b_j^n\right)$的余子式为$D_j$（非代数余子式）

$D_j=\begin{vmatrix}1 & \cdots & \hat{1} & \cdots & 1\\ b_1 & \cdots & \widehat{b_j} & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ b_1^{n-1} & \cdots & \widehat{b_j^{n-1}} & \cdots & b_{n+1}^{n-1}\end{vmatrix}$$,$其中$\begin{pmatrix}\hat{1}\\ \widehat{b_j}\\ \vdots\\ \widehat{b_j^{n-1}}\end{pmatrix}$表示行列式中除去这一列

由引理可知$D_j=\prod_{\substack{1\le s<t\le n+1\\ s,t\neq j}}\left(b_t-b_s\right)=\dfrac{(-1)^{n+1+j}\prod_{1\le s<t\le n+1}\left(b_t-b_s\right)}{\prod_{\substack{1\le s<t\le n+1\\ s=j}}\left(b_t-b_s\right)\prod_{\substack{1\le s<t\le n+1\\ t=j}}\left(b_t-b_s\right)}$

$=\dfrac{D}{\prod_{j<t\le n+1}\left(b_t-b_j\right)\prod_{1\le s<j}\left(b_j-b_s\right)}$

由b_n的等差数列性质可知$,b_t-b_j=(t-j)d,b_j-b_s=(j-s)d,$

$$\prod_{j<t\le n+1}\left(b_t-b_j\right)=\prod_{t=j+1}^{n+1}(t-j)d=(n+1-j)!\ d^{n+1-j}$$

$$\prod_{1\le s<j}\left(b_j-b_s\right)=\prod_{s=1}^{j-1}(j-s)d=(j-1)!\ d^{j-1}$$

于是$D_j=\dfrac{D}{(n+1-j)!\ d^{n+1-j}(j-1)!\ d^{j-1}}=\dfrac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}$

考虑$D'=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ f(b_1) & f(b_2) & \cdots & f(b_{n+1})\end{vmatrix}$

注意到D'与D仅有最后一行不同,将D'由最后一行展开,得到

$$D'=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)D_j=\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)\frac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}$$

另一方面,由行列式的行变换,可将$f\left(b_j\right)$次数低于n的项全部消去

可知$D'=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_nb_1^n & a_nb_2^n & \cdots & a_nb_{n+1}^n\end{vmatrix}=a_nD$

于是$\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)\frac{C_n^{j-1}D}{n!\ d^n}=a_nD$

由$d\neq 0$ 可知$\{b_n\}$互不相同,由引理可知$D\neq 0$

约去D,整理得到$\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1}C_n^{j-1}(-1)^{n+1+j}f\left(b_j\right)=n!\,a_n\,d^n$

即$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}C_n^{j}(-1)^{j}f\left(b_j\right)=(-1)^n n!\,a_n\,d^n$ ■

【思考】

$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}f\left(b_j\right)C_n^j=(-1)^n a_n n!\,d^n$是一个很有用的式子，从几方面考量它的意义。

首先,待定量是多项式$f(x)$和等差数列b_n,这个式子将它们联系起来。

其次，公式可以变形为$a_n=\dfrac{1}{n!\,d^n}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}f\left(b_j\right)C_n^j\right)$

这就是说我们能通过多项式在$n+1$ 个等间隔点的值确定出多项式的首项系数。

不过这是比插值公式相对较弱的一个结论。

再者，对于形如$\displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-1)^{j}C_n^j y_n$ 的式子，今后也有办法可以计算。

只需要找$f(x)$,使得f在一系列等差点$b_0,\ldots,b_n$上分别取到$y_0,\ldots,y_n$

由于取等差点的目的只是为了求得首项系数，可以考虑$0,1,\dots,n$

通过插值公式，能得到$f(x)$的首项系数，则该式的值为$(-1)^n n!\,a_n\,d^n$

【一个推论】

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j f\left(b_j\right) = (-1)^n n!\,a_n\,d^n$$

当$f(x)$最高次系数为$k, k < n$时, $a_n = 0$

此时$\sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j f\left(b_j\right) = 0$

特别地,取$f(x) = x^k, k < n, b_j = j, \sum_{j=0}^{n} C_n^j (-1)^j j^k = 0$

这是悬赏 002 的主题。

更多应用可见参考文献相关内容。

【说明】

这个解法已经十分巧妙，并且也算是符合了代数证法的要求。当然，如果你有其他更巧妙的方法，也欢迎分享给我。

【参考文献】

历届美国大学生数学竞赛试题集——第一卷（1938~1949）:152-156

【悬赏 002】

函数$f(m,n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\mathrm{C}_n^k k^m \quad (m,n\in\boldsymbol{N}^*)$

请从代数角度证明:

当$m<n$时$f(m,n)\equiv 0$

【等价命题】

A:函数 f 中到底是什么结构决定了这么一个性质?

B:能否构造出一个“正常”（如不间断，不分段，不单独定义，

解析式不复杂，可描点，无高等函数等）的二元函数

也具有类似的性质?

如果能，它们有什么共同点?

【说明】

看一下函数值表。

1	0	0	0	0	0	0	0
1	2	0	0	0	0	0	0
1	6	6	0	0	0	0	0
1	14	36	24	0	0	0	0
1	30	150	240	120	0	0	0
1	62	540	1560	1800	720	0	0
1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0
1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320

注意到左下角都是一般的正数，右上角却全为 0

划重点，刚好全是 0，而不是别的什么。

举几个例子:

$$f(1,2)=\sum_{k=0}^{2}(-1)^{2-k}\mathrm{C}_2^k k^1=-2+2=0$$

$$f(3,4)=\sum_{k=0}^{4}(-1)^{4-k}\mathrm{C}_4^k k^3=-4+48-108+64=0$$

$$f(3,5)=\sum_{k=0}^{5}(-1)^{5-k}\mathrm{C}_5^k k^3=5-80+270-320+125=0$$

$$f(4,7)=\sum_{k=0}^{7}(-1)^{7-k}\mathrm{C}_7^k k^4$$

$$=7-336+2835-8960+13125-9072+2401=0$$

每一项数字有比十小的个位数，也有成百上千，

然而到底是什么魔力使得它们之和总刚好为 0?

【问题背景】

① $f(m,n)$为 m 个不同的球放进 n 个不同的盒子，

要求每个盒子至少有一个球的方案总数，显然

当 m<n 时，找不到满足要求的方案。

注：这是一种证法，但比较好奇有没有

不构造实际情景，纯代数的证法。

② 第二类斯特林数 S 也有类似的性质。

它与 f 的关系如下

$$\mathrm{S}(m,n)=\frac{1}{n!}f(m,n)$$

【进展】

在【悬赏 001·解】中，利用

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j f\left(b_j\right)=(-1)^n n!\,a_n\,d^n$$

得到了$k<n$时

$$\sum_{j=0}^{n} C_n^j(-1)^j j^k=0$$

【悬赏 003】

定义$p_k \coloneqq \sum_{t=1}^{n} x_t^k \ (k \in \mathbf{Z})$

试用初等对称多项式$s_1, s_2, \dots, s_n$,

表示出$p_k \coloneqq \sum_{t=1}^{n} x_t^k \ (k < 0 \text{ 时})$

递推式亦可。

【等价命题】

A: 试用初等对称多项式表示出$\sum_{t=1}^{n} \prod_{\substack{r=1 \\ r \neq t}}^{n} x_r^k$

【说明】

初等对称多项式形式与韦达定理相同。

$s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$

…

$s_n = x_1x_2 \dots x_n$

当$k = -1$ 时，事情还比较简单。

$$p_{-1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} = \frac{s_{n-1}}{s_n}$$

当$k = -2$ 时，就十分困难了。

$$p_{-2} = \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \cdots + \frac{1}{x_n^2}$$

$$= \frac{x_2^2 x_3^2 \dots x_n^2 + \cdots + x_1^2 x_2^2 \dots x_{n-1}^2}{s_n^2}$$

经由电脑计算找规律得到

$$p_{-2} = \frac{s_{n-1}^2 - 2s_{n-2}s_n}{s_n^2}$$

$$p_{-3} = \frac{s_{n-1}^3 - 3s_{n-2}s_{n-1}s_n + 3s_{n-3}s_n^2}{s_n^3}$$

【背景】

关于s_k和p_k的联系，有如下的牛顿公式

$$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}s_{k-1}p_1+(-1)^k s_k k=0,\qquad 1\le \mathrm{k}\le \mathrm{n}$$

$$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_{k-n+1}+(-1)^n s_n p_{k-n}=0,\qquad \mathrm{k}\ge \mathrm{n}$$

结合克拉默公式有

$$p_k=\begin{vmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 2s_2 & s_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 3s_3 & s_2 & s_1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (k-1)s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & s_{k-4} & \cdots & 1\\ ks_k & s_{k-1} & s_{k-2} & s_{k-3} & \cdots & s_1 \end{vmatrix}$$

$$s_k=\frac{1}{k!}\begin{vmatrix} p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ p_2 & p_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ p_3 & p_2 & p_1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & p_{k-4} & \cdots & 1\\ p_k & p_{k-1} & p_{k-2} & p_{k-3} & \cdots & p_1 \end{vmatrix}$$

在证明牛顿公式的过程中(非标准证法),

设$x_1,x_2,\dots,x_n$为方程$x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的n个互不相同的根。

则$s_1=-a_1, s_k=(-1)^k a_k$,因而$a_k=(-1)^k s_k$

于是$x^n-s_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n s_n=0$

在$k\ge n$时，方程两边乘x^{k-n}，并代入$x_1,x_2,\dots,x_n$求和后得到

$$p_k-s_1p_{k-1}+s_2p_{k-2}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_{k-n+1}+(-1)^n s_n p_{k-n}=0$$

在$k\le n$时，先考虑$k=n-1$,方程两边除以x，并代入$x_1,x_2,\dots,x_n$求和后得到

$$p_{n-1}-s_1p_{n-2}+s_2p_{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}s_{n-1}p_0+(-1)^n s_n p_{-1}=0,$$

利用$p_{-1}=\frac{s_{n-1}}{s_n}$，$p_0=n$得到

$$p_{n-1}-s_1p_{n-2}+s_2p_{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)s_{n-1}=0,$$

命题成立。

在$k=n-r$时，做类似的操作，则需要考虑$p_{-1},p_{-2},\dots,p_{-r}$

由于$p_k(k<0)$表达式难以求得，因而这样无法证明牛顿公式第一式。

但是牛顿公式可以用别的方法证得，也许能由牛顿公式去反推$p_{-1},p_{-2},\dots,p_{-r}$

*我觉得这样至少能摆弄个递推公式出来，把这个机会留给读者。

【悬赏 003 解】

设$x_1, x_2, \dots, x_n$的初等对称多项式

$s_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$s_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$

…

$s_n = x_1x_2 \dots x_n$

再类似地,

设$y_1, y_2, \dots, y_n$的初等对称多项式为

$t_1, t_2, \dots, t_n$, 并且规定

$$y_k = \frac{1}{x_k}, k = 1,2, \dots, n$$

设$p_k = \sum_{t=1}^{n} x_n^k$, $q_k = \sum_{t=1}^{n} y_n^k$

则$p_{-k} = q_k$

当$k > 0$ 时

由牛顿公式等知

q_k可用$q_1, \dots, q_{k-1}$和$t_1, \dots, t_k$递推表示

或可直接用$t_1, \dots, t_k$表示。

因此要想用$s_1, \dots, s_n$表达p_{-k},

只需用$s_1, \dots, s_n$表示$t_r, r = 1,2, \dots, k$

作一些试验:

$$t_1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}$$

通分后分母显然为s_n ,分子为n项之和,

每一项都是x_1到x_n缺一项的乘积

刚好为s_{n-1}, 于是$t_1 = \frac{s_{n-1}}{s_n}$

$$t_2 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}x_n}$$

通分后分母仍然为s_n

分子的每一项是x_1到x_n缺两项的乘积

刚好为s_{n-2}

以此类推, 可得

$$t_k = \frac{s_{n-k}}{s_n}$$

在牛顿公式中，将p换为q, s换为t，k换为k', 即

$$q_{k'} - t_1 q_{k'-1} + t_2 q_{k'-2} + \cdots + (-1)^{k'-1} t_{k'-1} q_1 + (-1)^{k'} t_{k'} k' = 0, \qquad 1 \le k' \le n$$
$$q_{k'} - t_1 q_{k'-1} + t_2 q_{k'-2} + \cdots + (-1)^{n-1} t_{n-1} q_{k'-n+1} + (-1)^{n} t_n q_{k'-n} = 0, \qquad k' \ge n$$

并代入

$$t_{k'} = \frac{s_{n-k'}}{s_n}\,, q_{k'} = p_{-k'}\,, k' = -k$$

得到

$$p_k - \frac{s_{n-1}}{s_n} p_{k+1} + \frac{s_{n-2}}{s_n} p_{k+2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{s_{n+k+1}}{s_n} p_{-1} + (-1)^k \frac{s_{n+k}}{s_n}(-k) = 0, \qquad -n \le k \le -1$$
$$p_k - \frac{s_{n-1}}{s_n} p_{k+1} + \frac{s_{n-2}}{s_n} p_{k+2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{s_1}{s_n} p_{n+k-1} + (-1)^n \frac{s_0}{s_n} p_{n+k} = 0, \qquad k \le -n$$

关于行列式，类似有

$$q_{k'} = \begin{vmatrix} \frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2\frac{s_{n-2}}{s_n} & \frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 3\frac{s_{n-3}}{s_n} & \frac{s_{n-2}}{s_n} & \frac{s_{n-1}}{s_n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k'-1)\frac{s_{n-k'+1}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+2}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+3}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+4}}{s_n} & \cdots & 1 \\ k'\frac{s_{n-k'}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+1}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+2}}{s_n} & \frac{s_{n-k'+3}}{s_n} & \cdots & \frac{s_{n-1}}{s_n} \end{vmatrix}$$
$$= \frac{1}{s_n^{k'}} \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & 0 & \cdots & 0 \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (k'-1)s_{n-k'+1} & s_{n-k'+2} & s_{n-k'+3} & s_{n-k'+4} & \cdots & s_n \\ ks_{n-k'} & s_{n-k'+1} & s_{n-k'+2} & s_{n-k'+3} & \cdots & s_{n-1} \end{vmatrix}$$

于是$p_k = s_n^k \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & 0 & \cdots & 0 \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} & s_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-k-1)s_{n+k+1} & s_{n+k'+2} & s_{n+k'+3} & s_{n+k'+4} & \cdots & s_n \\ -ks_{n+k} & s_{n+k'+1} & s_{n+k'+2} & s_{n+k'+3} & \cdots & s_{n-1} \end{vmatrix} (\mathrm{k} < 0)$

作为验算，考虑

$$p_{-2} = \frac{1}{s_n^2} \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{s_{n-1}^2 - 2s_{n-2}s_n}{s_n^2}$$
$$p_{-3} = \frac{1}{s_n^3} \begin{vmatrix} s_{n-1} & s_n & 0 \\ 2s_{n-2} & s_{n-1} & s_n \\ 3s_{n-3} & s_{n-2} & s_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{s_{n-1}^3 + 3s_n^2 s_{n-3} - 3s_n s_{n-1} s_{n-2}}{s_n^3}$$

与之前电脑计算得到的结果相同。

【悬赏 004】

定义运算$(x)_0=1$

$(x)_n=x(x-1)\dots(x-n+1), n\in\mathbf{N}^*$

证明：

$$(a+b)_n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\,(a)_{n-k}(b)_k$$

【高级目标】

利用$(x)_n$和x^n的相似性证明上面的命题。

【说明】

长得特别像二项式定理，

结合悬赏 001 还有之前的一号数学研究，

似乎可以说$(x)_n$和普通的幂x^n有相似的性质。

不知道有没有可能找一个群同构，

或者类似的东西来帮助证明以上命题？

【例子】

$$(a+b)_1=\sum_{k=0}^{1}\mathrm{C}_1^k\,(a)_{1-k}(b)_k=a+b$$

$$(a+b)_2=(a+b)^2-(a+b)=a^2+2ab+b^2-a-b$$

$$\sum_{k=0}^{2}\mathrm{C}_2^k\,(a)_{2-k}(b)_k=(a)_2+2ab+(b)_2=a^2-a+2ab+b^2-b$$

$$(a+b)_3=(a+b)^3-3(a+b)^2+2(a+b)$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3-3a^2-6ab-3b^2+2a+2b$$

$$\sum_{k=0}^{3}\mathrm{C}_3^k\,(a)_{3-k}(b)_k=(a)_3+3(a)_2(b)_1+3(a)_1(b)_2+(b)_3$$

$$=a^3-3a^2+2a+3a^2b-3ab+3ab^2-3ab+b^3-3b^2+2b$$

【背景】

① $(x)_n$称为 Pochhammer 函数，在维基百科它的词条（亦'Falling and rising factorials'）中记载了需要证明的等式，但似乎没有直接给出证明。

② 在维基百科'Binomial type'词条中，满足关系式

$$p_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p_k(x)\,p_{n-k}(y).$$

的多项式序列p_n被称作具有二项式性质，

它们形成一个集合，除了$(x)_n$外，

阿贝尔多项式$p_n(x)=x(x-an)^{n-1}$等也在其中。

③ 一号数学研究指出

$$x^n = \sum_{t=1}^{n} \mathrm{S}_{n,t-1}(x)_t$$，其中$\mathrm{S}_{\mathrm{n,m}}$为第二类斯特林数

满足$S_{n,m} = \dfrac{1}{m!}\displaystyle\sum_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k (m-k)^n$

④ 无符号的第一类斯特林数$c_{n,m}$，

表示n个不同元素构成m个圆排列的数目

带符号的第一类斯特林数$s_{n,k} = (-1)^{n-k} c_{n,k}$

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} s_{n,k} x^k,$$

和上面的相反，把阶乘拆成了幂次和。