TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Open Educational Resources

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Vertiefung Eichung

Zusatz-Handout zum Modul ET-12 02 01 im Diplomstudiengang Elektrotechnik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Open Educational Resources

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Eichung in der klassischen elektromagnetischen Feldtheorie

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Ausgangspunkt

- Die klassische elektromagnetische Feldtheorie beschäftigt sich mit der großen Vielzahl der Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Wir betrachten hier die mikroskopischen Maxwellgleichungen im Vakuum:

räumliche Ableitungen	homogen	inhomogen
von $\vec{E}$:	$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0}$
von $\vec{B}$:	$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\operatorname{rot}\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \mu_0\vec{J}$

(1)

- Hierbei sind die Felder und die Quellen stetig differenzierbare Funktionen des Ortes $\vec{r}$ und der Zeit t.
- Über die zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ sind die Gleichungen verkoppelt.
- Die Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c verknüpft:

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad \text{mit } c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 3\times10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Potentiale

– Es ist hilfreich, das Skalarpotentials ϕ und das Vektorpotentials $\vec{A}$ einzuführen:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A} \tag{2}$$

– Mit der so definierten Beziehung zwischen den Feldern und den Potentialen ist garantiert, dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{B} &= \operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{A} \equiv 0 \qquad \text{für beliebiges } \vec{A} \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}\left(-\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right) \\ &= -\operatorname{rot}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\operatorname{rot}\vec{A}\right) \equiv \vec{0} \qquad \text{für beliebiges } \phi \text{ und } \vec{A} \end{aligned} \tag{3}$$

Bestimmungsgleichungen der Potentiale

- Das Einsetzen der Gleichungen (2) in die inhomogenen Maxwellgleichungen (1) ergibt unter Nutzung der Identität $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{a}} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{a}} - \Delta\vec{\mathrm{a}}$ die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial\mathrm{t}}\right) = \frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\Delta\phi + \mathrm{div}\,\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial\mathrm{t}} = -\frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon_0}} \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\,\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial\mathrm{t}}\right) = \mu_0\vec{\mathrm{J}}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\vec{\mathrm{A}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial\mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \mathrm{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial\mathrm{t}} + \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}}\right)} \tag{5}$$

- Störend ist hier die Verkopplung der beiden Gleichungen.
- Dies führt zur Eichung.

Eichtransformation – Eichinvarianz

- Wir betrachten eine bezüglich $\vec{r}$ und t zweifach stetig differenzierbare Funktion $\psi = \psi(\vec{r}, t)$.
- Mit Hilfe dieser Funktion ψ definieren wir folgende Eichtransformation:

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \vec{A} \to \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi \tag{6}$$

- Mit der Transformation (6) ergibt sich sofort die Eichinvarianz der Felder:

$$\vec{B} \to \vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \left(\vec{A} + \operatorname{grad} \psi\right) = \operatorname{rot} \vec{A} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi}_{\equiv \vec{0}} = \vec{B} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \to \vec{E}' = -\operatorname{grad} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \left(\phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{A} + \operatorname{grad} \psi\right) \\ &= -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \psi \\ &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned} \tag{8}$$

Divergenz des Vektorpotentials

- In den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) für die Potentiale ϕ und $\vec{\mathrm{A}}$

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon_0} \qquad \Delta\vec{\mathrm{A}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{t}} + \operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}\right)$$

  spielt $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}$ eine wichtige Rolle.
- Sei nun $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}} = \alpha(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ die tatsächliche Divergenz des Vektorpotentials $\vec{\mathrm{A}}$. Gibt es dann für beliebiges $\beta(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ eine durch ψ induzierte Eichtransformation, so dass $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}' = \beta(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ ist?
- Man rechnet aus:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}' = \operatorname{div}\left(\vec{\mathrm{A}} + \operatorname{grad}\psi\right) &= \operatorname{div}\vec{\mathrm{A}} \quad +\Delta\psi \\ &= \alpha \qquad\quad +\Delta\psi \quad \overset{!}{=} \beta\end{aligned} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\psi = \beta - \alpha}$$

- Diese Poisson-Gleichung für ψ ist immer (und für jeden Zeitpunkt) lösbar.
- Die Lösung ist nicht eindeutig (Addition einer Lösung der Laplace-Gleichung)!
  → Eichklasse
- Die Divergenz des Vektorpotentials $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}$ kann auf beliebige Werte gesetzt werden!

Coulomb-Eichung (Charles Augustin de Coulomb, 1786–1806)

- Unter Coulomb-Eichung versteht man eine Eichtransformation induziert durch ψ_C, so dass für das transformiere Vektorpotential $\vec{A}_C$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{A}_C = 0 \tag{10}$$

- Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) der Potentiale vereinfachen sich dann zu

$$\boxed{\Delta\phi_C = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\Delta\vec{A}_C - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0 \operatorname{grad}\frac{\partial\phi_C}{\partial t}} \tag{11}$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ϕ_C ergibt sich unmittelbar aus der Kenntnis der Greensche-Funktion des Laplace Operators zu

$$\boxed{\phi_C(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'} \tag{12}$$

- Will man eine explizite Lösung für das Vektorpotential $\vec{A}_C$ in Coulomb-Eichung angeben, muss man in der Bestimmungsgleichung (11) das Skalarpotential ϕ_C eliminieren.

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen

- Betrachte die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials $\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C}$:

$$\Delta\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \varepsilon_0\mu_0 \operatorname{grad} \frac{\partial\phi_\mathrm{C}}{\partial \mathrm{t}}$$

- Helmholtz-Theorem: Zerlegung eine Vektorfeldes $\vec{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ in einen longitudinalen, rotationsfreien Anteil $\vec{\mathrm{f}}_\mathrm{l}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\alpha}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ und einen transversalen, divergenzfreien Anteil $\vec{\mathrm{f}}_\mathrm{t}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\beta}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$.

$$\vec{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\alpha}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) + \vec{\beta}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) \text{ mit } \begin{cases} \operatorname{rot}\vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{\alpha} = -\operatorname{grad}\mathrm{a} \\ \operatorname{div}\vec{\beta} = 0 \rightarrow \vec{\beta} = \operatorname{rot}\vec{\mathrm{b}} \end{cases} \tag{13}$$

Die Felder a und $\vec{\mathrm{b}}$ werden folgendermaßen berechnet (→ Greensche Funktion des Laplace-Operators!):

$$\mathrm{a} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{div}_{\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}', \quad \vec{\mathrm{b}} = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}' \tag{14}$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Die Zerlegung (13) mit den Beziehungen (14) kann nun auf die Stromdichte $\vec{\mathrm{J}}$ angewendet werden:

$$\vec{\mathrm{J}} = \vec{\mathrm{J}}_\mathrm{l} + \vec{\mathrm{J}}_\mathrm{t} \text{ mit } \begin{cases} \vec{\mathrm{J}}_\mathrm{l}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = -\mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{div}_{\,\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{J}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}'\right) \\ \vec{\mathrm{J}}_\mathrm{t}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{rot}_{\,\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{J}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}'\right) \end{cases} \tag{15}$$

- Betrachte erneut das Skalarpotential ϕ_C in Gleichung (12)

$$\phi_\mathrm{C}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}'$$

- Für die Zeitableitung folgt dann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho_\mathrm{V}}{\partial\mathrm{t}} + \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{J}} = 0$

$$\frac{\partial\phi_\mathrm{C}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\frac{\partial\rho_\mathrm{V}(\vec{\mathrm{r}}',\mathrm{t})}{\partial\mathrm{t}}}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{div}_{\,\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{J}}(\vec{\mathrm{r}}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}' \tag{16}$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Der Vergleich der longitudinalen Stromdichte in (15) mit der Zeitableitung des Skalarpotentials in Gleichung (16) liefert schließlich einen Ausdruck für den Gradienten der Zeitableitung des Skalarpotentials:

$$\mathrm{grad}\,\frac{\partial \phi_C(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t) \tag{17}$$

- Die Bestimmungsgleichung (11) des Vektorpotentials in Coulombeichung

$$\Delta\vec{A}_C - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_C}{\partial t}$$

  wird damit entkoppelt und stellt sich als Wellengleichung dar, wobei die rechte Seite durch den trasversalen Anteil der Stromdichte bestimmt ist:

$$\Delta\vec{A}_C - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_C}{\partial t} = -\mu_0\left(\vec{J}-\vec{J}_l\right) = -\mu_0\vec{J}_t \tag{18}$$

- Die Lösung dieser Wellengleichung ist das retardierte Vektorpotential (→ Greensche Funktion des Wellenoperators)

$$\boxed{\vec{A}_C(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}_t(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'} \quad \text{mit } t_{ret} = t-\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| = t-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \tag{19}$$

Coulomb-Eichung: Zusammenfassung

- Beziehung Felder – Potentiale: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi_C - \frac{\partial \vec{A}_C}{\partial t}$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_C$
- Eichfestlegung: $\mathrm{div}\,\vec{A}_C = 0$
- Potentiale in Coulomb-Eichung:

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

- Für Probleme mit $\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$ ist $\vec{J}_t = \vec{J}$!
- Allgemein: $\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathrm{rot}_{r'}\vec{J}(r', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'\right)$
- Vektorpotential in Coulomb-Eichung ist retardiert mit Geschwindigkeit c → kausal
- Skalarpotential in Coulomb-Eichung ist instantan → nicht kausal
- Kausalität der Felder ist über das Vektorpotential sichergestellt!

Lorenz-Eichung (Ludvig Valentin Lorenz, 1829–1891)

– Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right)$$

– Divergenz des Vektorpotentials kann beliebig gesetzt werden. → Lorenz-Eichung:

$$\operatorname{div}\vec{A}_L = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L}{\partial t} \tag{20}$$

– Damit nehmen die Bestimmungsgleichungen jeweils sofort die Form von Wellengleichungen an:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_L - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi_L}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\ \Delta\vec{A}_L - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_L}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J} \end{aligned} \tag{21}$$

– Retardierte (kausale) Lösungen mit $t_{ret} = t - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\vec{r}-\vec{r}\,'| = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$:

$$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_V(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r', \quad \vec{A}_L(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \tag{22}$$

Lorenz-Eichung: Bedingung immer erfüllbar?

- Lässt sich die Eichbedingung $\operatorname{div} \vec{A}_L = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$ immer erfüllen?
- Annahme: $\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \neq 0$
- Eichtransformation: $\phi_L = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ und $\vec{A}_L = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi$
- Einsetzen ergibt:

$$\operatorname{div} \vec{A}_L + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta\psi + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\psi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\alpha \quad \rightarrow \text{ Lösung existiert}$$

- Eichklasse: $\psi \rightarrow \psi + \chi$ mit $\Delta\chi - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$, Lösung der homogenen Wellengleichung
- Auch diese (Eich-)Bedingung an die Divergenz des Vektorpotentials ist also immer erfüllbar!

v-Eichung

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A}_C = 0$

$\phi_C(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'$

$\vec{A}_C(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}',t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'$

$t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

$\vec{J}_t(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right)$

Lorenz-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A}_L = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_L}{\partial t}$

$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'$

$\vec{A}_L(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'$

$t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

- Verallgemeinerung von Coulomb- und Lorenz-Eichung → v-Eichung:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}_v = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}} \quad \text{für } v \neq 0 \tag{23}$$

- Offensichtlich sind Coulomb- und Lorenz-Eichung Spezialfälle der v-Eichung:
- $v \to \infty$: Coulomb-Eichung
- $v = c$: Lorenz-Eichung

Potentiale in v-Eichung

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \qquad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right)$$

- Mit der Eichbedingung $\operatorname{div}\vec{A}_v = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_v - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_v}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\
\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}\right) \\
&= -\mu_0\vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}
\end{aligned} \tag{24}$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ist wieder ein retardiertes Potential, wobei jetzt aber $t_{\mathrm{ret,v}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ ist:

$$\boxed{\phi_v(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\mathrm{ret,v}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'} \tag{25}$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung

- Wie bei Coulomb-Eichung: Aufteilung in transversale (divergenzfreie) und longitudinale (wirbelfreie) Stromdichte:

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_l(\vec{r},t) = -\operatorname{grad}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{div}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ \vec{J}_t(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \end{cases}$$

- Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{J} = 0$, Lösung des Skalarpotentials (25) und $\frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t_{\text{ret,v}}}\frac{\partial t_{\text{ret,v}}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t_{\text{ret,v}}} = \frac{\partial \rho_V(t)}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}\frac{\partial \phi_v}{\partial t}(\vec{r},t) &= \operatorname{grad}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t_{\text{ret,v}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\operatorname{grad}\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{div}_{r'}\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{26}$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung (...)

– Die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials war:

$$\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$$

– Mit der gerade gefundenen Beziehung für $\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$ folgt somit:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t) \\ &= -\mu_0\left[\vec{J}_t(\vec{r},t) + \vec{J}_l(\vec{r},t) - \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{J}_l(\vec{r},t)\right] \qquad (27) \\ &= -\mu_0\left[\vec{J}_t(\vec{r},t) + \frac{c^2}{v^2}\vec{J}_l(\vec{r},t)\right]\end{aligned}$$

– Die Lösung ergibt sich wieder als retardierte Potential (mit Geschwindigkeit c!): $t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$:

$$\boxed{\vec{A}_v(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}_t(\vec{r}',t_{ret}) + \frac{c^2}{v^2}\vec{J}_l(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'} \qquad (28)$$

- Diese Datei wurde erstellt am: 2024-01-24 12:08:25+01:00
  Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“:
  https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an mailto:tetemv@tu-dresden.de!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen (https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287) oder auf YouTube (https://www.youtube.com/c/TET4TUD).