

Mathematical
Modeling
(Second Edition)

数学建模方法与分析
(原书第2版)

(新西兰) Mark M. Meerschaert 著

刘未田 杨淳 黄浩洋 译

第一部分 最优化模型

解决最优化问题是数学的一些最为常见的应用。无论我们进行何种工作，我们总是希望达到最好的结果，而使不好的方面或消耗等降到最低。企业管理人员试图通过对一些变量的控制使收益达到最大，或在达到某一预期目标的前提下使成本最低。经营渔业及林业等可更新资源的管理者要通过控制产量以达到长期效益的最大化；政府机构需要建立一些标准，使生产生活消费品的环境成本降到最低；计算机的系统管理员要使计算机的处理能力达最大，而使作业的延迟最少；农民会尽量调整种植空间从而使收获最高；医生则要合理使用药物使其副作用降到最低。这些以及许多其他的应用都有一个共同的数学模式：有一个或多个可以控制的变量，它们通常要受一些实际中的限制，通过对这些变量的控制，从而使某个目标达到最优。最优化模型正是要给定问题的约束条件，确定受约束的可控变量的取值，以达到最优结果。

第 1 章 单变量最优化

我们对最优化模型的讨论从单变量优化问题开始. 大多数学生对此已经有了一些实际的经验. 单变量优化问题又称极大-极小化问题, 通常在大学第一学期的微积分课程中已有介绍. 很多方面的实际应用问题仅用这些方法就可以处理. 本章的目的的一方面是对这些基本方法进行回顾, 另一方面是介绍数学模型的常见形式等基础知识.

1.1 五步方法

本节概要地介绍用数学模型解决问题的一般过程, 我们称之为五步方法. 我们以解决一个典型的单变量极大-极小化问题为例来介绍这个过程. 这类问题大多数学生在第一学期的微积分课程中都是接触过的.

例 1.1 一头猪重 200 磅[⊖], 每天增重 5 磅, 饲养每天需花费 45 美分. 猪的市场价格为每磅 65 美分, 但每天下降 1%, 求出售猪的最佳时间.

解决问题的数学模型方法包括五个步骤:

1. 提出问题
2. 选择建模方法
3. 推导模型的数学表达式
4. 求解模型
5. 回答问题

3

第一步是提出问题, 而问题需要用数学语言表达, 这通常需要大量的工作. 在这个过程中, 我们经常要根据问题的特点做一些假设. 在这里不必担心需要做出推测, 因为我们总可以在后面的过程中随时返回、用更好的推测进行调整. 在我们用数学形式提出问题之前, 我们要定义一些术语. 首先列出整个问题涉及的变量, 包括恰当的单位, 然后写出关于这些变量所做的假设, 列出我们已知的或假设的这些变量之间的关系式, 包括等式和不等式. 这些工作做完后, 就可以提出问题了. 用明确的数学语言写出这个问题的目标的表达式, 再加上前面写出的变量、单位、等式、不等式及所做假设. 就构成了完整的问题.

在例 1.1 中, 全部的变量包括: 猪的重量 w (磅), 从现在到出售猪期间经历的时间 t (天), t 天内饲养猪的花费 C (美元), 猪的市场价格 p (美元/磅), 售出生猪所获得的收益 R (美元), 我们最终获得的净收益 P (美元). 这里还有一些其他的有关量, 如猪的初始重量(200 磅)等, 但它们不是变量. 这里把变量和参量区分开是很重要的.

下面我们要列出对步骤 1 中所确定的这些变量所做的假设. 这里考虑到了参

⊖ 1 磅 = 0.454 kg

量在模型中的影响. 猪的重量从初始的 200 磅按每天 5 磅增加, 我们有:

$$(w \text{ 磅}) = (200 \text{ 磅}) + \left(\frac{5 \text{ 磅}}{\text{天}}\right)(t \text{ 天}).$$

这里我们把变量的单位包括进去, 从而可以检查所列式子是否有意义. 该问题中涉及到的其他假设包括:

$$\left(\frac{p \text{ 美元}}{\text{磅}}\right) = \left(\frac{0.65 \text{ 美元}}{\text{磅}}\right) - \left(\frac{0.01 \text{ 美元}}{\text{磅} \cdot \text{天}}\right)(t \text{ 天})$$

$$(C \text{ 美元}) = \left(\frac{0.45 \text{ 美元}}{\text{天}}\right)(t \text{ 天})$$

$$(R \text{ 美元}) = \left(\frac{p \text{ 美元}}{\text{磅}}\right)(w \text{ 磅})$$

$$(P \text{ 美元}) = (R \text{ 美元}) - (C \text{ 美元}).$$

我们还要假设 $t \geq 0$, 在这个问题中, 我们的目标是求净收益 P 的最大值. 图 1-1 对第一步所得的结果进行了归纳, 以便于后面参考.

变量:

t = 时间(天)

w = 猪的重量(磅)

p = 猪的价格(美元/磅)

C = 饲养 t 天的花费(美元)

R = 售出猪的收益(美元)

P = 净收益(美元)

假设:

$w = 200 + 5t$

$p = 0.65 - 0.01t$

$C = 0.45t$

$R = p \cdot w$

$P = R - C$

$t \geq 0$

目标: 求 P 的最大值

图 1-1 售猪问题的第一步的结果

第一步中的三个阶段(变量、假设、目标)的确定不需要按特定的顺序. 比如在第一步中首先确定目标常常更有帮助. 在例 1.1 中, 我们定义了目标 P 和列出等式 $P = R - C$ 后, 才能容易看出 R 和 C 应该为变量. 一个考查第一步是否完整的方法是检查 P 是否可以最终表示成变量 t 的函数. 关于步骤 1 的一个最好的一般性建议就是首先写出所有显而易见的部分. (例如对有些变量, 只需阅读对问题的说明, 并找出其中的名词, 即可得到.) 随着这个过程的进行, 其他部分会逐渐补充完整.

第二步是选择建模方法. 现在我们已经有了一个用数学语言表述的问题, 我们需要选择一个数学方法来获得解. 许多问题都可以表示成一个已有有效的一般求解方法的标准形式. 应用数学的多数研究, 包含确定问题的一般类别, 并提出解决该类问题的有效方法. 在这一领域有许多的文献, 并且不断取得许多新的进

展. 一般很少有学生对选择较好的建模方法有经验或熟悉参考文献. 在这本书里, 除了极少的例外, 我们都会给定所用的建模方法. 我们将例 1.1 定位为单变量优化问题, 或极大-极小化问题.

我们只给出所选建模方法的主要内容, 细节请读者参考微积分入门教科书.

给定定义在实轴的子集 S 上的实值函数 $y=f(x)$. 设 f 在 S 的某一内点 x 是可微的. 若 f 在 x 达到极大或极小, 则 $f'(x)=0$. 这一结论由微积分中的一个定理保证. 据此我们可以在求极大或极小点时不考虑那些 $x \in S$ 中 $f'(x) \neq 0$ 的内点. 只要 $f'(x)=0$ 的点不太多, 这个方法就很有效.

第三步是推导模型的公式. 我们要把第一步得到的问题应用于第二步, 写成所选建模方法需要的标准形式, 以便于我们运用标准的算法过程求解. 如果所选的建模方法通常采用一些特定的变量名, 比如我们的这个例子, 那么把我们问题中的变量名改换一下常会比较方便. 我们有:

$$\begin{aligned} P &= R - C \\ &= p \cdot w - 0.45t \\ &= (0.65 - 0.01t)(200 + 5t) - 0.45t. \end{aligned}$$

记 $y=P$ 作为需最大化的目标变量, $x=t$ 作为自变量. 我们的问题现在化为在集合 $S=\{x: x \geq 0\}$ 上求下面函数的最大值:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= (0.65 - 0.01x)(200 + 5x) - 0.45x. \end{aligned} \tag{1}$$

第四步是利用第二步中确定的标准过程求解这个模型. 在我们的例子中, 我们要对(1)式中定义的 $y=f(x)$ 在区间 $x \geq 0$ 上求最大值. 图 1-2 给出了 $f(x)$ 的曲线. 由于 f 关于 x 是二次的, 因此这是一条抛物线. 我们计算出

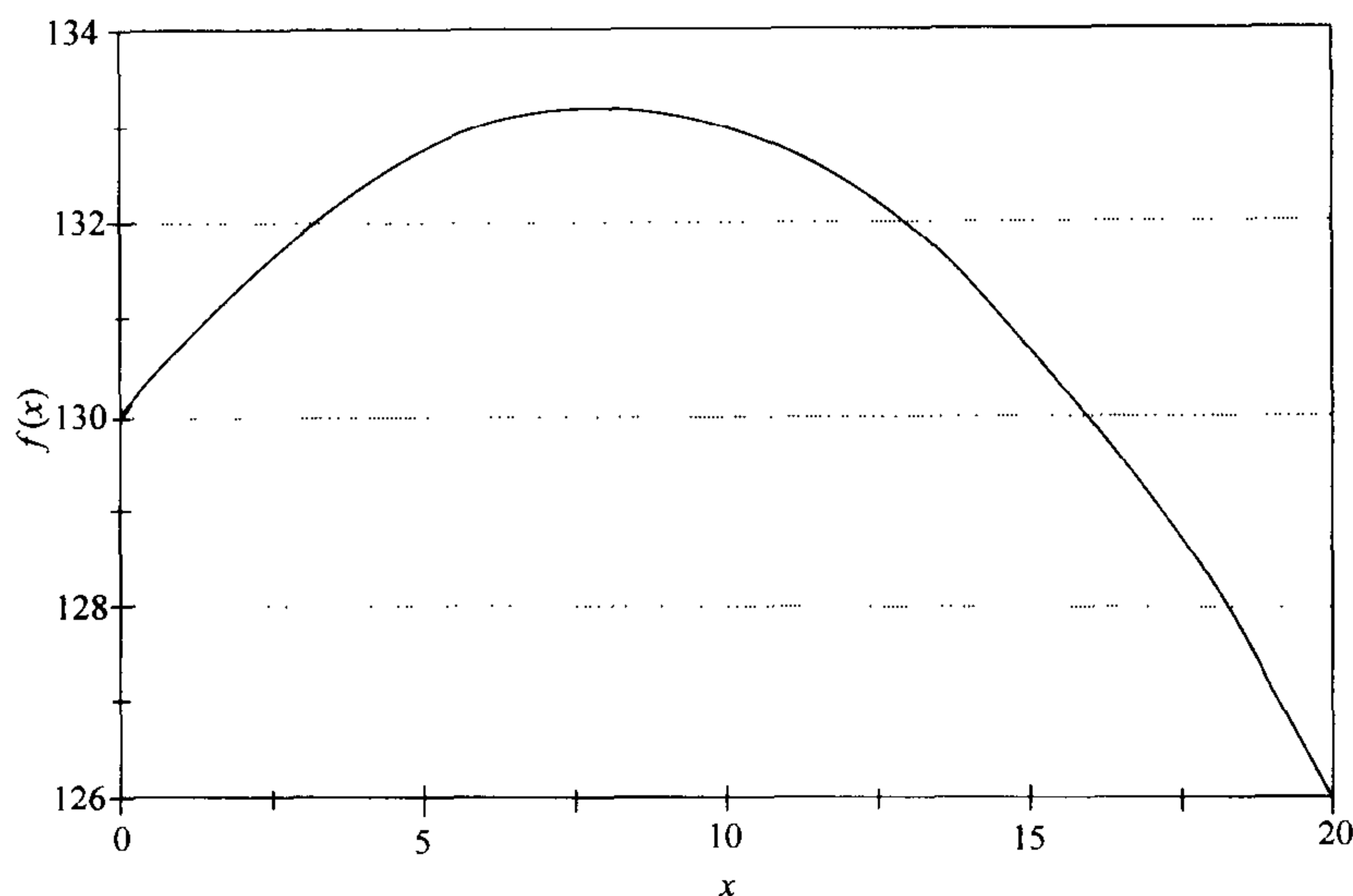
$$f'(x) = \frac{(8-x)}{10},$$

则在点 $x=8$ 处 $f'(x)=0$. 由于 f 在区间 $(-\infty, 8)$ 上是单调上升的, 而在区间 $(8, \infty)$ 是单调下降的, 则点 $x=8$ 是整体最大值点. 在此点我们有 $y=f(8)=133.20$. 因此点 $(x, y)=(8, 133.20)$ 是 f 在整个实轴上的整体最大值点, 从而也是区间 $x \geq 0$ 上的最大值点.

6

第五步是回答开始在第一步中提出的问题: 何时售猪可以达到最大的净收益. 由我们的数学模型得到的答案是在 8 天之后, 可以获得净收益 133.20 美元. 只要第一步中提出的假设成立, 这一结果就是正确的. 相关的问题及其他不同的假设可以按照第一步中的做法调整得到. 由于我们处理的是一个实际问题(一个农民决定何时出售他饲养的生猪), 在第一步中会有一个风险因素存在, 因此通常有必要研究一些不同的可能, 这一过程称为灵敏性分析, 我们将在下一节中讨论.

这一节的主要目的是介绍数学建模的五步方法. 图 1-3 将这一方法总结归纳

图 1-2 售猪问题的净收益 $f(x)$ 关于售猪时间 x 的曲线图

$$f(x) = (0.65 - 0.01x)(200 + 5x) - 0.45x$$

第一步，提出问题。

- 列出问题中涉及到的变量，包括适当的单位。
- 注意不要混淆了变量和常量。
- 列出你对变量所做的全部假设，包括等式和不等式。
- 检查单位从而保证你的假设有意义。
- 用准确的数学表达式给出问题的目标。

第二步，选择建模方法。

- 选择解决你的问题的一个一般的求解方法。
- 一般地，这一步的成功需要经验、技巧和对相关文献有一定的熟悉程度。
- 在本书中，我们通常会给定要用的建模方法。

第三步，推导模型的公式。

- 将第一步中得到的问题重新表达成第二步选定的建模方法所需要的形式。
- 你可能需要将第一步中的一些变量名改成与第二步所用的记号一致。
- 记下任何补充假设，这些假设是为了使在第一步中描述的问题与第二步中选定的数学结构相适应而做出的。

第四步，求解模型。

- 将第二步中所选方法应用于第三步得到的表达式。
- 注意你的数学推导，检查是否有错误，你的答案是否有意义。
- 采用适当的技术，计算机代数系统，图形，数值计算的软件等都能扩大你能解决问题的范围，并能减少计算错误。

第五步，回答问题。

- 用非技术性的语言将第四步的结果重新表述。
- 避免数学符号和术语。
- 能理解最初提出的问题的人就应该能理解你给出的解答。

图 1-3 五步方法

成了便于以后参考的图表形式. 在本书中, 我们会运用这个五步方法求解数学模型中的大量问题. 第二步一般会包括对所选建模方法的描述并附带一、两个例子. 已经熟悉这些建模方法的读者可以跳过这一部分或只熟悉一下其记号. 图 1-3 中提到的其他内容, 如适当技术的使用等, 我们会在本书后面的章节中展开讨论.

每章最后的习题同样需要应用五步方法. 现在养成使用五步方法的习惯, 今后就会比较容易解决我们遇到的复杂的模型问题. 这里对第五步要特别加以注意, 在实际中, 仅有结果正确是不够的, 你还需要有把你的结论和其他人交流的能力, 其中有些人可能并不像你一样对数学的知识有那么多的了解.

1.2 灵敏性分析

上一节概要地介绍了数学建模的五步方法. 整个过程从对问题做出一些假设开始. 但我们很少能保证这些假设都是完全正确的. 因此我们需要考虑所得结果对每一条假设的敏感程度. 这种灵敏性分析是数学建模中的一个重要方面. 具体内容与所用的建模方法有关, 因此关于灵敏性分析的讨论会在本书中贯穿始终. 这里我们仅对简单的单变量优化问题进行灵敏性分析.

在上节中, 我们用售猪问题(例 1.1)来说明数学模型的五步方法. 图 1-1 列出了我们在求解该问题中所做的所有假设. 在这个例子中, 数据和假设都有非常详细的说明, 即使这样, 我们还要再严格检查. 数据是由测量、观察有时甚至完全是由猜测得到的, 因此我们要考虑数据不准确的可能性.

我们知道有些数据要比其他的可靠性高得多, 生猪现在的重量、猪现在的价格, 每天的饲养花费都很容易测量, 而且有相当大的确定性. 猪的生长速率则不那么确定, 而价格的下降速率则确定性更低. 记 r 为价格下降的速率. 我们前面假设 $r=0.01$ 美元/天, 现在让我们假设 r 的实际值是不同的. 对几个不同的 r 值重复前面的求解过程, 我们会对问题的解关于 r 的敏感程度有所了解. 表 1-1 给出了选择几个不同的 r 值求出的计算结果. 图 1-4 将这些数据绘制在了图上. 我们可以看到售猪的最优时间对参数 r 是很敏感的.

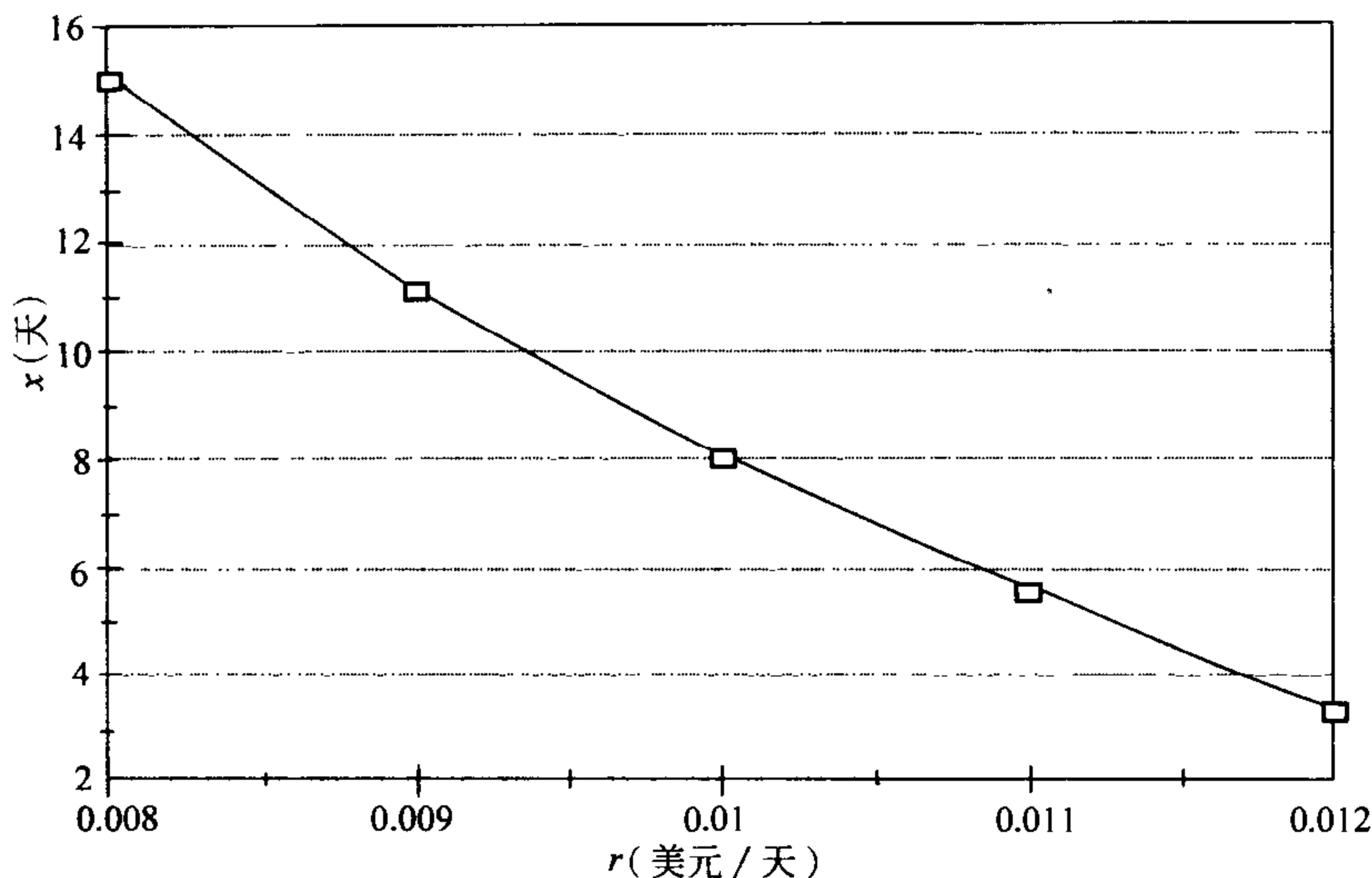
表 1-1 售猪问题中最佳售猪时间 x 关于价格的下降速率 r 的灵敏性

r (美元/天)	x (天)	r (美元/天)	x (天)
0.008	15.0	0.011	5.5
0.009	11.1	0.012	3.3
0.01	8.0		

对灵敏性的更系统的分析是将 r 作为未知的参数, 仍按前面的步骤求解. 写出

$$p = 0.65 - rt,$$

同前面一样, 得到

图 1-4 售猪问题中最佳售猪时间关于价格的下降速率 r 的曲线

$$\begin{aligned}
 y &= f(x) \\
 &= (0.65 - rx)(200 + 5x) - 0.45x.
 \end{aligned}$$

然后计算

$$f'(x) = \frac{-2(25rx + 500r - 7)}{5}$$

使 $f'(x)=0$ 的点为

$$x = \frac{(7 - 500r)}{25r}. \quad (2)$$

这样只要 $x \geq 0$, 即只要 $0 < r \leq 0.014$, 最佳的售猪时间就由(2)式给出. 对 $r > 0.014$, 抛物线 $y=f(x)$ 的最高点落在了我们求最大值的区间 $x \geq 0$ 之外. 在这种情况下, 由于在整个区间 $[0, \infty)$ 上都有 $f'(x) < 0$, 最佳的售猪时间为 $x=0$. 图 1-5 给出了 $r=0.015$ 的情况.

10

猪的生长速率 g 同样不很确定. 我们在前面假设 $g=5$ 磅/天. 一般地, 我们有

$$w = 200 + gt,$$

从而有公式

$$f(x) = (0.65 - 0.01x)(200 + gx) - 0.45x,$$

于是

$$f'(x) = \frac{-[2gx + 5(49 - 13g)]}{100}.$$

这时使 $f'(x)=0$ 的点为

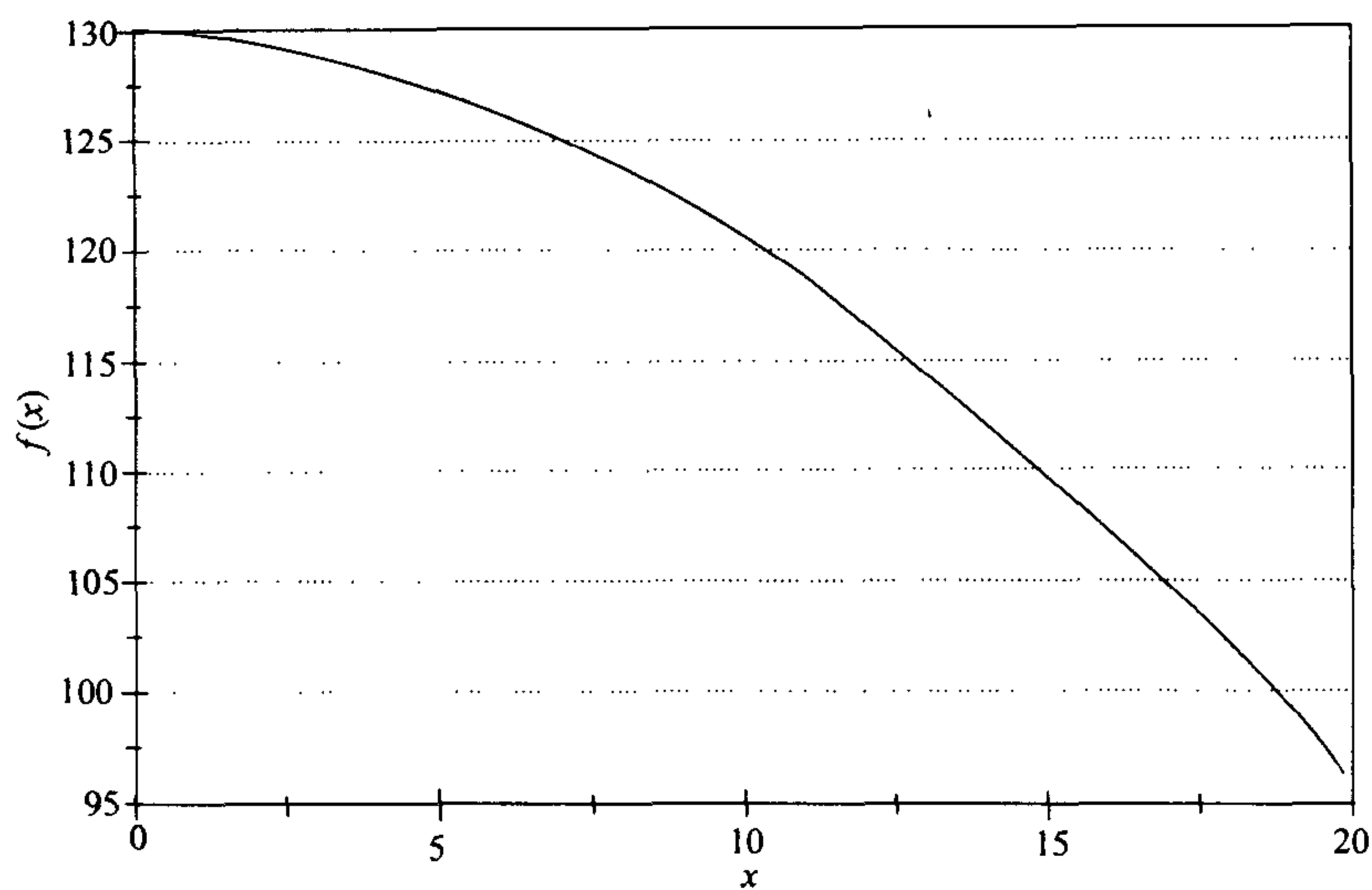


图 1-5 售猪问题的净收益 $f(x)$ 在 $r=0.015$ 时关于售猪时间 x 的曲线图

$$f(x) = (0.65 - 0.015x)(200 + 5x) - 0.45x$$

$$x = \frac{5(13g - 49)}{2g}. \quad (3)$$

只要由(3)式计算出的 x 值是非负的, 最佳售猪时间就由此公式给出. 图 1-6 给出了最佳售猪时间和生长速率 g 之间的关系.

11

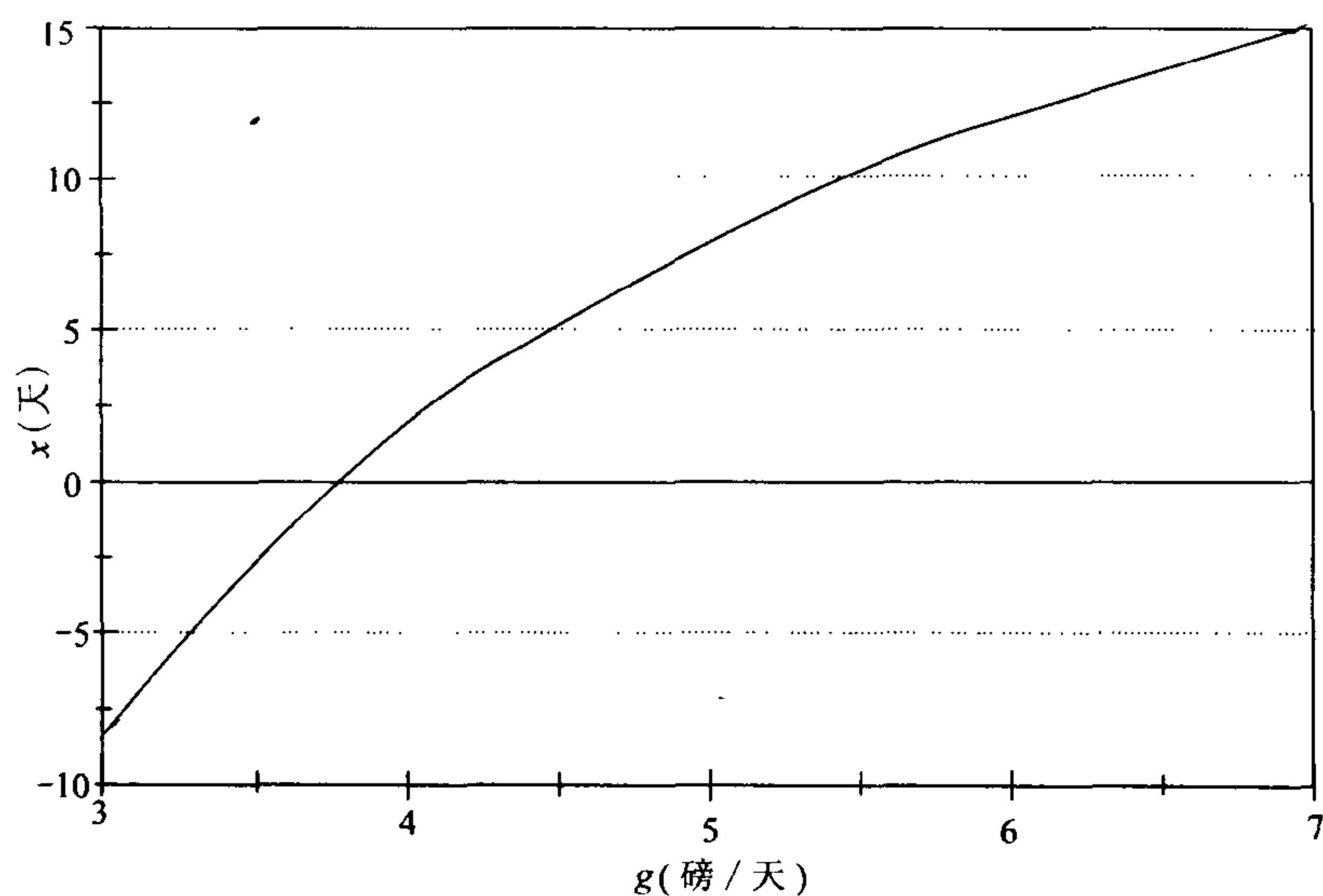


图 1-6 售猪问题中最佳售猪时间关于生长速率 g 的曲线

将灵敏性数据表示成相对改变量或百分比改变的形式, 要比绝对改变量的形式更自然也更实用. 例如, r 的 10% 的下降导致了 x 的 39% 的增加, 而 g 的 10% 的下降导致了 x 的 34% 的下降. 如果 x 改变量为 Δx , 则 x 的相对改变量为 $\Delta x/x$, 百分比改变量为 $100\Delta x/x$. 如果 r 改变了 Δr , 导致 x 有 Δx 的改变量, 则相对改变量的比值为 $\Delta x/x$ 与 $\Delta r/r$ 的比值. 令 $\Delta r \rightarrow 0$, 按照导数的定义, 我们有

$$\frac{\Delta x/x}{\Delta r/r} \rightarrow \frac{dx}{dr} \cdot \frac{r}{x}.$$

我们称这个极限值为 x 对 r 的灵敏性, 记为 $S(x, r)$. 在售猪问题中, 我们在点 $r=0.01$ 得到

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dr} &= \frac{-7}{25r^2} \\ &= -2800 \end{aligned}$$

[12]

因此

$$\begin{aligned} S(x, r) &= \frac{dx}{dr} \cdot \frac{r}{x} \\ &= (-2800) \left(\frac{0.01}{8} \right) \\ &= \frac{-7}{2}. \end{aligned}$$

即若 r 增加 2%, 则 x 下降 7%. 由于

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dg} &= \frac{245}{2g^2} \\ &= 4.9, \end{aligned}$$

[13]

我们有

$$\begin{aligned} S(x, g) &= \frac{dx}{dg} \cdot \frac{g}{x} \\ &= (4.9) \left(\frac{5}{8} \right) \\ &= 3.0625, \end{aligned}$$

于是猪的生长率增加 1%, 会导致要多等待 3% 的时间再将猪售出.

灵敏性分析的成功应用通常要有较好的判断力, 通常既不可能对模型中的每个参数都计算灵敏性系数, 也没有这种特别的要求. 我们需要选择那些有较大不确定性的参数进行灵敏性分析. 对灵敏性系数的解释还要依赖于参数的不确定程度. 原始问题中数据的不确定程度会影响我们对答案的自信度. 在这个售猪问题中, 我们通常认为猪的生长率 g 比价格的下降率 r 更可靠. 如果我们观察了猪或其他类似动物在过去的生长情况, g 有 25% 的误差会是很不寻常的, 但对 r 的估计有 25% 的误差则不足为奇.

1.3 稳定性与稳健性

一个数学模型称为有稳健性是指即使这个模型不完全精确，由其导出的结果仍是正确的。在实际问题中，我们不会有绝对准确的信息，即使能够建立一个完美的精确的模型，我们也可能采用较简单和易于处理的近似方法。因此，在数学模型问题中关于稳健性的研究是很有必要的一部分。

在上一节中，我们介绍了灵敏性分析的过程，这是一种根据对数据提出的假设来评估模型的稳健性的方法。在数学建模过程的第一步中，还有其他的假设需要检查。出于数学处理的方便和简化的目的，常常要做一些假设，建模者就有责任考察这些假设是否太特殊，以至使建模过程的结果变得无效。

[14]

图 1-1 列出了求解售猪问题所做的全部假设。除了数据的取值外，主要的假设是猪的重量和每磅的价格都是时间的线性函数。这些显然是做了简化，不可能是严格满足的。比如，根据这些假设，从现在起的一年后，猪的重量将是

$$\begin{aligned} w &= 200 + 5(365) \\ &= 2\,025 \text{ 磅} \end{aligned}$$

而卖出所得收益为

$$\begin{aligned} p &= 0.65 - 0.01(365) \\ &= -3.00 \text{ 美元 / 磅} \end{aligned}$$

一个更实际的模型应该既考虑到这些函数的非线性性，又考虑到随着时间推进的不确定性的增加。

如果假设是错的，模型又怎能给出正确的答案呢？虽然数学模型力求完美，但这是不可能达到的。一个更确切的说法是数学模型力求接近完美。一个好的数学模型有稳健性，是指虽然它给出的答案并不是完全精确的，但足够近似从而可以在实际问题中应用。

让我们来考察在售猪问题中的线性假设。其基本方程是：

$$P = pw - 0.45t,$$

其中 p 为以美元计的每磅的生猪价格。 w 为以磅计的猪的重量。如果模型的初始数据和假设没有与实际相差太远，则售猪的最佳时间应该由令 $P' = 0$ 得到。计算后有

$$p'w + pw' = 0.45$$

其中 $p'w + pw'$ 项代表猪价的增长率。模型告诉我们，只要猪价比饲养的费用增长快，就应暂不卖出，继续饲养。此外，猪的价格改变包括两项： $p'w$ 和 pw' 。第一项 $p'w$ 代表因价格下降而损失的价值。第二项 pw' 代表由于猪增重而增加的价值。考虑到这个更一般的模型在应用中的实际问题，要求的数据应该包括将猪的增长和价格变化作为时间的可微函数的完全确定的具体形式。我们无法知道这些函数的准确形式，甚至它们是否有意义也是个问题。是否可以在星期天凌晨 3

[15]

点售猪？猪价是否可以是无理数？让我们来假设一种情况。一个农民有一头重量大约是 200 磅的猪，在上一周猪每天增重约 5 磅。五天前猪价为 70 美分/磅，但现在猪价下降为 65 美分/磅，我们应该怎么办？一个显而易见的方法是以这些数据 ($w=200$, $w'=5$, $p=0.65$, $p'=-0.01$) 为依据确定何时售出，我们也正是这样做的。我们知道 p' 和 w' 在未来的几周内不会保持常数，因此 p 和 w 也不会是时间的线性函数。但是，只要 p' 和 w' 在这段时期内的变化不太大，由于假设它们是线性的而导致的误差就不会太大。

我们现在要给出上一节的灵敏性分析结果的一个更一般化的解释。回顾前面的结果，最佳售猪时间 (x) 对猪的生长率 w' 的改变的灵敏性为 3。假设在下几周内猪的实际生长率在每天 4.5 到 5.5 磅之间，即为预期值的 10% 之内，则最佳售猪时间会在 8 天的 30% 之内变化，即 5 到 11 天。而仍在第 8 天卖出所导致的收益损失不超过 1 美元。

再考虑价格。设我们认为今后几周内价格的改变为 $p'=-0.01$ ，即每天下降 1 美分是最糟糕的情况。价格很有可能在今后会上下降很慢，甚至达到稳定 ($p'=0$)。我们现在能说的只是至少要等 8 天再出售。对较小的 p' (接近 0)，模型暗示我们等较长的时间再出售。但我们的模型对较长的时间不再有效。因此，解决这个问题最好的方法是将猪再饲养一周的时间，然后重新估计 p 、 p' 、 w' 和 w ，再用模型重新计算。

16

1.4 习题

1. 一个汽车制造商售出一辆某品牌的汽车可获利 1 500 美元。估计每 100 美元的折扣可以使销售额提高 15%。
 - (a) 多大的折扣可以使利润最高？利用五步方法及单变量优化模型。
 - (b) 对你所得的结果，求关于所做的 15% 假设的灵敏性。分别考虑折扣量和相应的收益。
 - (c) 假设实际每 100 美元的折扣仅可以使销售额提高 10%，对结果会有什么影响？如果每 100 美元折扣的提高量为 10% 到 15% 之间的某个值，结果又如何？
 - (d) 什么情况下折扣会导致利润的降低？
2. 在售猪问题中，对每天的饲养花费做灵敏性分析。分别考虑对最佳售猪时间和相应收益的影响。如果有新的饲养方式，每天的饲养花费为 60 美分，会使猪按 7 磅/天增重，那么是否值得改变饲养方式？求出使饲养方式值得改变的最小的增重率。
3. 仍考虑例 1.1 中的问题。但现在假设猪的价格保持稳定。设

$$p = 0.65 - 0.01t + 0.000\ 04t^2 \quad (4)$$

表示 t 天后猪的价格 (美分/磅)。

- (a) 画图表示(4)式及我们原来的价格函数. 解释为什么原来的价格函数可以作为(4)式在 t 接近零时的近似.
- (b) 求最佳的售猪时间. 利用五步方法及单变量优化模型.
- (c) 参数 0.000 04 表示价格的平稳率. 对这个参数求其灵敏性. 分别考虑最佳的售猪时间和相应的收益.
- (d) 对(b)中的结果和例题中所得的最优解进行比较. 讨论我们关于价格的假设的稳健性.
4. 一处石油泄漏污染了 200 英里^①的太平洋海岸线. 所属石油公司被责令在 14 天内将其清除, 逾期则要被处以 10 000 美元/天的罚款. 当地的清洁队每周可以清洁 5 英里的海岸线, 耗资 500 美元/天. 额外雇用清洁队则要付每支清洁队 18 000 美元的费用和 500 美元/天的清洁费用. 17
- (a) 为使公司的总支出最低, 应该额外雇用多少支清洁队? 采用五步方法, 并求出清洁费用.
- (b) 讨论清洁队每周清洁海岸线长度的灵敏性. 分别考虑最优的额外雇用清洁队的数目和公司的总支出.
- (c) 讨论罚金数额的灵敏性. 分别考虑公司用来清理漏油的总天数和公司的总支出.
- (d) 石油公司认为罚金过高而提起上诉. 假设处以罚金的惟一目的是为了促使石油公司及时清理泄漏的石油, 那么罚金的数额是否过高?
5. 据估计, 长须鲸种群数量的年增长率为 $rx(1-x/K)$, 其中 $r=0.08$ 为固有增长率. $K=400\ 000$ 为环境资源所容许的最大可生存种群数量, x 为当前种群数量, 现在为 70 000 左右. 进一步估计出每年捕获的长须鲸数量约为 $0.000\ 01Ex$, 这里 E 为在出海捕鱼期的捕鱼能力水平. 给定捕鱼能力 E , 长须鲸种群的数量最后会稳定在增长率与捕获率相等的水平.
- (a) 求使稳定的捕获率达最大的捕鱼能力. 采用五步方法及单变量优化模型.
- (b) 讨论固有增长率的灵敏性. 分别讨论最优捕鱼能力与相应的种群数量.
- (c) 讨论最大可生存种群数量的灵敏性. 分别讨论最优捕鱼能力与相应的种群数量.
6. 在习题 5 中, 设出海捕鲸每个船上作业日的花费为 500 美元, 一头捕获的长须鲸的价格为 6 000 美元.
- (a) 求使长期收益达最大的捕鱼能力. 采用五步方法及单变量优化模型.
- (b) 讨论捕鲸花费的灵敏性. 分别讨论按美元/年计的最终年收益及捕鱼能力.
- (c) 讨论每头长须鲸的价格的灵敏性. 分别讨论收益及捕鱼能力.
- (d) 在过去的 30 年中, 有过几次不成功的全球禁止捕鲸的尝试. 讨论捕鲸者连续捕猎的经济动机. 特别地, 给出捕鲸可以长期获得持续收益的条件

① 1 英里 = 1 609.344m

- 18 (两个参数的值: 每个船上作业日的花费及每头长须鲸的价格).
7. 仍考虑例 1.1 中的售猪问题, 但假设现在的目标是对收益率求最大值(美元/天). 假设猪已经养了 90 天, 到现在已为这头猪投入了 100 美元.
 - (a) 求最佳售猪时间. 采用五步方法及单变量优化模型.
 - (b) 讨论猪的生长率的灵敏性, 分别考虑最佳售猪时间和相应的收益率.
 - (c) 讨论猪价下降率的灵敏性, 分别考虑最佳售猪时间和相应的收益率.
 8. 仍考虑例 1.1 中的售猪问题, 但现在将猪的生长率随着猪的长大而下降的事实也考虑进来. 假设猪再有 5 个月就会完全长成.
 - (a) 求使收益最高的最佳售猪时间. 采用五步方法及单变量优化模型.
 - (b) 讨论猪完全长成时间的灵敏性, 分别考虑最佳售猪时间和相应的收益.
 9. 一家有 80 000 订户的地方日报计划提高其订阅价格. 现在的价格为每周 1.5 美元. 据估计如果每周提高定价 10 美分, 就会损失 5 000 订户.
 - (a) 求使利润最大的订阅价格. 采用五步方法及单变量优化模型.
 - (b) 对(a)中所得结论讨论损失 5 000 订户这一参数的灵敏性. 分别假设这个参数值为: 3 000、4 000、5 000、6 000 及 7 000, 计算最优订阅价格.
 - (c) 设 $n=5\,000$ 为提高定价 10 美分而损失的订户数. 求最优订阅价格 p 作为 n 的函数关系. 并用这个公式来求灵敏性 $S(p, n)$.
 - (d) 这家报纸是否应该改变其订阅价格? 用通俗易懂的语言说明你的结论.

1.5 进一步的阅读文献

- Cameron, D., Giordano, F., and Weir, M. *Modeling Using the Derivative: Numerical and Analytic Solutions*, UMAP module 625.
- Cooper, L. and Sternberg, D. (1970). *Introduction to Methods of Optimization*, W.B. Saunders, Philadelphia.
- Gill, P., Murray, W., and Wright, M. (1981). *Practical Optimization*, Academic Press, New York.
- Meyer, W. (1984). *Concepts of Mathematical Modeling*, McGraw-Hill, New York.
- Rudin W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York.
- Whitley, W. *Five Applications of Max-Min Theory from Calculus*, UMAP module 341.