厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案



试卷类型:(理工类A卷)

考试时间: 2021. 11. 7

一、填空题: (每小题 4 分, 共 24 分)

1.
$$\lim_{n\to\infty} (\frac{2n-1}{2n})^{4n} = \underline{e^{-2}}$$
 •

2.
$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = \underline{0}$$

3. 设
$$y = \ln|\csc x - \cot x|$$
, 则 $dy = \csc x dx$ 。

4. 设函数 f(x) 在 $(-\infty, +\infty)$ 上可导,且 f'(1) = f(1) = 2 , f'(2) = 3 ,则 y = f(f(x)) 在 x = 1 处的导数为____6

5.
$$\forall y = x \cdot \sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}$$
, $\iint \frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{x=0} = -\frac{11}{72}\sqrt{6}$.

6. 设
$$f(x) = (x-1)^3(x-2)(x-3)$$
,则方程 $f'(x) = 0$ 有3个不相等的实数根。

二、求下列函数极限(每小题8分,共24分):

1.
$$\lim_{x \to 0} \cot x (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$$
;

#:
$$\lim_{x \to 0} \cot x \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\sin x} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x (x - \sin x)}{x \sin^2 x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \cos x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x \sin^2 x} = \lim_{x \to 0} \cos x \cdot \lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2} = \frac{1}{6}$$

2.
$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x}$$
;

解法一:
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{x(e^{(x-1)\ln x} - 1)}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \to 1} x \cdot \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\ln x}{1 - x + \ln x}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\ln(1+x-1)}{1-x+\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{1-x+\ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{2(x-1)}{-1+1/x} = \lim_{x \to 1} (-2x) = -2$$

解法二:
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^x - x}{1 - x + \ln x} = \lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{-1 + 1/x} = -\lim_{x \to 1} \frac{x^x (\ln x + 1) - 1}{x - 1}$$

$$= -\lim_{x \to 1} \frac{x^{x} (\ln x + 1)^{2} + x^{x-1}}{1} = -2$$

3.
$$\lim_{x\to 0} x \left[\frac{1}{x}\right]$$
 o

解: 注意到当 $x \neq 0$ 时, $\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x}$ 。

因此, 当x > 0时, $1 - x < x[\frac{1}{x}] \le 1$; 当x < 0时, $1 - x > x[\frac{1}{x}] \ge 1$ 。

又因为 $\lim_{x\to 0^+} (1-x) = \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1$,所以由夹逼准则得 $\lim_{x\to 0^+} x[\frac{1}{x}] = 1 = \lim_{x\to 0^-} x[\frac{1}{x}]$ 。故 $\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$ 。

三、(本题 8 分)设方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 确定了隐函数 y=y(x),求此隐函数的一阶导数和二阶导数。

解: 方程 $y-x-\frac{1}{2}\sin y=0$ 两边对 x 求导,得 $\frac{dy}{dx}-1-\frac{1}{2}\cos y\cdot\frac{dy}{dx}=0$,解得 $\frac{dy}{dx}=0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{2 - \cos y}$$
,继续两边对对 x 求导,得

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dy} \left(\frac{2}{2 - \cos y} \right) \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-2 \sin y}{\left(2 - \cos y \right)^2} \cdot \frac{2}{2 - \cos y} = \frac{-4 \sin y}{\left(2 - \cos y \right)^3}$$

四、(本题 10 分)已知笛卡尔叶形线的参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad 其中 a > 0 为常数。 \end{cases}$$

求由此参数方程所确定的函数 y = y(x) 在 t = 1 处的一阶导数和二阶导数。

$$\mathbf{M}: \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}} = \frac{\frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2}} = \frac{2t - t^4}{1 - 2t^3} \circ$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{2t - t^4}{1 - 2t^3} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{(2 - 4t^3)(1 - 2t^3) - (2t - t^4)(-6t^2)}{(1 - 2t^3)^2} \cdot \frac{(1 + t^3)^2}{3a(1 + t^3) - 3at \cdot 3t^2}$$
$$= \frac{2(1 + t^3)^4}{3a(1 - 2t^3)^3} \circ$$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\big|_{t=1} = \frac{2-1}{1-2} = -1 \; , \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\big|_{t=1} = \frac{2 \cdot 2^4}{3a(1-2)^3} = -\frac{32}{3a} \; .$$

五、(本题 10 分)数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n$ 。证明 $\lim_{n \to \infty} x_n$ 存在,并求其极限。证:根据题意,有 $x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n = -(x_n - 1)^2 + 1$ 。由归纳假设得 $0 < x_n < 1$ 。

又 $x_{n+1} - x_n = x_n - x_n^2 = x_n (1 - x_n) > 0$, 因此 $\{x_n\}$ 为单调增加数列,且 $\frac{1}{2} \le x_n \le 1$ (单调性也可由以下给出:令 $f(x) = -x^2 + 2x$, $x \in (0,1)$,则 f(x) 在 (0,1) 为单调增加函数,又因为 $x_2 = \frac{3}{4} > \frac{1}{2} = x_1$,故 $\{x_n\}$ 为单调增加数列)。

由单调有界准则, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在。令 $a = \lim_{n\to\infty} x_n$,则由极限的保号性,知 $\frac{1}{2} \le a \le 1$ 。由 $x_{n+1} = 2x_n - x_n^2$ 两边取极限,有 $a = -a^2 + 2a$,解得a = 0(舍去),a = 1。因此 $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ 。

六、(本题 8 分) 已知函数 f(x) 在 x = 0 处连续,且满足 $\lim_{x \to 0} (\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x^2}) = 2$,证明: f(x) 在 x = 0 处可导,并求 f'(0) 。

证: 因为f(x)在x=0处连续,所以 $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ 。

又由
$$2 = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1+2x} - 1}{x}}{x}$$
,得

$$\lim_{x \to 0} (f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x}) = \lim_{x \to 0} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x^2} \right) \cdot x \right] = \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x^2} \right) \cdot \lim_{x \to 0} x$$

$$= 2 \cdot 0 = 0 \circ$$

因此,
$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} [f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x} + (1 + \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x})]$$

$$= \lim_{x \to 0} (f(x) - 1 - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x}) + 1 + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x} = 0 + 1 + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{x} = 2$$

进一步有,
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-2}{x} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} + (\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+2x}-1}{x^2} - \frac{2}{x}) \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x} - \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{x^2} \right) + \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 1 - x}{x^2} = 2 + \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{2} (1 + 2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 - 1}{2x}$$

$$=2+\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{-\frac{1}{2}}-1}{2x}=2+\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot 2x}{2x}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
。故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\frac{3}{2}$ 。

七、(本题 8 分) 设函数 $f(x) = (x^2 + x + 1)\cos 2x$, 求 $f^{(8)}(0)$ 。

解: 首先有, $(\cos 2x)^{(n)} = 2^n \cos(2x + \frac{n}{2}\pi)$ 。

由莱布尼茨公式,

$$f^{(8)}(x) = C_8^0(\cos 2x)^{(8)}(x^2 + x + 1) + C_8^1(\cos 2x)^{(7)}(x^2 + x + 1)' + C_8^2(\cos 2x)^{(6)}(x^2 + x + 1)''$$

$$= 2^8 \cos(2x + 4\pi) \cdot (x^2 + x + 1) + 8 \cdot 2^7 \cos(2x + \frac{7}{2}\pi) \cdot (2x + 1) + \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot 2^6 \cos(2x + 3\pi) \cdot 2$$

$$= 2^8 [(x^2 + x + 1)\cos 2x + 4(2x + 1)\sin 2x - 14\cos 2x]$$

所以 $f^{(8)}(0) = 2^8(1+0-14) = -13\cdot 2^8 = -3328$ 。

八、(本题 8 分)设函数 f(x) 在[0,2]上连续,在(0,2)内可导,且有 f(0)=0,f(1)=1,f(2)=-1。证明:至少存在一点 $\xi \in (0,2)$,使得 $f'(\xi)=f(\xi)$ 。

证: 因为 f(x) 在 [1,2] 上连续,且 f(1)=1>0 , f(2)=-1<0 ,所以由零点存在定理,存在 $\eta \in (1,2)$,使得 $f(\eta)=0$ 。

令 $\varphi(x) = e^{-x} f(x)$,知 $\varphi(x)$ 在 $[0,\eta]$ 上连续,在 $(0,\eta)$ 内可导,且 $\varphi(0) = f(0) = 0$,

 $\varphi(\eta) = e^{-\eta} f(\eta) = 0$ 。由罗尔定理,至少存在一点 $\xi \in (0,\eta) \subset (0,2)$,使得 $\varphi'(\xi) = 0$,即有 $f'(\xi) = f(\xi)$ 。