Maxwell Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\vec E = -\frac{\partial \vec B}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(A)} \vec E\cdot \mathrm{d}\vec s = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{A} \vec B \cdot \mathrm{d}\vec A$$

$$\mathrm{rot}\,\vec H = \vec J + \frac{\partial \vec D}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(A)} \vec H\cdot \mathrm{d}\vec s = \iint\limits_{A} \vec J \cdot \mathrm{d}\vec A + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{A} \vec D \cdot \mathrm{d}\vec A$$

$$\mathrm{div}\,\vec B = 0 \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec B\cdot \mathrm{d}\vec A = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec D = \rho_{\mathrm{V}} \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec D\cdot \mathrm{d}\vec A = \iiint\limits_{V} \rho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec D = \varepsilon_0 \vec E + \vec P \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec D = \varepsilon \vec E$$

$$\vec B = \mu_0\left(\vec H + \vec M\right) \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec B = \mu \vec H$$

Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\vec J = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} \quad \overset{\text{Gauss}}{\to} \quad \oiint\limits_{O(V)} \vec J\cdot \mathrm{d}\vec A = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec n$ von 1 nach 2 :

1 | 2

$\to \vec n$

$$\vec n \times \left(\vec E_2 - \vec E_1\right) = \vec 0$$

$$\vec n \cdot \left(\vec D_2 - \vec D_1\right) = \rho_{\mathrm{F}}$$

$$\vec n \times \left(\vec H_2 - \vec H_1\right) = \vec J_A$$

$$\vec n \cdot \left(\vec B_2 - \vec B_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x) U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität
$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn} c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int\limits_D U_n^\star(x')f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x')U_n(x) = \delta(x - x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\mathrm{rot}\,\vec E = \vec 0 \to \vec E = -\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{V}} \text{ Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\mathrm{d}^3 r'$$

Spannung an $\vec r_2$ bezogen auf $\vec r_1$

$$\mathrm{rot}\,\vec E = \vec 0 \to U_{21} = \phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1) = \int\limits_{\vec r_2}^{\vec r_1} \vec E \cdot \mathrm{d}\vec s \text{ wegunabhängig}$$

Kraft auf q, Arbeit $\vec r_1 \to \vec r_2$, Energie

$$\vec F = q\vec E \quad A = q\int\limits_{\vec r_2}^{\vec r_1} \vec E\cdot \mathrm{d}\vec s = q\left[\phi(\vec r_2) - \phi(\vec r_1)\right] = qU_{21}$$

$$w_{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}\vec E\cdot\vec D \quad W_{\mathrm{e}} = \tfrac{1}{2}\iiint\limits_V \vec E\cdot\vec D\,\mathrm{d}V$$

Dipol bei $\vec r\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec p\cdot(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}$$

$$\vec E_D(\vec r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec p\cdot(\vec r - \vec r\,')\right](\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^5} - \frac{\vec p}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\right]$$

$$\phi_D(\vec r) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\vec m\cdot(\vec r - \vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|^3}\mathrm{d}^3 r'$$

$$\vec F_D(\vec r) = (\vec p\cdot\nabla)\vec E(\vec r) = \mathrm{grad}\left(\vec p\cdot\vec E(\vec r)\right) \quad \vec M_D(\vec r)) = \vec p \times \vec E(\vec r)$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec r\,')}{|\vec r - \vec r\,'|}\mathrm{d}^3 r'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\frac{\partial\phi(\vec r\,')}{\partial n'} - \phi(\vec r\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|}\right]\mathrm{d}^2 r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec r, \vec r\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec r - \vec r\,')$

$G(\vec r, \vec r\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} + \Gamma(\vec r, \vec r\,')$
$\Delta\Gamma(\vec r, \vec r\,') = 0, \quad \Gamma(\vec r, \vec r\,') = \Gamma(\vec r\,', \vec r)$

$$\phi(\vec r) = \iiint\limits_V \rho_{\mathrm{V}}(\vec r\,')G(\vec r, \vec r\,')\mathrm{d}^3 r'$$

$$+\,\varepsilon\oiint\limits_{O(V)}\left[G(\vec r, \vec r\,')\frac{\partial\phi(\vec r\,')}{\partial n'} - \phi(\vec r\,')\frac{\partial G(\vec r, \vec r\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2 r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec r, \vec r\,') = 0$ für $\vec r\,' \in O(V)$
Neumann RB: $-\varepsilon \oiint\limits_{O(V)} \phi(\vec r\,')\frac{\partial G(\vec r, \vec r\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2 r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec n$ zeigt nach V

$$G(\vec r, \vec r\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} - \frac{1}{|\vec r - [\vec r\,' - 2\vec n(\vec n\cdot\vec r\,')]|}\right]$$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec 0)$

$$G(\vec r, \vec r\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec r - \vec r\,'|} - \frac{a}{|\vec r\,'|}\left(\frac{1}{\left|\vec r - \frac{a^2}{|\vec r\,'|^2}\vec r\,'\right|}\right)\right]$$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r:\ \text{Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}:\ \text{Winkelanteil}}$$

$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ Produktansatz
$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung
$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen
$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen
$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\phi(\vec r) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz
für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 Z$, $\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2 P$, $x = k\varrho$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)
für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -k^2 Z$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2 + \nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$

Stationäre Stromdichte, Strom

Allg.: $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho_{\mathrm{V}}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ Stationär: $\dfrac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} = 0$ und $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche: $I = \iint\limits_F \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$

$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa \vec{E}$ (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung

Eingeprägte elektrische Feldstärke $\vec{E}_E$:
$\oint\limits_C \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = U$ EMK, Urspannung
$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$
$\to \oint\limits_C \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_C \kappa \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \kappa U$ (Kichhoffscher Maschensatz)

Leistungsdichte

$p_{\mathrm{V}} = \vec{E} \cdot \vec{J}$, für dünne Leiter: $P = UI$ (Joulsches Gesetz)

magnetisches Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$
$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{J}(\vec{r})$

Eichtransformation

$\vec{A}\,'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \to \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$
Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$
$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$

Lösung in Coulomb Eichung

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}\vec{s}\,'$ (Stromfaden)

Biot-Savart

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{\text{Stromweg}} I \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times \mathrm{d}\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ (Stromfaden)