TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Open Educational Resources

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Vertiefung Eichung

Zusatz-Handout zum Modul ET-12 02 01 im Diplomstudiengang Elektrotechnik

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DRESDEN

Open Educational Resources

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Eichung in der klassischen elektromagnetischen Feldtheorie

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Ausgangspunkt

- Die klassische elektromagnetische Feldtheorie beschäftigt sich mit der großen Vielzahl der Lösungen der Maxwell-Gleichungen. Wir betrachten hier die mikroskopischen Maxwellgleichungen im Vakuum:

$$\begin{array}{lcc} \text{räumliche Ableitungen} & \text{homogen} & \text{inhomogen} \\ \text{von } \vec{\mathrm{E}}: & \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} + \dfrac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}} = \vec{0} & \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{E}} = \dfrac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0} \\ \text{von } \vec{\mathrm{B}}: & \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} = 0 & \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{B}} - \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{\mathrm{E}}}{\partial \mathrm{t}} = \mu_0 \vec{\mathrm{J}} \end{array} \tag{1}$$

- Hierbei sind die Felder und die Quellen stetig differenzierbare Funktionen des Ortes $\vec{\mathrm{r}}$ und der Zeit t.
- Über die zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen $\vec{\mathrm{E}}$ und $\vec{\mathrm{B}}$ sind die Gleichungen verkoppelt.
- Die Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c verknüpft:

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{\mathrm{c}^2} \quad \text{mit } \mathrm{c} = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Potentiale

– Es ist hilfreich, das Skalarpotentials ϕ und das Vektorpotentials $\vec{\mathrm{A}}$ einzuführen:

$$\vec{\mathrm{E}} = -\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} \qquad \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} \tag{2}$$

– Mit der so definierten Beziehung zwischen den Feldern und den Potentialen ist garantiert, dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt werden:

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{B}} &= \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}} \equiv 0 \qquad \text{für beliebiges } \vec{\mathrm{A}} \\
\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{E}} + \frac{\partial \vec{\mathrm{B}}}{\partial \mathrm{t}} &= \mathrm{rot}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) \\
&= -\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\left(\mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{A}}\right) \equiv \vec{0} \qquad \text{für beliebiges } \phi \text{ und } \vec{\mathrm{A}}
\end{aligned} \tag{3}$$

Bestimmungsgleichungen der Potentiale

- Das Einsetzen der Gleichungen (2) in die inhomogenen Maxwellgleichungen (1) ergibt unter Nutzung der Identität $\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{a} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\vec{a} - \Delta\vec{a}$ die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\mathrm{div}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \rightarrow \boxed{\Delta\phi + \mathrm{div}\,\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}} \tag{4}$$

$$\mathrm{rot}\left(\mathrm{rot}\,\vec{A}\right) - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\mathrm{grad}\,\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \mu_0\vec{J}$$

$$\rightarrow \boxed{\Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \mathrm{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{A}\right)} \tag{5}$$

- Störend ist hier die Verkopplung der beiden Gleichungen.
- Dies führt zur Eichung.

Eichtransformation – Eichinvarianz

- Wir betrachten eine bezüglich $\vec{r}$ und t zweifach stetig differenzierbare Funktion $\psi = \psi(\vec{r}, t)$.
- Mit Hilfe dieser Funktion ψ definieren wir folgende Eichtransformation:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \qquad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} \psi \tag{6}$$

- Mit der Transformation (6) ergibt sich sofort die Eichinvarianz der Felder:

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \operatorname{rot} \vec{A}' = \operatorname{rot} \left(\vec{A} + \operatorname{grad} \psi\right) = \operatorname{rot} \vec{A} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi}_{\equiv \vec{0}} = \vec{B} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow \vec{E}' = -\operatorname{grad} \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} &= -\operatorname{grad} \left(\phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\vec{A} + \operatorname{grad} \psi\right) \\ &= -\operatorname{grad} \phi + \operatorname{grad} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad} \psi \\ &= -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned} \tag{8}$$

Divergenz des Vektorpotentials - einfache Fälle

- In den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) für die Potentiale ϕ und $\vec{\mathrm{A}}$

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0} \qquad \Delta\vec{\mathrm{A}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial \mathrm{t}} + \operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}\right)$$

  spielt $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}$ eine wichtige Rolle.
- Sei nun $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}} = \alpha(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ die tatsächliche Divergenz des Vektorpotentials $\vec{\mathrm{A}}$. Gibt es dann für beliebiges $\beta(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ eine durch ψ induzierte Eichtransformation, so dass $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}' = \beta(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ ist?
- Man rechnet aus:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}' = \operatorname{div}\left(\vec{\mathrm{A}} + \operatorname{grad}\psi\right) &= \operatorname{div}\vec{\mathrm{A}} \quad +\Delta\psi \\ &= \alpha \qquad\quad +\Delta\psi \quad \stackrel{!}{=} \beta \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta\psi = \beta - \alpha}$$

- Diese Poisson-Gleichung für ψ ist immer (und für jeden Zeitpunkt) lösbar.
- Die Lösung ist nicht eindeutig (Addition einer Lösung der Laplace-Gleichung)! → Eichklasse
- Die Divergenz des Vektorpotentials $\operatorname{div}\vec{\mathrm{A}}$ kann auf beliebige Werte gesetzt werden!

Divergenz des Vektorpotentials – allgemeiner Fall

- Gerade gezeigt: Divergenz des Vektorpotentials kann auf beliebige Werte gesetzt werden.
- Was ist aber, wenn die Divergenz des Vektorpotentials auch eine Funktion des Skalarpotentials sein soll (→ Lorenz-Eichung, v-Eichung)?
- Sei $\mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}, \phi)$.
- Dann rechnet man

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}}' = \mathrm{div}\left(\vec{\mathrm{A}} + \mathrm{grad}\,\psi\right) = \mathrm{div}\,\vec{\mathrm{A}} + \Delta\psi &\stackrel{!}{=} \mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}, \phi') \\ &= \mathrm{f}(\vec{\mathrm{r}}, \mathrm{t}, \phi - \frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}) \end{aligned} \tag{10}$$

- Dies ist im allgemeinen keine Poisson-Gleichung!
- Die Bestimmungsgleichung ist erst bekannt, wenn eine konkrete Abhängigkeit von ϕ gefordert wird.
- Dann muss die Existenz von ψ gezeigt werden!

Coulomb-Eichung (Charles Augustin de Coulomb, 1786–1806)

- Unter Coulomb-Eichung versteht man eine Eichtransformation induziert durch ψ_{C}, so dass für das transformiere Vektorpotential $\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}$ gilt

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}} = 0 \tag{11}$$

- Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) der Potentiale vereinfachen sich dann zu

$$\boxed{\Delta\phi_{\mathrm{C}} = -\frac{\rho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0}} \qquad \boxed{\Delta\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \varepsilon_0\mu_0 \operatorname{grad}\frac{\partial\phi_{\mathrm{C}}}{\partial \mathrm{t}}} \tag{12}$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ϕ_{C} ergibt sich unmittelbar aus der Kenntnis der Greensche-Funktion des Laplace Operators zu

$$\boxed{\phi_{\mathrm{C}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{\mathrm{r}}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}'} \tag{13}$$

- Will man eine explizite Lösung für das Vektorpotential $\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{C}}$ in Coulomb-Eichung angeben, muss man in der Bestimmungsgleichung (12) das Skalarpotential ϕ_{C} eliminieren.

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen

– Betrachte die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials $\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C}$:

$$\Delta\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{\mathrm{A}}_\mathrm{C}}{\partial \mathrm{t}^2} = -\mu_0\vec{\mathrm{J}} + \varepsilon_0\mu_0 \mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_\mathrm{C}}{\partial \mathrm{t}}$$

– Helmholtz-Theorem: Zerlegung eine Vektorfeldes $\vec{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ in einen longitudinalen, rotationsfreien Anteil $\vec{\mathrm{f}}_\mathrm{l}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\alpha}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$ und einen transversalen, divergenzfreien Anteil $\vec{\mathrm{f}}_\mathrm{t}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\beta}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t})$.

$$\vec{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) = \vec{\alpha}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) + \vec{\beta}(\vec{\mathrm{r}},\mathrm{t}) \text{ mit } \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{\alpha} = 0 \to \vec{\alpha} = -\mathrm{grad}\,\mathrm{a} \\ \mathrm{div}\,\vec{\beta} = 0 \to \vec{\beta} = \mathrm{rot}\,\vec{\mathrm{b}} \end{cases} \tag{14}$$

Die Felder a und $\vec{\mathrm{b}}$ werden folgendermaßen berechnet (→ Greensche Funktion des Laplace-Operators!):

$$\mathrm{a} = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\mathrm{div}_{\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}', \quad \vec{\mathrm{b}} = \frac{1}{4\pi}\iiint\frac{\mathrm{rot}_{\mathrm{r}'}\vec{\mathrm{f}}(\mathrm{r}',\mathrm{t})}{|\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}'|}\mathrm{d}^3\mathrm{r}' \tag{15}$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

– Die Zerlegung (14) mit den Beziehungen (15) kann nun auf die Stromdichte $\vec{J}$ angewendet werden:

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_l(\vec{r},t) = -\mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{div}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ \vec{J}_t(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{rot}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \end{cases} \tag{16}$$

– Betrachte erneut das Skalarpotential ϕ_C in Gleichung (13)

$$\phi_C(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'$$

– Für die Zeitableitung folgt dann mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho_V}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0$

$$\frac{\partial\phi_C(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\frac{\partial\rho_V(\vec{r}',t)}{\partial t}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r' = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\mathrm{div}_{r'}\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r' \tag{17}$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Der Vergleich der longitudinalen Stromdichte in (16) mit der Zeitableitung des Skalarpotentials in Gleichung (17) liefert schließlich einen Ausdruck für den Gradienten der Zeitableitung des Skalarpotentials:

$$\mathrm{grad}\,\frac{\partial \phi_C(\vec{r},t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t) \tag{18}$$

- Die Bestimmungsgleichung (12) des Vektorpotentials in Coulombeichung

$$\Delta\vec{A}_C - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_C}{\partial t}$$

wird damit entkoppelt und stellt sich als Wellengleichung dar, wobei die rechte Seite durch den transversalen Anteil der Stromdichte bestimmt ist:

$$\Delta\vec{A}_C - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \varepsilon_0\mu_0\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_C}{\partial t} = -\mu_0\left(\vec{J} - \vec{J}_l\right) = -\mu_0\vec{J}_t \tag{19}$$

- Die Lösung dieser Wellengleichung ist das retardierte Vektorpotential (→ Greensche Funktion des Wellenoperators)

$$\boxed{\vec{A}_C(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}_t(\vec{r}\,',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r'} \quad \text{mit } t_{ret} = t - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right| = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c} \tag{20}$$

Coulomb-Eichung: Zusammenfassung

- Beziehung Felder – Potentiale: $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi_C - \frac{\partial \vec{A}_C}{\partial t}$, $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}_C$
- Eichfestlegung: $\mathrm{div}\,\vec{A}_C = 0$
- Potentiale in Coulomb-Eichung:

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}\,', t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}\,', t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r', \quad t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}{c}$$

- Für Probleme mit $\mathrm{div}\,\vec{J} = 0$ ist $\vec{J}_t = \vec{J}$!
- Allgemein: $\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\mathrm{rot}_{r'}\vec{J}(r', t)}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} d^3r'\right)$
- Vektorpotential in Coulomb-Eichung ist retardiert mit Geschwindigkeit $c \rightarrow$ kausal
- Skalarpotential in Coulomb-Eichung ist instantan $\rightarrow$ nicht kausal
- Kausalität der Felder ist über das Vektorpotential sichergestellt!

Lorenz-Eichung (Ludvig Valentin Lorenz, 1829–1891)

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right)$$

- Divergenz des Vektorpotentials kann beliebig gesetzt werden. → Lorenz-Eichung:

$$\operatorname{div}\vec{A}_L = -\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi_L}{\partial t} \tag{21}$$

- Damit nehmen die Bestimmungsgleichungen jeweils sofort die Form von Wellengleichungen an:

$$\begin{aligned}\Delta\phi_L - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\phi_L}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}\\ \Delta\vec{A}_L - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}_L}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J}\end{aligned} \tag{22}$$

- Retardierte (kausale) Lösungen mit $t_{\text{ret}} = t - \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\,|\vec{r}-\vec{r}\,'| = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}$:

$$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_V(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r', \quad \vec{A}_L(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}(\vec{r}\,',t_{\text{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,d^3r' \tag{23}$$

Lorenz-Eichung: Bedingung immer erfüllbar?

- Lässt sich die Eichbedingung $\operatorname{div}\vec{A}_L = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$ immer erfüllen?
- Annahme: $\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \neq 0$
- Eichtransformation: $\phi_L = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ und $\vec{A}_L = \vec{A} + \operatorname{grad}\psi$
- Einsetzen ergibt:

$$\operatorname{div}\vec{A}_L + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} = \operatorname{div}\vec{A} + \Delta\psi + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\psi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\alpha \quad \to \text{Lösung existiert}$$

- Eichklasse: $\psi \to \psi + \chi$ mit $\Delta\chi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$, Lösung der homogenen Wellengleichung
- Auch diese (Eich-)Bedingung an die Divergenz des Vektorpotentials ist also immer erfüllbar!

v-Eichung

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A}_C = 0$

$\phi_C(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$

$\vec{A}_C(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$

$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

$\vec{J}_t(\vec{r},t) = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\operatorname{rot}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'\right)$

Lorenz-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A}_L = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_L}{\partial t}$

$\phi_L(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$

$\vec{A}_L(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$

$t_{ret} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$

- Verallgemeinerung von Coulomb- und Lorenz-Eichung → v-Eichung:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{A}_v = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}} \quad \text{für } v \neq 0 \tag{24}$$

- Offensichtlich sind Coulomb- und Lorenz-Eichung Spezialfälle der v-Eichung:
- $v \to \infty$: Coulomb-Eichung
- $v = c$: Lorenz-Eichung

Potentiale in v-Eichung

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{A}\right)$$

- Mit der Eichbedingung $\operatorname{div}\vec{A}_v = -\frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\Delta\phi_v - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\phi_v}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\
\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J} + \operatorname{grad}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}\right) \\
&= -\mu_0\vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}
\end{aligned} \tag{25}$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ist wieder ein retardiertes Potential, wobei jetzt aber $t_{\mathrm{ret,v}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{v}$ ist:

$$\boxed{\phi_v(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\frac{\rho_V(\vec{r}',t_{\mathrm{ret,v}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,d^3r'} \tag{26}$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung

- Wie bei Coulomb-Eichung: Aufteilung in transversale (divergenzfreie) und longitudinale (wirbelfreie) Stromdichte:

$$\vec{J} = \vec{J}_l + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_l(\vec{r},t) = -\mathrm{grad}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{div}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ \vec{J}_t(\vec{r},t) = \mathrm{rot}\left(\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{rot}_{r'}\vec{J}(r',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \end{cases}$$

- Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial\rho_V}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{J} = 0$, Lösung des Skalarpotentials (26) und $\frac{\partial\rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t} = \frac{\partial\rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t_{\text{ret,v}}}\frac{\partial t_{\text{ret,v}}}{\partial t} = \frac{\partial\rho_V(t_{\text{ret,v}})}{\partial t_{\text{ret,v}}} = \frac{\partial\rho_V(t)}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{grad}\,\frac{\partial\phi_v}{\partial t}(\vec{r},t) &= \mathrm{grad}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint \frac{\rho_V(\vec{r}',t_{\text{ret,v}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\mathrm{grad}\left[-\frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\mathrm{div}_{r'}\vec{J}(\vec{r}',t)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\mathrm{d}^3r'\right] \\ &= \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{27}$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung (...)

- Die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials war:

$$\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$$

- Mit der gerade gefundenen Beziehung für $\operatorname{grad}\frac{\partial\phi_v}{\partial t}$ folgt somit:

$$\begin{aligned}\Delta\vec{A}_v - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0\vec{J}(\vec{r},t) + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{J}_l(\vec{r},t)\\ &= -\mu_0\left[\vec{J}_t(\vec{r},t) + \vec{J}_l(\vec{r},t) - \frac{1 - c^2/v^2}{c^2}\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\vec{J}_l(\vec{r},t)\right] \qquad (28)\\ &= -\mu_0\left[\vec{J}_t(\vec{r},t) + \frac{c^2}{v^2}\vec{J}_l(\vec{r},t)\right]\end{aligned}$$

- Die Lösung ergibt sich wieder als retardierte Potential (mit Geschwindigkeit c!): $t_{\mathsf{ret}} = t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$:

$$\boxed{\vec{A}_v(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{J}_t(\vec{r}',t_{\mathsf{ret}}) + \frac{c^2}{v^2}\vec{J}_l(\vec{r}',t_{\mathsf{ret}})}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'} \qquad (29)$$

v-Eichung: Eichfunktion $\mathrm{v}_1 \to \mathrm{v}_2$

- Nachdem Coulomb-Eichung ($\mathrm{v} \to \infty$) und Lorenz-Eichung ($\mathrm{v} = \mathrm{c}$) als Spezialfälle der v-Eichung identifiziert wurden, lohnt es sich die Bestimmungsgleichung der Eichfunktion ψ zum Übergang von einer v_1-Eichung zu einer v_2-Eichung abzuleiten.
- Allgemein gilt für die Eichtransformation (6):

$$\phi \to \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial \mathrm{t}} \qquad \vec{\mathrm{A}} \to \vec{\mathrm{A}}' = \vec{\mathrm{A}} + \operatorname{grad} \psi$$

- Die Potentiale seien in v_1-Eichung ($\mathrm{v}_1 \neq 0$) bekannt. In v_1-Eichung gilt:

$$\operatorname{div} \vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{v}_1} = -\frac{1}{\mathrm{v}_1^2} \frac{\partial \phi_{\mathrm{v}_1}}{\partial \mathrm{t}} \tag{30}$$

- Es gilt dann für $\mathrm{v}_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{v}_2} = \operatorname{div}\left(\vec{\mathrm{A}}_{\mathrm{v}_1} + \operatorname{grad}\psi\right) &\overset{!}{=} -\frac{1}{\mathrm{v}_2^2}\frac{\partial \phi_{\mathrm{v}_2}}{\partial \mathrm{t}} \\
= -\frac{1}{\mathrm{v}_1^2}\frac{\partial \phi_{\mathrm{v}_1}}{\partial \mathrm{t}} + \Delta\psi &= -\frac{1}{\mathrm{v}_2^2}\frac{\partial \phi_{\mathrm{v}_1}}{\partial \mathrm{t}} + \frac{1}{\mathrm{v}_2^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathrm{t}^2} \\
\Rightarrow \quad \Delta\psi - \frac{1}{\mathrm{v}_2^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial \mathrm{t}^2} &= \left(\frac{1}{\mathrm{v}_1^2} - \frac{1}{\mathrm{v}_2^2}\right)\frac{\partial \phi_{\mathrm{v}_1}}{\partial \mathrm{t}}
\end{aligned} \tag{31}$$

- Diese Datei wurde erstellt am: 2025-06-02 15:47:07+02:00
  Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“: https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an mailto:tetemv@tu-dresden.de!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen (https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287) oder auf YouTube (https://www.youtube.com/c/TET4TUD).