Z 变换和差分方程 Matlab 求解

作者：dynamic

时间：2010.2.13

在数字滤波方面差分方程使用很多，另外在高等数学中的数列其实也是一个简单的差分方程。

差分方程和 Z 变换有着千丝万缕的关系，既然讲到差分方程，当然没法不涉及 Z 变换了。本教程主要告诉大家如何使用解析和数值的求解差分方程。

一、Z 变换和反变换

对任何一个序列 x(n)，其**双边 Z 变换定义为**

$$X(z) = Z[x(n)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$$

其中 $z = re^{jj}$ 是一个复变量，其中失径 r 和复角 j 构成一个复平面，称为 **Z 平面**。

例如，对于有限序列 $x = \{1.5, \underline{\underline{6.5}}, 3, 9, 2\}$，它的双边 Z 变换为

$$X(z) = 1.5z^{1} + 6.5z^{0} + 3z^{-1} + 9z^{-2} + 2z^{-3}$$

可以看出，Z 变换就是简单的把 $x(n)$ 和 z^{-n} 相乘再相加。

注意： 常用信号的 Z 变换可以通过查表获取，比如 $x(n) = (0.25)^n m(n)$ 的 Z 变换为 $\dfrac{1}{1-0.25z^{-1}}$，这里就不累述了。另外 MATLAB 提供了直接的函数 **ztrans()**用来计算函数的

Z 变换，比如

```
>> syms n

>>x=0.25^n;

>> ztrans(0.25^n)
ans =
4*z/(4*z-1)
```

Z 变化的反变换定义为

$$x(n)=Z^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2p\,j}\int_{c}X(z)z^{n-1}dz$$

这是一个**围线积分**，积分路径是负平面 Z 中处于收敛域中的任意一条围线，积分方向是逆时针。这个积分通常使用留数定理进行计算，感兴趣的网友可以查阅《复变函数》相关书籍。当然 MATLAB 提供了 **iztrans()**函数进行 Z 反变换。

Z 变换的几点说明

如果时间向量 n 只取正值，则序列的 Z 变换 X(z)中只出现 z 的负指数幂，此时称为**右序列**。同理 n 只取负值，称为**左序列**。n 有正有负，则称为**双向序列**。

在工程上人们感兴趣的主要是右序列，即关心信号从当前向未来的变化。即使有时要考虑前一段时间的信号，但由于时间的起点选择的任意性，只要序列不是向左无限延伸，就可以将零点左移，因此仍然可以看做一个右序列来处理。故以后没有特别说明，默认都是讨论右序列。

可以证明几乎所有的信号在 $z=+\infty$ 领域，Z 变换都是收敛的，所以可以说所有实际中可见的信号的 Z 变换都存在。

二、时移特性和差分方程

Z 变换有很多重要的特性和定理，由于解差分方程时主要用到它的“时移特性”，故这里只给出这条性质。至于其它的定理，如果大家感兴趣可以参考相关书籍。

$$Z[x(n-k)]=\sum_{n=0}^{\infty}x(n-k)^{-n}=\sum_{m=0}^{\infty}x(m)z^{-(m+k)}=\sum_{m=-k}^{-1}x(m)z^{-(m+k)}+z^{-k}\sum_{m=0}^{\infty}x(m)z^{-m}$$
$$=x(-1)z^{1-k}+x(-2)z^{2-k}+\ldots+x(-k)z^{k-k}+z^{-k}X(z)$$

上式就是 Z 变换的**时移动特性公式。**

对于**右序列差分方程**(**因果序列**)

$$\sum_{k=0}^{N}a_k y(n-k)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

为了便于查看，将上式展开

$$a_0 y(n)+a_1 y(n-1)+\ldots+a_N y(n-N)=b_0 x(n)+b_1 x(n-1)+\ldots+b_M x(n-M)$$

其中 $a_0=1, n\geq 0$，并设初始条件为 $y_0=[y_{-1},y_{-2},\ldots,y_{-N}]$ $x_0=[x_{-1},x_{-2},\ldots,x_{-M}]$

差分方程的几点说明：

差分方程中 $x(n)$ 是输入信号，$y(n)$ 为输入信号。习惯上常将差分方程的输出系数 a_0 变换为 1。

因为实际工程中，一般都是因果序列。也就是说当前输出 $y(n)$ 由以前输入 $x(n-k)$ 和以前输出 $y(n-k)$ 决定，而不是由将来的输入 $x(n+k)$ 和输出 $y(n+k)$ 决定。**所以请不要在差分方程中出现**类似 $x(n+k)$ 和 $y(n+k)$ 的项。如果的确有，那请将序列移动（变量替换），使其成为一个因果序列。

差分方程本质就是**一个滤波器**。

在使用 MATLAB 数值求解差分方程时，一定要将多项式**按 Z 的降幂排列**，再提取多项式的系数。

差分方程求解步骤如下：

（1）先把方程两端所有项做单边 Z 变换，也就是方程两边使用“时移特性”进行展开
（2）然后将每一项的 Z 变换结果带入差分方程
（3）整理出 $Y(z)$ 的表达式
（4）对整理出来的 $Y(z)$ 进行部分分式展开

（5）最后对展开后的$Y(z)$进行 Z 反变换，得到 y(n)

三、差分方程求解实例

求解 $y(n)-1.5y(n-1)+0.5y(n+2)=x(n) \quad n\geq 0$，其中 $x(n)=(0.25)^n m(n)$，初始条件为 $y(-1)=4, y(-2)=10$。

解:

方法一：解析求解

（1）对差分方程两边每一项同时进行单边 Z 变换得

$$
\begin{aligned}
&Z[y(n)]=Y(z)\\
&Z[y(n-1)]=y(-1)z^{1-1}+z^{-1}Y(z)\\
&Z[y(n-2)]=y(-1)z^{1-2}+y(-2)z^{2-2}+z^{-2}Y(z)\\
&Z[x(n)]=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}
\end{aligned}
$$

（2）带入原差分方程同时合并$Y(z)$项后

$$Y(z)[1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}]=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}+[1.5y(-1)-0.5y(-2)-0.5y(-1)z^{-1}]$$

将初值 $y(-1)=4, y(-2)=10$ 带入上式有

$$Y(z)[1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}]=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}+(1-2z^{-1})$$

请大家注意上式的最后一项$(1-2z^{-1})$，在后面的使用 MATLAB 数值求解时会用到它。

$$Y(z)=\frac{1}{(1-0.25z^{-1})[1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}]}+\frac{(1-2z^{-1})}{[1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}]}$$
$$=\frac{2-2.25z^{-1}+0.5z^{-2}}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

（3）对上式进行部分分式展开

因为展开后的表达式相对简单，便于我们直接查表获取它的 Z 反变换，所以这步不是必须的，只是为了方便手工计算而已。

如果您不介意麻烦的话可以手工试试进行部分分式展开，但是 MATLAB 提供了 residuez() 函数可以一劳永逸的帮我们解决这个问题，residuez()的用法如下：

```
[r,p,k] = residuez(b,a)
[b,a] = residuez(r,p,k)
```

该函数就是将多项式分式表达式在下面两种格式之间转换

$$X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}+...+b_mz^{-m}}{a_0+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+...+a_nz^{-n}}$$
$$=\frac{r_1}{1-p_1z^{-1}}+\frac{r_2}{1-p_2z^{-1}}+...+\frac{r_n}{1-p_nz^{-1}}+k_1+k_2z^{-1}+...+k_{m-n+1}z^{-(m-n)}$$

如果 p_i 有 s 重根，那么对应部分分式展开为

$$\frac{r_i}{1-p_iz^{-1}}+\frac{r_{i+1}}{(1-p_iz^{-1})^2}+...+\frac{r_{i+s-1}}{(1-p_iz^{-1})^{s+1}}$$

大家都是懒人，呵呵，我就使用 MATLAB 了哦。

```
>> b=[2 -2.25 0.5] % 分子系数，按z的降幂排列
b =
    2.0000   -2.2500    0.5000

>> a=poly([0.5 1 0.25]) % 分母系数，按z降幂排列，poly函数是根据多项式的根求系数
a =
    1.0000   -1.7500    0.8750   -0.1250

>> [r,p,c]=residuez(b,a) % r为部分展开的分子系数，p为分母系数，c为多项式系数
```

```
r =
    0.6667
    1.0000
    0.3333
p =
    1.0000
    0.5000
    0.2500
c =
     []
```

根据 r,p 和 c 的值，易知部分分式展开结果为

$$Y(z)=\frac{2/3}{1-z^{-1}}+\frac{1}{1-0.5z^{-1}}+\frac{1/3}{1-0.25z^{-1}}$$

（4）对输出 Y(z)进行 Z 反变换

查表可知 $Z^{-1}(\frac{1}{1-az^{-1}})=a^n m(n)$ ，当然这里也可以直接使用 MATLAB 的 iztrans()函数进行反变换，故

$$\begin{aligned}y(n)=Z^{-1}[Y(z)]&=[\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4^n})]m(n)\\&=[\frac{1}{2^n}+\frac{2}{3}]m(n)+\frac{1}{3}(\frac{1}{4^n})m(n)\quad(\text{通解}+\text{特解})\\&=[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3}(\frac{1}{4^n})]m(n)+\frac{2}{3}m(n)\quad(\text{暂态}+\text{稳态})\\&=[\frac{1}{3}(\frac{1}{4^n})-2(\frac{1}{2^n})+\frac{8}{3}]m(n)+[3(\frac{1}{2^n})-2]m(n)\quad(\text{零状态}+\text{零输入})\end{aligned}$$

其实上面的部分分式展开式为了方便查表计算 Z 反变换，如果你不打算使用手工计算，其实部分分式展开可以直接跳过。好，现在使用 MATLAB 验证下上面的手工计算结果：

```
syms z
Y=(2-2.25/z+0.5/z^2)/(1-0.25/z)/(1-1/z)/(1-0.5/z); % 第(2)步的结果
y=iztrans(Y) % 调用iztrans函数直接计算反Z变换
y=
2/3+1/3*(1/4)^n+(1/2)^n
```

不用看，结果肯定一样的。如果 n 取值为 0,1,2,3,4,5，看下数值结果是多少，这样有一个直观的感觉：

```
n=0:5;
y=2/3+1/3*(1/4).^n+(1/2).^n
y =
2.0000    1.2500    0.9375    0.7969    0.7305    0.6982
```

看到这个表达式是不是很眼熟呀，哈哈，高中数学课本不是经常要我们求一个递推公式的通项吗，想想当时把我们求的那个叫 Happy，不过不知大家注意到没有，高中的那个递推公式绝对不会超过三项，为什么呢，因为我们高中是通过中间替换等技巧求出通项的，对于超过三项的就无能为力了。

另外如果参加过高中数学竞赛朋友，应该知道这个递推公式可以通过特征方程的根来计算通项，哈哈，但是也不是一件容易的事情。

现在这问题在我们信号处理中，使用 Z 变换把它给求解出来了，**不能说不是缘分呀。**

方法二：数值求解

看到这么多公式和数学表达式是不是头疼了，哈哈，更不用说我要敲出上面这些公式了，头大了。有没有简便的方法呢？哇咔咔，只要你想得到的，前辈应该都为我们准备好了！

在差分方程说明中，我就提到差分方程实质就是一个滤波器。可以想象，MATLAB 信号工具箱应该可以帮助我们完成心中的夙愿。

不错，MATLAB 中的滤波函数 filter()就可以执行差分方程的数值求解。调用格式如下

```
[y,zf] = filter(b,a,X,zi)
```

其中
b：差分方程输出项的系数或者系统传递函数的分子系数
a：差分方程输入项的系数或者系统传递函数的分母系数
X：输入信号
zi：等效初值
y：输出信号

不过棘手的是，该函数需要提供差分方程的等效初值，注意是等效初值，不是直接的初值！这个等效初值就是解析求解第（2）步得到的

$$Y(z)[1-1.5z^{-1}+0.5z^{-2}]=\frac{1}{1-0.25z^{-1}}+(1-2z^{-1})$$

中的右边最后一项系数[1 -2]。简单的说就是，输出项 y(n-k)进行 Z 变换后，不包含 Y(z)的项的系数。听起来挺拗口的哦！呵呵！

放心吧，MATLAB 早就为我们想好了解决措施了，filtic()函数就是为这个等效初值而生的。调用格式为

```
z = filtic(b,a,y0,x0)
```

其中
b：差分方程输出项的系数或者系统传递函数的分子系数
a：差分方程输入项的系数或者系统传递函数的分母系数
y0：这就是我们输出的原始初值
x0：输入的原始初值
z：filter中第四个输入参数，等效初值

代码一：直接求解差分方程

```
% 差分方程系数，必须按Z降幂排列
a=[1 -1.5 0.5]; % 输入项系数
b=1; % 输出项系数
% 输入信号
n=0:5;
x=0.25.^n;
% 初值，如果n≤0时，x(n)=0，那么x0就可以缺省
y0=[4 10];
% 等效初值
xic=filtic(b,a,y0) % 作为filter的第四个输入参数
% 计算输出值
y=filter(b,a,x,xic)

xic =
     1    -2
y =
2.0000    1.2500    0.9375    0.7969    0.7305    0.6982
```

代码二：等效脉冲响应求解差分方程

在解析解法第（2）步我们得到输出的表达式

$$Y(z)=\frac{2-2.25z^{-1}+0.5z^{-2}}{(1-0.25z^{-1})(1-z^{-1})(1-0.5z^{-1})}$$

接下来需要完成的就是对 Y(z)进行反 Z 变换。在解析方法中，我们展示了手工计算方法(部

分分式展开)和调用 MATLAB 函数方法，计算出了输出 y(n)的表达式。

下面我们再演示使用其它方法进行反 Z 变换并直接求出数值输出(不使用滤波器函数)，主要思想如下：

如果把 Y(z)看成一个系统，则 Y(z)的反 Z 变换就得到它的脉冲响应 h(n)。离散系统的脉冲响应 MATLAB 提供了 impz()函数

```
b=[2 -2.25 0.5]; % 分母系数
a=poly([0.25 1 0.5]); % 分子系数，poly函数是根据多项式根求多项式系数
n=5; % 希望输出信号的时间或长度
y=impz(b,a,n);
y'
ans =
    2.0000    1.2500    0.9375    0.7969    0.7305
```

比较下三次计算得到的输出结果 y 是不是一样的呢？

好了，我能讲的就这些了，希望能够给你带来一点帮助，上面有些话语的确比较拗口，但是仔细读读就可以理解的。哇卡卡卡！