Ejercicios Tema 3

Luis Sánchez Velasco

25 de marzo de 2017

1.

Una línea de transmisión posee los siguientes parámetros por unidad de longitud: $L = 0{,}3\mu H/m$, $C = 450pF/m$, $R = 5\Omega/m$, y $G = 0{,}01S/m$. Calcular la constante de propagación y la impedancia característica de esta línea a $880MHz$. Recalcular estos parámetros en ausencia de pérdidas.

La constante de propagación en medios con perdidas se define como:

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = \alpha + j\beta$$

Donde sustituyendo por los valores dados en el ejercicio, $L = 0{,}3\mu H/m$, $C = 450pF/m$, $R = 5/m$, y $G = 0{,}01S/m$ obtenemos:

$$\alpha = 0{,}226$$
$$\beta = 64{,}2$$

Y para el cálculo de la impedancia característica:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{(R + j\omega L)}{(G + j\omega C)}} = 25{,}8 + 0{,}01j$$

Para el caso sin perdidas asumiremos $R = G = 0$, por lo que la constante de propagación quedará como:

$$\gamma = j\omega\sqrt{LC} = 64j$$

y la impedancia característica:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} = 25{,}8\Omega$$

2.

Una línea de transmisión sin perdidas de longitud 0,3λ termina en una impedancia de carga, Z_L. Encontrar el coeficiente de reflexión en la carga, el SWR de la linea y la impedancia de entrada de la linea. ($Z_0 = 75\Omega, Z_L = 40 + j20\Omega$).

Para calcular primeramente el coeficiente de reflexión, situaremos en la carta de Smith el punto $z = \frac{40}{75} + \frac{20}{75}j\Omega$, marcado con un '1' en al gráfica. Donde observando el ángulo y la fase de este punto, obtenemos:

$$\Gamma_L = 0{,}34e^{j2{,}45}$$

Para calcular el SWR haremos:

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} \approx 2$$

Para calcular la impedancia a la entrada moveremos el punto '1' 0,3λ hacia el generador, punto '2' y observaremos que lineas corta. En este caso: $z_i = 0{,}94 + 0{,}7i$ que al denormalizar quedará como: $Z_{in} = 67{,}5 + 52{,}5j$.

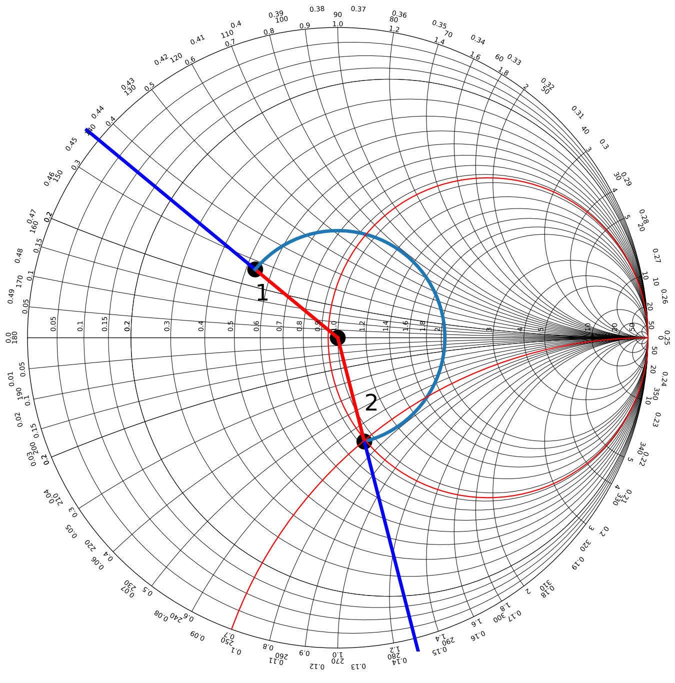

Figura 1: Moviendo el punto 0,3λ

3.

Una línea de transmisión sin pérdidas de impedancia característica Z_0 se termina con una impedancia de carga de 150Ω. Si se mide una SWR en la línea de 1.6, encontrar los dos posibles valores para Z_0.

Aunque el enunciado nos dice que existen dos posible valor para Z_0, solo existe uno, ya que tanto la impedancia de carga, como la de la línea (sin pérdidas), son reales. Para resolverlo empezaremos evaluando la expresión del SWR:

$$SWR = \frac{1 + |\Gamma_L|}{1 - |\Gamma_L|} = 1{,}6$$

Donde podemos resolver para $|\Gamma_L|$,obteniendo:

$$|\Gamma_L| = 0{,}23$$

Sabemos que al ser las dos impedancias puramente reales, el valor absoluto del coeficiente de reflexión será igual a su valor real, esto se puede observar en la expresión del coeficiente de reflexión en función de la impedancia de carga y la impedancia carcterística de la línea.

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

De donde podemos obtener Z_0, el cual resulta:

$$Z_0 = 93{,}9\Omega$$

4.

Un transmisor wireless está conectado a una antena con impedancia de entrada de $80 + j50\Omega$ a través de un cable de 50Ω. Si el transmisor de 50Ω puede suministrar una potencia de 30W cuando se conecta a una carga adaptada, ¿cuál es la potencia suministrada a la antena? Repetir el cálculo suponiendo que el transmisor tiene una impedancia de salida de 60Ω.

Nos encontramos on la situación en la que tenenemos una línea por la que circulan 30W, de los cuales el 100 % irán hacia la carga cuando esta este adaptada. Calcularemos que potencia irá hacia la carga en los siguientes casos:

4.1. $Z_0 = 50\Omega$

En este caso el coeficiente de reflexión será:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Y la potencia entregada:

$$P_{in} = P_{out}(1 - \Gamma_L)$$
$$P_{in} = 30(1 - 0{,}41)$$
$$P_{in} = 17{,}7W$$

4.2. $Z_0 = 60\Omega$

Repitiendo las cuentas:

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0}$$

Y la potencia entregada:

$$P_{in} = P_{out}(1 - \Gamma_L)$$
$$P_{in} = 30(1 - 0{,}368)$$
$$P_{in} = 18{,}96W$$

5.

Asumiendo que la impedancia característica es real, mostrar que para una carga puramente reactiva de la forma $Z_L = jX_L$, la magnitud del coeficiente de reflexión es siempre la unidad.

Para demostrar esto empezaremos colocando la expresión del coeficiente de reflexión:

$$\Gamma_L = \frac{jX_L - Zo}{jX_L + Zo}$$

Y convertiremos tanto el divisor como el denominador a modulo y fase:

$$\Gamma_L = \frac{\sqrt{(X_L)^2 + (-Zo)^2]} e^{jarctan(\frac{X_L}{-Z_0})}}{\sqrt{(X_L)^2 + (Zo)^2]} e^{jarctan(\frac{X_L}{Z_0})}}$$
$$\Gamma_L = 1e^{j(\arctan \frac{X_L}{-Z_0} - \arctan \frac{X_L}{Z_0})}$$

Como la función arcotangente es impar:

$$\Gamma_L = e^{-j2 \arctan \frac{X_L}{Z_0}}$$

Se puede ver como ambos modulos serían iguales, dividiendose los dos a 1, esto tiene sentido ya que si la caraga fuese puramente reactiva, no debería consumir ningún tipo de enrergía, por tanto toda ha de ser rebotada hacia el generador.

6.

Para el circuito mostrado, encontrar la potencia transmitida a la carga y la potencia disipada en el generador para una impedancia de carga $Z_L = 30 + j40\Omega$. ¿Qué valor de la impedancia de carga permitirá una entrega maxima de potencia a la carga? ¿Cuál es esta potencia?

6.1. $Z_L = 30 + 40\Omega$

Procederemos de la siguiente manera:

1. Calcularemos la impedancia normalizada de la carga
2. Situaremos esta impedancia en la carta de smith, obteniendo Γ_L
3. Moveremos la línea 0,7λ hacia el generador para obtener z_{in}
4. Denormalizaremos z_{in} y obtenedremos la potencia entregada a la línea.

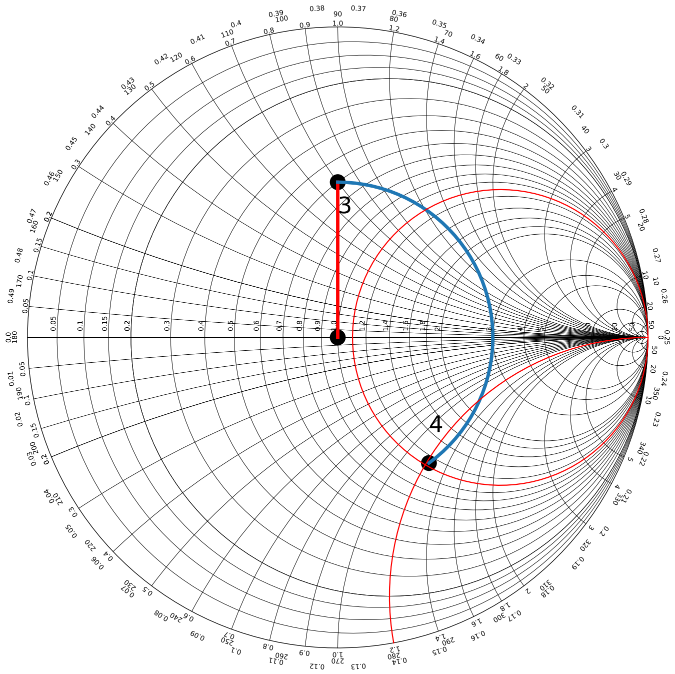

Figura 2: Pasos 3 y 4

En este caso $z_i n = \frac{3}{5} + j\frac{4}{5}$, obteniendo, como se puede ver en la figura 2:

$$\Gamma_L = 0{,}5e^{j1{,}57}$$

Tras mover la línea 0,7λ obtenemos $z_{in} = 1{,}1 + 1{,}2j$, que denormalizado queda como:

$$Z_{in} = 55 + 60j$$

Con lo que podremos calcular la potencia de entrada a la línea con la siguiente expresión:

$$P_{in} = \frac{1}{2}|V_S|^2 \frac{R_{in}}{(R_S + R_{in})^2 + (X_S + X_{in})^2} P_{in} \quad = \frac{1}{2} 100 \frac{55}{(20+55)^2 + (30+60)^2} P_{in} = 0{,}2W$$

Por lo tanto se entregarán 0.2W a la carga, ya que al no tener la línea perdidas, toda este energía se entregará a la carga.

6.2. ¿Qué valor de la impedancia de carga permitirá una entrega maxima de potencia a la carga?

El valor que hará que esta potencia entregada a la carga sea máxima será el que haga que la impedancia de entrada a la línea sea: $Z_{in} = R_S - X_S$, por que empezaremos normalizando este valor con la impedancia del generador: $z_{in} = 0{,}4 + 0{,}6j$. Situaremos este valor en la carta de smith, y retrocederemos hasta la carga 0,7λ, y la impedancia obtenida será la que máximize la potencia entregada la carga.
Donde podemos ver que la impedancia normalizada $z_l = 1{,}9 + 1{,}6j$, que denormalizada es $Z_L = 95 + 80j\Omega$

6.3. ¿Cuál es esta potencia?

Podemos usar la expresión de la potencia entregada a la carga cuando la línea esta completamente adaptada a la línea:

$$P_{in} = \frac{|V_s|^2}{8R_s} = 0{,}625W$$

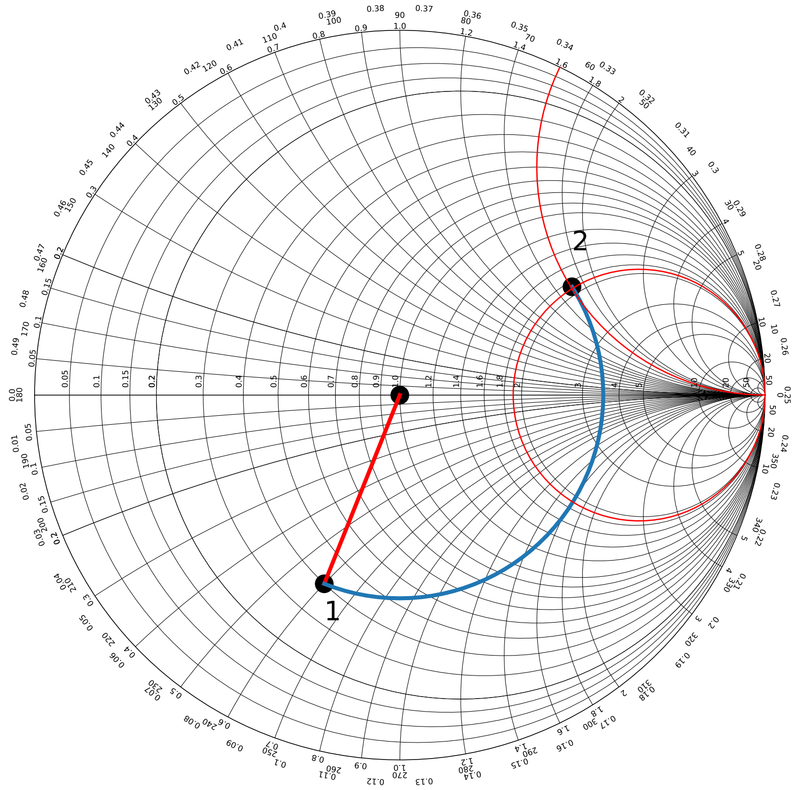

Figura 3: Avanzando 0,7λ hacia la carga