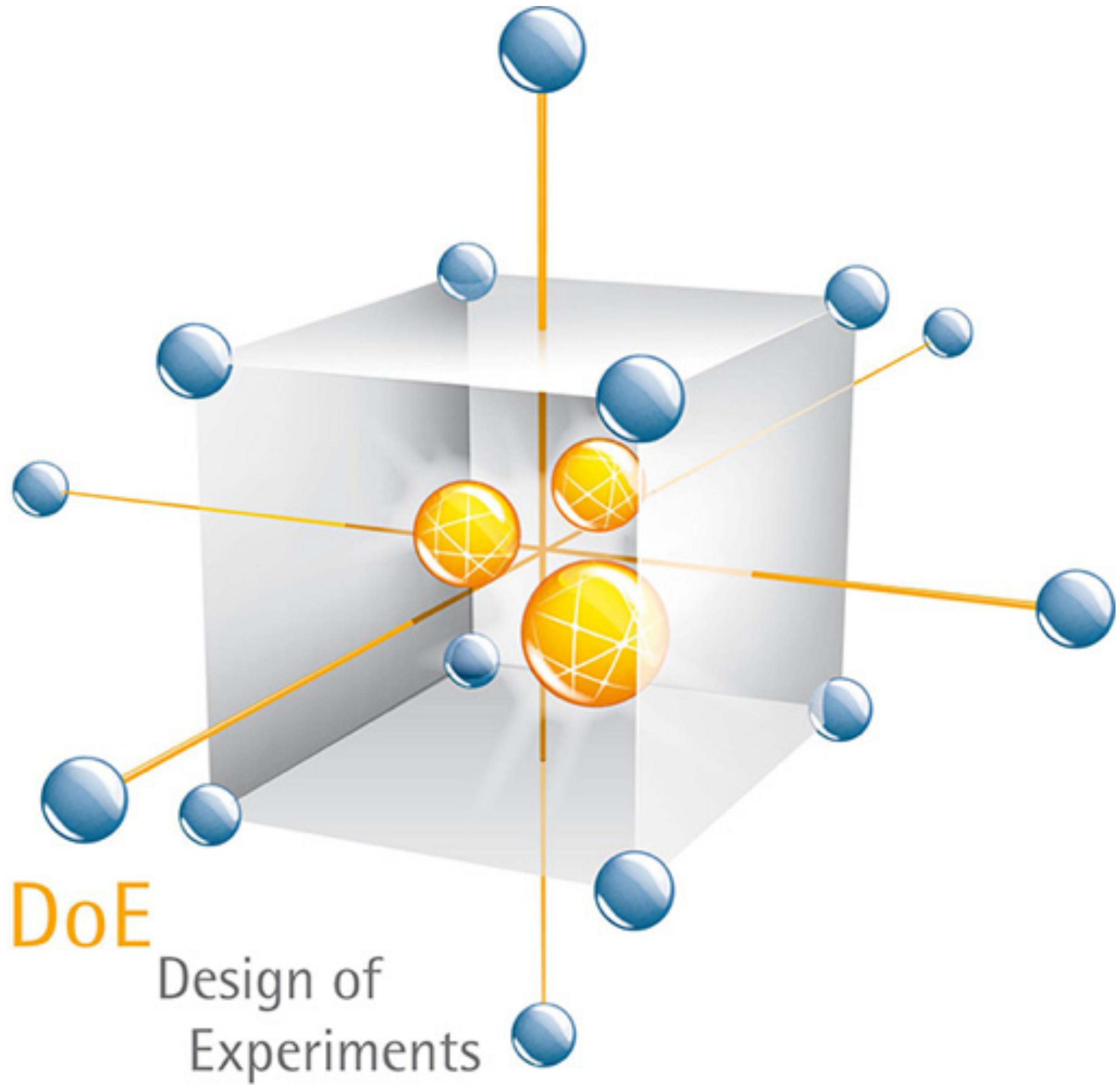


Fuente. Sartorius http://microsite.sartorius.com/pat/pat-modules/design-of-experiments.html

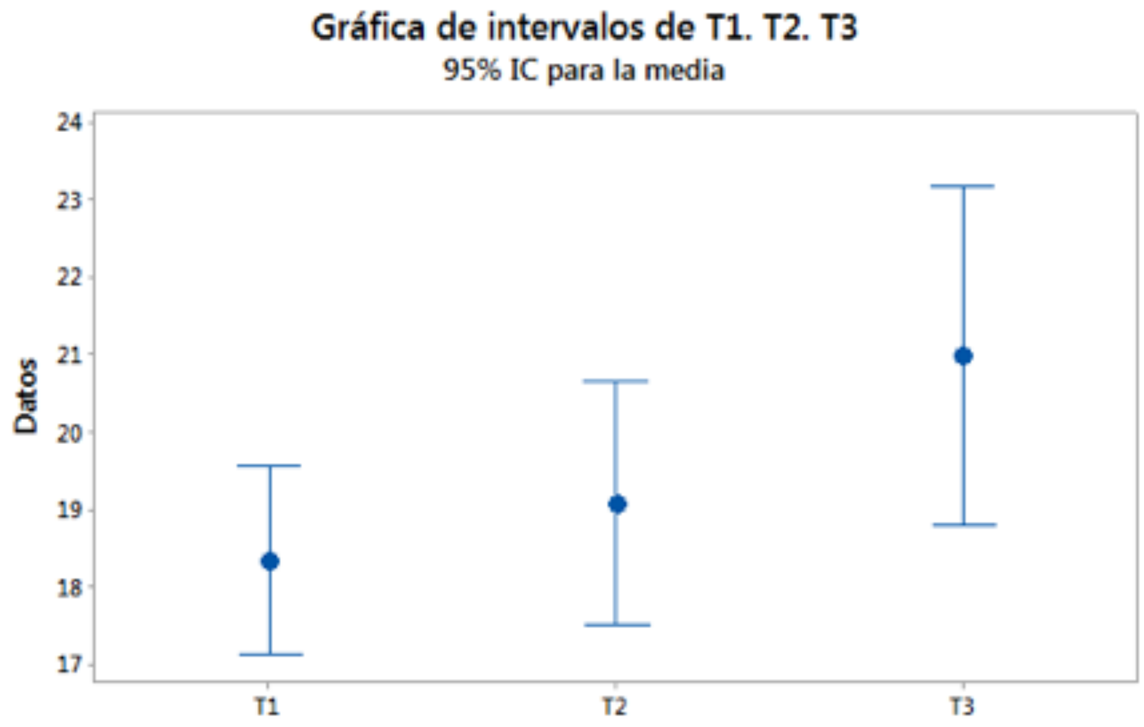
Diseños Completamente Aleatorizados

Heriberto Felizzola Jimenez

Diseños Completamente Aleatorizados DCA.

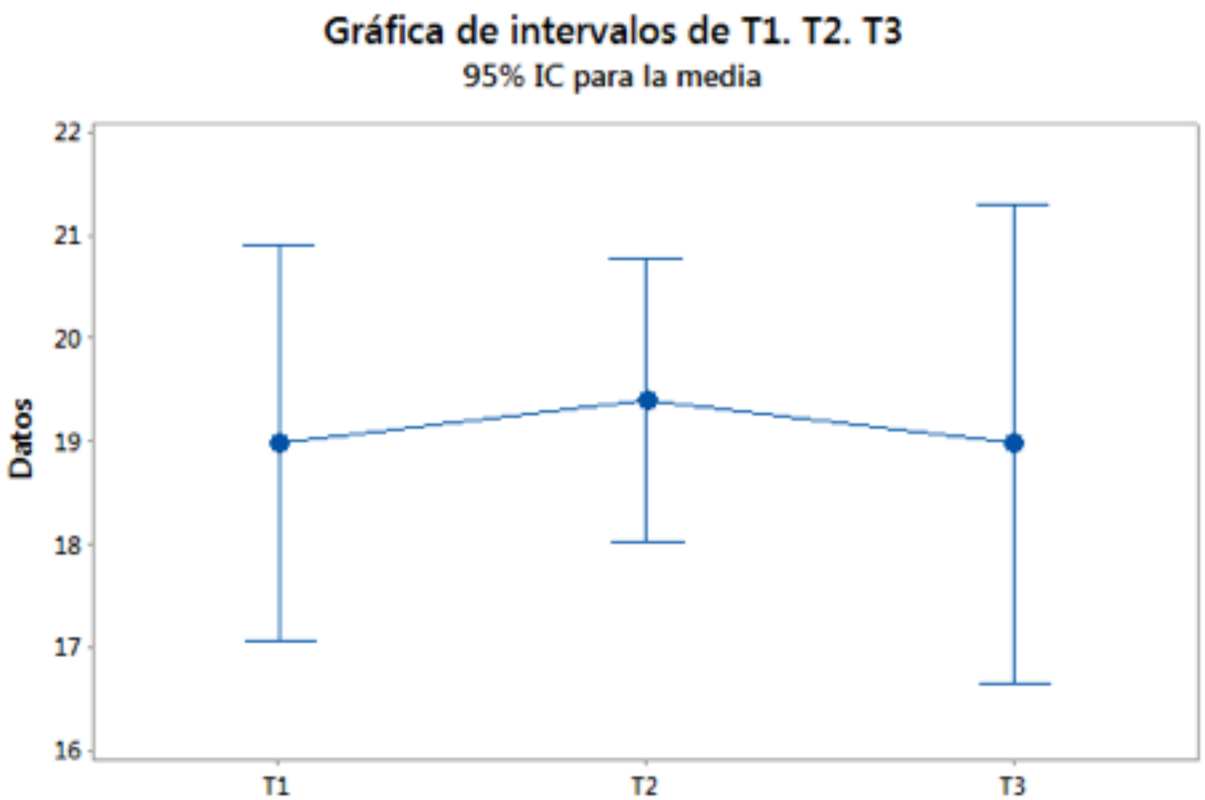
- En un DCA se busca comparar ***a*** tratamientos, siendo $a>2$.
- Las hipótesis que se plantean en un DCA son:

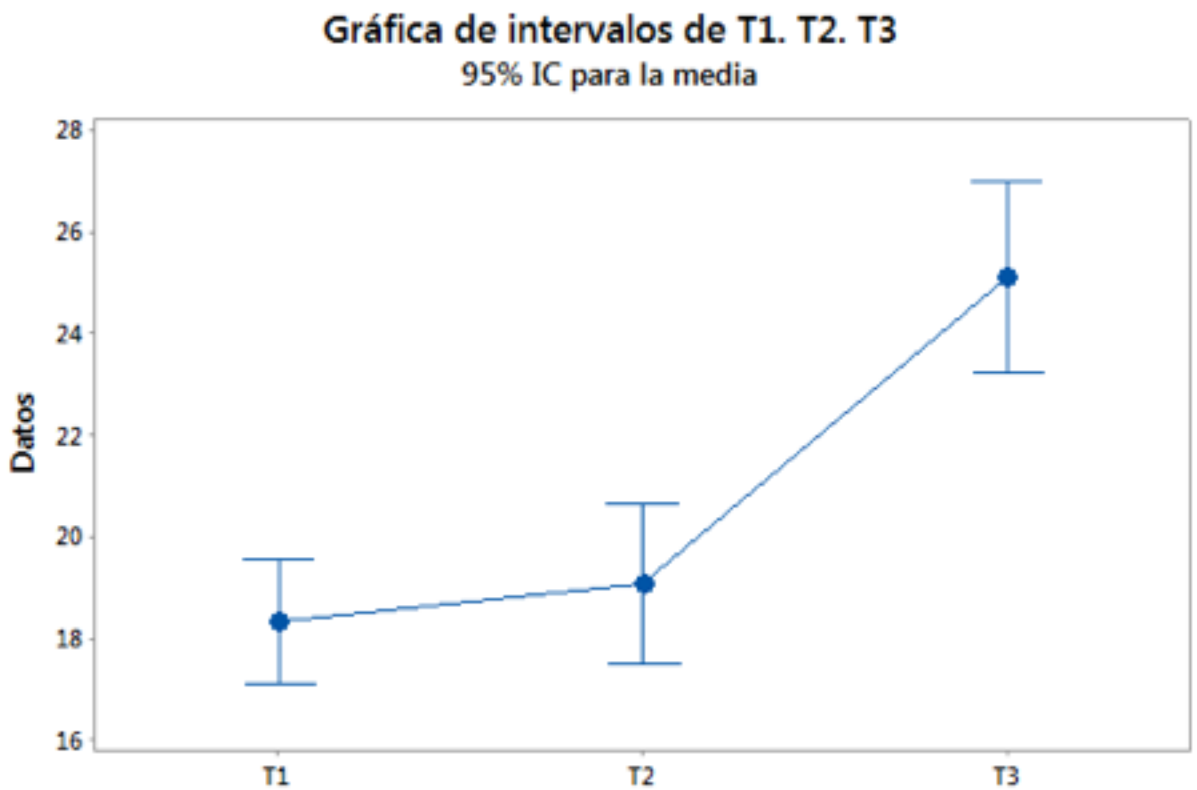
$$Ho: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a = \mu$$
$$Ha: \mu_i \neq \mu_j \; siendo \; i \neq j$$



En este ejemplo gráfico la pregunta clave es ¿Generan los tratamientos un efecto significativo sobre la variable de respuesta?

¿Como saber si los tratamientos de un factor generan un efecto significativo?





Efecto no significativo
No se rechaza Ho

Efecto significativo
Se rechaza Ho

Ejemplo 3.1

— **Gutierrez & De la Vara (2008): Comparación de cuatro métodos de ensamble.** Un equipo de mejora investiga el efecto de cuatro métodos de ensamble A, B, C y D, sobre el tiempo de ensamble en minutos. En este caso se tiene $a = 4$ tratamientos y $n = 4$ observaciones por tratamiento.

— En primera instancia, la estrategia experimental es aplicar cuatro veces los cuatro métodos de ensamble en orden completamente aleatorio (las $N = 16$ pruebas en orden aleatorio).

— Si se usa el diseño completamente al azar (DCA), se supone que, además del método de ensamble, no existe ningún otro factor que influya de manera significativa sobre la variable de respuesta (tiempo de ensamble).

Orden de Corrida	Metodo de Ensamble	Tiempo (min)
1	C	11
2	C	13
3	A	8
4	B	7
5	B	9
6	D	10
7	D	12
8	C	11
9	A	7
10	D	9
11	A	6
12	D	11
13	B	8
14	C	16
15	A	8
16	B	10

Consideraciones Practicas en un DCA

- Utilice la misma cantidad de observaciones para cada unos de los tratamientos ($n_1 = n_2 = n_a = n$). Esto se conoce como un diseño balaceado.

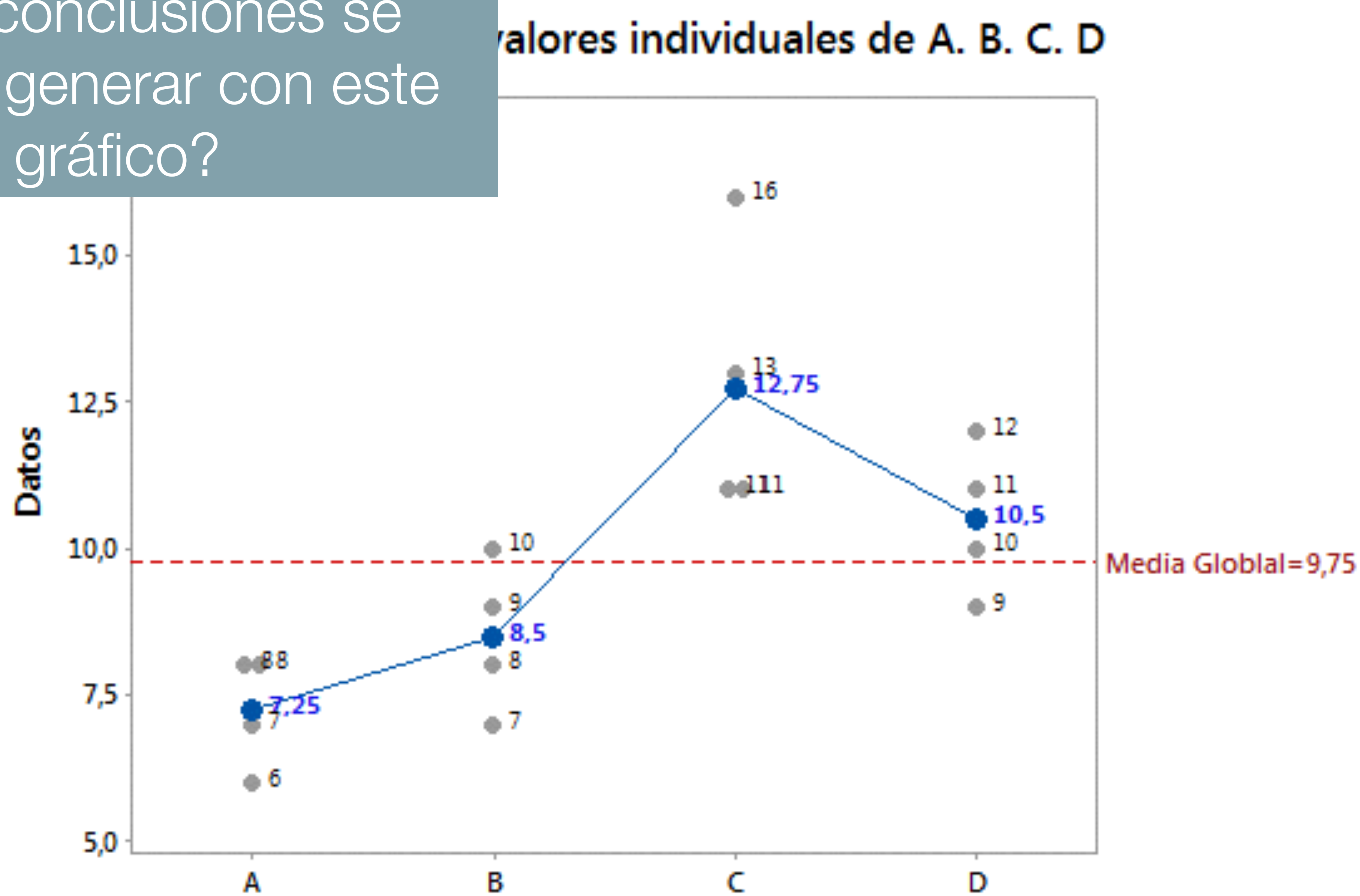
- Se recomiendan valores de n entre 5 y 30. Esto depende del costo de la experimentación.

- El numero de tratamiento es determinado por el experimentador y depende de cada problema.

- Si el numero de tratamientos es finito y pequeño, entonces se recurre a un modelo de efectos fijos, en caso contrario se recure a un modelo de efectos aleatorio.

Análisis Gráfico

¿Que conclusiones se pueden generar con este gráfico?



Modelo Estadístico Lineal

$$\textit{Modelo Estadistico Lineal}$$

$$Y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij}$$

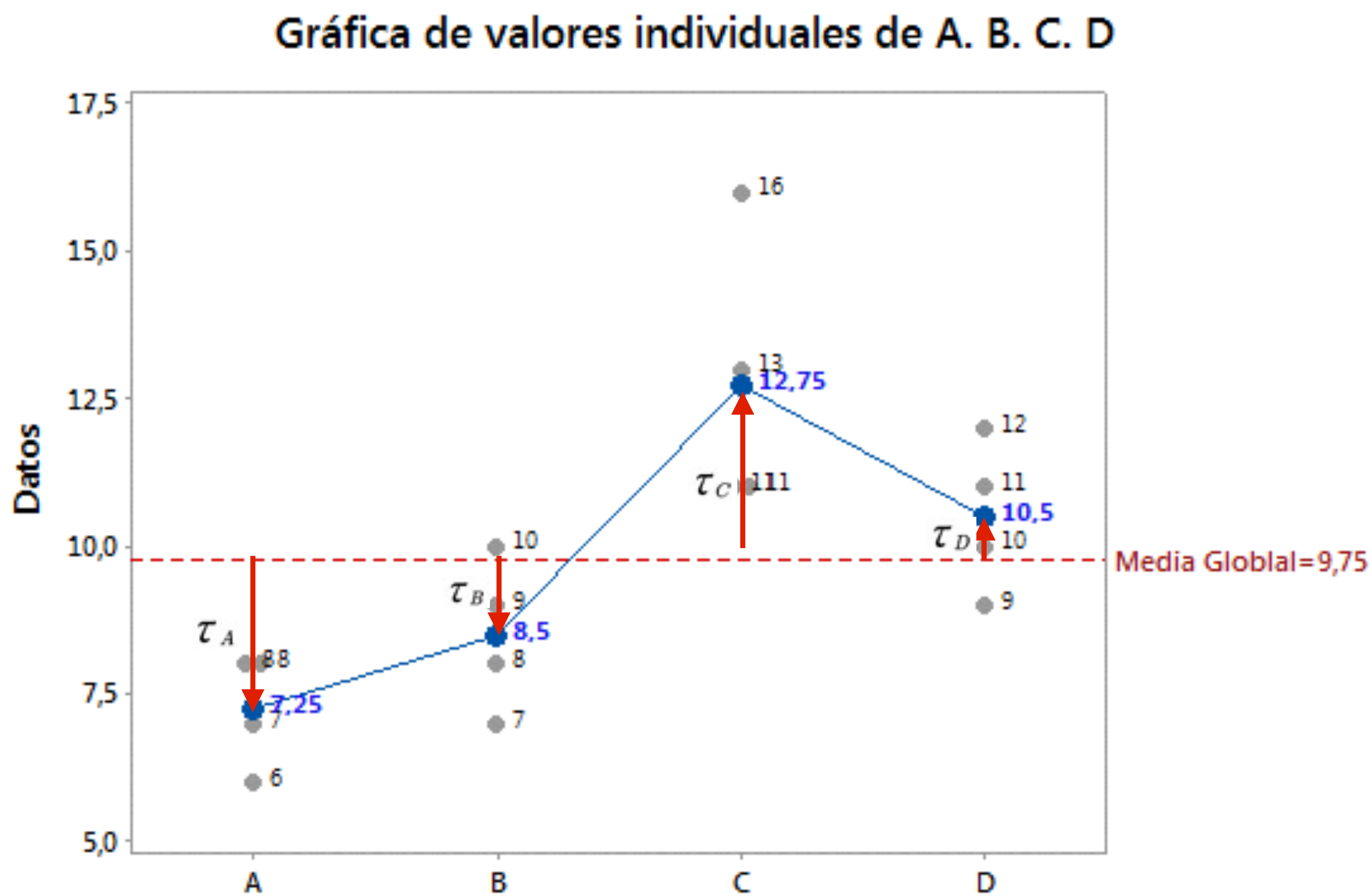
$$\textit{donde}$$

$$\mu_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}}{n}$$

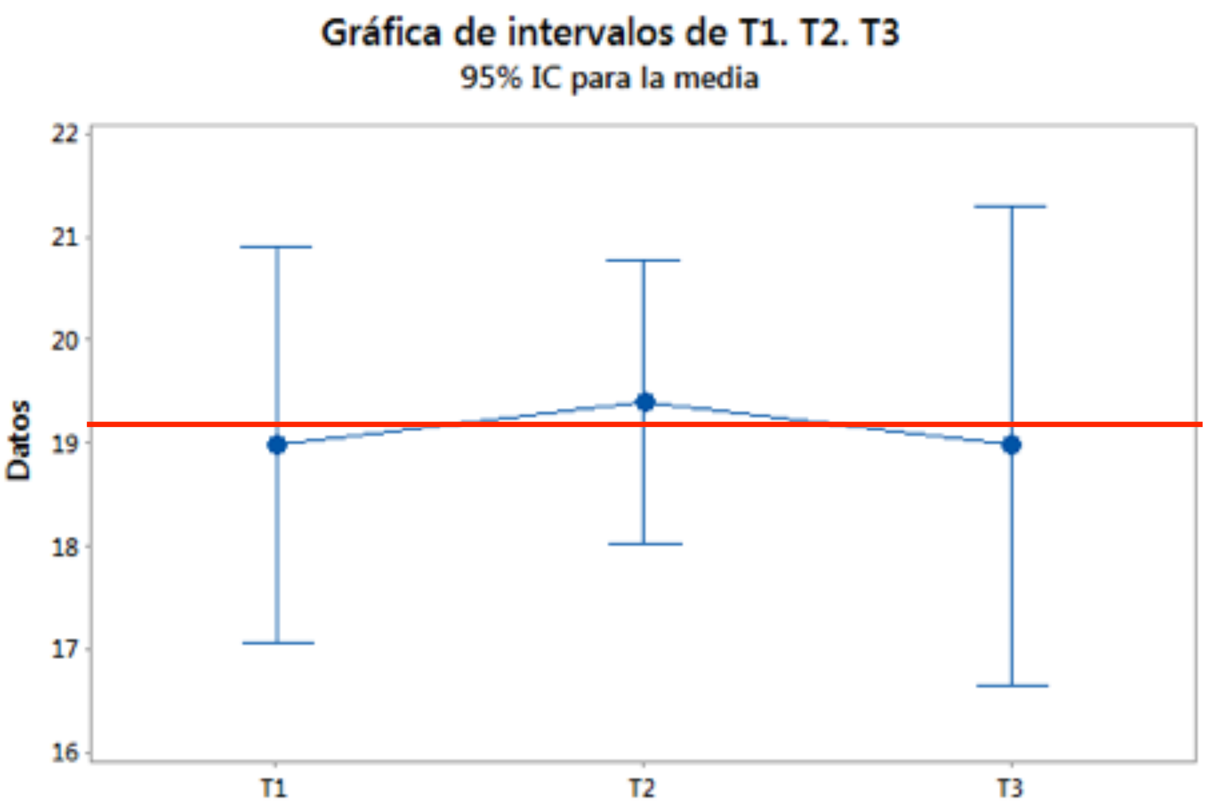
$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{a} \mu_i}{a}$$

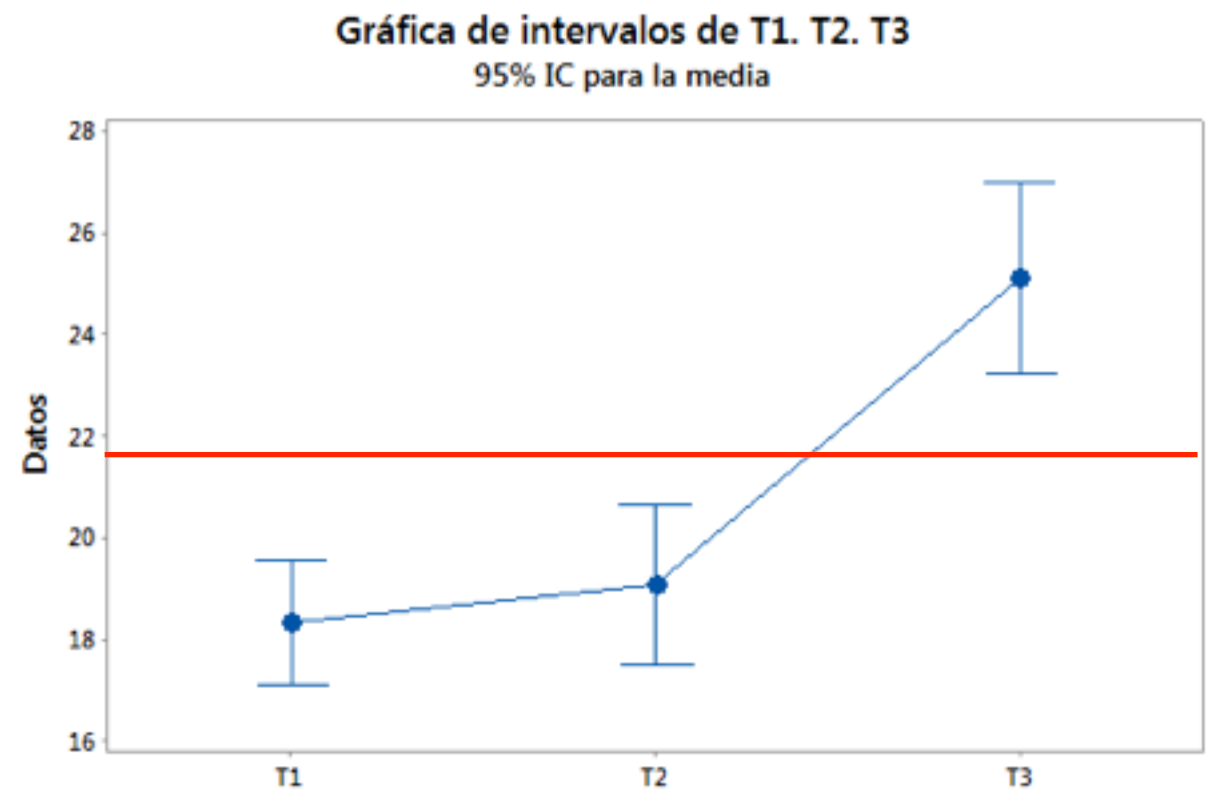
$$\tau_i = \mu_i - \mu$$

$$\varepsilon_{ij} = Y_{ij} - \mu_i$$



Interpretación de los efectos





$Cuando\ \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a = \mu$

$los\ \tau_i\ tieden\ a\ cero, entonces\ la$

$hipotesis\ nula\ se\ puede\ transformar\ a:$

$Ho: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$

$Cuando\ \mu_i \neq \mu_j, siendo\ i \neq j, los\ \tau_i$

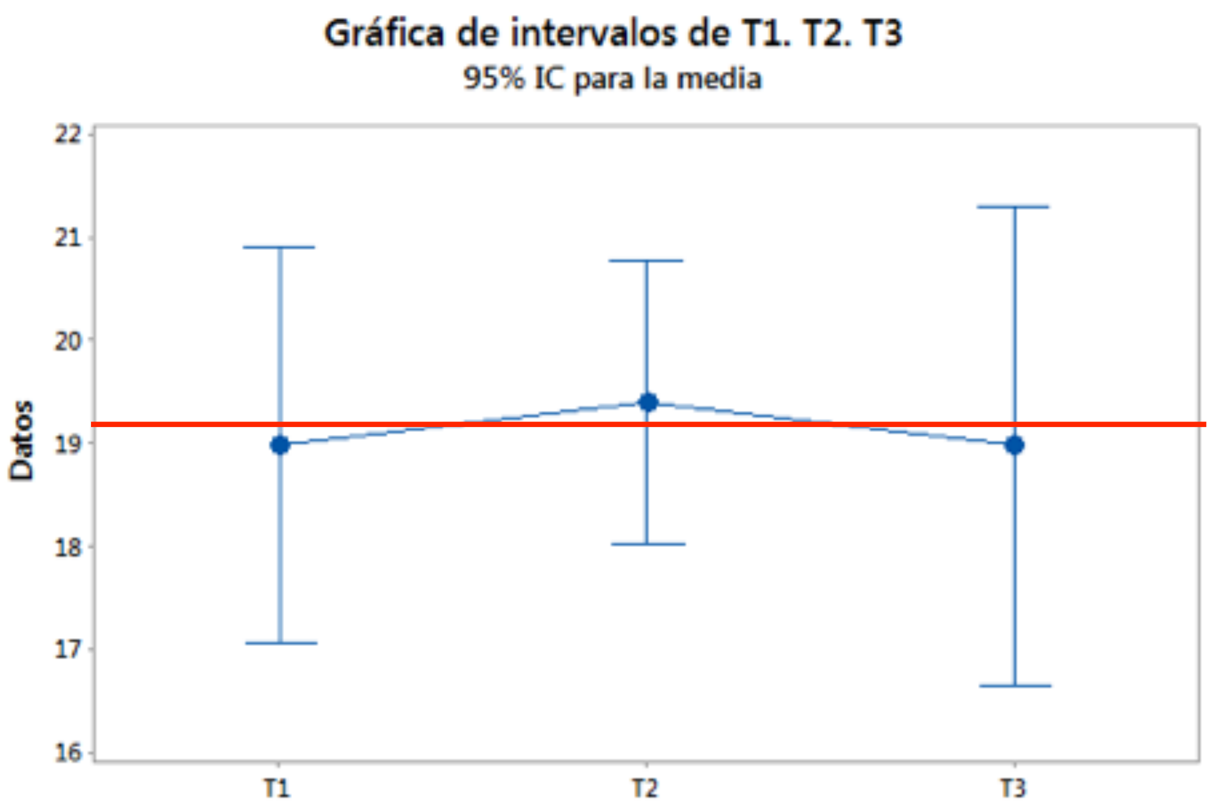
$tieden\ a\ ser\ diferente\ de\ cero,$

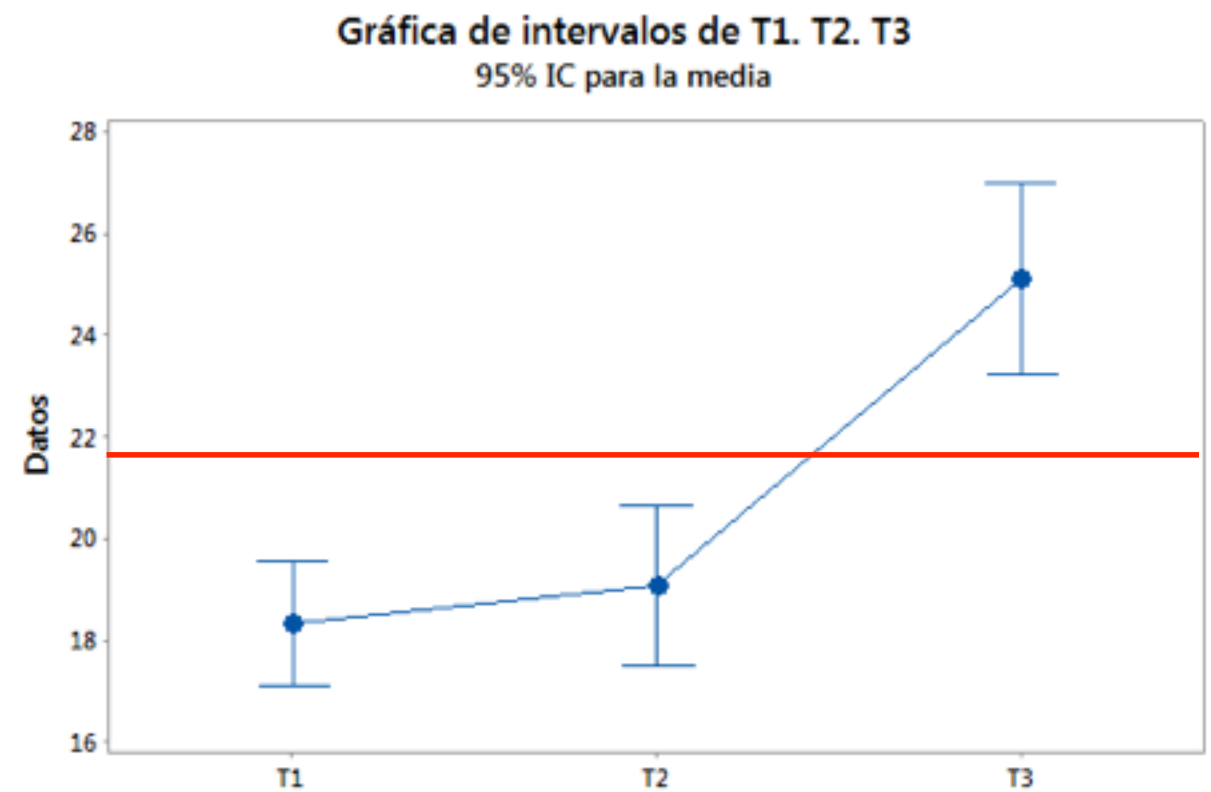
$entonces\ la\ hipotesis\ alterna$

$se\ puede\ transformar\ a:$

$Ha: \tau_i \neq 0;\ \ para\ a\lg un\ i$

Descomposición de la Varianza Total





Efecto	Error

$$\sigma^2_{TRAT} < \sigma^2_{ERROR}$$

ó

$$\sigma^2_{TRAT} = \sigma^2_{ERROR}$$

Efecto	Error

$$\sigma^2_{TRAT} > \sigma^2_{ERROR}$$

Análisis de Varianza - ANOVA

– Lo que se busca probar en el ANOVA es si la variabilidad debida a los tratamientos es igual o mayor a la generada por las fuentes de ruido ó error aleatorio. En este caso se busca probar la siguiente hipotesis:

$$Ho: \sigma^2_{TRAT} = \sigma^2_{ERROR}$$
$$Ha: \sigma^2_{TRAT} > \sigma^2_{ERROR}$$

– En este caso al probar esta hipótesis se esta probando las planteadas anteriormente con respecto a las medias y los efectos.

$$Ho: \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a = \mu$$
$$Ha: \mu_i \neq \mu_j \; siendo \; i \neq j$$

$$Ho: \tau_1 = \tau_2 = \ldots = \tau_a = 0$$
$$Ha: \tau_i \neq 0; \; para \; a\lg un \; i$$

Tabla ANOVA

Fuentes de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	Fo	Valor p
Tratamientos	$SC_{TRAT} = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$a-1$	$CM_{TRAT} = \frac{SC_{TRAT}}{a-1}$	$Fo = \frac{CM_{TRAT}}{CM_{ERROR}}$	$P(F \geq F_0)$
Error	$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{TRAT}$	$N-a$	$CM_{ERROR} = \frac{SC_{ERROR}}{N-a}$		
Total	$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N}$	$N-1$			

Cálculos parciales

Orden de Corrida	Metodo de Ensamble	Tiempo (min)	Y_{ij}^2	$Y_{i.}$	$Y_{i.}^2$	Promedio
3	A	8	64	29	841	7,25
9	A	7	49			
11	A	6	36			
15	A	8	64			
4	B	7	49	34	1156	8,50
5	B	9	81			
13	B	8	64			
16	B	10	100			
1	C	11	121	51	2601	12,75
2	C	13	169			
8	C	11	121			
14	C	16	256			
6	D	10	100	42	1764	10,50
7	D	12	144			
10	D	9	81			
12	D	11	121			
Total		156	1620	156	6362	

Tabla ANOVA

Suma de Cuadrados

$$SC_{TRAT} = \sum_{i=1}^{a} \frac{Y_{i.}^2}{n_i} - \frac{Y_{..}^2}{N} = \frac{6362}{4} - \frac{(156)^2}{16} = 69.5$$

$$SC_{TOTAL} = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij}^2 - \frac{Y_{..}^2}{N} = 1620 - \frac{(156)^2}{16} = 99.0$$

$$SC_{ERROR} = SC_{TOTAL} - SC_{TRAT} = 99.0 - 69.5 = 29.5$$

Fuentes de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrado Medio	Fo	Valor p	α
Tratamientos	69,50	3,00	23,17	9,42	0,0018	0,05
Error	29,50	12,00	2,46			
Total	99,00	15,00				

– Note que el valor $p < \alpha$, por tanto se rechaza hipótesis nula y se infiere que el método tiene una influencia significativa sobre el tiempo de ensamble.

Ejercicios de practica

- Montgomery (2007): ejercicios 3.1, 3.2, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8, 3.11, 3.14, 3.15.
- Gutierrez & De la Vara (2008): capitulo 3, ejercicios 11, 13, 15, 17, 18.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (2012): ejercicios 10.31, 10.34,10.40, 10.43, 10.44, 10.45, 10.54.

Bibliografia

- Gutiérrez Pulido, H., & de la Vara Salazar, R. (2008). Análisis y diseño de experimentos. México: McGraw-Hill.
- Montgomery, D. (2007). Diseño y análisis de experimentos 2d a Edición, Editorial LIMUSA WILEY.
- Walpole, R. E., Myers, R. H., & Myers, S. L. (2012). Probabilidad y estadística para ingenieros. Mexico: Pearson Educación.