厦门大学《微积分 I-1》课程期末试卷答案

试卷类型：（理工类 A 卷）　考试日期　2023.02.18

一、选择题（**每小题 4 分，共 16 分**）

1. 若 $\int f(x)\,\mathrm{d}x = x^2 + C$，则 $\int xf(1-x^2)\,\mathrm{d}x =$（　D　）。

（A）$2(1-x^2)^2 + C$；　（B）$-2(1-x^2)^2 + C$；　（C）$\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$；　（D）$-\frac{1}{2}(1-x^2)^2 + C$。

2. 定积分 $\int_0^2 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x =$（　B　）。

（A）$\frac{\pi}{4}$；　（B）$\frac{\pi}{2}$；　（C）π；　（D）$\frac{\pi}{8}$。

3. 设 $a = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$，$b = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x}\,\mathrm{d}x$，则（　C　）。

（A）$a > b > 1$；　（B）$1 > a > b$；　（C）$b > a > 1$；　（D）$1 > b > a$。

4. 对于 $\int_0^3 \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - x - 2}$，下列说法正确的是（　D　）。

（A）其值为 $-\ln 2$；　（B）其值为 $\ln 2$；　（C）其值为 $2\ln 2$；　（D）发散。

二、填空题：（**每小题 4 分，共 24 分**）

1. 两条抛物线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 所围图形的面积为 $\underline{\quad \frac{1}{3} \quad}$。

2. $\int_{-1}^{1} \frac{(\sin x + \cos x)^2}{1 + |x|}\,\mathrm{d}x = \underline{\quad 2\ln 2 \quad}$。

3. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\int_0^x \ln(1 + xt)\,\mathrm{d}t}{x^3} = \underline{\quad \frac{1}{2} \quad}$。

4. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1^2} + 2\sqrt{n^2 + 2^2} + 3\sqrt{n^2 + 3^2} + \cdots + n\sqrt{n^2 + n^2}}{n^3} = \underline{\quad \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1) \quad}$。

5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{2x} \cos x\,\mathrm{d}x = \underline{\quad \frac{1}{5}(\mathrm{e}^{\pi} - 2) \quad}$。

6. 若 $f(x) = 3x + 4\int_0^1 t f(t)\,\mathrm{d}t$，则 $f(2) = \underline{\quad 2 \quad}$。

三、（8 分）设函数 $f(x)$ 满足 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，其中 C 为任意常数，求不定积分 $\int f(x)\mathrm{d}x$。

解： 由 $\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，得 $f(x)=\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$。因此

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{x}{x^2\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{-x^2}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}=\int\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^2-1}\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}+C=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C$$

或者 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int\dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$，令 $x=\sin t, t\in(-\dfrac{\pi}{2},0)\cup(0,\dfrac{\pi}{2})$，则 $\sqrt{1-x^2}=\cos t$，代入得，

$$\int\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int\frac{1}{\sin t\,\cos t}\,\mathrm{d}\sin t=\int\frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t=\ln|\csc t-\cot t|+C$$

$$=\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{|x|}+C\text{。}$$

四、求下列定积分（**每小题 8 分，共 16 分**）：

1. $\displaystyle\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x$；

解： 令 $t=\sqrt[4]{x}$，则

$$\int_1^{16}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t^4=4\int_1^2\frac{t^2}{t+1}\,\mathrm{d}t=4\int_1^2 t-1+\frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

$$=[2t^2-4t+4\ln(t+1)]\big|_1^2=2+4\ln 3-4\ln 2\text{。}$$

2. $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x$。

解法一： $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{1}|\ln x|\,\mathrm{d}x+\int_1^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x=-\int_{\frac{1}{e}}^{1}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_1^{e}\ln x\,\mathrm{d}x$

$$=-(x\ln x-x)\big|_{\frac{1}{e}}^{1}+(x\ln x-x)\big|_1^{e}=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}+(e-e+1)=2-\frac{2}{e}\text{。}$$

解法二： $\int_{\frac{1}{e}}^{e}|\ln x|\,\mathrm{d}x \overset{t=\ln x}{=} \int_{-1}^{1}|t|\,\mathrm{d}\mathrm{e}^{t} = \int_{-1}^{1}|t|\,\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} t\,(\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\mathrm{d}t$

$= \int_{0}^{1} t\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}) = t(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})\big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t = t(\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t})\big|_{0}^{1} - (\mathrm{e}^{t}+\mathrm{e}^{-t})\big|_{0}^{1}$

$= 2-\dfrac{2}{\mathrm{e}}$。

五、（8 分）求反常积分 $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$。

解： $\int_{0}^{+\infty}\dfrac{(x+1)^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty}\dfrac{x^2+1+2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

$= \int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}(x^2+1) = \arctan x\big|_{0}^{+\infty} - \dfrac{1}{x^2+1}\big|_{0}^{+\infty}$

$= \arctan x\big|_{0}^{+\infty} - \dfrac{1}{x^2+1}\big|_{0}^{+\infty} = \dfrac{\pi}{2} - 0 - (0-1) = \dfrac{\pi}{2}+1$。

六、（10 分）设两条曲线 $y=\sec^2 x$、$y=\cos 2x\ (0\le x\le \dfrac{\pi}{4})$ 和直线 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 所围成的平面图形为 D。试求该平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所形成的立体的体积 V。

解： $V = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x)^2\mathrm{d}x - \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2x)^2\mathrm{d}x = \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^4 x\,\mathrm{d}x - \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2x\,\mathrm{d}x$

$= \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\tan^2 x+1)\,\mathrm{d}\tan x - \pi\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1+\cos 4x}{2}\,\mathrm{d}x = \pi(\dfrac{1}{3}\tan^3 x+\tan x)\big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} - \pi(\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sin 4x}{8})\big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$

$= \dfrac{4}{3}\pi - \dfrac{1}{8}\pi^2$。

七、（10 分）在摆线 $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}\ (0\le t\le 2\pi)$ 上求分该曲线的弧长成 $3:1$ 的点的坐标。

解： 令该点坐标为 (x_0, y_0)，其对应的参数 $t=t_0$，则 $\pi\le t_0\le 2\pi$。注意到

$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$

$= \sqrt{2-2\cos t}\,\mathrm{d}t = 2|\sin\dfrac{t}{2}|\,\mathrm{d}t$,

从而整条摆线全长为 $s=\int_0^{2\pi}2\,|\sin\frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t=2\int_0^{2\pi}\ \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=-4\cos\frac{t}{2}\big|_0^{2\pi}=8$，

摆线对应于 $0\le t\le t_0$ 的那一段曲线弧长为

$s_1=\int_0^{t_0}2\,|\sin\frac{t}{2}|\,\mathrm{d}t=2\int_0^{t_0}\ \sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=-4\cos\frac{t}{2}\big|_0^{t_0}=-4\cos\frac{t_0}{2}+4$。

根据题意，有 $s_1=\frac{3}{4}s$，故 $-4\cos\frac{t_0}{2}+4=6$，进而有 $\cos\frac{t_0}{2}=-\frac{1}{2}$，解得 $t_0=\frac{4}{3}\pi$，因此该点坐标为 $(x_0,y_0)=(t-\sin t,1-\cos t)\big|_{t=\frac{4}{3}\pi}=(\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2})$。

八、（8 分）设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=0$。证明：存在 $\xi\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)\tan\xi$。

证明：作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)\cos x$，$x\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 连续，在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 内可导。由积分中值定理，存在 $x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,\mathrm{d}x=f(x_0)(\frac{\pi}{2}-0)$，即有 $f(x_0)=0$。因此 $\varphi(x_0)=\varphi(\frac{\pi}{2})=0$，在 $[x_0,\frac{\pi}{2}]$ 上用罗尔定理，可知存在 $\xi\in(x_0,\frac{\pi}{2})\subset(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $\varphi'(\xi)=0$，结论得证。