

**Maxwell Gleichungen**

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_{C(F)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_F \vec{B} \cdot d\vec{F}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_{C(F)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F} + \frac{d}{dt} \iint_F \vec{D} \cdot d\vec{F}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{F} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_V \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{F} = \iiint_V \rho_V dV$$

**Material Gleichungen**

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \xrightarrow{\text{hli}} \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \xrightarrow{\text{hli}} \vec{B} = \mu \vec{H}$$

**Kontinuitätsgleichung**

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{F} = -\iiint_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV$$

**Stetigkeitsbedingungen**

Für Normalenvektor  $\vec{n}$  von ① nach ②:

①		②	$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$
	→	$\vec{n}$	$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_F$
		$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_A$	
		$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$	

**Orthogonalität, Orthonormalität**  $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$ 

$$\langle U_m, U_n \rangle = \int_D U_m^*(x) U_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{Orthonormalität}$$

$$\langle U_m, U_n \rangle = \delta_{mn} c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0, 1\} \quad \text{Orthogonalität}$$

**Vollständiges Funktionensystem**  $U_n(x)$ 

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x) \quad \text{mit } c_n = \int_D U_n^*(x') f(x') dx' \quad (\text{Entwicklung})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x - x') \quad (\text{Vollständigkeitsrelation})$$

**Elektrisches Skalarpotential**

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_V \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

**Coulomb-Integral**

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

**Spannung an  $\vec{r}_2$  bezogen auf  $\vec{r}_1$** 

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{wegunabhängig}$$

**Kraft auf  $q$ , Arbeit  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ , Energie**

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q [\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)] = qU_{21}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

**Dipol bei  $\vec{r}'$ , Dipoldichte, Kraft, Drehmoment**

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{3[\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')](\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})) \quad \vec{M}_D(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

**Skalarpotential mit Randwerten auf  $O(V)$** 

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oiint_{O(V)} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^2r'$$

**Konstanten**

$$\epsilon_0 = 8.8541878128(13) \times 10^{-12} \text{ As V}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\mu_0 = 1.25663706212(19) \times 10^{-6} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$\simeq 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Vs A}^{-1} \text{ m}^{-1}$$

$$c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 299792458 \text{ m s}^{-1} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

$$Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} = 3.76730313667(57) \times 10^2 \Omega \simeq 120 \pi \Omega$$

**Greensche Funktionen von  $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$** 

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\Delta \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \Gamma(\vec{r}', \vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3r' + \epsilon \oiint_{O(V)} \left[ G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2r'$$

Dirichlet RB:  $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$  für  $\vec{r}' \in O(V)$

Neumann RB:  $-\epsilon \oiint_{O(V)} \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2r' = \phi_0$

**Halbraum durch geerdete Ebene. Normale  $\vec{n}$  zeigt nach  $V$** 

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - [\vec{r}' - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}')] ]|} \right]$$

**geerdete Kugeloberfläche  $K_a(\vec{0})$** 

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \lambda \frac{1}{|\vec{r} - \lambda^2 \vec{r}'|} \right], \quad \lambda = \frac{a}{|\vec{r}'|}$$

**Separation,  $\Delta \phi = 0$ , Kugelkoordinaten**

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\Delta_r: \text{Radialanteil}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left( \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}: \text{Winkelanteil}}$$

$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$  Produktansatz

$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$  Radiallösung

$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{jm\varphi}$  Kugelflächenfunktionen

$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$  zugeord. Legendrefunktionen

$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l}$  Legendre Polynome

**Separation,  $\Delta \phi = 0$ , Zylinderkoordinaten**

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\phi(\vec{r}) = R(\varrho) \cdot P(\varphi) \cdot Z(z)$  Produktansatz

für:  $\frac{d^2 Z}{dz^2} = +k^2 Z$ ,  $\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = -\nu^2 P$ ,  $x = k\varrho$

$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2) R = 0$  Bessel-DGL, Ordnung  $\nu$

Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art  $J_\nu(x)$  und 2. Art  $Y_\nu(x)$  (Weber, Neumann)

für:  $\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 Z$

$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + \nu^2) R = 0$  mod. Bessel-DGL, Ordnung  $\nu$

Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art  $I_\nu(x)$  und 2. Art  $K_\nu(x)$

**Stationäre Stromdichte, Strom**

Allg.:  $\vec{J}(\vec{r}, t) = \rho_V(\vec{r}, t) \vec{v}(\vec{r}, t)$  Stationär:  $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$  und  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche:  $I = \iint_F \vec{J} \cdot d\vec{F}$

$\text{div } \vec{J} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \oint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = 0$  (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa \vec{E}$  (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

**Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung**

Eingeprägte elektrische Feldstärke  $\vec{E}_E$ :

$\oint_C \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = U$  EMK, Urspannung

$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$

$\rightarrow \oint_C \vec{J} \cdot d\vec{s} = \oint_C \kappa \vec{E}_E \cdot d\vec{s} = \kappa U$  (Kichhoffscher Maschensatz)

**Leistungsdichte**

$p_V = \vec{E} \cdot \vec{J}$ , für dünne Leiter:  $P = UI$  (Joulesches Gesetz)

**magnetisches Vektorpotential**

$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r})$

$\text{grad div } \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{J}(\vec{r})$

**Eichtransformation**

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } \psi(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Coulomb-Eichung:  $\text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$

**Lösung in Coulomb Eichung**

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$  (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{s}'$  (Stromfaden)

**Biot-Savart**

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r'$  (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} \frac{I (\vec{r} - \vec{r}') \times d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$  (Stromfaden)

**magnetische Energiedichte, Energie**

$w_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \left( \vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \frac{1}{\mu} \text{div} \left( \vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) \right) \right)$

$W_m = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}(\vec{r}') \cdot \vec{B}(\vec{r}') d^3r' = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV + \frac{1}{2\mu} \oint_{O(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot d\vec{F}$

$w_m = \frac{1}{2} \vec{A} \cdot \vec{J}$ ,  $W_m = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} dV$  (endliche Stromverteilungen)

**Induktivität**

$M_{21} = \frac{\phi_{m,2}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}'_2 - \vec{r}'_1|}$

$L = M_{11} = \frac{\phi_m}{I} = \frac{1}{I} \iiint_F \vec{B} \cdot d\vec{F} = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{2}{I^2} W_m$

**magnetisches Moment**

$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dV'$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m}(\vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} + \dots$ ,  $\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \left[ \frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m}(\vec{r}))\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(\vec{r})}{r^3} \right] + \dots$

**magnetisches Skalarpotential**

$\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\text{grad } \phi_m(\vec{r})$

$\Delta \phi_m = \text{div } \vec{M}$  für räumlich konstantes  $\mu$

**Zeiger**

$E(\vec{r}, t) = \hat{E}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) = \Re \left\{ \hat{E}(\vec{r}) e^{j(\omega t + \varphi)} \right\} = \Re \left\{ \underline{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\}$

**EQS**

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$  und  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E + \vec{J}_K = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_E + \vec{J}_K$

$\vec{E} = -\text{grad } \phi$  komplexes Skalarpotential

$\Delta \phi = \frac{1}{\kappa + j\omega\epsilon} \text{div}(\vec{J}_E + \vec{J}_K)$  Poisson-Gleichung (komplex)

**MQS**

$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$  und  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_E + \vec{J}_K = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_E + \vec{J}_K$

Homogene Diffusionsgleichung:

$\Delta \Psi(\vec{r}, t) - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = 0$   $\Delta \Psi(\vec{r}, t) - j\omega \mu \kappa \Psi(\vec{r}, t) = 0$

Eindringtiefe:  $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}}$

Oberflächenimpedanz:  $\underline{Z}_A = \frac{1+j}{\kappa \delta} = (1+j) \sqrt{\frac{\omega \mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu}{\kappa}}$

Oberflächenwiderstand:  $R_A = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\kappa}} = \frac{1}{\kappa \delta}$

Verlustleistung:  $P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \iiint_V \frac{1}{\kappa} |\vec{J}|^2 dV$

$\langle P \rangle_T = A \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} e^{-2\frac{x}{\delta}} dx = A \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta$

Induktion:

$U_{\text{ind}} = \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$

$U_{\text{ind}} = \oint_{C(A(t))} (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_{A(t)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = -\dot{\Phi}$

SRT: System S' bewegt sich mit  $\vec{v}$  relativ zum System S ( $v \ll c$ ):

$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel}$

$\vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$

$\vec{E}'_{\perp} = \vec{E}_{\perp} + \vec{v} \times \vec{B}$

$\vec{B}'_{\perp} = \vec{B}_{\perp}$

**Energieerhaltung, Poyntingscher Vektor**

Poynting-Vektor:  $\vec{S}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}, t) \times \vec{H}(\vec{r}, t)$

$\frac{\partial w_{\text{mech}}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \vec{J} = -\text{div } \vec{S} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  (allgemein)

$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\text{div } \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right] = -\text{div } \vec{S} - \frac{\partial w_{\text{em}}}{\partial t}$  (lhi)

$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_{\text{mech}} + w_{\text{em}}) dV = - \oint_{O(V)} \vec{S} \cdot d\vec{F}$  (lhi)

harmonische Zeitabhängigkeit:

$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \left\{ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} \right\} = \frac{1}{2} \left[ \underline{\vec{E}}(\vec{r}) e^{j\omega t} + \underline{\vec{E}}^*(\vec{r}) e^{-j\omega t} \right]$

$w_e = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}} e^{j2\omega t} \right\} + \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right\} \stackrel{\epsilon \in \mathbb{R}}{=} \dots + \frac{1}{4} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*$

$w_m = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}} e^{j2\omega t} \right\} + \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^* \right\} \stackrel{\mu \in \mathbb{R}}{=} \dots + \frac{1}{4} \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^*$

$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^* \right\} \stackrel{\epsilon \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{4} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^*$

$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4} \Re \left\{ \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^* \right\} \stackrel{\mu \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{4} \underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^*$

$\langle p_V \rangle = \frac{1}{2} \Re \left\{ \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^* \right\} \stackrel{\kappa \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^*$

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} \underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^*$   $\langle \vec{S} \rangle = \Re \left\{ \underline{\vec{S}} \right\}$  komplexer Poynting Vektor

$\Re \left\{ \text{div } \underline{\vec{S}} \right\} + \langle p_V \rangle = 0$   $\Im \left\{ \text{div } \underline{\vec{S}} \right\} + 2\omega (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) = 0$

$\oint_{O(V)} \underline{\vec{S}} \cdot d\vec{A} + \iiint_V \langle p_V \rangle dV + j2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) dV = 0$

$\langle P_V \rangle = \iiint_V \langle p_V \rangle dV = - \oint_{O(V)} \Re \left\{ \underline{\vec{S}} \right\} \cdot d\vec{A}$  (Wirkleistung)

$2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) dV = - \oint_{O(V)} \Im \left\{ \underline{\vec{S}} \right\} \cdot d\vec{A}$  (Blindleistung)

**Kraft, Spannungstensor, Impuls**

$\vec{p}_V^{\text{em}} = \epsilon \mu \vec{S}$ ,  $\vec{p}^{\text{em}} = \iiint_V \epsilon \mu \vec{S} dV$

$\mathbf{T} = (T_{ij})$  mit  $T_{ij} = \epsilon \left[ E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{E}|^2 \right] + \frac{1}{\mu} \left[ B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} |\vec{B}|^2 \right]$

$\vec{f} = \text{div } \mathbf{T} - \epsilon \mu \frac{d\vec{S}}{dt}$

$\vec{F} = \oint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot d\vec{A} - \epsilon \mu \frac{d}{dt} \iiint_V \vec{S} dV$

$\frac{d}{dt} (\vec{p}_V^{\text{mech}} + \vec{p}_V^{\text{em}}) = \text{div } \mathbf{T}$  (lokale Impulsbilanz)

$\frac{d}{dt} \iiint_V (\vec{p}_V^{\text{mech}} + \vec{p}_V^{\text{em}}) dV = \oint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot d\vec{A}$  (integrale Impulsbilanz)

**Wellengleichung der Felder**

$\Delta \vec{E} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \text{grad } \frac{\rho_V}{\epsilon} + \mu \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$ ,  $\Delta \vec{H} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\text{rot } \vec{J}$

**Potentiale und Eichtransformationen**

$\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ ,  $\vec{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\Delta \phi + \frac{\partial}{\partial t} \text{div } \vec{A} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$ ,  $\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \text{grad} \left[ \text{div } \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] = -\mu \vec{J}$

Eichtransformation:  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda$ ,  $\phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$

LE:  $\text{div } \vec{A} = -\epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t}$ ,  $\Delta \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_V}{\epsilon}$ ,  $\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$

CE:  $\text{div } \vec{A} = 0$ ,  $\rho_V = 0 \Rightarrow \phi = 0$  und  $\Delta \vec{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}$

**Ausbreitungsgeschwindigkeit**

$v_c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0 \sqrt{\epsilon_r \mu_r}}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$ ,  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$

**Homogene Wellengleichung, Ebene Wellen bezgl.  $\vec{e}_k$** 

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = \Delta \Psi(\vec{r}, t) - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = 0$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \sum_{\omega} \left( \Psi_+(\omega t + \vec{k} \cdot \vec{r}) + \Psi_-(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right), \quad \vec{k} = \frac{\omega}{v_c} \vec{e}_k$$

$$\text{Phasengeschwindigkeit: } v_p = \frac{\omega}{k}$$

**Harmonische ebene Wellen**

$$\Psi(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \Psi(\vec{r}, t) = \Re \{ \underline{\Psi}(\vec{r}, t) \}$$

$$\text{Wellenlänge: } \lambda = \frac{2\pi}{k}, \text{ Frequenz: } f = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ Periode: } T = 1/f$$

$$\text{Geschwindigkeiten: } v_p = f \cdot \lambda = v_c = \frac{\omega}{k} \text{ (für } \varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0 \text{)}$$

Hinlaufende (-) und rücklaufende (+) Welle:

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t \mp \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{\vec{B}} = \pm \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \underline{\vec{E}} = \pm \frac{1}{v_p} \vec{e}_k \times \underline{\vec{E}}, \quad \underline{\vec{E}} = \mp \frac{v_p^2}{\omega} \vec{k} \times \underline{\vec{B}} = \mp v_p \vec{e}_k \times \underline{\vec{B}}, \text{ TEM}$$

$$\frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{B}}|} = v_p = v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \mu v_p = \mu v_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z \text{ (Impedanz)}$$

**Polarisation ebene Wellen**

Betrachte Propagation in +z-Richtung:

$$\underline{\vec{E}} = (E_{0x} \vec{e}_x + E_{0y} \vec{e}_y) e^{i(\omega t - kz)}, \quad \underline{\vec{B}} = \frac{1}{v_p} \vec{e}_z \times \underline{\vec{E}}$$

$$E_{0x} = |E_{0x}| \cdot e^{i\varphi_x}, \quad E_{0y} = |E_{0y}| \cdot e^{i(\varphi_y + \delta)}$$

**Lineare Polarisation:**  $\delta = m\pi, m \in \mathbb{Z}$

$$\text{Pol.-winkel: } \tan \alpha = \pm \frac{|E_{0y}|}{|E_{0x}|}, \quad +: \delta = 2m\pi, \quad -: \delta = (2m+1)\pi$$

**Zirkulare Polarisation:**  $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}, |E_{0x}| = |E_{0y}|$

rechts:  $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$ , links:  $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

**Elliptische Polarisation:**  $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}, |E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

rechts:  $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$ , links:  $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

Hauptachsen sind die Koordinatenachsen

$\delta$  beliebig und  $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$ : elliptisch, Achsen gedreht

**Wellenpaket, harmonisch, +z-Richtung**

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underline{A}(k) e^{i(\omega t - kz)} dk, \quad \underline{A}(-k) = \underline{A}^*(k), \text{ oft: } \underline{A}(k) = A(k)$$

konzentriert um  $k_0$ :  $A(k) \ll A(k_0)$  für  $|k - k_0| \gg \text{Breite von } A$

$$\rightarrow \omega(k) \cong \omega_0 + v_g(k - k_0), \quad \omega_0 = \omega(k_0), \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

$$\Psi(\vec{r}, t) \cong \int_{-\infty}^{\infty} A(k_0 + q) e^{iq(v_g t - z)} dq e^{i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ = H(v_g t - z) e^{i(\omega_0 t - k_0 z)}$$

**Kugelwellen**

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = 0 \text{ mit } \Psi(\vec{r}, t) = \Psi(r, t) \rightarrow \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{v_c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (r\Psi) = 0$$

$r\Psi$  wie ebene Wellen in 1D, ein- und auslaufende Kugelwellen lokal wieder TEM

**TE und TM Wellen**

z.B. Überlagerung von TEM-Wellen unterschiedlicher  $\vec{e}_{k_i}$

TM: nur  $\underline{\vec{B}} \perp \vec{e}_k$ , TE: nur  $\underline{\vec{E}} \perp \vec{e}_k$ ;  $v_p \geq v_c$

**Homogene Wellengleichung mit Anfangswerten**

$$\square \Psi(\vec{r}, t) = 0 \text{ mit } \Psi(\vec{r}, t=0) = \Psi_0(\vec{r}), \quad \left. \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(\vec{r})$$

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \tilde{\Psi}_0(\vec{k}) \cos(k v_c t) + \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) \frac{\sin(k v_c t)}{k v_c} \right] e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n k$$

$$\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n r, \quad \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} \dot{\Psi}_0(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} d^n r$$

Kirchhoffsche Lösung (n=3):

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{t}{4\pi R^2(t)} \iint_{O(K_{R(t)})} \Psi_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2 r' \right] \\ + \left[ \frac{t}{4\pi R^2(t)} \iint_{O(K_{R(t)})} \dot{\Psi}_0(\vec{r} + \vec{r}') d^2 r' \right]$$

d'Alembertsche Lösung (n=1):

$$\Psi(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \Psi_0(z + v_c t) + \frac{1}{2} \Psi_0(z - v_c t) + \frac{1}{2v_c} \int_{z-v_c t}^{z+v_c t} \dot{\Psi}_0(u) du$$

**EM-Wellen: Energie und Impuls**

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \underline{\vec{B}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \times \underline{\vec{E}}$$

$$\langle w_{em}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon |\underline{\vec{E}}_0|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu} |\underline{\vec{B}}_0|^2$$

$$\langle \vec{S}(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} |\underline{\vec{E}}_0|^2 \vec{e}_k = v_p \langle w_{em} \rangle \vec{e}_k = \frac{1}{2} \frac{1}{Z} |\underline{\vec{E}}_0|^2 \vec{e}_k$$

$$\langle \vec{p}_V^m \rangle = \varepsilon \mu \langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{v_c^2} v_p \langle w_{em} \rangle \vec{e}_k = \frac{1}{v_c} \langle w_{em} \rangle \vec{e}_k$$

**EM-Wellen: leitfähige Medien**

$$\kappa \neq 0 \rightarrow \vec{J} = \kappa \vec{E}$$

Telegraphen-Gleichungen:

$$\left[ \Delta - \varepsilon \mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = \left[ \square - \mu \kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{0}; \vec{B} \text{ analog}$$

harmonische Zeitabhängigkeit:  $\left[ \Delta + \omega^2 \varepsilon \mu - j\omega \mu \kappa \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$

entspricht Wellengleichung mit komplexen Größen:

$$\left[ \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_r \mu_r \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \left[ \Delta + \frac{\omega^2}{v_c^2} \right] \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = 0$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r + j\varepsilon''_r = \varepsilon_r - j \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \omega} = |\varepsilon_r| e^{j\varphi}; \quad |\varepsilon_r| = \sqrt{\varepsilon_r'^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2 \omega^2}}$$

$$\tan \varphi = -\frac{\kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega}; \quad v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}}$$

$$\text{Lösung: } \underline{\Psi}(\vec{r}, t) = \underline{\Psi}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{v_c} \vec{e}_k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \vec{e}_k = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \vec{e}_k = \frac{\omega}{c} n \vec{e}_k \text{ komp. Wellenvek.}$$

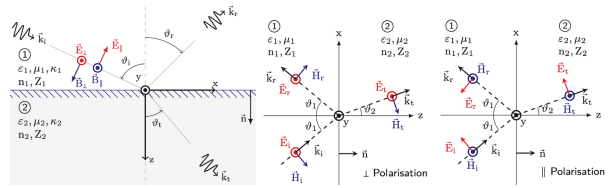
$$n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} = n' - j\gamma \text{ Kompl. Brech.-Index mit}$$

$$n' = n \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \right)^2}}, \quad \gamma = n \sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \left( \frac{\kappa}{\varepsilon_0 \varepsilon_r \omega} \right)^2}}$$

Feldlösungen:

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r}, t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{\omega}{c} \gamma \vec{e}_k \cdot \vec{r}} e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} n' \vec{e}_k \cdot \vec{r})} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k'' \vec{e}_k \cdot \vec{r}} e^{j(\omega t - k' \vec{e}_k \cdot \vec{r})}$$

$$\underline{\vec{B}} = \frac{k}{\omega} \vec{e}_k \times \underline{\vec{E}} = \frac{1}{c} (n' - j\gamma) \vec{e}_k \times \underline{\vec{E}} \text{ TEM, nicht in Phase}$$

**EM-Wellen: Reflexion und Brechung**

Reflexionsgesetz:  $\theta_i = \theta_r = \theta_1$

Brechungsgesetz (Snellius):  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$  mit  $\theta_2 = \theta_t$

Reflexions- und Transmissionskoeff.:  $r = \frac{E_{0r}}{E_{0i}}, \quad t = \frac{E_{0t}}{E_{0i}}$

$$r_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_1 - Z_1 \cos \theta_2}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}, \quad 1 + r_{\perp} = t_{\perp} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_1 \cos \theta_2 + Z_2 \cos \theta_1}$$

$$r_{\parallel} = \frac{Z_1 \cos \theta_1 - Z_2 \cos \theta_2}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}, \quad \frac{Z_2}{Z_1} (1 + r_{\parallel}) = t_{\parallel} = \frac{2 Z_2 \cos \theta_1}{Z_2 \cos \theta_2 + Z_1 \cos \theta_1}$$

Übergang Luft - Metall:  $r_{\perp} \simeq -1, t_{\perp} \simeq 0, r_{\parallel} \simeq +1, t_{\parallel} \simeq 0$  mit  $n$ :

$$r_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_2}, \quad t_{\perp} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_2}$$

$$r_{\parallel} = \frac{-n_1 \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_1}, \quad t_{\parallel} = \frac{2 n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2} n_2 \cos \theta_1}$$

mit  $\mu_1 = \mu_2$ :

$$r_{\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_{\perp} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$r_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)}, \quad t_{\parallel} = \frac{2 \sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Brewster-Winkel:  $r_{\parallel} = 0$  für  $\theta_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{k}_r \perp \vec{k}_t, \tan \theta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

Totalreflexion ( $n_1 > n_2$ ):  $\sin \theta_{1G} = \frac{n_2}{n_1}$

Feld im Medium 2 bei Totalreflexion:

$$\underline{\vec{E}}_t = t \underline{E}_{0i} e^{-\alpha z} e^{i(\omega t - \beta x)} \underline{\vec{e}}_E \text{ evaneszenter Mode}$$

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2 Z_2 k_2} |t \underline{E}_{0i}|^2 e^{-2\alpha z} (\beta \vec{e}_x + j\alpha \vec{e}_z)$$

$$\alpha = k_2 \sqrt{\left( \frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1 - 1}, \quad \beta = k_2 \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_1$$

**Retardierte Greensche Funktion und Potentiale**

$$G_{\text{ret}}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta(t' - t_{\text{ret}})}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad t_{\text{ret}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c}$$

In Lorenz-Eichung:

$$\phi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi \varepsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}', t - t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - t_{\text{ret}})}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Lsg. außerhalb Quellgebiet, harm. Anregung:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{J}(\vec{r}') d^3 r' \rightarrow \text{Nah- und Fernzone}$$

**Linearantennen**

LE, harm. Anregung, dünner Leiter, Länge  $\ell$ , z.B. z-Richtung:

$$\vec{J}(\vec{r}') d^3 r' = \underline{I}(\vec{r}') \vec{e}_z dz'$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \underline{I}(\vec{r}') \vec{e}_z dz'$$

$$\text{Allg.: } d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left( d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + jk \right) \frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\text{Fernfeld: } d\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jk}{4\pi} \underline{I}(\vec{r}') \left( d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r} \right) \frac{e^{-jk r}}{r} e^{jk \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r}}$$

**Hertzscher Dipol, am Ursprung, in  $z$ -Richtung**

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I\ell e^{-jkr}}{r} \vec{e}_z = \underline{A}_z \vec{e}_z$$

in Kugelkoordinaten:

$$\underline{A}_r = \frac{\mu}{4\pi} \frac{I\ell e^{-jkr}}{r} \cos \vartheta, \underline{A}_\vartheta = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{I\ell e^{-jkr}}{r} \sin \vartheta, \underline{A}_\varphi = 0$$

$$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} I\ell e^{-jkr} \sin \vartheta \left[ \frac{1}{(kr)^2} + \frac{j}{kr} \right] \vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\vec{E}} = \left\{ \frac{1}{2\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} I\ell e^{-jkr} \cos \vartheta \left[ \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \vec{e}_r + \left\{ \frac{1}{4\pi} Z \frac{\omega^2}{v_p^2} I\ell e^{-jkr} \sin \vartheta \left[ \frac{j}{kr} + \frac{1}{(kr)^2} - \frac{j}{(kr)^3} \right] \right\} \vec{e}_\vartheta$$

Fernfeld  $kr \gg 1$ :

$$\underline{\vec{H}} = \underline{H}_\varphi \vec{e}_\varphi = \frac{j}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} I\ell \frac{e^{-jkr}}{kr} \sin \vartheta \vec{e}_\varphi$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_\vartheta \vec{e}_\vartheta = Z \underline{H}_\varphi \vec{e}_\vartheta, Z = \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{\omega\varepsilon}$$

$$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2} Z \left( \frac{1}{4\pi} \frac{\omega^2}{v_p^2} \frac{|I|\ell}{kr} \right)^2 (\sin \vartheta)^2 \vec{e}_r = S_r(r, \vartheta) \vec{e}_r = \langle \vec{S} \rangle$$

$$D(\vartheta, \varphi) = \frac{S_r(r, \vartheta, \varphi)}{P_{\text{iso}}} = \frac{3}{2} \sin^2 \vartheta; D_{\text{max}} = D(\vartheta = \frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$$