厦门大学《微积分 I-1》课程期中试卷答案

________学院________系________年级________专业

试卷类型:（理工类A卷）　　　　考试时间:2022.11.26

一、填空题：（每小题 4 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-\sin x}{x}=2$，则 $f'(0)=$ ___3___。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ___1___。

3. 设 $y+\dfrac{\pi}{4}e^{x\tan y}=\ln|\sec x|$，则 $dy|_{x=0}=$ ___$\dfrac{\pi}{4}dx$___。

4. 曲线 $y=(2x-1)e^{\frac{1}{x}}$ 的斜渐近线方程为 ___$y=2x+1$___。

5. 设 $y=(x-1)^3(x-2)^4(x-3)^5$，则 $y^{(5)}|_{x=2}=$ ___240___。

6. 函数 $y=\ln x-\dfrac{x}{e}+1$ 在 $(0,+\infty)$ 内有___2___个零点。

二、求下列函数极限（每小题 8 分，共 16 分）：

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$；

解： $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{1+x^{-2}}=1$。

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\sin x}{\sqrt{1+x^4}-1}$。

解： $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1-x\sin x}{\sqrt{1+x^4}-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+o(x^4))-1-x(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3))}{\frac{1}{2}x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{2}{3}x^4+o(x^4)}{\frac{1}{2}x^4}=\dfrac{4}{3}$。

三、（本题 10 分）讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{1-x}} & x>1 \\ e^{-1} & x\le 1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处的连续性和可导性，并求其导数 $f'(x)$。

解： 先讨论连续性。由 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{1-x}}=e^{\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{-1}}=e^{-1}$，

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} e^{-1}=e^{-1}$，从而有 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=f(0)=e^{-1}$，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续。现讨论可导性。由 $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^{\frac{1}{1-x}}-e^{-1}}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{\ln x}{1-x}}-e^{-1}}{x-1}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{\frac{\ln x}{1-x}+1}-1}{x-1}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{\ln x}{1-x}+1}{x-1}=$

$=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1-\frac{1}{x}}{2(x-1)}=e^{-1}\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{2e}$， $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{e^{-1}-e^{-1}}{x-1}=0$，

从而 $f'_+(1)\ne f'_-(1)$，因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导。最后， $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x+x\ln x}{(x-1)^2}x^{\frac{x}{1-x}} & x>1 \\ 0 & x<1 \end{cases}$。

四、（本题 8 分）求由参数方程 $\begin{cases} x=e^t\sin t \\ y=e^t\cos t \end{cases}$ 所确定的函数 $y=y(x)$ 的一阶导数和二阶导数。

解： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\dfrac{e^t\cos t-e^t\sin t}{e^t\sin t+e^t\cos t}=\dfrac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}$；

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\cos t-\sin t}{\cos t+\sin t}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$

$$=\frac{(-\sin t-\cos t)(\cos t+\sin t)-(\cos t-\sin t)(-\sin t+\cos t)}{(\cos t+\sin t)^2}\cdot\frac{1}{e^t(\cos t+\sin t)}=-\frac{2}{e^t(\cos t+\sin t)^3}。$$

五、（本题 12 分）求函数 $y=(x+9)x^{\frac{4}{5}}$ 的极值以及该函数图形的凹凸区间和拐点。

解： 由 $y'=\dfrac{9(x+4)}{5\sqrt[5]{x}}$，求得可疑极值点为 $x=0$， $x=-4$； 由 $y''=\dfrac{36(x-1)}{25\sqrt[5]{x^6}}$，求得可疑拐点为 $x=0$， $x=1$。

注意到当 $x<-4$ 时， $y'>0$；当 $-4<x<0$ 时， $y'<0$；当 $x>0$ 时， $y'>0$。因此由一阶判别法，函数 $y=(x+9)x^{\frac{4}{5}}$ 在 $x=-4$ 取到极大值 $10\sqrt[5]{8}$，在 $x=0$ 取到极小值 0。

又注意到当 $x<1$，$x\ne 0$ 时，$y''<0$；当 $x>1$ 时， $y''>0$，所以其图形的凸区间为 $(-\infty,0)$ 和 $(0,1)$，凹区间为 $(1,+\infty)$。因此 $(1,10)$ 为拐点。

六、（本题 12 分）(1) 证明当 $x>0$ 时，不等式 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ 成立；(2) 设数列 $\{x_n\}$ 的一般项为 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在。

证明：(1) 令 $f(x)=\ln(1+t)$，$t\in[0,x]$，由拉格朗日中值定理，存在 $\xi\in(0,x)$，使得

$$\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)=f(x)-f(0)=f'(\xi)x=\frac{1}{1+\xi}x\text{。}$$

注意到 $0<\xi<x$，从而 $\frac{1}{1+x}<\frac{1}{1+\xi}<1$，因此 $\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$。

(2) 用单调有界准则。先证数列 $\{x_n\}$ 的单调性。注意到

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln(1+\frac{1}{n}),$$

由 (1) 的结论，有 $\ln(1+\frac{1}{n})>\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{n+1}$，从而 $x_{n+1}<x_n$，因此 $\{x_n\}$ 是单调递减数列。

最后证 $\{x_n\}$ 是有界数列，只需证有下界就行了。由 (1) 的结论，$\frac{1}{k}>\ln(1+\frac{1}{k})$。从而有

。

从而 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})-\ln n=\sum_{k=1}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0$。

因此 $\{x_n\}$ 是有界数列。故由单调有界准则，极限 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在。

（事实上，还可以证得 $0\le\lim_{n\to\infty}x_n\le1$。由 (1) 的结论，当 $k\ge2$ 时，有 $\ln(1+\frac{1}{k-1})>\frac{1}{k}$，从而

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n<1+\sum_{k=2}^{n}\ln(1+\frac{1}{k-1})-\ln n=1+\sum_{k=2}^{n}[\ln k-\ln(k-1)]-\ln n=1\text{。}$$

故 $0<x_n<1$，由数列极限的保号性，$0\le\lim_{n\to\infty}x_n\le1$。）

七、（本题 8 分）设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)-f(0)=1$，证明存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=2\xi$。

证明：令 $\varphi(x)=f(x)-x^2$，$x\in[0,2]$，根据题意，$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $\varphi(0)=f(0)=f(1)-1=\varphi(1)$。由罗尔定理，至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，即有 $f'(\xi)=2\xi$。

八、（本题 10 分）设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有二阶导数且 $f''(x)<0$。(1) 证明：对于区间 I 上任意两个不相等的点 x_0 和 x，不等式 $f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 成立；

(2) 取函数 $f(x)=\ln x$ 证明：任给 m 个正数 $a_1, a_2,\cdots, a_m$，不等式 $\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdots a_m}\le \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$ 成立，并且该等号只在 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 条件下成立。

证明：(1) 由泰勒公式，在 x_0 与 x 之间存在 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2。$$

因为 $f''(\xi)<0,$ 所以当 $x\ne x_0$ 时，$f(x)<f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 。

(2) 当 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 时，等号成立。

取 $f(x)=\ln x$，$x\in(0,+\infty)$，$x_0=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}$。则 $f(x)=\ln x$ 在 $(0,+\infty)$ 上有二阶导数，且 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$。由 (1) 的结论，对于 $k=1, 2, ..., m$，有 $f(a_k)\le f(x_0)+f'(x_0)(a_k-x_0)$，并且该等号只有在 $a_k=x_0$ 才成立。因此当条件 $a_1=a_2=\cdots=a_m$ 不成立时，

$$\sum_{k=1}^{m} f(a_k)<m\,f(x_0)+f'(x_0)\sum_{k=1}^{m}(a_k-x_0)=m\,f(x_0)+f'(x_0)(\sum_{k=1}^{m}a_k-m\,x_0)=m\,f(x_0)，$$ 即有

$$\sqrt[m]{a_1\cdot a_2\cdots a_m}<\frac{a_1+a_2+\cdots+a_m}{m}。$$