

NumPy基础

1.0 NumPy简介

NumPy, 是Numerical Python的简称, 高性能科学计算和数据分析的基础包。是其他高级工具包的基础。其功能如下:

1. ndarray, 又称NumPy数组, 或数组。
2. 对数组数据进行快速运算的标准数学函数
3. 用于集成其它语言(C, C++, Fortran)编写的代码的工具
4. 用于读写磁盘数据的工具, 用于操作内存映射文件的工具
5. 线性代数, 随机数生成, FT

NumPy的特点: 面向数组的计算。

重要思想: 面向数组的编程和面向数组地思考。有了数组, 我们不用编写循环, 也能对数据做批量运算。

1.1 NumPy的导入

```
# 标准的NumPy约定
import numpy as np

# 另外, 标准的matplotlib.pyplot导入约定
import matplotlib.pyplot as plt
```

2. NumPy中的ndarray: 多维数组对象

NumPy中最重要的一个特点: N维数组对象, ndarray. 你可以利用N维数组对象对**整块数据**执行数学运算。其语法与标量元素的运算相同。

```
>>> data = np.random.rand(3,3)
>>> data
array([[0.52232992, 0.92664719, 0.35555342],
       [0.3555134 , 0.28364172, 0.62273   ],
       [0.99804396, 0.83944161, 0.66612003]])
>>> data * 10
array([[5.22329922, 9.26647189, 3.55553423],
       [3.55513402, 2.83641718, 6.22730001],
       [9.98043964, 8.39441611, 6.66120028]])
```

```
>>> data **2
array([[0.27282855, 0.85867501, 0.12641824],
       [0.12638978, 0.08045262, 0.38779265],
       [0.99609175, 0.70466222, 0.44371589]])
>>> data + data
array([[1.04465984, 1.85329438, 0.71110685],
       [0.7110268 , 0.56728344, 1.24546   ],
       [1.99608793, 1.67888322, 1.33224006]])
```

ndarray: 一个通用的同构数据多维容器。同构的意思：所有元素的**数据类型必须相同**。

创建多维数组的方法

为创建一个数组，最简单的一种方法是利用**array()函数**。array()接受一切序列型对象，然后产生一个新的含有传入数据的NumPy数组。

```
# 新建一个列表
a = [1, 2, -3]
# 创建NumPy数组
a = np.array(a)
print(a)
```

在交互界面，可以看到结果如下：

```
>>> import numpy as np
>>> a = [1, 2, -3]
>>> a = np.array(a)
>>> a
array([ 1,  2, -3])
```

np.array()用于将一个**序列**转换成NumPy数组。一维NumPy数组可表示矢量，二维NumPy数组可以表示矩阵。

嵌套序列传入array(),将会生成一个多维数组。

```
>>> data = [[1, 2, 3], [4, 5, 6]]
>>> data
[[1, 2, 3], [4, 5, 6]]
>>> arr = np.array(data)
>>> arr
array([[1, 2, 3],
       [4, 5, 6]])
```

创建数组还有其它方法：zeros(), ones(), empty()等。创建数组时只需要传入表示形状的**元组**。

1. np.ones(数组形状) 创建指定形状的值均为1.0的数组
2. np.zeros(数组形状) 创建指定形状的数值均为0.0的数组
3. np.empty(数组形状) 创建一个没有任何具体值的数组。返回的是一些**未初始化的垃圾值**。

4. np.arange() Python内置函数range()的数组版.

举例：

```
>>> arr = np.ones([5, 5])
>>> arr
array([[1., 1., 1., 1., 1.],
       [1., 1., 1., 1., 1.],
       [1., 1., 1., 1., 1.],
       [1., 1., 1., 1., 1.],
       [1., 1., 1., 1., 1.]])
>>> arr = np.zeros([5, 5])
>>> arr
array([[0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.],
       [0., 0., 0., 0., 0.]])
>>> arr = np.zeros([5,1])
>>> arr
array([[0.],
       [0.],
       [0.],
       [0.],
       [0.]])
>>> arr.shape
(5, 1)
>>> arr = np.empty([3,3])
>>> arr2 = np.zeros([3,3])
>>> arr
array([[1.04465984, 1.85329438, 0.71110685],
       [0.7110268 , 0.56728344, 1.24546   ],
       [1.99608793, 1.67888322, 1.33224006]])
>>> arr2
array([[0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.],
       [0., 0., 0.]])
>>> arr3 = np.empty((2,3,2))
>>> arr3
array([[[6.91605611e-310, 6.91605611e-310],
       [6.91605489e-310, 6.91605489e-310],
       [0.00000000e+000, 2.07507571e-322]],
       [[3.16202013e-322, 3.95252517e-322],
       [0.00000000e+000, 1.93101617e-312],
       [4.67956608e-310, 6.91605489e-310]]])
```

注意： 多维数组的形状用元组表示. 例如,

(2,3) 表示两行三列的数组;

(2,3,2) 表示两层，三行，两列的数组;

...

大小相等的数组之间的算术运算

大小相等的数组的算术运算，会将运算应用到元素上。

```
>>> c = np.array([[1.,1.,2.,3.],[2.,3.,5.,8.]])
>>> c * c
array([[ 1.,  1.,  4.,  9.],
       [ 4.,  9., 25., 64.]])
>>> c + c
array([[ 2.,  2.,  4.,  6.],
       [ 4.,  6., 10., 16.]])
```

数组与标量的运算时，会自动广播。

```
>>> 2/c
array([[2.         , 2.         , 1.         , 0.66666667],
       [1.         , 0.66666667, 0.4        , 0.25        ]])
>>> c +100
array([[101., 101., 102., 103.],
       [102., 103., 105., 108.]])
```

数组的索引和切片

为了选取数据子集和单个元素，我们就要用到索引和切片。

对于一维数组。

```
>>> arr = [1,1,2,3,5,8,13,21]
>>> arr = np.array(arr)
>>> arr[5]
8
>>> arr[3:6]
array([3, 5, 8])
>>> arr[3:6] = 100
>>> arr
array([ 1,  1,  2, 100, 100, 100, 13, 21])
>>> li = [1,1,2,3,5,8,13,21]
>>> li[3:6] = 100
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
TypeError: can only assign an iterable
>>>
```

注意：

1. 一个标量值可以赋值给一个切片，此时，该值自动广播。
2. 数组切片是原始数组的视图。这就是说，重新对切片赋值时，数据不会被复制。

对于二维数组。

```

>>> arr = np.array([[1.,1.,2.,3.],[5.,8.,13.,21.]])
>>> arr[0]
array([1., 1., 2., 3.])
>>> arr[0][3]
3.0
>>> arr[0,3]
3.0
>>> arr1 = np.random.rand(2,3,2)
>>> arr1
array([[[0.65377147, 0.46347353],
        [0.01582861, 0.30987198],
        [0.72194216, 0.03109628]],

       [[0.68244863, 0.26802431],
        [0.77974745, 0.69229205],
        [0.65806609, 0.42842798]]])
>>> arr1[0]
array([[0.65377147, 0.46347353],
        [0.01582861, 0.30987198],
        [0.72194216, 0.03109628]])

```

注意：维度降低了一维

标量值和数组都可以被赋给数组的切片。

```

>>> arr1 = np.random.rand(2,3,2)
>>> arr1
array([[[0.81737508, 0.13839949],
        [0.48990841, 0.96020806],
        [0.90591118, 0.46625228]],

       [[0.43957694, 0.99469063],
        [0.66883577, 0.48337658],
        [0.29578693, 0.56942072]]])
>>> arr1[0] = 1
>>> arr1
array([[[1., 1., 1.],
        [1., 1., 1.],
        [1., 1., 1.]],

       [[0.43957694, 0.99469063],
        [0.66883577, 0.48337658],
        [0.29578693, 0.56942072]]])
>>> arr1[0][1] = [0.888,0.888]
>>> arr1
array([[[1., 1., 1.],
        [0.888, 0.888, 0.888],
        [1., 1., 1.]],

       [[0.43957694, 0.99469063],
        [0.66883577, 0.48337658],
        [0.29578693, 0.56942072]]])

```

切片索引

可以利用切片来作为索引。

一维数组情形。一维数组的切片索引与Python列表一样。

```
>>> arr1 = np.arange(9)
>>> arr1
array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8])
>>> arr1[1:5]
array([1, 2, 3, 4])
```

对于高维数组情形，举例如下。

```
>>> arr1 = np.random.rand(3,3)
>>> arr1
array([[0.4200515 , 0.78597517, 0.61709023],
       [0.87862158, 0.69253671, 0.44150086],
       [0.53193733, 0.95877519, 0.83820543]])
>>> arr1[:2]
array([[0.4200515 , 0.78597517, 0.61709023],
       [0.87862158, 0.69253671, 0.44150086]])
```

所以，arr1[:2] 沿着第0轴做切片！沿着第一个轴切片(沿着我所谓的"层"轴做切片)。

你可以整数索引和切片混合使用，也可以一次传入多个切片。例如

```
>>> arr1 = np.random.rand(2,2,3)
>>> arr1
array([[[0.022278 , 0.12247047, 0.22456783],
       [0.72285596, 0.20533987, 0.95048753]],

       [[0.3857556 , 0.07047928, 0.88361794],
       [0.40705212, 0.78467823, 0.91036008]]])
>>> arr1[1,:2]
array([[0.3857556 , 0.07047928, 0.88361794],
       [0.40705212, 0.78467823, 0.91036008]])
>>> arr1[1,0,:2]
array([0.3857556 , 0.07047928])
```

布尔型索引

与算术运算相似，我们也有数组的**比较运算**。例如 ==, <, > 等运算就是比较运算。比较运算也是**矢量化**的。比如，这就是说你可以拿一个字符串去和一个包含多个字符串的数组做"=="运算。结果是：这个字符串将与数组的每一个元素分别做比较运算(==)。这和广播机制一样。

比较运算可以产生**布尔型数组**。**布尔型数组**很有用，它也可用于数组索引，这就是**布尔型索引**。

举例。下面两个数组names是五位同学的姓名，data是它们的**语数外成绩**。

```
>>> data = np.array(data)
>>> data
array([[88, 88, 88],
       [61, 78, 80],
       [91, 95, 93],
       [80, 98, 95],
       [88, 99, 92]])
>>> names = ['Wang', 'Feng', 'Cheng', 'Chu', 'Wei']
>>> names = np.array(names)
>>> data
array([[88, 88, 88],
       [61, 78, 80],
       [91, 95, 93],
       [80, 98, 95],
       [88, 99, 92]])
>>> names == 'Feng'
array([False,  True, False, False, False])
>>> data[names=='Feng']
array([[61, 78, 80]])
```

注意：

1. 布尔型数组的长度必须和被索引的轴长度一致。
2. 布尔型索引可以和切片索引，整数索引混合使用。
3. 组合应用多个布尔条件用于索引时，需要用到**&**、**|**这样的布尔算术运算符,前者代表 " 和 ",后者代表"或".
(and, or 在此无效！)

```
>>> data[names=='Feng'][:, :2]
array([[61, 78]])
```

上例为了得到Feng同学的语文，数学成绩。

下面例子的输出结果的含义是：**除Feng同学外的所有人的数学成绩**。

```
>>> data[names != 'Feng'][:, 1:2]
array([[88],
       [95],
       [98],
       [99]])
```

下面例子给出：**除了Feng和Wei外的其他人的数学成绩**。

```
>>> data[(names != 'Feng') & (names != 'Wei')][:,1:2]
array([[88],
       [95],
       [98],
       [99]])
```

利用np.matrix()函数生成矩阵

np.matrix()的输入参数为一个序列，其输出为一个矩阵。

举例：

```
>>> b = [[1,0],[0,-1]]
>>> b = np.matrix(b)
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
```

说明，np.matrix()中的输入参数为一个序列，所以上面例子中的列表b,也可以换作元组。例如

```
>>> b = ([1,0],[0,-1])
>>> b = np.matrix(b)
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> b = ((1,0),(0,-1))
>>> b = np.matrix(b)
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
```

索引的"最高境界"----花式索引

我们如何把数组的子集进行"重组"呢？我们把索引本身用一个**列表**来表示！ 这就是**花式索引**:利用**整数数组**进行索引。 重点就是"数组"二字！

```
>>> arr = np.empty((10,4))
>>> for i in range(10):
...     arr[i] = i
...
>>> arr
array([[0., 0., 0., 0.],
       [1., 1., 1., 1.],
```



```

    [2., 2., 2., 2.],
    [3., 3., 3., 3.],
    [4., 4., 4., 4.],
    [5., 5., 5., 5.],
    [6., 6., 6., 6.],
    [7., 7., 7., 7.],
    [8., 8., 8., 8.],
    [9., 9., 9., 9.]])
>>> arr[2]
array([2., 2., 2., 2.])
>>> arr[8]
array([8., 8., 8., 8.])
>>> arr[1]
array([1., 1., 1., 1.])
>>> arr[[2,8,1]]
array([[2., 2., 2., 2.],
       [8., 8., 8., 8.],
       [1., 1., 1., 1.]])

```

上例中的列表[2,8,1]作为索引，定义了一个顺序。arr[[2,8,1]]实现了这样一个功能：以特定的顺序选取出这个二维数组的行子集。使用**负索引**也是可以的！

```

>>> arr[[-2,-5,-1]]
array([[8., 8., 8., 8.],
       [5., 5., 5., 5.],
       [9., 9., 9., 9.]])

```

如果"更上一层楼"呢？做了一次花式索引，我们就获得了一个按照特定顺序排列的子集了。如果我们还想继续对第一个维度上的数据再次**按照特定顺序提取子集**呢？ [/ / / 以下的说法准确与否，待研究考证！！ 我们把作为索引的整数数组与一个新的**整数数组**的元素一一对应，分别构成一个元组，把这个**元组**作为索引，就实现了这个功能: "二重花式索引"!

举例如下：

```

>>> arr = np.arange(36).reshape((9,4))
>>> arr
array([[ 0,  1,  2,  3],
       [ 4,  5,  6,  7],
       [ 8,  9, 10, 11],
       [12, 13, 14, 15],
       [16, 17, 18, 19],
       [20, 21, 22, 23],
       [24, 25, 26, 27],
       [28, 29, 30, 31],
       [32, 33, 34, 35]])
>>> arr[[2,8,1]]
array([[ 8,  9, 10, 11],
       [32, 33, 34, 35],
       [ 4,  5,  6,  7]])
>>> arr[[2,8,1],[1,3,2]]
array([ 9, 35,  6])

```

这里的两个整数数组其实不一定都得是长度相同的数组。我们可以把其中的一个换成只含有一个整数的数组，或者直接换成一个整数(去掉该数组的方括号)。此时，这个整数就自动广播！看下面的例子。

```
>>> arr[2,[1,3,2]]
array([ 9, 11, 10])
```

2 和[1,3,2]都分别用来指定一种索引顺序！这里构成了三个元组：(2,1),(2,3)和(2,2)。它们都含有两个整数作为元素，正是这些元组，实现了二重花式索引！ / / /]

注意：与切片不同的是，花式索引总会把数据复制到新数组。

思考题： 看下面这两种索引方式有何不同？

```
>>> arr[[2,8,1]]    #花式索引
array([[ 8,  9, 10, 11],
       [32, 33, 34, 35],
       [ 4,  5,  6,  7]])
>>> arr[[2,8,1],[1,3,2]] #二重花式索引
array([ 9, 35,  6])
>>> arr[[2,8,1][:,[1,3,2]] #一般索引
array([[ 9, 11, 10],
       [33, 35, 34],
       [ 5,  7,  6]])
```

数组的转置与轴对称

转置是将数组重塑的一种形式，转置过程不会有数据的复制。数组有转置方法(transpose方法)，也有一个转置属性(T属性)。转置常用在矩阵内积(一种矩阵与其自身的乘法运算)中。矩阵内积可表示为

$$A^T A.$$

看例子

```
>>> arr = np.arange(12).reshape((3,4))
>>> arr
array([[ 0,  1,  2,  3],
       [ 4,  5,  6,  7],
       [ 8,  9, 10, 11]])
>>> arr.T
array([[ 0,  4,  8],
       [ 1,  5,  9],
       [ 2,  6, 10],
       [ 3,  7, 11]])
>>> arr
array([[ 0,  1,  2,  3],
       [ 4,  5,  6,  7],
```

```

    [ 8,  9, 10, 11]])
>>> np.dot(arr, arr)
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ValueError: shapes (3,4) and (3,4) not aligned: 4 (dim 1) != 3 (dim 0)
>>> np.dot(arr.T, arr)
array([[ 80,  92, 104, 116],
       [ 92, 107, 122, 137],
       [104, 122, 140, 158],
       [116, 137, 158, 179]])

```

高维数组如何转置？transpose()方法需要得到一个由轴编号组成的元组，才可以对这些轴进行转置。要理解这一点，我们先要明白转置的本质是什么。转置就是将数组尺寸(一个元组)的元素适当地分配给不同的维度(或者说不同的轴)。例如，

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

原来数组的形状是(2,3)，即两行三列，转置就是将元组中的元素置换一下。在二维情形，这就是交换元组(2,3)的元素，使之变成(3,2)。而这个元组表示矩阵的形状(shape)，也就是说，现在矩阵的形状就变成了三行两列。对高维数组，假设其形状为(2,3,2)，那么转置的含义就是对元组(2,3,2)的元素在各轴上的分配做置换，对应的形式有多种：

$$\begin{array}{c|cccccc} 2 & | & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & | & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & | & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad (2)$$

```

>>> arr.transpose((0,1,2))
array([[[ 0,  1,  2],
        [ 3,  4,  5]],

       [[ 6,  7,  8],
        [ 9, 10, 11]]])
>>> arr
array([[[ 0,  1,  2],
        [ 3,  4,  5]],

       [[ 6,  7,  8],
        [ 9, 10, 11]]])
>>> arr.transpose((1,0,2))
array([[[ 0,  1,  2],
        [ 6,  7,  8]],

       [[ 3,  4,  5],
        [ 9, 10, 11]]])
>>> arr.transpose((1,2,0))
array([[[ 0,  6],
        [ 1,  7],
        [ 2,  8]],

```

```

[[ 3,  9],
 [ 4, 10],
 [ 5, 11]])
>>> arr.transpose((2,0,1))
array([[ 0,  3],
       [ 6,  9],

       [ 1,  4],
       [ 7, 10],

       [ 2,  5],
       [ 8, 11]])
>>> arr.transpose((2,1,0))
array([[ 0,  6],
       [ 3,  9],

       [ 1,  7],
       [ 4, 10],

       [ 2,  8],
       [ 5, 11]])

```

由此可见，数组的形状元组的元素有多少种置换，就有多少种参数可以输入到`transport()`方法。上面例子中的高维数组可以在六种不同的形状间进行置换。

```

>>> arr = np.arange(12).reshape((3,4))
>>> arr
array([[ 0,  1,  2,  3],
       [ 4,  5,  6,  7],
       [ 8,  9, 10, 11]])
>>> arr.T
array([[ 0,  4,  8],
       [ 1,  5,  9],
       [ 2,  6, 10],
       [ 3,  7, 11]])
>>> arr3 = np.arange(12).reshape((2,3,2))
>>> arr3.T
array([[ 0,  6],
       [ 2,  8],
       [ 4, 10],

       [ 1,  7],
       [ 3,  9],
       [ 5, 11]])
>>> arr3
array([[ 0,  1],
       [ 2,  3],
       [ 4,  5],

       [ 6,  7],
       [ 8,  9],
       [10, 11]])

```

```

>>> arr3.transpose((0,1,2))
array([[[ 0,  1],
         [ 2,  3],
         [ 4,  5]],

       [[ 6,  7],
         [ 8,  9],
         [10, 11]]])
>>> arr3.transpose((0,2,1))
array([[[ 0,  2,  4],
         [ 1,  3,  5]],

       [[ 6,  8, 10],
         [ 7,  9, 11]]])
>>> arr3.transpose((2,1,0))
array([[[ 0,  6],
         [ 2,  8],
         [ 4, 10]],

       [[ 1,  7],
         [ 3,  9],
         [ 5, 11]]])

```

可见, arr3.T的值与arr3.transpose((2,1,0))的输出是一样的。也就是说,T属性的值相当于把(0,1,2)形状默认地转换成(2,1,0)。也就是说T属性在transpose()众多的结果中选择了一种特殊的转置状态--把形状元组颠倒一下顺序。

小结:

再次强调,我们用元组来表示数组的形状。传入transpose()方法的参数赢得是一个以数组指标为元素的元组。

习题: 利用NumPy生成一个形状为(2,2,3)的三维数组。利用transpose()方法将第0轴置换到第一轴,把第1轴置换到第0轴。

参考解:

```

>>> arr = np.arange(12).reshape((2,2,3))
>>> arr
array([[[ 0,  1,  2],
         [ 3,  4,  5]],

       [[ 6,  7,  8],
         [ 9, 10, 11]]])
>>> arr.transpose((1,0,2))
array([[[ 0,  1,  2],
         [ 6,  7,  8]],

       [[ 3,  4,  5],
         [ 9, 10, 11]]])

```

一个矩阵的转置矩阵和逆矩阵可通过T和I 属性求得。例如

```
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> b.T
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> b.I
matrix([[ 1.,  0.],
        [-0., -1.]])
```

习题：见习题1.

获取NumPy数组的属性

每个数组都有size, shape, dtype, ndim等属性。

size属性： 数组内元素的个数，是一个整数

```
>>> a
array([ 1,  2, -3])
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> a.size
3
>>> b.size
4
```

shape属性： 返回NumPy数组的形状，其值用元组表示

```
>>> a = [1, 2, -3]
>>> a = np.array(a)
>>> b = [[1, 0], [0, -1]]
>>> b = np.matrix(b)
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> a.shape
(3,)
>>> b.shape
(2, 2)
>>> c = [[1, 2], [2, 1]]
>>> c = np.array(c)
>>> c.shape
(2, 2)
>>> a_mat = np.matrix(a)
>>> a_mat.shape
(1, 3)
```

```

>>> a
array([ 1,  2, -3])
>>> a.shape
(3,)
>>> a_mat.T
matrix([[ 1],
        [ 2],
        [-3]])
>>> a_mat_trans = a_mat.T
>>> a_mat_trans.shape
(3, 1)

```

注意:

1. size属性返回NumPy数组的元素个数，返回值为一个整数；shape属性返回NumPy数组的形状，返回值为一个数组。
2. 对于序列b, np.array(b)与np.matrix(b)生成的数据具有不同的shape属性。

ndim属性: NumPy数组的维度. 是一个数。

```

>>> a
array([ 1,  2, -3])
>>> b
matrix([[ 1,  0],
        [ 0, -1]])
>>> a.ndim
1
>>> b.ndim
2
>>> a_mat
matrix([[ 1,  2, -3]])
>>> a_mat.ndim
2
>>> tmp = np.array([[1,1],[1,1]])
>>> tmp.ndim
2

```

dtype属性: NumPy数组元素类型. 保存在一个特殊的dtype对象中。NumPy是用来做数值计算，所以一般都是float64 (浮点数)类型。通常只需记住我们要处理的数据类型大致包括: **浮点数，复数，整数，布尔值，字符串，和普通Python对象**。

```

>>> a
array([ 1,  2, -3])
>>> a.dtype
dtype('int64')
>>> c = np.array([1,1,2,3,5], dtype=np.int32)
>>> c.dtype
dtype('int32')
>>> c
array([1, 1, 2, 3, 5], dtype=int32)

```

```
>>> tmp = np.array([[1,1],[1,1]])
>>> tmp.dtype
dtype('int64')
>>> c.astype(float)
array([1., 1., 2., 3., 5.])
>>> c
array([1, 1, 2, 3, 5], dtype=int32)
```

注意：调用`astype()`，可以转换数组的dtype值。调用时，会创建一个新的数组(原始数组的一份拷贝)。

NumPy中的通用函数

NumPy中的通用函数(ufunc)是一种对NumPy数组(ndarray数据)做元素级的运算的函数。

现在，我们举例来学习NumPy中用于数学计算的函数。以绝对值函数为例，我们看ufunc是如何作为矢量化包装器的。ufunc接收的参数都是数组。可以是单个的数，列表，元组。注意，此处不能是多个以逗号隔开的数。

```
>>> np.abs(-3)
3
>>> np.abs(-3,2,3)
Traceback (most recent call last):
  File "<stdin>", line 1, in <module>
ValueError: invalid number of arguments
>>> np.abs([-3,2,3])
array([3, 2, 3])
>>> np.abs((-3,2,3))
array([3, 2, 3])
>>> arr = np.array([-3,2,3])
>>> np.abs(arr)
array([3, 2, 3])
```

`np.sqrt()`函数的输入和输出格式也是类似。其含义就是求平方根。

```
>>> arr = np.arange(8)
>>> np.sqrt(arr)
array([0.          , 1.          , 1.41421356, 1.73205081, 2.          ,
       2.23606798, 2.44948974, 2.64575131])
>>> np.sqrt(101)
10.04987562112089
```

像上面这样的函数，只有一个数组作为参量。我们称它们为**一元通用函数**(unary ufunc)。很多通用函数都是一元通用函数。举例如下。

```
>>> np.sin(np.pi)
1.2246467991473532e-16
>>> np.cos(np.pi)
-1.0
```



```

>>> np.tan(np.pi)
-1.2246467991473532e-16
>>> np.tanh(np.pi)
0.99627207622075
>>> np.arctanh(np.pi)
__main__:1: RuntimeWarning: invalid value encountered in arctanh
nan
>>> np.arctanh(0)
0.0
>>> np.exp(2)
7.38905609893065
>>> np.exp((1,2))
array([2.71828183, 7.3890561 ])
>>> np.exp([1,2])
array([2.71828183, 7.3890561 ])
>>> np.exp(np.array([1,2]))
array([2.71828183, 7.3890561 ])
>>> np.log(10)
2.302585092994046
>>> np.log(2.718281828)
0.9999999998311266
>>> np.power(2,4)
16
>>> np.sum([2,4])
6
>>> np.sum(range(100))
4950
>>> np.sum(range(101))
5050
>>> np.sqrt(10)
3.1622776601683795
>>> np.std(np.random.rand(3,3))
0.30307604409250294
>>> np.random.rand(3,3)
array([[0.21698451, 0.52178422, 0.39934183],
       [0.68979417, 0.13589977, 0.4271345],
       [0.87149864, 0.15843857, 0.9955583]])
>>> np.std(np.random.rand(3,3))
0.3003265558861839
>>> a
array([ 1,  2, -3])
>>> np.dot(a,a)
14

```

注意：

1. 两次np.std()的计算结果有细微的差异，这是随机函数np.random.rand()结果的不确定性导致的
2. np.sum()的输入参数为列表，元组，迭代器或NumPy数组。不能是数。

有些函数接受两个数组，返回一个结果数组。我们称之为二元通用函数(binary ufunc)。二元通用函数的一个例子就是np.maximum(x,y)。这个函数将对数组x,y做元素级比较，返回每次比较的最大值构成的数组。

习题:

利用NumPy生成两个长度为10的随机数组x,y. 用np.maximum()比较两个数组, 查看返回值是什么, 并解释返回结果的含义.

```
>>> y = np.random.randn(10)
>>> x = np.random.randn(10)
>>> x
array([-0.37654513,  0.65248182, -1.48083873, -0.26732807, -0.97138262,
        0.37474728,  0.57858783, -1.31005491,  1.25678526, -0.80103272])
>>> y
array([ 0.36398967,  0.12152901,  0.87183313, -1.66411662,  1.56899448,
        0.83142682,  0.05971105, -2.12383641,  0.05032659, -0.41275907])
>>> np.maximum(x,y)
array([ 0.36398967,  0.65248182,  0.87183313, -0.26732807,  1.56899448,
        0.83142682,  0.57858783, -1.31005491,  1.25678526, -0.41275907])
```

能返回多个数组的通用函数极少, modf()是一个例子. 其返回数组的元素的小数部分和整数部分.

```
>>> x = np.random.rand(10)
>>> x
array([0.66007778, 0.44421804, 0.99472698, 0.30436981, 0.20331587,
       0.98398877, 0.31517495, 0.29966809, 0.76072304, 0.96172317])
>>> np.modf(x)
(array([0.66007778, 0.44421804, 0.99472698, 0.30436981, 0.20331587,
       0.98398877, 0.31517495, 0.29966809, 0.76072304, 0.96172317]), array([0., 0., 0.,
       0., 0., 0., 0., 0., 0., 0.]))
```

NumPy基础学习完了. 下面是其应用.

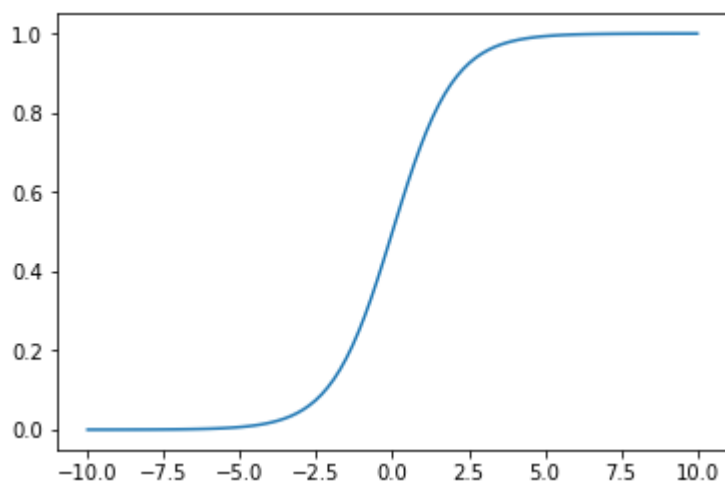
3. NumPy在绘制函数图像中的应用

例题: 利用NumPy和matplotlib.pyplot模块画出S-型函数.

S-型函数 (Sigmoid函数) 的函数图像是 S 型曲线. 它的表达式为

$$y = \frac{1}{1 + e^{-x}}, x \in (-\infty, \infty). \quad (3)$$

下列Python代码可以画出其图像.



np.linspace()函数

np.linspace()函数的作用是：

通过指定**开始值**、**终值**和**元素个数**创建表示等差数列的**一维数组**，可以通过endpoint参数指定是否包含终值，默认值为True。

```
In[64]: a = np.linspace(1,10,10)
In[65]: a
Out[65]: array([ 1.,  2.,  3.,  4.,  5.,  6.,  7.,  8.,  9., 10.])

In[66]: a = np.arange(1,10,10)

In[67]: a
Out[67]: array([1])
```

注意：np.linspace()函数与np.arange()函数有相同点，也有区别。

相同点：二者都产生一维等差数列数组。

区别：仅在于第三个参数的含义，在np.linspace()中为元素个数，在np.arange()中为步长。

列表推导式

数学函数往往可以表示成两个集合之间的映射(map)。这里的集合，在Python作图时，我们一般用列表来实现。例如，我们有一个集合

$$x = [0, 1, 2, 3, 4, 5] \quad (4)$$

我们把这个集合中的每一个元素都施行一个操作，比如乘以2，所得的集合为

$$y = [0, 2, 4, 6, 8, 10]. \quad (5)$$

我们把这个对x中的每个元素乘以2的操作记为一个函数

$$y = f(x) = 2x. \quad (6)$$

在函数图像绘制时，常常需要用到**列表推导式**。其基本格式如下：

```
variable = [函数表达式 for elem in input_list if 逻辑表达式]
out_exp_res:    函数表达式 .
for elem in input_list:    表达出自变量的取值范围 .
if 逻辑表达式:    根据条件过滤出需要的值    （可省略）
```

举例如下。

```
In[74]: li = [i for i in range(6)]
In[75]: li
Out[75]: [0, 1, 2, 3, 4, 5]

In[72]: li = [i for i in range(30) if i % 3 is 0]
In[73]: li
Out[73]: [0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27]

In[76]: li = [i*i for i in range(6)]

In[76]: li
Out[77]: [0, 1, 4, 9, 16, 25]

In[78]: li = [2*i*i+5 for i in range(6)]

In[79]: li
Out[79]: [5, 7, 13, 23, 37, 55]
```

plt.plot()函数

一般地，plt.plot()函数的使用方法是：

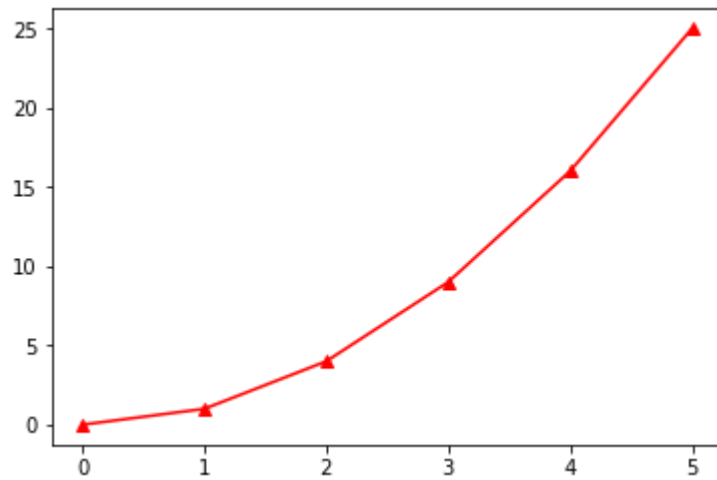
```
matplotlib.pyplot.plot(*args, **kwargs)
```

具体地使用方法如下：

```
matplotlib.pyplot.plot(x,y,显示格式,label='图1', linewidth=2)
```

举例来说:

```
In[83]: plt.plot([0,1,2,3,4,5], [0,1,4,9,16,25], 'r-^')
Out[83]: [<matplotlib.lines.Line2D at 0x7fa1b0ba2be0>]
```



显示格式主要分为： 颜色，样式和标记。如'g-*', 'bos',等等。 跟多显示格式，请见本节附录。

plt.show()函数

plt.show()函数的作用就是:显示图片。图片显示出来后，我们可以将其另存。

下面是做出S-型曲线的代码。

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

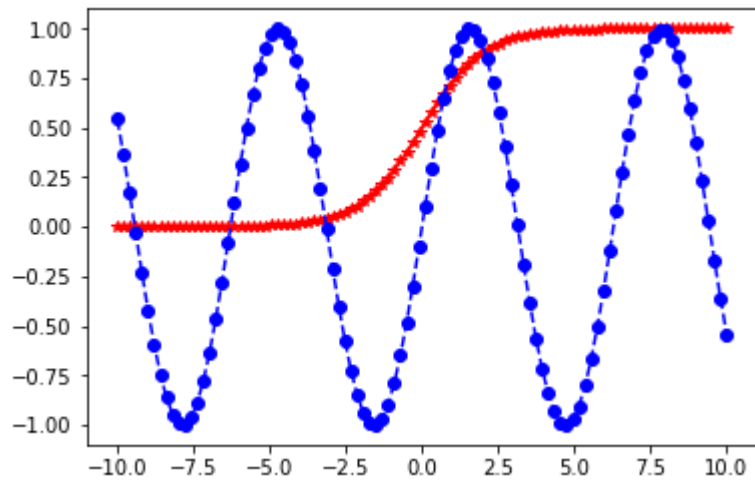
# Sigmoid function
x = np.linspace(-10,10,100)
y = [1/(1 + np.exp(-i)) for i in x]

# Plotting
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

习题。 用NumPy和matplotlib.pyplot画出余弦函数

$$f(x) = \cos(x), x \in [-10, 10] \quad (7)$$

的图像。



4. NumPy.random模块

numpy.random模块是对Python内置的random函数的补充。NumPy.random模块的主要功能：其中有很多函数，可用来高效生成多种**概率分布**的样本值。所以，该模块的主要应用在于：利用np.random创建服从某种分布的随机数组。

均匀分布

np.random.rand(n, m)：创建n行m列的数组。数组元素的取值范围在区间(0,1)之内。

```
>>> np.random.rand(5, 5)
array([[0.33545572, 0.22438827, 0.46207116, 0.3920071 , 0.13543657],
       [0.28442642, 0.54048246, 0.85546365, 0.3302107 , 0.10327565],
       [0.82825722, 0.82035248, 0.40088528, 0.10274835, 0.33550855],
       [0.73817853, 0.70329954, 0.0058989 , 0.08186101, 0.08583822],
       [0.41840635, 0.15485565, 0.48006731, 0.49085061, 0.76156518]])
>>> np.random.rand(5, 5)
array([[0.00722312, 0.43509609, 0.87217296, 0.65751913, 0.77313412],
       [0.87248168, 0.79655126, 0.70654874, 0.30630417, 0.38716711],
       [0.23395375, 0.55154781, 0.99831884, 0.2248853 , 0.08988707],
       [0.44540938, 0.43328726, 0.19414863, 0.66876612, 0.46741858],
       [0.02007959, 0.69013767, 0.69617925, 0.19432802, 0.42951527]])
```

注意：

1. 两次运行的结果具有相同的形状(5,5)，其元素值x在区间(0,1)上随机分布。
2. 可以用matplotlib作图：

标准正态分布

np.random.normal()函数可以用来生成标准正态分布任何形状的数组。np.random.normal(均值, 标准差, 形状)：其中均值和标准差为浮点数，形状为元组(n,m)。

```
>>> np.random.normal(0.5, 0.2, (5, 5))
array([[0.6277587, 0.83388361, 0.36546103, 0.27739602, 0.33172285],
       [0.75950016, 0.54716822, 0.4560766, 0.47720964, 0.83400285],
       [0.72680853, 0.45886972, 0.2613164, 0.33869399, 0.29541308],
       [0.73153137, 0.27822389, 0.43675816, 0.44934917, 0.68045643],
       [0.45324277, 0.52163386, 0.66114137, 0.38151538, 0.50259286]])
>>> np.random.normal(0.5, 0.1, (2, 5))
array([[0.50634405, 0.46084022, 0.50301303, 0.58968301, 0.51001933],
       [0.59334026, 0.52705873, 0.54256089, 0.37062019, 0.62948564]])
```

例如，我们想生成一个满足标准正态分布的(5,5)样本数组。我们可以用下面的命令：

```
>>> np.random.normal(size=(5,5))
array([[ -0.06451491, -1.0429305, -0.30686635, 1.11722105, 0.91339477],
       [ 0.92261919, 1.3337151, -0.51509979, -2.2485199, -0.36621617],
       [-1.40794914, 0.0652263, 0.55707926, 0.88158198, 1.80325664],
       [-0.65814979, -2.627854, 0.34194335, -0.46776195, -0.17663397],
       [-1.4488447, -0.54246468, -1.25480247, -0.41360184, -1.56474439]])
```

练习: 生成一个长度为36的一维数组。

(1)统计分别位于 (-2.5, -1.5) (-1.5, -0.5) (-0.5,0.5) (0.5,1.5) (1.5, 2.5)区间的样本数据的个数。

(2)利用matplotlib将上面的结果可视化。

参考答案:

方法 1:

```
>>> arr = np.random.normal(size=(6,6)) # 若用此，则生成2D数组
>>> arr = np.random.normal(size=(36,)) # 生成一维数组
>>> arr
array([-0.56199463, 1.07131868, -1.20362405, -1.10611009, 0.58517066,
       1.37753756, -0.20234494, -0.78282561, 0.90444863, 0.20221265,
       2.19376517, -0.33884881, 1.20496185, -0.24225657, 0.5279184,
       -0.40569176, -0.23464235, 0.10366908, -1.80748497, 1.25272434,
       -0.03234483, 0.39232346, -0.38870605, 2.25808896, 0.50777093,
       -0.76681778, -0.51048126, 0.90201766, 0.89427453, -0.79220159,
       -0.37172, -0.39083458, -0.61873157, -1.54905753, -1.82909409,
       0.09965769])

>>>
>>> arr
array([[ -0.54519703, 0.02879349, 0.64447585, 1.19864494, -0.35415491,
       -0.44051859],
       [ 0.22834847, -0.16737447, 1.01085578, -0.5944718, -0.28467564,
       0.34853764],
       [-1.32217152, 0.72627501, 0.05167705, 1.07638971, -0.4330931,
       -1.66887857],
       [ 0.69307771, 0.90809432, 0.65080354, 1.98349807, -0.84559969,
       0.45842301],
       [-1.22414375, -2.3879844, -0.10373567, -1.2752652, 1.39336663,
       1.41383275],
```

```

        [-0.28332102,  0.13681999, -0.41571448, -0.50733904, -0.60209244,
        -1.07147797]])
>>> arr[(arr>-0.5) & (arr< 0.5)]
array([ 0.02879349, -0.35415491, -0.44051859,  0.22834847, -0.16737447,
        -0.28467564,  0.34853764,  0.05167705, -0.4330931 ,  0.45842301,
        -0.10373567, -0.28332102,  0.13681999, -0.41571448])
>>> arr[(arr>0.5) & (arr< 1.5)]
array([0.64447585, 1.19864494, 1.01085578, 0.72627501, 1.07638971,
        0.69307771, 0.90809432, 0.65080354, 1.39336663, 1.41383275])
>>> arr[(arr>1.5) & (arr< 2.5)]
array([1.98349807])
>>> arr[(arr>2.5) & (arr< 3.5)]
array([], dtype=float64)
>>> arr[(arr>-1.5) & (arr< -0.5)]
array([-0.54519703, -0.5944718 , -1.32217152, -0.84559969, -1.22414375,
        -1.2752652 , -0.50733904, -0.60209244, -1.07147797])
>>> arr[(arr>-2.5) & (arr< -1.5)]
array([-1.66887857, -2.3879844 ])
>>> arr[(arr>-3.5) & (arr< -2.5)]
array([], dtype=float64)

```

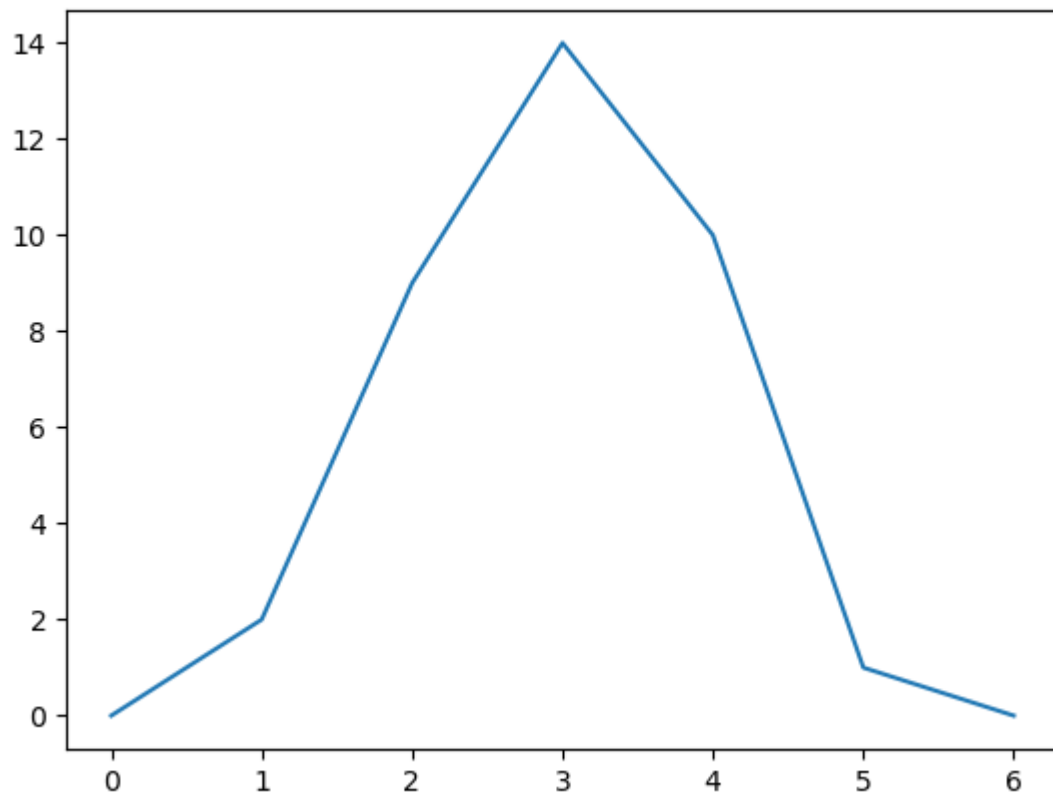
得到各区间的样本数据的个数为: 0, 2, 9 14, 10, 1, 0.

第二步，作图，直接用matplotlib .

```

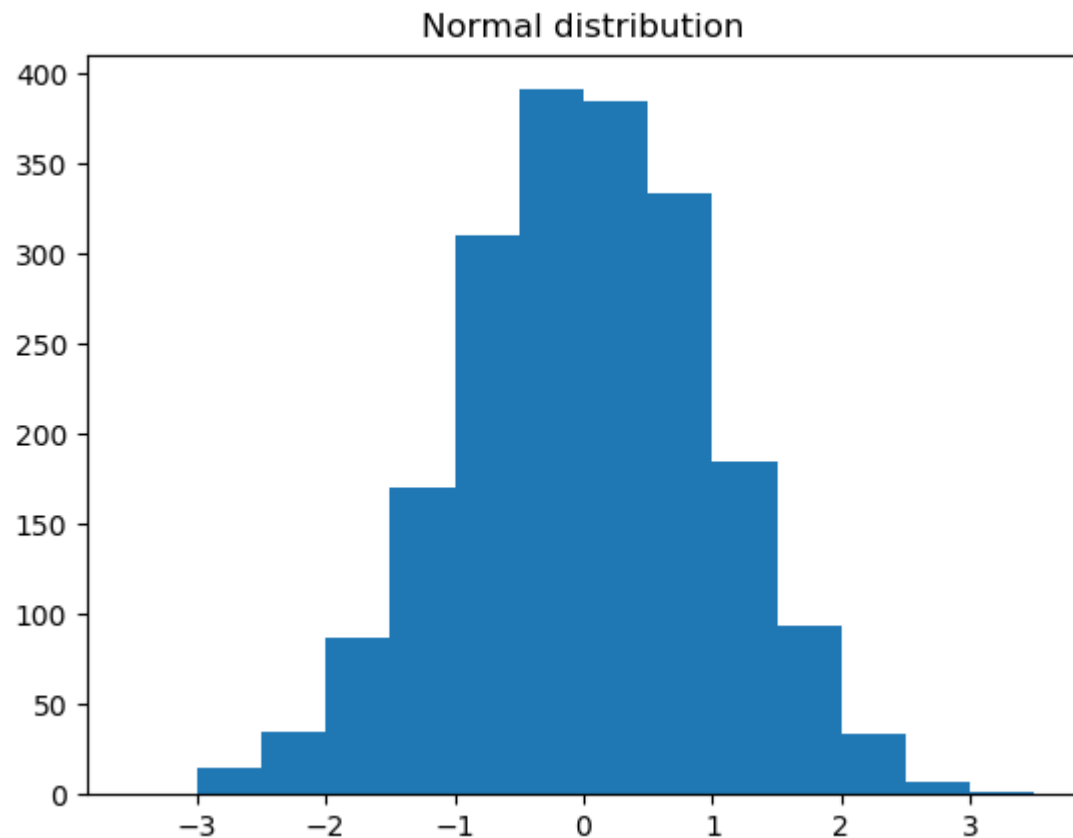
>>> aa = [0, 2, 9, 14, 10, 1, 0.]
>>> aa = np.array(aa)
>>> aa
array([ 0.,  2.,  9., 14., 10.,  1.,  0.])
>>> plt.plot(aa)
[<matplotlib.lines.Line2D object at 0x7f4982c4d7b8>]
>>> plt.show()

```

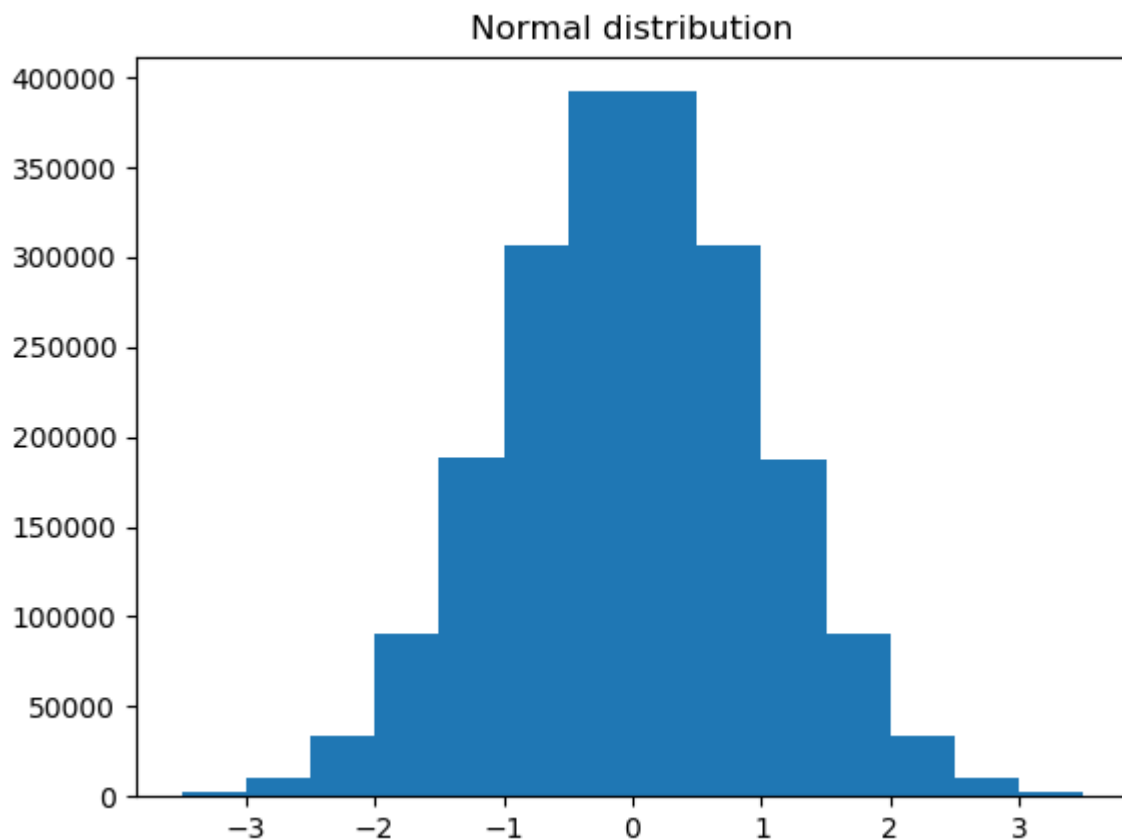
方法二:

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> a = np.random.normal(size=2048)
>>> plt.hist(a,bins = [-3.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5])
(array([ 0., 15., 35., 87., 170., 310., 391., 385., 334., 185., 93.,
        34., 7., 1.]), array([-3.5, -3. , -2.5, -2. , -1.5, -1. , -0.5, 0. , 0.5,
        1. , 1.5,
        2. , 2.5, 3. , 3.5])), <a list of 14 Patch objects>)
>>> plt.title("Normal distribution")
Text(0.5,1,'Normal distribution')
>>> plt.show()
```



样本总数再取多一些，就更符合标准正态分布了！把size设置为2048000时，代码格式完全不变，如下：

```
>>> import matplotlib.pyplot as plt
>>> a = np.random.normal(size=2048000)
>>> plt.hist(a,bins = [-3.5, -3, -2.5, -2, -1.5, -1, -0.5, 0, 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5])
(array([ 0., 15., 35., 87., 170., 310., 391., 385., 334., 185., 93.,
        34., 7., 1.]), array([-3.5, -3. , -2.5, -2. , -1.5, -1. , -0.5, 0. , 0.5,
        1. , 1.5,
        2. , 2.5, 3. , 3.5])), <a list of 14 Patch objects>)
>>> plt.title("Normal distribution")
Text(0.5,1,'Normal distribution')
>>> plt.show()
```



uniform()函数

`np.random.uniform(a, b)`: 随机地生成指定区间(a,b)内的一个数

```
>>> np.random.uniform(0, 100)
50.72544546749512
>>> np.random.uniform(0, 100)
5.834596983874629
>>> np.random.uniform(10, 100)
81.97229770632336
```

randint()函数

`np.random.randint(a, b)`: 随机地生成指定区间(a,b)内的一个整数. 一般a,b取整数, 所得可能是a,但不会取b.

```
>>> np.random.randint(0, 3)
1
>>> np.random.randint(0, 3)
2
>>> np.random.randint(0, 3)
1
>>> np.random.randint(0, 3)
0
```

应用举例: np.random.randint(n,m)用于在指定范围内随机地选出多个对象中的一个. 比如, 当你需要随机地在棋盘上某个空格子上放一颗棋子时, 就可以用此函数.

4.习题

1: (30分)习题: 对于二维旋转矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

当角度

$$\theta = 30^\circ$$

时, 对于

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

(1). 利用python编程来计算下列乘法的结果:

$$A\mathbf{x};$$
$$A^{-1}\mathbf{x}.$$

(2). 将(1)中的程序扩展, 使得当用户输入任意角度, 程序能给出下列乘法的结果:

$$A\mathbf{x};$$
$$A^{-1}\mathbf{x}.$$

(3). 当角度为 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 时, 计算

$$AA^{-1}\mathbf{x}=?$$

2: (20分)计算下列矩阵乘法. 用Python代码实现计算. 你需要写一个名为"matrix_product.py"的Python文件, 运行命令

python matrix_product.py

依次输出(1)(2)两题的结果. 格式如下:

AB: **

ZC: **

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

(2)

$$Z\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

说明：

1. 有模板可用，下载地址：https://github.com/hg08/ai_lecture/blob/master/week1/matrix_product.py

3：(20分) 用NumPy和matplotlib.pyplot画出余弦函数

$$f(x) = \cos(x), x \in [-10, 10] \quad (8)$$

的图像。

参考答案：

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Sigmoid function and cosine function
x = np.linspace(-10,10,100,endpoint=5)
y = [1/(1 + np.exp(-i)) for i in x]
y2 = [np.sin(i) for i in x ]

# Plotting
plt.plot(x,y, 'r-*)
plt.plot(x,y2, 'b--o')
plt.show()
```

5. 附录

5.1 常见通用函数

常见一元通用函数:

abs(): 计算绝对值

arcsin(): 计算反正弦函数

arccos():

cos, sin: 普通三角函数

cosh, sinh: 双曲型三角函数

sign()

modf()

isnan(): 返回布尔型数组

isinf,isfinite : 返回布尔型数组

np.sqrt(): 计算平方根

np.exp(): 计算底为e的指数函数的值

np.log(): 计算底为e的对数函数的值

np.sum(): 将数据结构的元素求和

np.std(): 计算标准差

常见二元通用函数:

add

subtract

multiply

divide, floor_divide

power

maximum, fmax

minimum, fmin

mod

copysign

greater, greater_equal

less, less_equal

equal, not_equal

logical_and, logical_or

logical_xor

dot(数组1,数组2): 计算两个数组(矢量)之点积

常数:

np.pi: 圆周率常数

$$\pi \approx 3.14159$$

np.e: 自然常数

$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x, x \in \mathbb{R}.$$

(10)

$$e \approx 2.71828$$

(11)

5.2 pyplot.plot()函数中显示格式

显示格式 format

颜色 color 和 风格 sytle (线 line + 标记 marker) 的组合。

如，

```
plot(x, y, 'r-*') # r为红色，-为线，*为星号标记
```

颜色 color

character	color	颜色
'b'	blue	蓝
'g'	green	绿
'r'	red	红
'c'	cyan	青绿
'm'	magenta	紫红
'y'	yellow	黄
'k'	black	黑
'w'	white	白

线 line

character	description	描述
'_'	solid	实线
'--'	dashed	破折线
'-.'	dash-dot	破折点线
'...'	dotted	点线

标记 markers

character	description	描述
'.'	point	圆点
','	pixel	像素点
'o'	circle	大圆点
'v'	triangle_down	↓ 实心三角
'^'	triangle_up	↑ 实心三角
'<'	triangle_left	← 实心三角
'>'	triangle_right	→ 实心三角
'1'	tri_down	↓ 梅花三角
'2'	tri_up	↑ 梅花三角
'3'	tri_left	← 梅花三角
'4'	tri_right	→ 梅花三角
's'	square	方块
'p'	pentagon	实心五角
'*'	star	五角星形
'h'	hexagon1	实心六角00°
'H'	hexagon2	实心六角60°
'+'	plus	'+' 形
'x'	x	'x' 形
'D'	diamond	实心菱形
'd'	thin_diamond	实心瘦菱形
md语法冲突	vline	竖线形
'_'	hline marker	下划线形