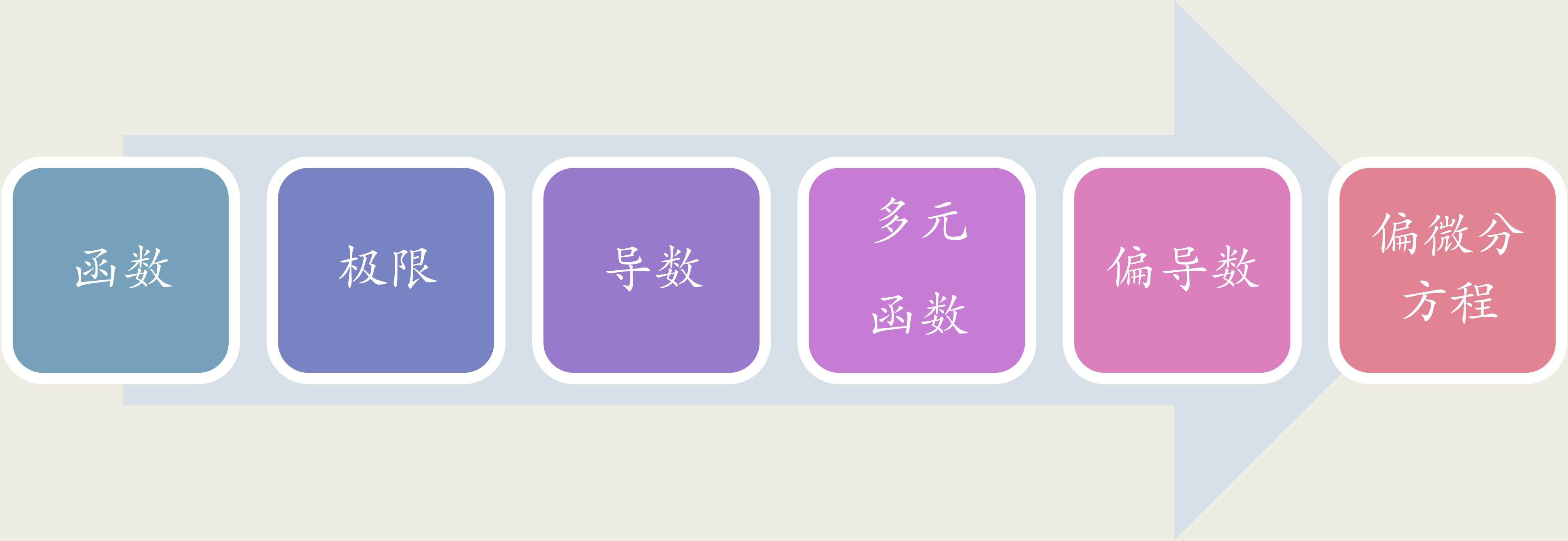
多重变换的刻画

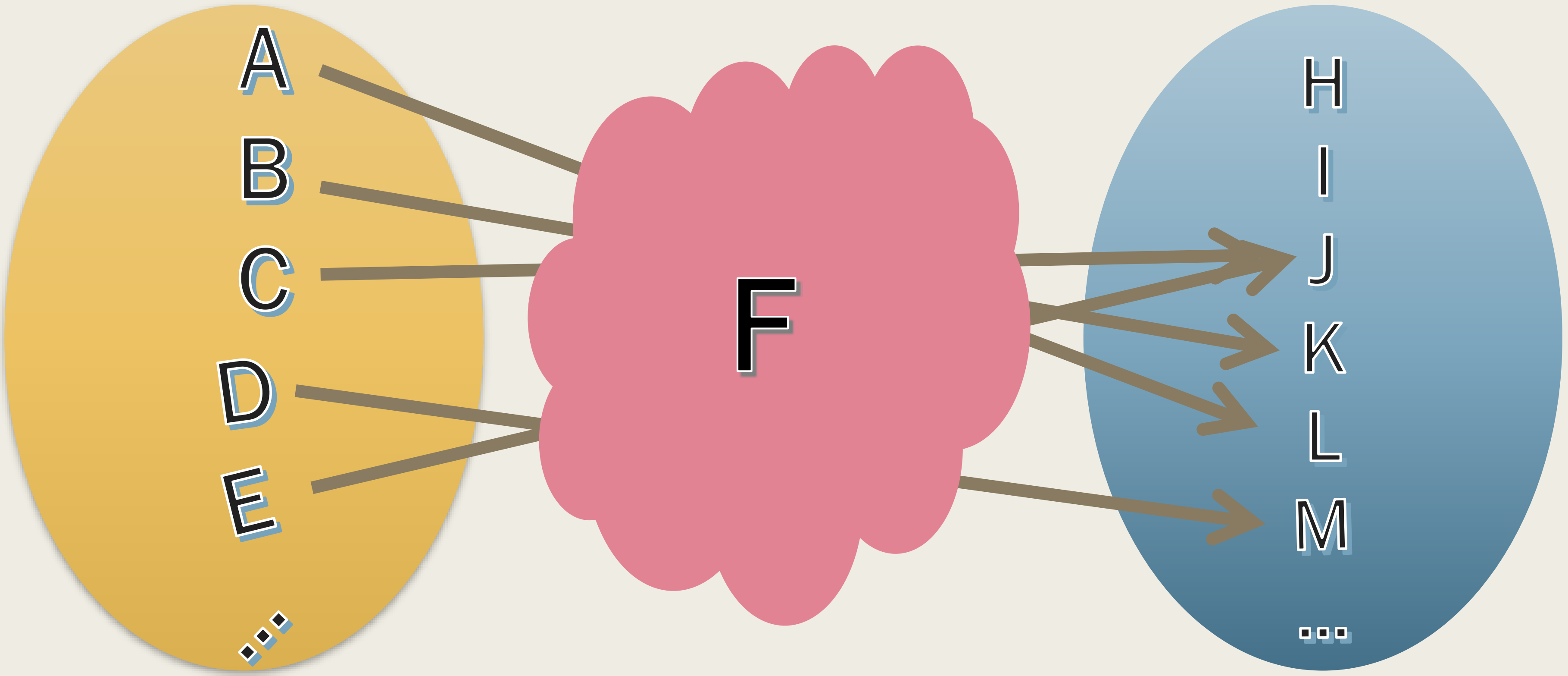
——偏微分方程

庄逸

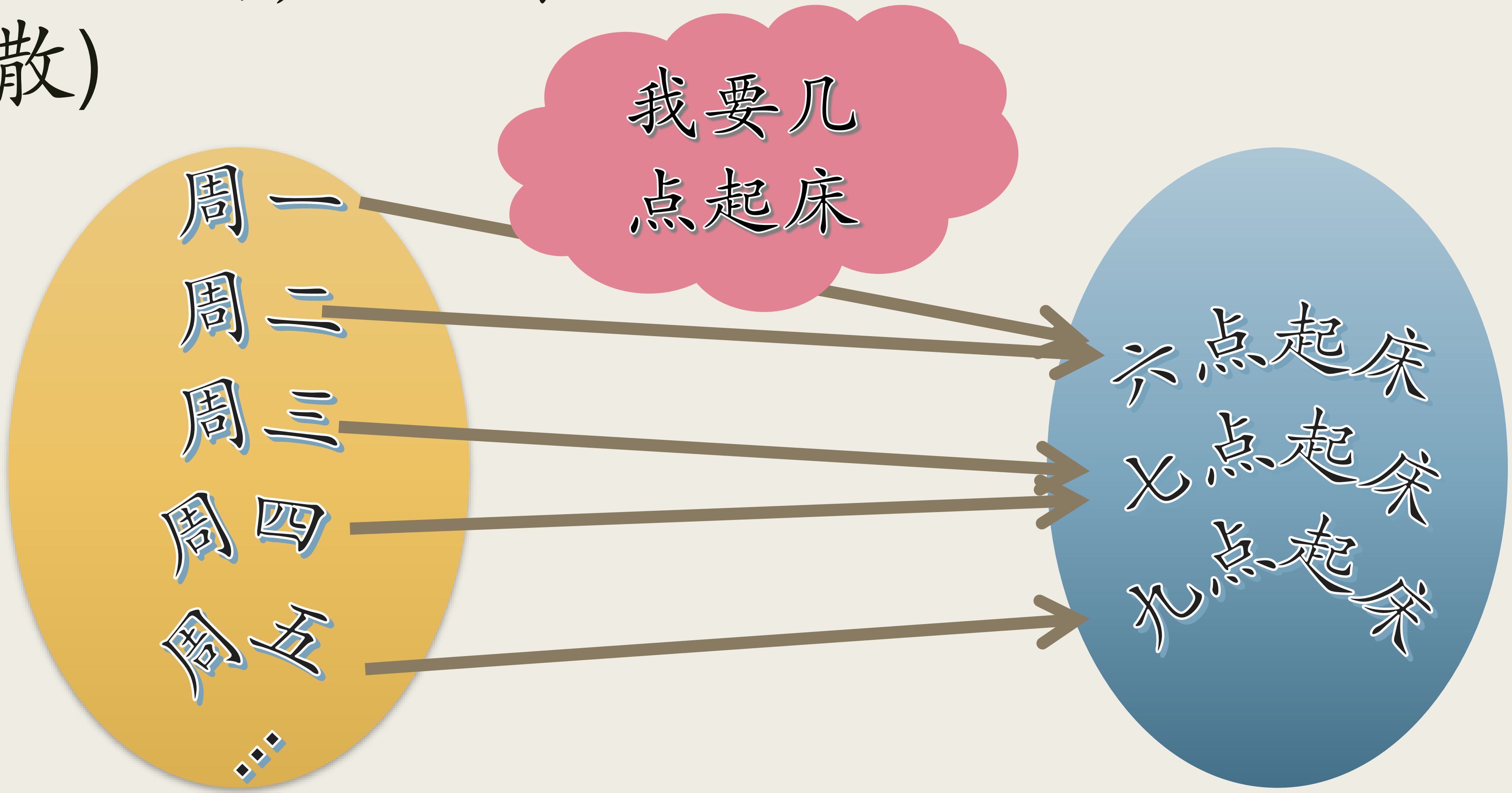
什么是偏微分方程?



函数——对应规则

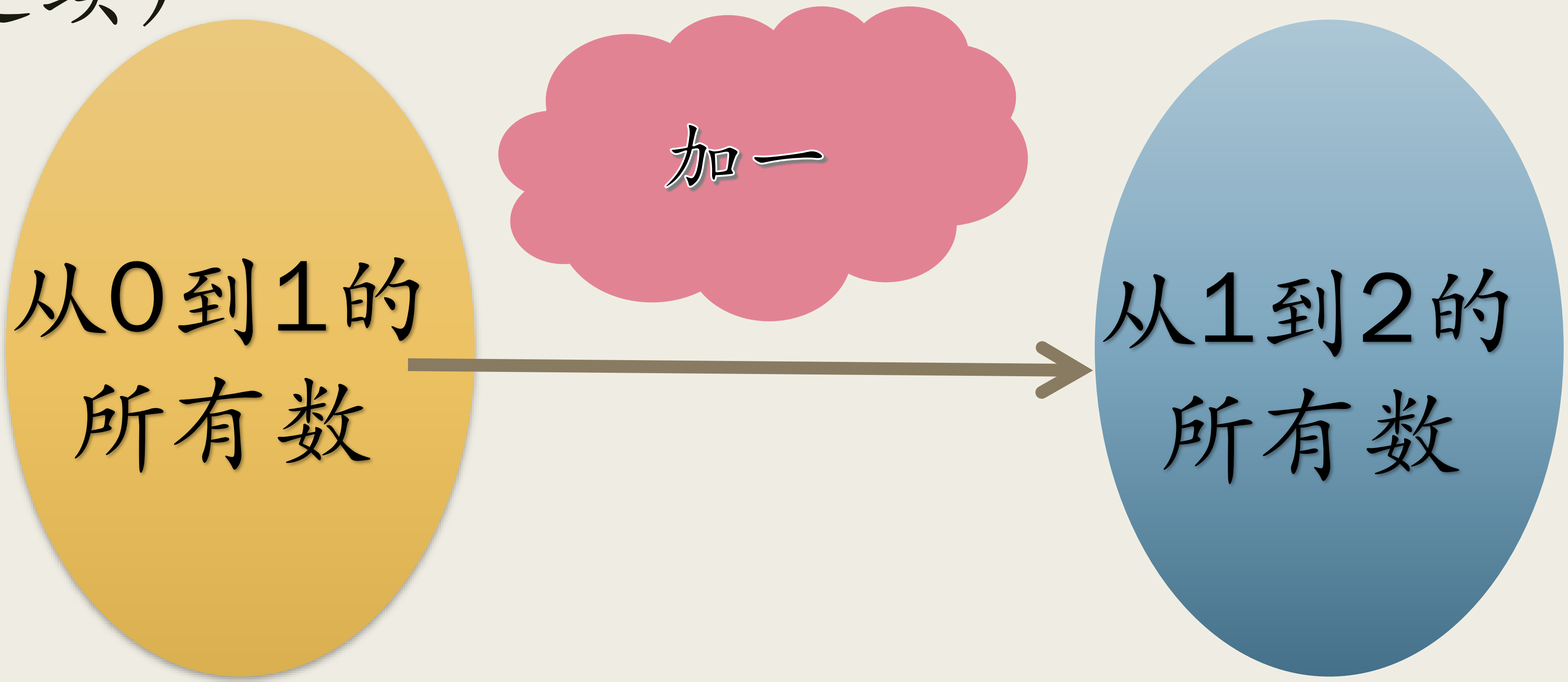


函数——对应规则(离散)



F[x]=y 我要几点起床[周三]=七点起床

函数——对应规则（连续）



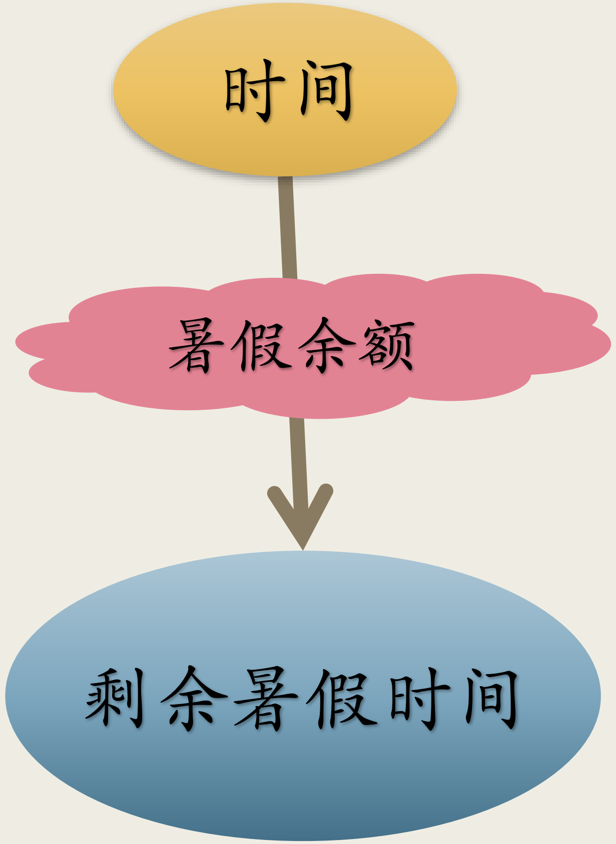
F[x]=y

加一[x]=y=x+1

加一[0.5]=0.5+1=1.5

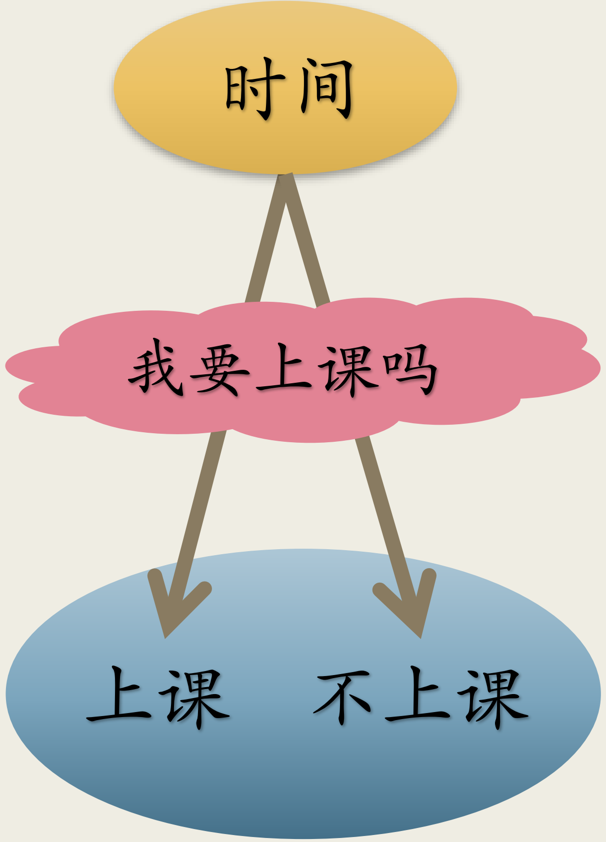
极限——非常接近

- 暑假余额[9月2日]=1天
- 暑假余额[9月3日]=0
- $\lim_{t \to 9\text{月}3\text{日}} \text{暑假余额}[t] = 0$



极限——非常接近但不一样

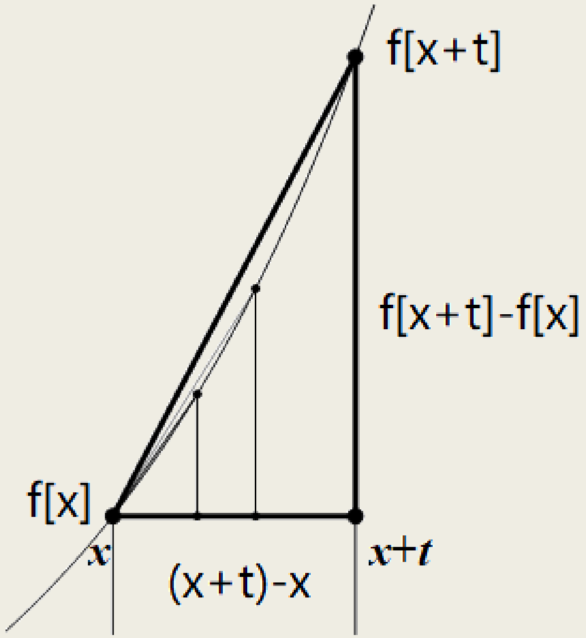
- 我要上课吗[9月3日]=上课
- $\lim\limits_{t\to 9\text{月}3\text{日}}$ 我要上课吗$[t]$ = 不用上课!
- 只是趋向于，不一样!
- $\lim\limits_{t\to t_0} f[t]$称为$t$趋向于$t_0$时的极限
- 对于简单函数，可以直接代入计算
- $\lim\limits_{t\to 0.5}(t+1)=0.5+1=1.5$



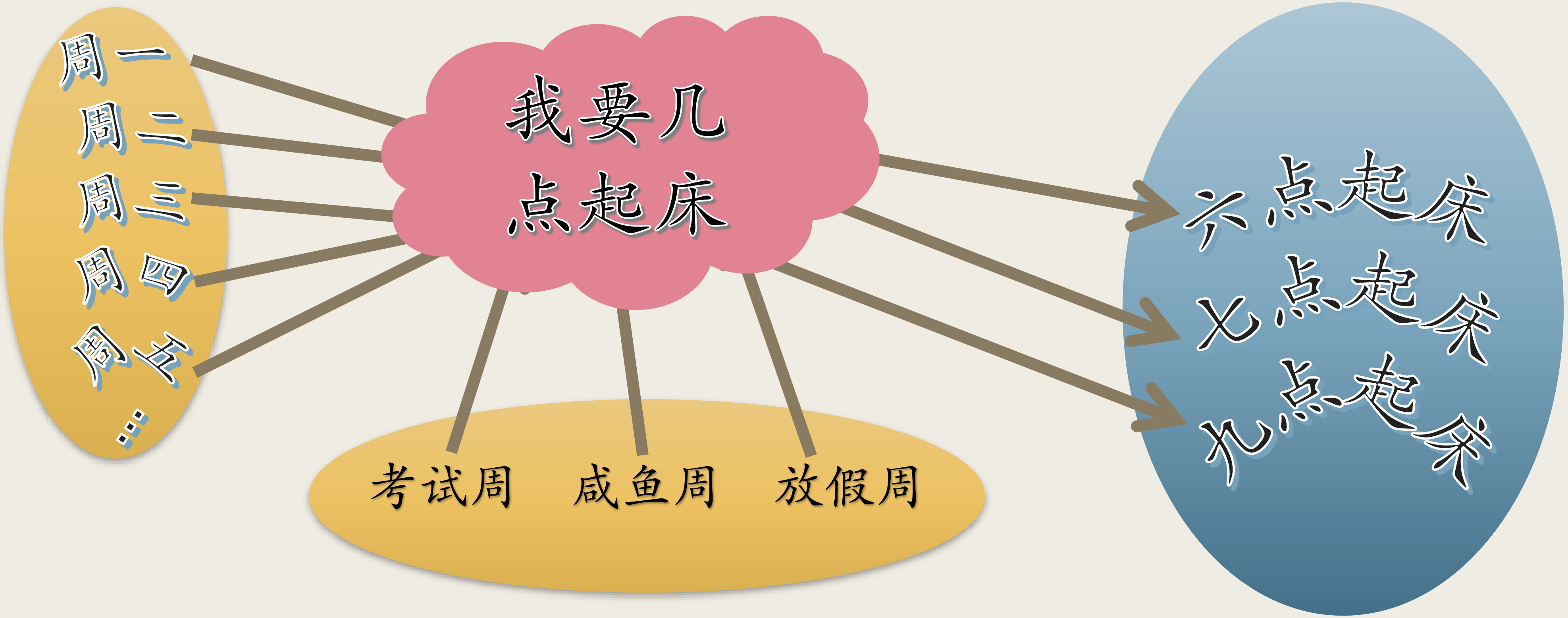
导数

函数值差与
变量差之比

- 对于每一个x都可以计算$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f[x+t]-f[x]}{(x+t)-(x)}$的值
- 把从x到$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f[x+t]-f[x]}{t}$的对应关系叫作$f'$或$\dfrac{df}{dx}$
- 即$f'[x]=\dfrac{df}{dx}[x]=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f[x+t]-f[x]}{t}$

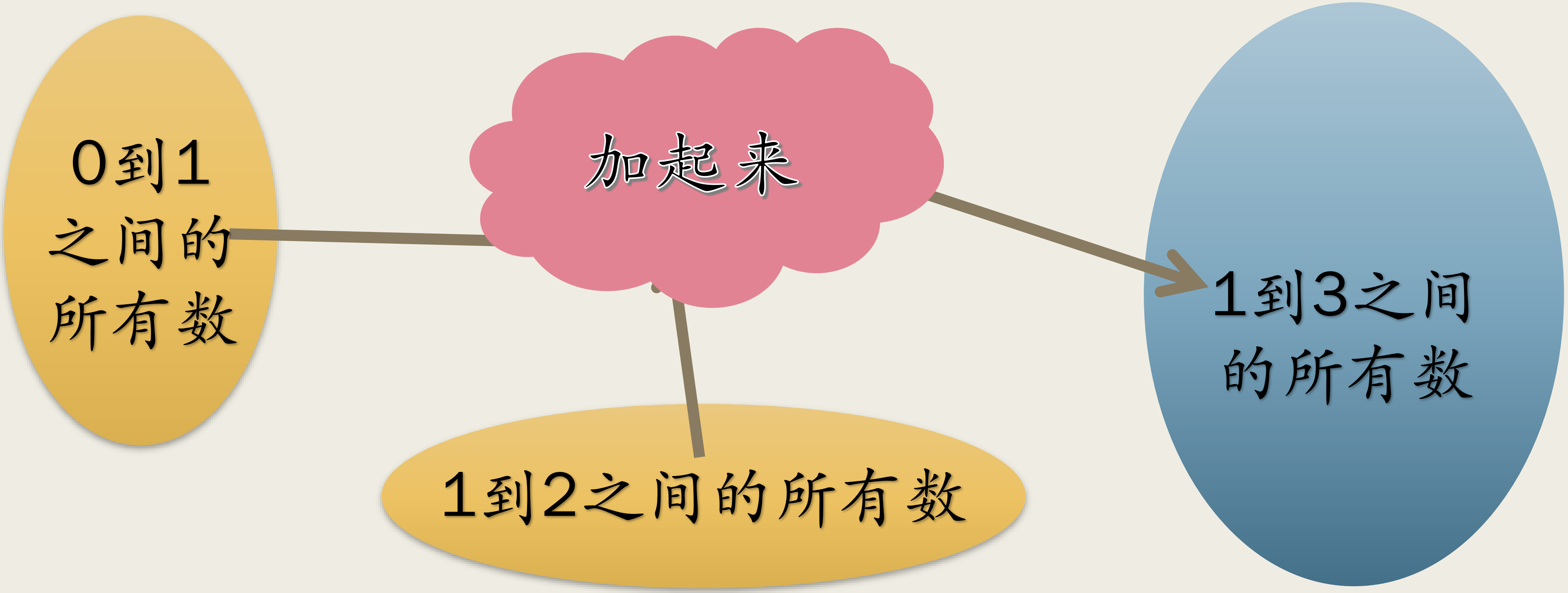


多元函数——多对一的对应规则(离散)



F[x1,x2]=y 我要几点起床[周三,咸鱼周]=九点起床

多元函数——多对一的对应规则(连续)



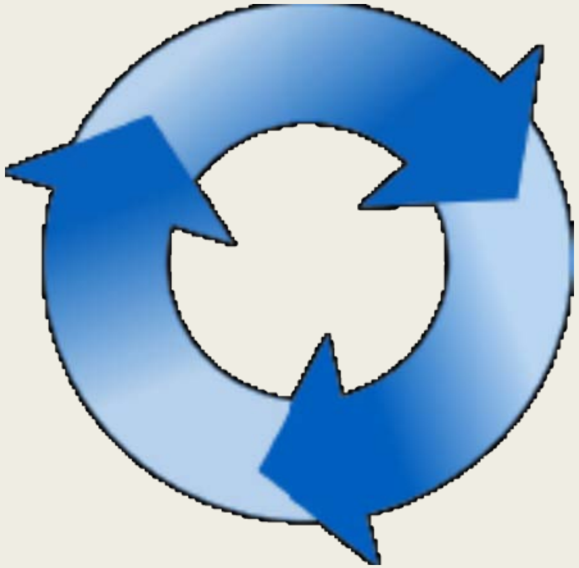
F[x1,x2]=y=x1+x2　　加起来[0.5,1.5]=0.5+1.5=2

偏导数——其他的都立正不许动

- 对于每一个x，都可以计算$\lim_{t\to 0}\frac{f[x+t,y]-f[x,y]}{(x+t)-(x)}$的值
- 在极限中把y看成一个参量，让它代表某个固定不动的值，f[x,y]就变成只关于x的一元函数了
- 把从x,y（注意，这里y是可以变的）对应到$\lim_{t\to 0}\frac{f[x+t,y]-f[x,y]}{(x+t)-(x)}$的对应关系叫做$\frac{\partial f}{\partial x}$（$f$对$x$的一阶偏导数）, 即 $\frac{\partial f}{\partial x}[x,y]=\lim_{t\to 0}\frac{f[x+t,y]-f[x,y]}{(x+t)-(x)}$
- 同理，在求极限时把x当作不变的，类似有
- $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{y}}[x,y]=\lim_{t\to 0}\frac{f[x,y+t]-f[x,y]}{(y+t)-(y)}$

高阶偏导数——反复做同一操作

- $\frac{\partial f}{\partial x}$也是一个函数，对它做形如$\lim\limits_{t\to 0}\frac{f[x+t,y]-f[x,y]}{(x+t)-(x)}$的操作
- 可得$\frac{\partial f}{\partial x}$对x的偏导数，记为$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$，称为$f$关于$x$的二阶偏导数
- 即$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}[x+t,y]-\frac{\partial f}{\partial x}[x,y]}{(x+t)-(x)}$
- 类似，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial \mathrm{x}}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}[x,y+t]-\frac{\partial f}{\partial x}[x,y]}{(\mathrm{y}+t)-(y)}$



偏微分方程
（Partial differential equation, PDE）

- 关于一个多元函数f[x,y,...]
- 及其各阶偏导数($\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$,...)
- 及其各自变量(x,y,...)
- 的函数方程
- 函数方程：含有未知函数的等式叫做函数方程[1]。
- 也就是描述各种“对应关系”之间的关系，需要对所有的自变量都成立。
- 例：$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = f$

[1]尚轶伦.函数方程[EB/OL]. https://baike.baidu.com/item/函数方程/6162392.2017-10-12/2018-06-25.

一个例子[2]

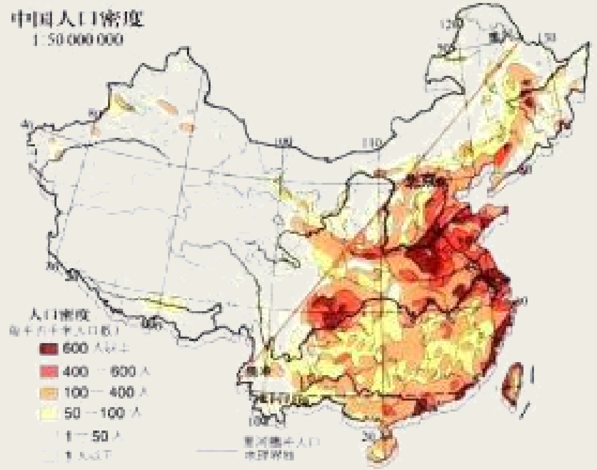
Δ 表示小量，在求方程时可以让它们趋向0

- 一个店主每天需要苹果的数量是常数N=480个。
- 在一个短时间间隔Δt天内，
- 一个已经放了y天的苹果从货架上取走（比如由于变质或售出）的可能性为$\frac{y}{25}\Delta t$
- 注：苹果数量很多，因此本题中各函数可以视为连续的
- 1）用偏微分方程刻画苹果的数量变化

- 对于每一个苹果，有新放上——等待出售——被取走的过程，因此可以给每一个苹果一个“年龄”的属性y。在最开始时为零，逐渐增大，使得每过一天就加1。并且由题意，年龄越大，被取走的可能性越大。
- 而对于某一绝对时刻t而言，处于不同年龄的苹果的数目是不同的。因此我们考虑用一个二元函数$P(y,t)$来刻画t时刻，年龄为y的苹果密度。

[2]Bleecker D, Csordas G.Basic Partial Differential Equations[M].北京:高等教育出版社,2006:61-63.

一个例子——密度函数



- 一个店主每天需要苹果的数量是常数N=480个。
- 在一个短时间间隔Δt天内，
- 一个已经放了y天的苹果从货架上取走（比如由于变质或售出）的可能性为$\frac{y}{25}\Delta t$
- 注：苹果数量很多，因此本题中各函数可以视为连续的
- 1）用偏微分方程刻画苹果的数量变化

- 所谓年龄的密度函数，是由在这年龄附近取一小年龄范围，这范围中总苹果数除以所取的范围得到。
- 例如，$P(4,t)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{T(4+\Delta y,t)-T(4,y)}{\Delta y}$，T(y,t)表示t时刻年龄在0到y之间的苹果总数

图片来源： http://www.bapimi.com/woisiu/

一个例子

- 一个店主每天需要苹果的数量是常数N=480个。
- 在一个短时间间隔Δt天内，
- 一个已经放了y天的苹果从货架上取走（比如由于变质或售出）的可能性为$\frac{y}{25}\Delta t$
- 注：苹果数量很多，因此本题中各函数可以视为连续的
- 1）用偏微分方程刻画苹果的数量变化

- 推导过程略，得到的方程为

$$\frac{\partial P}{\partial y}[y,t]+\frac{\partial P}{\partial t}[y,t]+\frac{y}{25}\times P[y,t]=0\quad (y\geq 0)$$

一阶线性偏微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial y}[y,t]+\frac{\partial P}{\partial t}[y,t]+\frac{y}{25}\times P[y,t]=0$$

- 注意到方程中未知函数关于各自变量的偏导数都是一阶的：$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial t}$
- 并且$\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial P}{\partial t},P$是次数是一次的
- 我们把具有这两个性质的偏微分方程叫做一阶线性偏微分方程。

- 该方程的解为
- $P[y,t]=C_0[t-y]\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{50}}$
- 其中$C_0[t-y]$为任意关于$(t-y)$的一元函数

一个例子——边界条件

- $P[y,t]=C_0[t-y]\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{50}}$
- 2）假设$t=0$时该店主接管业务，初始苹果密度$P[y,0]=\begin{cases}N\mathrm{e}^{-y}, y\geq 0\\ N, y<0\end{cases}$，求$P[y,t]$

- 一般表示多元函数中某些自变量为0时的值的方程，称作偏微分方程的边界条件
- 如果为0的自变量是时间，则又可称为初始条件
- 上面的$P[y,0]=\begin{cases}N\mathrm{e}^{-y}, y\geq 0\\ N, y<0\end{cases}$就是一个初始条件

- 刻画一个具体模型，往往有相同的微分方程但是有不同的边界条件。

一个例子——边界条件

- $P[y,t]=C_0[t-y]\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{50}}$
- 只需要将初始条件代入函数，即可确定出待定函数$C_0[t-y]$
- 最终能够得到

$$P[y,t]=\begin{cases} N\mathrm{e}^{t-y+\frac{t^2-2yt}{50}}, y>t \\ Ne^{-\frac{y^2}{50}}, 0<y\leq t \end{cases}$$

一个例子——小应用

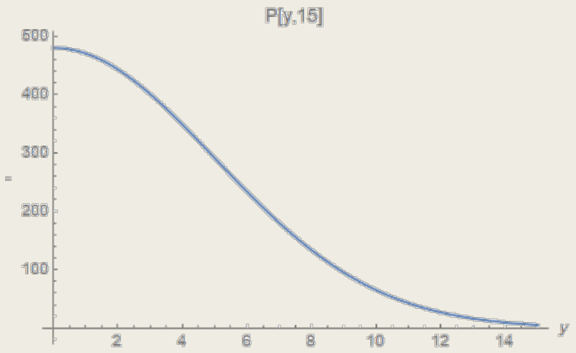
- 3)求最终货架上稳定存在的苹果数
- 当t趋向于无穷时，

$$P[y,t]=\begin{cases}Ne^{t-y+\frac{t^2-2yt}{50}}, y>t\\ Ne^{-\frac{y^2}{50}}, 0<y\le t\end{cases}=Ne^{-\frac{y^2}{50}}$$

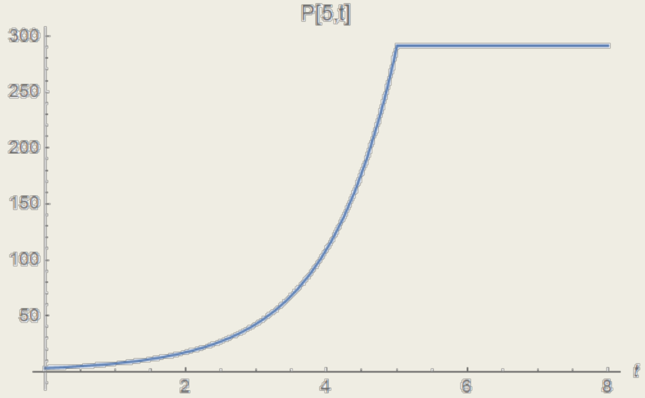
- 可以利用积分求出此时苹果数总量
- $T=\int_0^{+\infty}Ne^{-\frac{y^2}{50}}\mathrm{d}y=5N\sqrt{\frac{\pi}{2}}\approx 3008$ 个

图片来源：
https://b2b.hc360.com/viewPics/supplyself_pics/267435601.html/

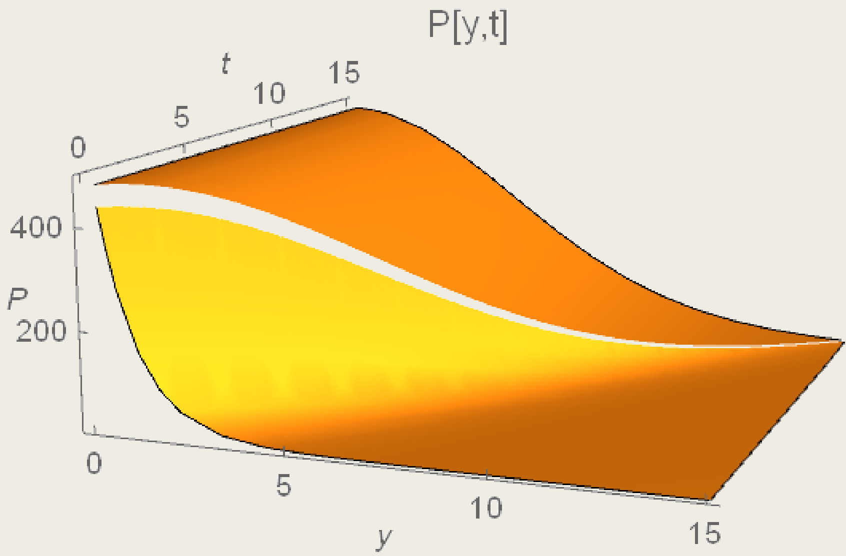
一个例子——图像



$$P[y,t] = \begin{cases} Ne^{t-y+\frac{t^2-2yt}{50}}, y > t \\ Ne^{-\frac{y^2}{50}}, 0 < y \le t \end{cases}$$



- 拿到函数表达式后，就可以做很多事情。例如作二维图（右下）
- 预测第15天的苹果年龄分布P[y,15]（左上）
- 考察年龄为5天的苹果数变化情况P[5,t]
  趋于稳定！



注：图中的断层实际上
应不存在，但能较好反
映两段函数的不同。

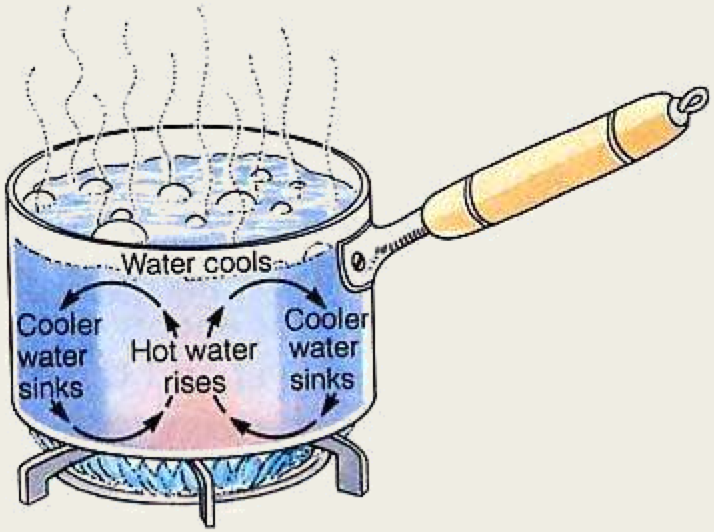
刻画种群或产品数量的变化

- 从上面的例子可以看出，偏微分方程能够刻画苹果数量的变化。
- 类似地，在一般情况下，设一个种群的种群密度为$P[y,t]$，并通过观察确定了"死亡率密度"$D[y,t]$
- 则种群密度函数满足以下的偏微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial y}[y,t]+\frac{\partial P}{\partial t}[y,t]+D[y,t]\times P[y,t]=0$$

- 种群分析、存货量分析就是这个一阶偏微分方程的应用。

高阶的情况[3]



图片来源： http://www.jydoc.com/view-304546.html

- 一维热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 三维波方程

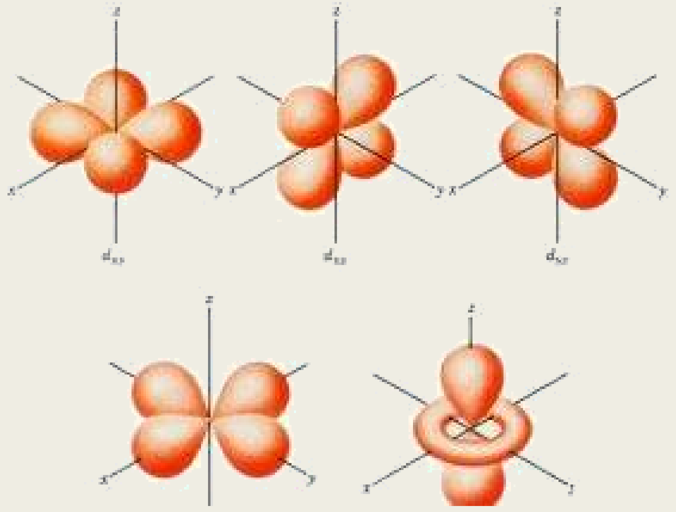
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

- 二维Laplace方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

[3]Bleecker D., Csordas G. .Basic Partial Differential Equations[M].北京:高等教育出版社,2006:61-63.

高阶的情况



图片来源：
http://www.vst.cc/baike/gwiki/电子云

图片来源：
http://www.jydoc.com/view-304546.html

- 一维薛定谔方程[4]

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+U\Psi=i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}$$

- 可压缩流体连续性方程[5]

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho w)}{\partial z}=0$$

[4]尚轶伦.薛定谔方程[EB/OL]. https://baike.baidu.com/item/薛定谔方程/9818370.2017–10–01/2018–06–27
[5]余常昭.环境流体力学[M].北京:清华大学出版社,1992:10-14

高阶，方程组的情况

- 柱坐标系中不可压缩流体的纳维-斯托克斯方程[5]

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_r}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}-\dfrac{v_\varphi^2}{r}+v_z\dfrac{\partial v_r}{\partial z}=F_r-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial r}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial r}-\dfrac{v_r}{r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right)\\
\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\dfrac{v_r v_\varphi}{r}+v_z\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial z}=F_\varphi-\dfrac{1}{\rho r}\dfrac{\partial \rho}{\partial \varphi}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\dfrac{v_\varphi}{r^2}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\dfrac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right)\\
\dfrac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\dfrac{\partial v_z}{\partial r}+\dfrac{v_\varphi}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\dfrac{\partial v_z}{\partial z}=F_z-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial z}+\dfrac{\mu}{\rho}\left(\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_z}{\partial r}+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\dfrac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)
\end{cases}
$$

图片来源：
http://www.photophoto.cn/show/09939112.html

历 史[6,7]

- 18世纪中叶
- 1747年 欧拉、达朗贝尔 弦振动波动方程
- 伯努利 弹性系振动问题
- 拉格朗日 一阶偏微分方程
- 19世纪迅速发展 数学物理问题

图片来源：https://angelustenebrae.livejournal.com/15908.html

[6]张洪.偏微分方程[EB/OL].https://baike.baidu.com/item/偏微分方程/818038.2017–05–14/2018–06–27
[7]Katz, V.J. .数学史通论[M].北京:高等教育出版社,2004:450-452

谢谢！