

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser  
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

# TET: Vertiefung Eichung

**Zusatz-Handout zum Modul ET-12 02 01 im  
Diplomstudiengang Elektrotechnik**

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser  
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

# Eichung in der klassischen elektromagnetischen Feldtheorie

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

# Ausgangspunkt

- Die klassische elektromagnetische Feldtheorie beschäftigt sich mit der großen Vielzahl der Lösungen der **Maxwell-Gleichungen**. Wir betrachten hier die mikroskopischen Maxwellgleichungen im Vakuum:

räumliche Ableitungen	homogen	inhomogen	
von $\vec{E}$ :	$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$	$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho V}{\epsilon_0}$	(1)
von $\vec{B}$ :	$\operatorname{div} \vec{B} = 0$	$\operatorname{rot} \vec{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$	

- Hierbei sind die Felder und die Quellen stetig differenzierbare Funktionen des Ortes  $\vec{r}$  und der Zeit  $t$ .
- Über die zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  sind die Gleichungen verkoppelt.
- Die Feldkonstanten  $\mu_0$  und  $\epsilon_0$  sind mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum  $c$  verknüpft:

$$\epsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad \text{mit } c = 299\,792\,458 \, \text{m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \, \text{m s}^{-1}$$

# Potentiale

- Es ist hilfreich, das **Skalarpotentials**  $\phi$  und das **Vektorpotentials**  $\vec{A}$  einzuführen:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2)$$

- Mit der so definierten Beziehung zwischen den Feldern und den Potentialen ist garantiert, dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= \text{div rot } \vec{A} \equiv 0 \quad \text{für beliebiges } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot} \left( -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \\ &= -\text{rot} \left( \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \equiv \vec{0} \quad \text{für beliebiges } \phi \text{ und } \vec{A} \end{aligned} \quad (3)$$

# Bestimmungsgleichungen der Potentiale

- Das Einsetzen der Gleichungen (2) in die inhomogenen Maxwellgleichungen (1) ergibt unter Nutzung der Identität  $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$  die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\text{div} \left( -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\Delta \phi + \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{rot} (\text{rot } \vec{A}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \vec{J} \\ \rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \text{grad} \left( \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right)} &\quad (5) \end{aligned}$$

- Störend ist hier die Verkopplung der beiden Gleichungen.
- Dies führt zur **Eichung**.

# Eichtransformation – Eichinvarianz

- Wir betrachten eine bezüglich  $\vec{r}$  und  $t$  zweifach stetig differenzierbare Funktion  $\psi = \psi(\vec{r}, t)$ .
- Mit Hilfe dieser Funktion  $\psi$  definieren wir folgende **Eichtransformation**:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \quad (6)$$

- Mit der Transformation (6) ergibt sich sofort die **Eichinvarianz** der Felder:

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } (\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } \psi}_{\equiv \vec{0}} = \vec{B} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow \vec{E}' &= -\text{grad } \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad} \left( \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } \psi) \\ &= -\text{grad } \phi + \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \psi \\ &= -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned} \quad (8)$$

# Divergenz des Vektorpotentials - einfache Fälle

- In den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) für die Potentiale  $\phi$  und  $\vec{A}$

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

spielt  $\operatorname{div} \vec{A}$  eine wichtige Rolle.

- Sei nun  $\operatorname{div} \vec{A} = \alpha(\vec{r}, t)$  die tatsächliche Divergenz des Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Gibt es dann für beliebiges  $\beta(\vec{r}, t)$  eine durch  $\psi$  induzierte Eichtransformation, so dass  $\operatorname{div} \vec{A}' = \beta(\vec{r}, t)$  ist?
- Man rechnet aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}' &= \operatorname{div} (\vec{A} + \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta\psi \\ &= \alpha + \Delta\psi \stackrel{!}{=} \beta \end{aligned} \quad (9)$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta\psi = \beta - \alpha}$$

- Diese **Poisson-Gleichung** für  $\psi$  ist immer (und für jeden Zeitpunkt) lösbar.
- Die Lösung ist nicht eindeutig (Addition einer Lösung der Laplace-Gleichung)!  
→ **Eichklasse**
- **Die Divergenz des Vektorpotentials  $\operatorname{div} \vec{A}$  kann auf beliebige Werte gesetzt werden!**

# Divergenz des Vektorpotentials – allgemeiner Fall

- Gerade gezeigt: Divergenz des Vektorpotentials kann auf beliebige Werte gesetzt werden.
- Was ist aber, wenn die Divergenz des Vektorpotentials auch eine **Funktion des Skalarpotentials** sein soll ( $\rightarrow$  Lorenz-Eichung, v-Eichung)?
- Sei  $\text{div } \vec{A} = f(\vec{r}, t, \phi)$ .
- Dann rechnet man

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}' &= \text{div } (\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi \stackrel{!}{=} f(\vec{r}, t, \phi') \\ &= f(\vec{r}, t, \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t})\end{aligned}\tag{10}$$

- Dies ist im allgemeinen keine Poisson-Gleichung!
- Die Bestimmungsgleichung ist erst bekannt, wenn eine konkrete Abhängigkeit von  $\phi$  gefordert wird.
- Dan muss die Existenz von  $\psi$  gezeigt werden!



# Coulomb-Eichung (Charles Augustin de Coulomb, 1786–1806)

- Unter **Coulomb-Eichung** versteht man eine Eichtransformation induziert durch  $\psi_C$ , so dass für das transformierte Vektorpotential  $\vec{A}_C$  gilt

$$\operatorname{div} \vec{A}_C = 0 \quad (11)$$

- Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) der Potentiale vereinfachen sich dann zu

$$\boxed{\Delta \phi_C = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}} \quad (12)$$

- Die Lösung für das Skalarpotential  $\phi_C$  ergibt sich unmittelbar aus der Kenntnis der Greensche-Funktion des Laplace Operators zu

$$\boxed{\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'} \quad (13)$$

- Will man eine explizite Lösung für das Vektorpotential  $\vec{A}_C$  in Coulomb-Eichung angeben, muss man in der Bestimmungsgleichung (12) das Skalarpotential  $\phi_C$  eliminieren.

# Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen

- Betrachte die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials  $\vec{A}_C$ :

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}$$

- **Helmholtz-Theorem:** Zerlegung eines Vektorfeldes  $\vec{f}(\vec{r}, t)$  in einen longitudinalen, rotationsfreien Anteil  $\vec{f}_l(\vec{r}, t) = \vec{\alpha}(\vec{r}, t)$  und einen transversalen, divergenzfreien Anteil  $\vec{f}_t(\vec{r}, t) = \vec{\beta}(\vec{r}, t)$ .

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{\alpha}(\vec{r}, t) + \vec{\beta}(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{\alpha} = -\text{grad } a \\ \text{div } \vec{\beta} = 0 \rightarrow \vec{\beta} = \text{rot } \vec{b} \end{cases} \quad (14)$$

Die Felder  $a$  und  $\vec{b}$  werden folgendermaßen berechnet ( $\rightarrow$  Greensche Funktion des Laplace-Operators!):

$$a = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad \vec{b} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (15)$$

# Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Die Zerlegung (14) mit den Beziehungen (15) kann nun auf die Stromdichte  $\vec{J}$  angewendet werden:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_1(\vec{r}, t) = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \\ \vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \end{cases} \quad (16)$$

- Betrachte erneut das Skalarpotential  $\phi_C$  in Gleichung (13)

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

- Für die Zeitableitung folgt dann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung**  
 $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$

$$\frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\frac{\partial \rho_V(\vec{r}', t)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (17)$$

# Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Der Vergleich der longitudinalen Stromdichte in (16) mit der Zeitableitung des Skalarpotentials in Gleichung (17) liefert schließlich einen Ausdruck für den Gradienten der Zeitableitung des Skalarpotentials:

$$\text{grad} \frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \quad (18)$$

- Die Bestimmungsgleichung (12) des Vektorpotentials in Coulombeichung

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}$$

wird damit entkoppelt und stellt sich als Wellengleichung dar, wobei die rechte Seite durch den transversalen Anteil der Stromdichte bestimmt ist:

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t} = -\mu_0 (\vec{J} - \vec{J}_1) = -\mu_0 \vec{J}_t \quad (19)$$

- Die Lösung dieser Wellengleichung ist das **retardierte Vektorpotential** (→ Greensche Funktion des Wellenoperators)

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \text{mit } t_{\text{ret}} = t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'| = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (20)$$

# Coulomb-Eichung: Zusammenfassung

- Beziehung Felder – Potentiale:  $\vec{E} = -\text{grad } \phi_C - \frac{\partial \vec{A}_C}{\partial t}$ ,  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_C$
- Eichfestlegung:  $\text{div } \vec{A}_C = 0$
- Potentiale in Coulomb-Eichung:

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

- Für Probleme mit  $\text{div } \vec{J} = 0$  ist  $\vec{J}_t = \vec{J}$ !
- Allgemein:  $\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{r'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$
- Vektorpotential in Coulomb-Eichung ist retardiert mit Geschwindigkeit  $c \rightarrow$  **kausal**
- Skalarpotential in Coulomb-Eichung ist instantan  $\rightarrow$  **nicht kausal**
- Kausalität der Felder ist über das Vektorpotential sichergestellt!

# Lorenz-Eichung (Ludvig Valentin Lorenz, 1829–1891)

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

- Divergenz des Vektorpotentials kann beliebig gesetzt werden. → **Lorenz-Eichung**:

$$\operatorname{div} \vec{A}_L = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} \quad (21)$$

- Damit nehmen die Bestimmungsgleichungen jeweils sofort die Form von Wellengleichungen an:

$$\Delta \phi_L - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad (22)$$
$$\Delta \vec{A}_L - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

- Retardierte (kausale) Lösungen mit  $t_{\text{ret}} = t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'| = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$ :

$$\phi_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad \vec{A}_L(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (23)$$

# Lorenz-Eichung: Bedingung immer erfüllbar?

- Lässt sich die **Eichbedingung**  $\text{div } \vec{A}_L = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$  immer erfüllen?
- Annahme:  $\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \neq 0$
- Eichtransformation:  $\phi_L = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$  und  $\vec{A}_L = \vec{A} + \text{grad } \psi$
- Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}_L + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= \text{div } \vec{A} + \Delta\psi + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \Delta\psi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\alpha \quad \rightarrow \text{Lösung existiert}\end{aligned}$$

- **Eichklasse:**  $\psi \rightarrow \psi + \chi$  mit  $\Delta\chi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$ , Lösung der homogenen Wellengleichung
- Auch diese (Eich-)Bedingung an die Divergenz des Vektorpotentials ist also immer erfüllbar!

# v-Eichung

**Coulomb-Eichung:**  $\operatorname{div} \vec{A}_C = 0$

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$$

**Lorenz-Eichung:**  $\operatorname{div} \vec{A}_L = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$

$$\phi_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_L(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

---

– Verallgemeinerung von Coulomb- und Lorenz-Eichung → **v-Eichung:**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}} \quad \text{für } v \neq 0 \quad (24)$$

- Offensichtlich sind Coulomb- und Lorenz-Eichung Spezialfälle der v-Eichung:
- $v \rightarrow \infty$ : Coulomb-Eichung
- $v = c$ : Lorenz-Eichung



# Potentiale in v-Eichung

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left( \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

- Mit der **Eichbedingung**  $\operatorname{div} \vec{A}_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$  folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_v - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi_v}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (25)$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ist wieder ein retardiertes Potential, wobei jetzt aber  $t_{\text{ret},v} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$  ist:

$$\phi_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret},v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (26)$$

# Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung

- Wie bei Coulomb-Eichung: Aufteilung in transversale (divergenzfreie) und longitudinale (wirbelfreie) Stromdichte:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_1(\vec{r}, t) = -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \\ \vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \end{cases}$$

- Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung  $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$ , Lösung des Skalarpotentials (26) und  $\frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t_{\text{ret},v}} \frac{\partial t_{\text{ret},v}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t_{\text{ret},v}} = \frac{\partial \rho_V(t)}{\partial t}$ :

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\partial \phi_V}{\partial t}(\vec{r}, t) &= \text{grad} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret},v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \left[ -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (27)$$

# Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung (...)

- Die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials war:

$$\Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$$

- Mit der gerade gefundenen Beziehung für  $\text{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$  folgt somit:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \\ &= -\mu_0 \left[ \vec{J}_t(\vec{r}, t) + \vec{J}_1(\vec{r}, t) - \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \right] \\ &= -\mu_0 \left[ \vec{J}_t(\vec{r}, t) + \frac{c^2}{v^2} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

- Die Lösung ergibt sich wieder als retardierte Potential (mit Geschwindigkeit  $c$ ):

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}:$$

$$\vec{A}_v(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}}) + \frac{c^2}{v^2} \vec{J}_1(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (29)$$

## v-Eichung: Eichfunktion $v_1 \rightarrow v_2$

- Nachdem Coulomb-Eichung ( $v \rightarrow \infty$ ) und Lorenz-Eichung ( $v = c$ ) als Spezialfälle der v-Eichung identifiziert wurden, lohnt es sich die Bestimmungsgleichung der Eichfunktion  $\psi$  zum Übergang von einer  $v_1$ -Eichung zu einer  $v_2$ -Eichung abzuleiten.
- Allgemein gilt für die Eichtransformation (6):

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$$

- Die Potentiale seien in  $v_1$ -Eichung ( $v_1 \neq 0$ ) bekannt. In  $v_1$ -Eichung gilt:

$$\text{div } \vec{A}_{v_1} = -\frac{1}{v_1^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} \quad (30)$$

- Es gilt dann für  $v_2 \neq 0$ :

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}_{v_2} &= \text{div } (\vec{A}_{v_1} + \text{grad } \psi) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{v_2^2} \frac{\partial \phi_{v_2}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{v_1^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} + \Delta \psi = -\frac{1}{v_2^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} + \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \Delta \psi - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left( \frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} \end{aligned} \quad (31)$$

- Dieses Handout steht unter der Lizenz CC BY 3.0 DE.  
Details hierzu finden Sie unter <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.de>.
- Diese Datei wurde erstellt am: 2024-01-24 13:29:22+01:00  
Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“:  
<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436>
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an  
<mailto:tetemv@tu-dresden.de>!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen  
(<https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287>) oder auf YouTube  
(<https://www.youtube.com/c/TET4TUD>).