Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(F)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{F} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(F)} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{F} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{F} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{F} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = 0$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}} \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = \iiint\limits_{V} \rho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\operatorname{div}\vec{J} = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} \quad \overset{\text{Gauss}}{\to} \quad \oiint\limits_{O(V)} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec{n}$ von (1) nach (2) :

(1) | (2)

$\to \vec{n}$

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_{\mathrm{F}}$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x)U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität
$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn}c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int\limits_D U_n^\star(x')f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x')U_n(x) = \delta(x - x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \to \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{V}} \text{ Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{V} \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

Spannung an $\vec{r}_2$ bezogen auf $\vec{r}_1$

$$\operatorname{rot}\vec{E} = \vec{0} \to U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int\limits_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \quad \text{wegunabhängig}$$

Kraft auf q, Arbeit $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$, Energie

$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q\int\limits_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = q\left[\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\right] = qU_{21}$

$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V} \vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$

Dipol bei $\vec{r}\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\right](\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint\limits_{V} \frac{\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \operatorname{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \quad \vec{M}_D(\vec{r})) = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{V} \frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r' + \frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,')$
$\Delta\Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = 0, \quad \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = \Gamma(\vec{r}\,',\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint\limits_{V} \rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r' + \varepsilon\oiint\limits_{O(V)}\left[G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in O(V)$
Neumann RB: $-\varepsilon\oiint\limits_{O(V)} \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec{n}$ zeigt nach V

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-[\vec{r}\,'-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')]|}\right]$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \lambda\frac{1}{|\vec{r}-\lambda^2\vec{r}\,'|}\right], \quad \lambda = \frac{a}{|\vec{r}\,'|}$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r:\ \text{Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}:\ \text{Winkelanteil}}$$

$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Produktansatz
$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung
$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen
$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen
$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\phi(\vec{r}) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz
für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2 Z$, $\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2 P$, $x = k\varrho$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2 - \nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)
für: $\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}z^2} = -k^2 Z$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2 + \nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$

Stationäre Stromdichte, Strom

Allg.: $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho_\mathrm{V}(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ Stationär: $\frac{\partial \rho_\mathrm{V}}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche: $I = \iint\limits_F \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{F}$

$\operatorname{div}\vec{J} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint\limits_{O(V)} \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = 0$ (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa\vec{E}$ (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung

Eingeprägte elektrische Feldstärke $\vec{E}_E$:

$\oint\limits_C \vec{E}_E\cdot\mathrm{d}\vec{s} = U$ EMK, Urspannung

$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$

$\rightarrow \oint\limits_C \vec{J}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \oint\limits_C \kappa\vec{E}_E\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \kappa U$ (Kichhoffscher Maschensatz)

Leistungsdichte

$p_\mathrm{V} = \vec{E}\cdot\vec{J}$, für dünne Leiter: $P = UI$ (Joulsches Gesetz)

magnetisches Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot}\vec{A}(\vec{r})$

$\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) - \Delta\vec{A}(\vec{r}) = \mu\vec{J}(\vec{r})$

Eichtransformation

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad}\psi(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div}\vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\Delta\vec{A}(\vec{r}) = -\mu\vec{J}(\vec{r})$

Lösung in Coulomb Eichung

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$ (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}\vec{s}\,'$ (Stromfaden)

Biot-Savart

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')\times(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$ (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi}\oint\limits_{\text{Stromweg}} I\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')\times\mathrm{d}\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ (Stromfaden)

magnetische Energiedichte, Energie

$w_\mathrm{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r})\cdot\vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{A}(\vec{r})\cdot\vec{J}(\vec{r}) + \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\left(\vec{A}(\vec{r})\times\vec{B}(\vec{r})\right)\right)$

$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{H}(\vec{r}\,')\cdot\vec{B}(\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r' = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V + \frac{1}{2\mu}\oiint\limits_{O(V)} \vec{A}\times\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{F}$

$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{J}$, $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\cdot\iiint\limits_V \vec{A}\cdot\vec{J}\,\mathrm{d}V$ (endliche Stromverteilungen)

Induktivität

$M_{21} = \frac{\phi_{m,2}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\limits_{C_2}\oint\limits_{C_1}\frac{\mathrm{d}\vec{s}_1\cdot\mathrm{d}\vec{s}_2}{|\vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1|}$

$L = M_{11} = \frac{\phi_m}{I} = \frac{1}{I}\iint\limits_F \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{I}\oint\limits_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{2}{I^2}W_\mathrm{m}$

magnetisches Moment

$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\iiint\limits_V \vec{r}\,'\times\vec{J}(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}V'$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\vec{m}(\vec{r})\times\vec{r}}{r^3} + \ldots,\qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r}\cdot\vec{m}(\vec{r}))\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(\vec{r})}{r^3}\right] + \ldots$

magnetisches Skalarpotential

$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{0} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad}\phi_m(\vec{r})$

$\Delta\phi_m = \operatorname{div}\vec{M}$ für räumlich konstantes μ

Zeiger

$E(\vec{r},\,t) = \hat{E}(\vec{r})\cos(\omega t + \varphi) = \mathfrak{Re}\left\{\hat{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}\right\} = \mathfrak{Re}\left\{\underline{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$

EQS

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ und $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \neq \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{L} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K} = \kappa\cdot\vec{E} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K}$

$\underline{\vec{E}} = -\operatorname{grad}\underline{\phi}$ komplexes Skalarpotential

$\Delta\underline{\phi} = \frac{1}{\kappa+\mathrm{j}\omega\varepsilon}\operatorname{div}(\underline{\vec{J}}_\mathrm{E} + \underline{\vec{J}}_\mathrm{K})$ Poisson-Gleichung (komplex)

MQS

$\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{L} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K} = \kappa\cdot\vec{E} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K}$

Homogene Diffusionsgleichung:

$\Delta\Psi(\vec{r},t) - \mu\kappa\frac{\partial}{\partial t}\Psi(\vec{r},t) = 0 \quad \Delta\underline{\Psi}(\vec{r},t) - \mathrm{j}\omega\mu\kappa\underline{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

Eindringtiefe: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$

Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_A = \frac{1+\mathrm{j}}{\kappa\delta} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\kappa}}$

Oberflächenwiderstand: $R_A = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \frac{1}{\kappa\delta}$

Verlustleistung: $P = \iiint_V \vec{E}\cdot\vec{J}\mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{\kappa}\left|\vec{J}\right|^2\mathrm{d}V$

$\langle P\rangle_T = A\int_0^\infty \frac{1}{\kappa}\frac{\kappa^2E_0^2}{2}\mathrm{e}^{-2\frac{x}{\delta}}\mathrm{d}x = A\frac{\kappa E_0^2}{4}\delta$

Induktion:

$U_\mathrm{ind} = \oint_{C(A)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_A \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -\dot{\Phi}$

$U_\mathrm{ind} = \oint_{C(A(t))}\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{A(t)}\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{A} = -\dot{\Phi}$

SRT: System S' bewegt sich mit $\vec{v}$ relativ zum System S ($v \ll c$):

$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \qquad \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$

$\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp + \vec{v}\times\vec{B} \qquad \vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp$

Energieerhaltung, Poyntingscher Vektor

Poynting-Vektor: $\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t)\times\vec{H}(\vec{r},t)$

$\frac{\partial w_\mathrm{mech}}{\partial t} = \vec{E}\cdot\vec{J} = -\operatorname{div}\vec{S} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ (allgemein)

$\vec{E}\cdot\vec{J} = -\operatorname{div}\vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right] = -\operatorname{div}\vec{S} - \frac{\partial w_\mathrm{em}}{\partial t}$ (lhi)

$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V (w_\mathrm{mech} + w_\mathrm{em})\,\mathrm{d}V = -\oiint\limits_{O(V)}\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{F}$ (lhi)

harmonische Zeitabhängigkeit:

$\vec{E}(\vec{r},\,t) = \mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \underline{\vec{E}}^\star(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right]$

$w_e = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right\} + \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^\star\right\} \overset{\varepsilon\in\mathbb{R}}{=} \cdots + \frac{1}{4}\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^\star$

$w_m = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right\} + \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{B}}^\star\right\} \overset{\mu\in\mathbb{R}}{=} \cdots + \frac{1}{4}\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{B}}^\star$

$\langle w_e\rangle = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^\star\right\} \overset{\varepsilon\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{4}\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{D}}^\star$

$\langle w_m\rangle = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{B}}^\star\right\} \overset{\mu\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{4}\underline{\vec{H}}\cdot\underline{\vec{B}}^\star$

$\langle p_V\rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}^\star\right\} \overset{\kappa\in\mathbb{R}}{=} \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\cdot\underline{\vec{J}}^\star$

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}}\times\underline{\vec{H}}^\star \quad \langle\vec{S}\rangle = \mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}$ komplexer Poynting Vektor

$\mathfrak{Re}\left\{\operatorname{div}\underline{\vec{S}}\right\} + \langle p_V\rangle = 0 \quad \mathfrak{Im}\left\{\operatorname{div}\underline{\vec{S}}\right\} + 2\omega(\langle w_m\rangle - \langle w_e\rangle) = 0$

$\oiint_{O(V)}\underline{\vec{S}}\cdot\mathrm{d}\vec{A} + \iiint_V\langle p_V\rangle\mathrm{d}V + \mathrm{j}2\omega\iiint_V(\langle w_m\rangle - \langle w_e\rangle)\,\mathrm{d}V = 0$

$\langle P_V\rangle = \iiint_V\langle p_V\rangle\mathrm{d}V = -\oiint_{O(V)}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$ (Wirkleistung)

$2\omega\iiint_V(\langle w_m\rangle - \langle w_e\rangle)\,\mathrm{d}V = -\oiint_{O(V)}\mathfrak{Im}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$ (Blindleistung)

Kraft, Spannungstensor, Impuls

$\vec{p}_V^\mathrm{\,em} = \varepsilon\mu\vec{S}, \quad \vec{p}^\mathrm{\,em} = \iiint_V\varepsilon\mu\vec{S}\mathrm{d}V$

$\mathbf{T} = (T_{ij})$ mit $T_{ij} = \varepsilon\left[E_iE_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\vec{E}|^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[B_iB_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\vec{B}|^2\right]$

$\vec{f} = \operatorname{div}\mathbf{T} - \varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{F} = \oiint_{O(V)}\mathbf{T}\cdot\mathrm{d}\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V\vec{S}\mathrm{d}V$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_V^\mathrm{\,mech} + \vec{p}_V^\mathrm{\,em}\right) = \operatorname{div}\mathbf{T}$ (lokale Impulsbilanz)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V\left(\vec{p}_V^\mathrm{\,mech} + \vec{p}_V^\mathrm{\,em}\right)\mathrm{d}V = \oiint_{O(V)}\mathbf{T}\cdot\mathrm{d}\vec{A}$ (integrale Impulsbilanz)

Wellengleichung der Felder

$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad}\frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial\vec{J}}{\partial t}, \quad \Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = -\operatorname{rot}\vec{J}$

Potentiale und Eichtransformationen

$\vec{B} = \operatorname{rot}\vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{A} = -\frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon},\ \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left[\operatorname{div}\vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t}\right] = -\mu\vec{J}$

Eichtransformation: $\vec{A}\,' = \vec{A} + \operatorname{grad}\Lambda, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t}$

LE: $\operatorname{div}\vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial\phi}{\partial t},\ \Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon},\ \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\vec{J}$

CE: $\operatorname{div}\vec{A} = 0,\ \rho_\mathrm{V} = 0 \Rightarrow \phi = 0$ und $\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

$v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \frac{c}{n},\ c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Homogene Wellengleichung, Ebene Wellen bezgl. $\vec{e}_k$

$\Box\Psi(\vec{r},t) = \Delta\Psi(\vec{r},t) - \frac{1}{v_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{r},t) = 0$

$\Psi(\vec{r},t) = \sum_\omega \left(\Psi_+(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}) + \Psi_-(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right),\ \vec{k} = \frac{\omega}{v_c}\vec{e}_k$

Phasengeschwindigkeit: $v_p = \frac{\omega}{k}$

Harmonische ebene Wellen

$\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},\ \Psi(\vec{r},t) = \mathfrak{Re}\{\underline{\Psi}(\vec{r},t)\}$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi}$, Periode: $T = 1/f$

Geschwindigkeiten: $v_\mathrm{p} = f\cdot\lambda = v_c = (c$ für $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0)$

Hinlaufende (-) und rücklaufende (+) Welle:

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r})},\quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\underline{\vec{B}} = \pm\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\underline{\vec{E}} = \pm\frac{1}{v_\mathrm{p}}\vec{e}_k\times\underline{\vec{E}},\ \underline{\vec{E}} = \mp\frac{v_\mathrm{p}^2}{\omega}\vec{k}\times\underline{\vec{B}} = \mp v_\mathrm{p}\vec{e}_k\times\underline{\vec{B}}$, TEM

$\frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{B}}|} = v_\mathrm{p} = v_\mathrm{c} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\ \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \mu v_\mathrm{p} = \mu v_\mathrm{c} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$ (Impedanz)

Polarisation ebene Wellen

Betrachte Propagation in $+z$-Richtung:

$\underline{\vec{E}} = \left(\underline{E}_{0x}\vec{e}_\mathrm{x} + \underline{E}_{0y}\vec{e}_\mathrm{y}\right)e^{j(\omega t - kz)},\ \underline{\vec{B}} = \frac{1}{v_\mathrm{p}}\vec{e}_z\times\underline{\vec{E}}$

$\underline{E}_{0x} = |\underline{E}_{0x}|\cdot e^{j\varphi_x}\ \underline{E}_{0y} = |\underline{E}_{0y}|\cdot e^{j(\varphi_x+\delta)}$

Lineare Polarisation: $\delta = m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$

Pol.-winkel: $\tan\alpha = \pm\frac{|\underline{E}_{0y}|}{|\underline{E}_{0x}|}$, +: $\delta = 2m\pi$, -: $\delta = (2m+1)\pi$

Zirkulare Polarisation: $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z},\ |E_{0x}| = |E_{0y}|$

rechts: $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$, links: $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

Elliptische Polarisation: $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z},\ |E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

rechts: $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$, links: $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

Hauptachsen sind die Koordinatenachsen

δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$: elliptisch, Achsen gedreht

Wellenpaket, harmonisch, $+z$-Richtung

$\Psi(\vec{r},t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\underline{A}(k)e^{j(\omega t - kz)}\mathrm{d}k\ ,\underline{A}(-k) = \underline{A}^\star(k)$, oft: $\underline{A}(k) = A(k)$

konzentiert um k_0: $A(k) \ll A(k_0)$ für $|k-k_0| \gg$ Breite von A

$\to \omega(k) \cong \omega_0 + v_\mathrm{g}(k-k_0),\ \omega_0 = \omega(k_0),\ v_\mathrm{g} = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{k_0}$

$$\Psi(\vec{r},t) \cong \int\limits_{-\infty}^{\infty} A(k_0+q)e^{jq(v_\mathrm{g}t - z)}\mathrm{d}q\, e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$$
$$= H(v_\mathrm{g}t - z)\,e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$$

Kugelwellen

$\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$ mit $\Psi(\vec{r},t) = \Psi(r,t) \to \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{v_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(r\Psi) = 0$

$r\Psi$ wie ebene Wellen in 1D, ein- und auslaufende Kugelwellen lokal wieder TEM

TE und TM Wellen

z.B. Überlagerung von TEM-Wellen unterschiedlicher $\vec{e}_{k_i}$

TM: nur $\vec{B}\perp\vec{e}_k$, TE: nur $\vec{E}\perp\vec{e}_k$; $v_p \geq v_c$

Homogene Wellengleichung mit Anfangswerten

$\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$ mit $\Psi(\vec{r},t=0) = \Psi_0(\vec{r}),\ \left.\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(\vec{r})$

$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\tilde{\Psi}_0(\vec{k})\cos(kv_ct) + \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k})\frac{\sin(kv_ct)}{kv_c}\right]e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^nk$

$\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n}\Psi_0(\vec{r})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^nr,\ \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n}\dot{\Psi}_0(\vec{r})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}\mathrm{d}^nr$

Kirchhoffsche Lösung (n=3):

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi R^2(t)}\oiint_{O(K_{R(t)})}\Psi_0(\vec{r}+\vec{r}')\mathrm{d}^2r'\right] + \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)}\oiint_{O(K_{R(t)})}\dot{\Psi}_0(\vec{r}+\vec{r}')\mathrm{d}^2r'\right]$$

d'Alembertsche Lösung (n=1):

$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\Psi_0(z+v_ct) + \frac{1}{2}\Psi_0(z-v_ct) + \frac{1}{2v_c}\int_{z-v_ct}^{z+v_ct}\dot{\Psi}_0(u)\mathrm{d}u$