Maxwell Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\rightarrow} \oint_{C(A)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\rightarrow} \oint_{C(A)} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}} \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \rho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \overset{\text{hli}}{\rightarrow} \vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \overset{\text{hli}}{\rightarrow} \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\iiint_V \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec{n}$ von 1 nach 2:

1 | 2

$\to \vec{n}$

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0}$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_{\mathrm{F}}$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n} \cdot \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x) U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität

$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn} c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int_D U_n^\star(x') f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x') U_n(x) = \delta(x - x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{V}} \text{ Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

Spannung an $\vec{r}_2$ bezogen auf $\vec{r}_1$

$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \rightarrow U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}$ wegunabhängig

Kraft auf q, Arbeit $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$, Energie

$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = q\left[\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\right] = qU_{21}$

$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$

Dipol bei $\vec{r}\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec{p}\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')\right](\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint_V \frac{\vec{m}\cdot(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \qquad \vec{M}_D(\vec{r})) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' + \frac{1}{4\pi}\oiint_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$

$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + \Gamma(\vec{r}, \vec{r}\,')$

$\Delta\Gamma(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0, \quad \Gamma(\vec{r}, \vec{r}\,') = \Gamma(\vec{r}\,', \vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,') G(\vec{r}, \vec{r}\,')\mathrm{d}^3r' + \varepsilon\oiint_{O(V)}\left[G(\vec{r}, \vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r}, \vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in O(V)$

Neumann RB: $-\varepsilon\oiint_{O(V)} \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec{n}$ zeigt nach V

$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r} - [\vec{r}\,' - 2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')]|}\right]$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$G(\vec{r}, \vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} - \lambda\frac{1}{|\vec{r} - \lambda^2\vec{r}\,'|}\right], \quad \lambda = \frac{a}{|\vec{r}\,'|}$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r\text{: Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}\text{: Winkelanteil}}$$

$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ Produktansatz

$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung

$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen

$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1 - x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen

$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2 - 1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\phi(\vec{r}) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz

für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 Z, \ \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2 P, \ x = k\varrho$

$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)

für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -k^2 Z$

$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2 + \nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$

Stationäre Stromdichte, Strom

Allg.: $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho_V(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ Stationär: $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche: $I = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F}$

$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$ (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa \vec{E}$ (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung

Eingeprägte elektrische Feldstärke $\vec{E}_E$:

$\oint_C \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = U$ EMK, Urspannung

$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$

$\rightarrow \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_C \kappa \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = \kappa U$ (Kichhoffscher Maschensatz)

Leistungsdichte

$p_V = \vec{E} \cdot \vec{J}$, für dünne Leiter: $P = UI$ (Joulsches Gesetz)

magnetisches Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$

$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{J}(\vec{r})$

Eichtransformation

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$

Lösung in Coulomb Eichung

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d^3r'$ (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} d\vec{s}\,'$ (Stromfaden)

Biot-Savart

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3r'$ (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} I \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times d\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ (Stromfaden)

magnetische Energiedichte, Energie

$$w_m(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\left(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right)\right)$$

$$W_m = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{H}(\vec{r}\,') \cdot \vec{B}(\vec{r}\,') d^3r' = \frac{1}{2}\iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J}\, dV + \frac{1}{2\mu}\oiint_{O(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$w_m = \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{J}$, $W_m = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J}\, dV$ (endliche Stromverteilungen)

Induktivität

$M_{21} = \frac{\phi_{m,2}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1|}$

$L = M_{11} = \frac{\phi_m}{I} = \frac{1}{I} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{2}{I^2} W_m$

magnetisches Moment

$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r}\,' \times \vec{J}(\vec{r}\,')\, dV'$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m}(\vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} + \ldots,\qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m}(\vec{r}))\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(\vec{r})}{r^3}\right] + \ldots$

magnetisches Skalarpotential

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi_m(\vec{r})$

$\Delta \phi_m = \operatorname{div} \vec{M}$ für räumlich konstantes μ

Zeiger

$E(\vec{r},\, t) = \hat{E}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) = \mathfrak{Re}\left\{\hat{E}(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi)}\right\} = \mathfrak{Re}\left\{\underline{E}(\vec{r}) e^{j\omega t}\right\}$

EQS

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq \vec{0}$

$\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J}}_L + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K = \kappa \cdot \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K$

$\underline{\vec{E}} = -\operatorname{grad} \underline{\phi}$ komplexes Skalarpotential

$\Delta \underline{\phi} = \frac{1}{\kappa + j\omega\varepsilon} \operatorname{div} (\underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K)$ Poisson-Gleichung (komplex)

MQS

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$\underline{\vec{J}} = \underline{\vec{J}}_L + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K = \kappa \cdot \underline{\vec{E}} + \underline{\vec{J}}_E + \underline{\vec{J}}_K$

Homogene Diffusionsgleichung:

$\Delta \Psi(\vec{r},t) - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = 0 \quad \Delta \underline{\Psi}(\vec{r},t) - j\omega\mu\kappa \underline{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

Eindringtiefe: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$

Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_A = \frac{1+j}{\kappa\delta} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\kappa}}$

Oberflächenwiderstand: $R_A = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \frac{1}{\kappa\delta}$

Verlustleistung: $P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \iiint_V \frac{1}{\kappa} \left|\vec{J}\right|^2 dV$

$\langle P \rangle_T = A \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} e^{-2\frac{x}{\delta}} dx = A \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta$

Induktion:

$U_{\text{ind}} = \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$

$U_{\text{ind}} = \oint_{C(A(t))} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$

SRT: System S' bewegt sich mit $\vec{v}$ relativ zum System S ($v \ll c$):

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \qquad \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp$$