Maxwell Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\rightarrow} \oint_{C(A)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\rightarrow} \oint_{C(A)} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint_A \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_\mathrm{V} \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = \iiint_V \rho_\mathrm{V}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \overset{\text{hli}}{\rightarrow} \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad \overset{\text{hli}}{\rightarrow} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial\rho_\mathrm{V}}{\partial t} \quad \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \quad \oiint_{O(V)} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -\iiint_V \frac{\partial\rho_\mathrm{V}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec{n}$ von ① nach ② :

① | ② $\rightarrow \vec{n}$

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_\mathrm{F}$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x)U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität

$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn}c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int\limits_D U_n^\star(x')f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x')U_n(x) = \delta(x-x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_\mathrm{V} \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_\mathrm{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

Spannung an $\vec{r}_2$ bezogen auf $\vec{r}_1$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \rightarrow U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \quad \text{wegunabhängig}$$

Kraft auf q, Arbeit $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$, Energie

$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q\int\limits_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = q\left[\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\right] = qU_{21}$

$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad W_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$

Dipol bei $\vec{r}\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$\phi_D(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$

$\vec{E}_D(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\right](\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$

$\phi_D(\vec{r}) = \dfrac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint\limits_V \frac{\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$

$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \quad \vec{M}_D(\vec{r})) = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V \frac{\rho_\mathrm{V}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,')$

$\Delta\Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = 0, \quad \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = \Gamma(\vec{r}\,',\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \rho_\mathrm{V}(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r'$$

$$+\,\varepsilon\oiint_{O(V)}\left[G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in O(V)$

Neumann RB: $-\varepsilon\oiint\limits_{O(V)}\phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec{n}$ zeigt nach V

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-[\vec{r}\,'-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')]|}\right]$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{a}{|\vec{r}\,'|}\left(\frac{1}{\left|\vec{r}-\frac{a^2}{|\vec{r}\,'|^2}\vec{r}\,'\right|}\right)\right]$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r\text{: Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}\text{: Winkelanteil}}$$

$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Produktansatz

$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung

$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen

$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen

$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$\phi(\vec{r}) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz

$\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = k^2Z, \ \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2P, \ x = k\varrho$

$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2-\nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$