Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint_{C(A)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{A} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint_{C(A)} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_{A} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{A} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint_{O(V)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}} \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint_{O(V)} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_{V} \rho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} \quad \overset{\text{Gauss}}{\to} \quad \oiint_{O(V)} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\iiint_{V} \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec{n}$ von 1 nach 2 :

$$1 \quad | \quad 2 \qquad \to \vec{n}$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_{\mathrm{F}}$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x)U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität

$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn}c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int_D U_n^\star(x')f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x')U_n(x) = \delta(x - x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \to \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{V}} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_{V} \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

Spannung an $\vec{r}_2$ bezogen auf $\vec{r}_1$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \to U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \quad \text{wegunabhängig}$$

Kraft auf q, Arbeit $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$, Energie

$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = q\left[\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\right] = qU_{21}$

$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$

Dipol bei $\vec{r}\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\right](\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint_V \frac{\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \qquad \vec{M}_D(\vec{r})) = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,')$

$\Delta\Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = 0, \quad \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = \Gamma(\vec{r}\,',\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r'$$

$$+\,\varepsilon\oiint_{O(V)}\left[G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in O(V)$

Neumann RB: $-\varepsilon\oiint_{O(V)} \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec{n}$ zeigt nach V

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-[\vec{r}\,'-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')]|}\right]$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \lambda\frac{1}{|\vec{r}-\lambda^2\vec{r}\,'|}\right], \quad \lambda = \frac{a}{|\vec{r}\,'|}$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r\text{: Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}\text{: Winkelanteil}}$$

$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Produktansatz

$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung

$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen

$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen

$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\phi(\vec{r}) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz

für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 Z$, $\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2 P$, $x = k\varrho$

$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2-\nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)

für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -k^2 Z$

$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2+\nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$

Stationäre Stromdichte, Strom

Allg.: $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho_\mathrm{V}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ Stationär: $\frac{\partial \rho_\mathrm{V}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche: $I = \iint\limits_F \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$

$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint\limits_{O(V)} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa \vec{E}$ (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung

Eingeprägte elektrische Feldstärke $\vec{E}_E$:

$\oint\limits_C \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = U$ EMK, Urspannung

$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$

$\rightarrow \oint\limits_C \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_C \kappa \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \kappa U$ (Kichhoffscher Maschensatz)

Leistungsdichte

$p_\mathrm{V} = \vec{E} \cdot \vec{J}$, für dünne Leiter: $P = UI$ (Joulsches Gesetz)

magnetisches Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$

$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{J}(\vec{r})$

Eichtransformation

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$

Lösung in Coulomb Eichung

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}\vec{s}\,'$ (Stromfaden)

Biot-Savart

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oint\limits_{\text{Stromweg}} I \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times \mathrm{d}\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ (Stromfaden)

magnetische Energiedichte, Energie

$w_\mathrm{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left(\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \frac{1}{\mu} \operatorname{div} \left(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \right)$

$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{H}(\vec{r}\,') \cdot \vec{B}(\vec{r}\,') \mathrm{d}^3 r' = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \vec{A} \cdot \vec{J} \,\mathrm{d}V + \frac{1}{2\mu} \oiint\limits_{O(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$

$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$, $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot \iiint\limits_V \vec{A} \cdot \vec{J} \,\mathrm{d}V$ (endliche Stromverteilungen)