

Maxwell Gleichungen

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Stokes}} \oint_{C(A)} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} + \frac{d}{dt} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0$$

$$\text{div } \vec{D} = \rho_V \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{D} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \rho_V dV$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \xrightarrow{\text{hli}} \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \xrightarrow{\text{hli}} \vec{B} = \mu \vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{J} = -\frac{\partial \rho_V}{\partial t} \xrightarrow{\text{Gauss}} \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = -\iiint_V \frac{\partial \rho_V}{\partial t} dV$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor \vec{n} von ① nach ②:

| | | |
|-------------|---|--|
| ① | ② | $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = \vec{0}$ |
| → \vec{n} | | $\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_F$ |
| | | $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_A$ |
| | | $\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$ |

Orthogonalität, Orthonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$$\langle U_m, U_n \rangle = \int_D U_m^*(x) U_n(x) dx = \delta_{mn} \quad \text{Orthonormalität}$$

$$\langle U_m, U_n \rangle = \delta_{mn} c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0, 1\} \quad \text{Orthogonalität}$$

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x) \quad \text{mit } c_n = \int_D U_n^*(x') f(x') dx' \quad (\text{Entwicklung})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n^*(x') U_n(x) = \delta(x - x') \quad (\text{Vollständigkeitsrelation})$$

Elektrisches Skalarpotential

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow \vec{E} = -\text{grad } \phi$$

$$\Delta \phi = -\frac{1}{\epsilon} \rho_V \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

Spannung an \vec{r}_2 bezogen auf \vec{r}_1

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \rightarrow U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad \text{wegunabhängig}$$

Kraft auf q , Arbeit $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$, Energie

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q [\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)] = qU_{21}$$

$$w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad W_e = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV$$

Dipol bei \vec{r}' , Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3[\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')](\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\vec{m} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}(\vec{r}) = \text{grad} (\vec{p} \cdot \vec{E}(\vec{r})) \quad \vec{M}_D(\vec{r}) = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho_V(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r'$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \oiint_{O(V)} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] d^2 r'$$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{\epsilon} \delta(\vec{r} - \vec{r}')$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$$

$$\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = 0, \quad \Gamma(\vec{r}, \vec{r}') = \Gamma(\vec{r}', \vec{r})$$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \rho_V(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d^3 r'$$

$$+ \epsilon \oiint_{O(V)} \left[G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \phi(\vec{r}')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} \right] d^2 r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r}, \vec{r}') = 0$ für $\vec{r}' \in O(V)$

Neumann RB: $-\epsilon \oiint_{O(V)} \phi(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial n'} d^2 r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale \vec{n} zeigt nach V

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r} - [\vec{r}' - 2\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{r}')]|} \right]$$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{a}{|\vec{r}'|} \left(\frac{1}{|\vec{r} - \frac{a^2}{|\vec{r}'|^2} \vec{r}'|} \right) \right]$$

Separation, $\Delta \phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\Delta_r: \text{Radialanteil}} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}: \text{Winkelanteil}}$$

$\phi(r, \vartheta, \varphi) = R_l(r) \cdot Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$ Produktansatz

$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung

$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\cos \vartheta) e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen

$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}$ zugeord. Legendrefunktionen

$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l (x^2-1)^l}{dx^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta \phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$\phi(\vec{r}) = R(\rho) \cdot P(\varphi) \cdot Z(z)$ Produktansatz

für: $\frac{d^2 Z}{dz^2} = +k^2 Z$, $\frac{d^2 P}{d\varphi^2} = -\nu^2 P$, $x = k\rho$

$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - \nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)

für: $\frac{d^2 Z}{dz^2} = -k^2 Z$

$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + \nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν

Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$