

A: $[2, 2, 4]^T$
C: $[1, -2, -1]^T$

B: $[0, 2, 2]^T$
D: $[2, 0, 2]^T$

5. A, B 分别是 m 阶和 n 阶方阵, 则 $\begin{bmatrix} O & A \\ B & O \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵是 _____ B _____。

A: $\begin{bmatrix} O & |B|B^* \\ |A|A^* & O \end{bmatrix}$ B: $(-1)^{mn} \begin{bmatrix} O & |A|B^* \\ |B|A^* & O \end{bmatrix}$
C: $(-1)^{mn}|A||B| \begin{bmatrix} O & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$ D: $(-1)^{mn}|A||B| \begin{bmatrix} O & B^* \\ A^* & O \end{bmatrix}$

三、(15) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{bmatrix}$ 只有两个不同的特征值, 求 A 的全部特征值和特征向量。

解: 由题意知矩阵有一个二重特征值。因为 $|A - \lambda E| = (2 - \lambda)[\lambda^2 - (a + 1)\lambda + a - 1]$, 且 $\lambda^2 - (a + 1)\lambda + a - 1$ 没有重根, 所以 2 是 A 的二重特征值, 代入得 $a = 1$, 且第三个特征值为 0。

解方程 $Ax = 0$ 得特征值 0 的特征向量为 $k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k_1 \neq 0$,

解方程 $(A - 2E)x = 0$ 得特征值 2 的特征向量为 $k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, k_2, k_3 不全为 0。

四、(10) 求矩阵 X 满足方程 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 。

解: 由于 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$,

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ & \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此

$$X = \begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{13}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

五、(15) 设 $a_1 = [2, 1, 4, 3]^T$, $a_2 = [-1, 1 - 6, 6]^T$, $a_3 = [-1, -2, a + 1, -9]^T$, $a_4 = [a, 1, -2, 7]^T$, $a_5 = [2, 4, 4, 3a + 6]^T$, 若向量组的秩为3, 试找出一个极大线性无关组, 并将其他的向量用该极大无关组线性表示。

解:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & a & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & a+1 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 3a+6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & -10 & a+9 & -6 & -12 \\ 0 & 3 & -3 & 4 & 3a-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & a-2 & -6 \\ 0 & 0 & a-1 & \frac{2}{3} - \frac{10}{3}a & 8 \\ 0 & 0 & 0 & a+2 & 3a-12 \end{bmatrix}$$

若 $a \neq 1$, 则由秩为3得 $a+2=0$ 且 $3a-12=0$, 矛盾; 因此 $a=1$ 。于是

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{8}{3} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 7 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以 a_1, a_2, a_4 是一个极大线性无关组, 且

$$a_3 = -a_1 - a_2, \quad a_5 = 4a_1 + 3a_2 - 3a_4.$$

六、(10) 当 a, b 为何值时方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 6 \\ x_1 - 5x_2 + 12x_3 + bx_4 = -4 \\ 3x_1 - x_2 + 15x_3 - x_4 = a \end{cases}$$
 无解, 有唯一解或者有无穷多解, 并求出无穷多解时的通解。

解:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & -5 & 12 & b & -4 \\ 3 & -1 & 15 & -1 & a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 9 & b-1 & -6 \\ 0 & -4 & 6 & -4 & a-6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & b+5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & a+2 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & b+5 & 4-a \\ 0 & 0 & 0 & -2(b+5) & 3a-6 \end{bmatrix}$$

所以 $b \neq -5$ 时有唯一解; $b = -5, a \neq 2$ 时无解; $b = -5$ 且 $a = 2$ 时有无穷多解, 通解为

$$x = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c \in R.$$

七、(15) 实对称矩阵 A 和 B 分别定义二次型 $f(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2$ 和 $g(\vec{y}) = \vec{y}^T B \vec{y} = y_1^2 + 2y_2^2 + 3y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_2y_3$,

1. 求可逆线性变量替换 $\vec{x} = P\vec{z}$ 和 $\vec{y} = Q\vec{z}$ 使二次型 f 和 g 化为规范型;

2. 求可逆矩阵 C 使 A 与 B 合同, 即 $C^T AC = B$ 。

解: $f = 3(x_1 - \frac{2}{3}x_2)^2 + \frac{5}{3}x_2^2 - x_3^2 = (\sqrt{3}x_1 - \frac{2}{\sqrt{3}}x_2)^2 + (\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}x_2)^2 - x_3^2$, 则令

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } x = Pz, \quad P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

二次型 f 化为规范形 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$;

$g = (y_1 - 2y_2)^2 - 2(y_2 + y_3)^2 + 5y_3^2 = (y_1 - 2y_2)^2 + (\sqrt{5}y_3)^2 - (\sqrt{2}y_2 + \sqrt{2}y_3)^2$, 则令

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \quad \text{即 } y = Qz, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \sqrt{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \end{bmatrix}$$

二次型 g 化为规范形 $z_1^2 + z_2^2 - z_3^2$;

$$C = PQ^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

八、(5) A 是 n 阶方阵, 证明存在可逆矩阵 P 和上三角矩阵 U , 使得 $A = PU$ 。

证明: (最直观的解释是任何矩阵可行初等变换为行最简形, 而方阵的行最简形一定是上三角形)

显然 $n = 1$ 时结论成立, 假设 $n = k$ 时结论成立, 则 $n = k + 1$ 时, 设 $A = (a_{ij})$, $1 \leq i, j \leq k + 1$

- 若 $a_{11} \neq 0$, 则初等行变换可将第一列除 a_{11} 外全化为0, 即存在可逆矩阵 Q , 使得 $QA = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$;
- 若 $a_{11} = 0$ 但 $a_{i1} \neq 0$, $i \neq 1$, 则先作第一行和第 i 行互换, 再重复上一步, 所以依然存在可逆矩阵 Q , 使得 $QA = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$;
- 若第一列全为0, 则 $QA = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & B \end{bmatrix}$, $Q = E$ 。

由于 B 是 k 阶方阵, 存在可逆矩阵 P' 和上三角矩阵 U' 使得 $B = P'U'$, 于是有可逆矩阵 $P = Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \\ & P' \end{bmatrix}$ 和上三角矩阵 $U = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & U' \end{bmatrix}$ 满足

$$PU = Q^{-1} \begin{bmatrix} 1 & \\ & P' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & U' \end{bmatrix} = Q^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha^T \\ 0 & B \end{bmatrix} = A$$