

Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

TET: Vertiefung Eichung

**Zusatz-Handout zum Modul ET-12 02 01 im
Diplomstudiengang Elektrotechnik**

Lizenz: CC BY 3.0 DE



Prof. Dr. Hans Georg Krauthäuser
Theoretische Elektrotechnik und Elektromagnetische Verträglichkeit

Eichung in der klassischen elektromagnetischen Feldtheorie

Theoretische Elektrotechnik – Vertiefung

Lizenz: CC BY 3.0 DE 

Ausgangspunkt

- Die klassische elektromagnetische Feldtheorie beschäftigt sich mit der großen Vielzahl der Lösungen der **Maxwell-Gleichungen**. Wir betrachten hier die mikroskopischen Maxwellgleichungen im Vakuum:

räumliche Ableitungen

homogen

inhomogen

$$\text{von } \vec{E}: \quad \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0} \quad \operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho V}{\varepsilon_0} \quad (1)$$

$$\text{von } \vec{B}: \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad \operatorname{rot} \vec{B} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

- Hierbei sind die Felder und die Quellen stetig differenzierbare Funktionen des Ortes \vec{r} und der Zeit t .
- Über die zeitlichen Ableitungen der Feldgrößen \vec{E} und \vec{B} sind die Gleichungen verkoppelt.
- Die Feldkonstanten μ_0 und ε_0 sind mit der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum c verknüpft:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad \text{mit } c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

Potentiale

- Es ist hilfreich, das **Skalarpotentials** ϕ und das **Vektorpotentials** \vec{A} einzuführen:

$$\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (2)$$

- Mit der so definierten Beziehung zwischen den Feldern und den Potentialen ist garantiert, dass die homogenen Maxwellgleichungen automatisch erfüllt werden:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{B} &= \text{div rot } \vec{A} \equiv 0 \quad \text{für beliebiges } \vec{A} \\ \text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot} \left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \\ &= -\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{A}) \equiv \vec{0} \quad \text{für beliebiges } \phi \text{ und } \vec{A} \end{aligned} \quad (3)$$

Bestimmungsgleichungen der Potentiale

- Das Einsetzen der Gleichungen (2) in die inhomogenen Maxwellgleichungen (1) ergibt unter Nutzung der Identität $\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$ die Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\text{div} \left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho_V}{\epsilon_0} \rightarrow \boxed{\Delta \phi + \text{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\epsilon_0}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{rot} (\text{rot } \vec{A}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) &= \mu_0 \vec{J} \\ \rightarrow \boxed{\Delta \vec{A} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \text{grad} \left(\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \text{div } \vec{A} \right)} &\quad (5) \end{aligned}$$

- Störend ist hier die Verkopplung der beiden Gleichungen.
- Dies führt zur **Eichung**.

Eichtransformation – Eichinvarianz

- Wir betrachten eine bezüglich \vec{r} und t zweifach stetig differenzierbare Funktion $\psi = \psi(\vec{r}, t)$.
- Mit Hilfe dieser Funktion ψ definieren wir folgende **Eichtransformation**:

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi \quad (6)$$

- Mit der Transformation (6) ergibt sich sofort die **Eichinvarianz** der Felder:

$$\vec{B} \rightarrow \vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot } (\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } \psi}_{\equiv \vec{0}} = \vec{B} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \vec{E} \rightarrow \vec{E}' &= -\text{grad } \phi' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t} = -\text{grad} \left(\phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{A} + \text{grad } \psi) \\ &= -\text{grad } \phi + \text{grad } \frac{\partial \psi}{\partial t} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} \text{grad } \psi \\ &= -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{E} \end{aligned} \quad (8)$$

Divergenz des Vektorpotentials - einfache Fälle

- In den allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) für die Potentiale ϕ und \vec{A}

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

spielt $\operatorname{div} \vec{A}$ eine wichtige Rolle.

- Sei nun $\operatorname{div} \vec{A} = \alpha(\vec{r}, t)$ die tatsächliche Divergenz des Vektorpotentials \vec{A} . Gibt es dann für beliebiges $\beta(\vec{r}, t)$ eine durch ψ induzierte Eichtransformation, so dass $\operatorname{div} \vec{A}' = \beta(\vec{r}, t)$ ist?
- Man rechnet aus:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{A}' &= \operatorname{div} (\vec{A} + \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{div} \vec{A} + \Delta\psi \\ &= \alpha + \Delta\psi \stackrel{!}{=} \beta \end{aligned} \quad (9)$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta\psi = \beta - \alpha}$$

- Diese **Poisson-Gleichung** für ψ ist immer (und für jeden Zeitpunkt) lösbar.
- Die Lösung ist nicht eindeutig (Addition einer Lösung der Laplace-Gleichung)!
→ **Eichklasse**
- **Die Divergenz des Vektorpotentials $\operatorname{div} \vec{A}$ kann auf beliebige Werte gesetzt werden!**

Divergenz des Vektorpotentials – allgemeiner Fall

- Gerade gezeigt: Divergenz des Vektorpotentials kann auf beliebige Werte gesetzt werden.
- Was ist aber, wenn die Divergenz des Vektorpotentials auch eine **Funktion des Skalarpotentials** sein soll (\rightarrow Lorenz-Eichung, v-Eichung)?
- Sei $\text{div } \vec{A} = f(\vec{r}, t, \phi)$.
- Dann rechnet man

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}' &= \text{div } (\vec{A} + \text{grad } \psi) = \text{div } \vec{A} + \Delta \psi \stackrel{!}{=} f(\vec{r}, t, \phi') \\ &= f(\vec{r}, t, \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t})\end{aligned}\tag{10}$$

- Dies ist im allgemeinen keine Poisson-Gleichung!
- Die Bestimmungsgleichung ist erst bekannt, wenn eine konkrete Abhängigkeit von ϕ gefordert wird.
- Dann muss die Existenz von ψ gezeigt werden!

Coulomb-Eichung (Charles Augustin de Coulomb, 1786–1806)

- Unter **Coulomb-Eichung** versteht man eine Eichtransformation induziert durch ψ_C , so dass für das transformierte Vektorpotential \vec{A}_C gilt

$$\operatorname{div} \vec{A}_C = 0 \quad (11)$$

- Die allgemeinen Bestimmungsgleichungen (4, 5) der Potentiale vereinfachen sich dann zu

$$\boxed{\Delta \phi_C = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}} \quad \boxed{\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}} \quad (12)$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ϕ_C ergibt sich unmittelbar aus der Kenntnis der Greensche-Funktion des Laplace Operators zu

$$\boxed{\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'} \quad (13)$$

- Will man eine explizite Lösung für das Vektorpotential \vec{A}_C in Coulomb-Eichung angeben, muss man in der Bestimmungsgleichung (12) das Skalarpotential ϕ_C eliminieren.

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen

- Betrachte die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials \vec{A}_C :

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}$$

- **Helmholtz-Theorem:** Zerlegung eines Vektorfeldes $\vec{f}(\vec{r}, t)$ in einen longitudinalen, rotationsfreien Anteil $\vec{f}_l(\vec{r}, t) = \vec{\alpha}(\vec{r}, t)$ und einen transversalen, divergenzfreien Anteil $\vec{f}_t(\vec{r}, t) = \vec{\beta}(\vec{r}, t)$.

$$\vec{f}(\vec{r}, t) = \vec{\alpha}(\vec{r}, t) + \vec{\beta}(\vec{r}, t) \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{\alpha} = 0 \rightarrow \vec{\alpha} = -\text{grad } a \\ \text{div } \vec{\beta} = 0 \rightarrow \vec{\beta} = \text{rot } \vec{b} \end{cases} \quad (14)$$

Die Felder a und \vec{b} werden folgendermaßen berechnet (\rightarrow Greensche Funktion des Laplace-Operators!):

$$a = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad \vec{b} = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{f}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (15)$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Die Zerlegung (14) mit den Beziehungen (15) kann nun auf die Stromdichte \vec{J} angewendet werden:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_1(\vec{r}, t) = -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \\ \vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right) \end{cases} \quad (16)$$

- Betrachte erneut das Skalarpotential ϕ_C in Gleichung (13)

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

- Für die Zeitableitung folgt dann mit Hilfe der **Kontinuitätsgleichung**
 $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$

$$\frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\frac{\partial \rho_V(\vec{r}', t)}{\partial t}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\text{div}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (17)$$

Coulomb-Eichung: Entkoppeln der Gleichungen (...)

- Der Vergleich der longitudinalen Stromdichte in (16) mit der Zeitableitung des Skalarpotentials in Gleichung (17) liefert schließlich einen Ausdruck für den Gradienten der Zeitableitung des Skalarpotentials:

$$\text{grad} \frac{\partial \phi_C(\vec{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \quad (18)$$

- Die Bestimmungsgleichung (12) des Vektorpotentials in Coulombeichung

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t}$$

wird damit entkoppelt und stellt sich als Wellengleichung dar, wobei die rechte Seite durch den transversalen Anteil der Stromdichte bestimmt ist:

$$\Delta \vec{A}_C - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_C}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \text{grad} \frac{\partial \phi_C}{\partial t} = -\mu_0 (\vec{J} - \vec{J}_1) = -\mu_0 \vec{J}_t \quad (19)$$

- Die Lösung dieser Wellengleichung ist das **retardierte Vektorpotential** (→ Greensche Funktion des Wellenoperators)

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad \text{mit } t_{\text{ret}} = t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'| = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \quad (20)$$

Coulomb-Eichung: Zusammenfassung

- Beziehung Felder – Potentiale: $\vec{E} = -\text{grad } \phi_C - \frac{\partial \vec{A}_C}{\partial t}$, $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}_C$
- Eichfestlegung: $\text{div } \vec{A}_C = 0$
- Potentiale in Coulomb-Eichung:

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r', \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

- Für Probleme mit $\text{div } \vec{J} = 0$ ist $\vec{J}_t = \vec{J}$!
- Allgemein: $\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{r'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$
- Vektorpotential in Coulomb-Eichung ist retardiert mit Geschwindigkeit $c \rightarrow$ **kausal**
- Skalarpotential in Coulomb-Eichung ist instantan \rightarrow **nicht kausal**
- Kausalität der Felder ist über das Vektorpotential sichergestellt!

Lorenz-Eichung (Ludvig Valentin Lorenz, 1829–1891)

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

- Divergenz des Vektorpotentials kann beliebig gesetzt werden. → **Lorenz-Eichung**:

$$\operatorname{div} \vec{A}_L = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} \quad (21)$$

- Damit nehmen die Bestimmungsgleichungen jeweils sofort die Form von Wellengleichungen an:

$$\Delta \phi_L - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \phi_L}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \quad (22)$$
$$\Delta \vec{A}_L - \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{A}_L}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J}$$

- Retardierte (kausale) Lösungen mit $t_{\text{ret}} = t - \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} |\vec{r} - \vec{r}'| = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$:

$$\phi_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r', \quad \vec{A}_L(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (23)$$

Lorenz-Eichung: Bedingung immer erfüllbar?

- Lässt sich die **Eichbedingung** $\text{div } \vec{A}_L = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$ immer erfüllen?
- Annahme: $\text{div } \vec{A} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \neq 0$
- Eichtransformation: $\phi_L = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t}$ und $\vec{A}_L = \vec{A} + \text{grad } \psi$
- Einsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}\text{div } \vec{A}_L + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi_L}{\partial t} &= \text{div } \vec{A} + \Delta\psi + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \Delta\psi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\alpha \quad \rightarrow \text{Lösung existiert}\end{aligned}$$

- **Eichklasse**: $\psi \rightarrow \psi + \chi$ mit $\Delta\chi - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$, Lösung der homogenen Wellengleichung
- Auch diese (Eich-)Bedingung an die Divergenz des Vektorpotentials ist also immer erfüllbar!

v-Eichung

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}_C = 0$

$$\phi_C(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_C(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

$$\vec{J}_t(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{rot}_{\vec{r}'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \right)$$

Lorenz-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}_L = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_L}{\partial t}$

$$\phi_L(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$\vec{A}_L(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}$$

– Verallgemeinerung von Coulomb- und Lorenz-Eichung → **v-Eichung:**

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{A}_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}} \quad \text{für } v \neq 0 \quad (24)$$

- Offensichtlich sind Coulomb- und Lorenz-Eichung Spezialfälle der v-Eichung:
- $v \rightarrow \infty$: Coulomb-Eichung
- $v = c$: Lorenz-Eichung

Potentiale in v-Eichung

- Allgemein gelten die Gleichungen (4) und (5) als Bestimmungsgleichungen für die Potentiale:

$$\Delta\phi + \operatorname{div} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0}, \quad \Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left(\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \phi}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{A} \right)$$

- Mit der **Eichbedingung** $\operatorname{div} \vec{A}_v = -\frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$ folgt:

$$\begin{aligned} \Delta\phi_v - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi_v}{\partial t^2} &= -\frac{\rho_V}{\varepsilon_0} \\ \Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} \right) \\ &= -\mu_0 \vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \operatorname{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (25)$$

- Die Lösung für das Skalarpotential ist wieder ein retardiertes Potential, wobei jetzt aber $t_{\text{ret},v} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}$ ist:

$$\phi_v(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret},v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (26)$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung

- Wie bei Coulomb-Eichung: Aufteilung in transversale (divergenzfreie) und longitudinale (wirbelfreie) Stromdichte:

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_t \text{ mit } \begin{cases} \vec{J}_1(\vec{r}, t) = -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{r'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \\ \vec{J}_t(\vec{r}, t) = \text{rot} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{rot}_{r'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \end{cases}$$

- Mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$, Lösung des Skalarpotentials (26) und $\frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t_{\text{ret},v}} \frac{\partial t_{\text{ret},v}}{\partial t} = \frac{\partial \rho_V(t_{\text{ret},v})}{\partial t_{\text{ret},v}} = \frac{\partial \rho_V(t)}{\partial t}$:

$$\begin{aligned} \text{grad} \frac{\partial \phi_V}{\partial t}(\vec{r}, t) &= \text{grad} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho_V(\vec{r}', t_{\text{ret},v})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right) \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \text{grad} \left[-\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\text{div}_{r'} \vec{J}(\vec{r}', t)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \right] \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (27)$$

Lösung für das Vektorpotential in v-Eichung (...)

- Die Bestimmungsgleichung des Vektorpotentials war:

$$\Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \text{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$$

- Mit der gerade gefundenen Beziehung für $\text{grad} \frac{\partial \phi_v}{\partial t}$ folgt somit:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{A}_v - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}_v}{\partial t^2} &= -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}, t) + \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \\ &= -\mu_0 \left[\vec{J}_t(\vec{r}, t) + \vec{J}_1(\vec{r}, t) - \frac{1 - c^2/v^2}{c^2} \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \right] \\ &= -\mu_0 \left[\vec{J}_t(\vec{r}, t) + \frac{c^2}{v^2} \vec{J}_1(\vec{r}, t) \right] \end{aligned} \quad (28)$$

- Die Lösung ergibt sich wieder als retardierte Potential (mit Geschwindigkeit c):

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}:$$

$$\vec{A}_v(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{J}_t(\vec{r}', t_{\text{ret}}) + \frac{c^2}{v^2} \vec{J}_1(\vec{r}', t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' \quad (29)$$

v-Eichung: Eichfunktion $v_1 \rightarrow v_2$

- Nachdem Coulomb-Eichung ($v \rightarrow \infty$) und Lorenz-Eichung ($v = c$) als Spezialfälle der v-Eichung identifiziert wurden, lohnt es sich die Bestimmungsgleichung der Eichfunktion ψ zum Übergang von einer v_1 -Eichung zu einer v_2 -Eichung abzuleiten.
- Allgemein gilt für die Eichtransformation (6):

$$\phi \rightarrow \phi' = \phi - \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \psi$$

- Die Potentiale seien in v_1 -Eichung ($v_1 \neq 0$) bekannt. In v_1 -Eichung gilt:

$$\text{div } \vec{A}_{v_1} = -\frac{1}{v_1^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} \quad (30)$$

- Es gilt dann für $v_2 \neq 0$:

$$\begin{aligned} \text{div } \vec{A}_{v_2} &= \text{div } (\vec{A}_{v_1} + \text{grad } \psi) \stackrel{!}{=} -\frac{1}{v_2^2} \frac{\partial \phi_{v_2}}{\partial t} \\ &= -\frac{1}{v_1^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} + \Delta \psi = -\frac{1}{v_2^2} \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} + \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ \Rightarrow \Delta \psi - \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= \left(\frac{1}{v_1^2} - \frac{1}{v_2^2} \right) \frac{\partial \phi_{v_1}}{\partial t} \end{aligned} \quad (31)$$

- Dieses Handout steht unter der Lizenz CC BY 3.0 DE.
Details hierzu finden Sie unter <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/deed.de>.
- Diese Datei wurde erstellt am: 2024-05-16 14:36:55+02:00
Die jeweils neueste Version finden Sie hier im Ordner „Theoretische Elektrotechnik“:
<https://bildungsportal.sachsen.de/opal/auth/RepositoryEntry/27455913992/CourseNode/103138906469436>
- Wenn Sie einen Fehler entdecken, freue ich mich über einen kurzen Hinweis an
<mailto:tetemv@tu-dresden.de>!
- Das Video zu dieser Lerneinheit (und zu weiteren) finden Sie entweder auf dem Videocampus Sachsen
(<https://videocampus.sachsen.de/album/view/aid/287>) oder auf YouTube
(<https://www.youtube.com/c/TET4TUD>).