Maxwell Gleichungen

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(F)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{F} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \overset{\text{Stokes}}{\to} \oint\limits_{C(F)} \vec{H}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \iint\limits_{F} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{F} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint\limits_{F} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{F}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho_{\mathrm{V}} \overset{\text{Gauss}}{\to} \oiint\limits_{O(V)} \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = \iiint\limits_{V} \rho_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}V$$

Material Gleichungen

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{D} = \varepsilon\vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) \quad \overset{\text{hli}}{\to} \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Kontinuitätsgleichung

$$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t} \quad \overset{\text{Gauss}}{\to} \quad \oiint\limits_{O(V)} \vec{J}\cdot \mathrm{d}\vec{F} = -\iiint\limits_{V} \frac{\partial \rho_{\mathrm{V}}}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

Stetigkeitsbedingungen

Für Normalenvektor $\vec{n}$ von 1 nach 2 :

1 | 2 $\to \vec{n}$

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = \vec{0}$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \rho_{\mathrm{F}}$$

$$\vec{n}\times\left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{J}_A$$

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right) = 0$$

Orthogonalität, Othonormalität $U_m(x), U_n(x) \in L^2(D)$

$\langle U_m, U_n\rangle = \int_D U_m^\star(x)U_n(x)\mathrm{d}x = \delta_{mn}$ Orthonormalität
$\langle U_m, U_n\rangle = \delta_{mn}c_{mn}, \quad c_{mn} \notin \{0,1\}$ Orthogonatität

Vollständiges Funktionensystem $U_n(x)$

$f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n U_n(x)$ mit $c_n = \int\limits_D U_n^\star(x')f(x')\mathrm{d}x'$ (Entwicklung)

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} U_n^\star(x')U_n(x) = \delta(x - x')$ (Vollständigkeitsrelation)

Elektrisches Skalarpotential

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \to \vec{E} = -\mathrm{grad}\,\phi$$

$$\Delta\phi = -\frac{1}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{V}} \text{ Poisson-Gleichung}$$

Coulomb-Integral

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{V}\frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

Spannung an $\vec{r}_2$ bezogen auf $\vec{r}_1$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \vec{0} \to U_{21} = \phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1) = \int\limits_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} \text{ wegunabhängig}$$

Kraft auf q, Arbeit $\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$, Energie

$\vec{F} = q\vec{E} \quad A = q\int\limits_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = q\left[\phi(\vec{r}_2) - \phi(\vec{r}_1)\right] = qU_{21}$

$w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} \quad W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{V}\vec{E}\cdot\vec{D}\,\mathrm{d}V$

Dipol bei $\vec{r}\,'$, Dipoldichte, Kraft, Drehmoment

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\frac{\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$$

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\left[\frac{3\left[\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')\right](\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^5} - \frac{\vec{p}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\right]$$

$$\phi_D(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\,\varepsilon}\iiint\limits_{V}\frac{\vec{m}\cdot(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\mathrm{d}^3r'$$

$$\vec{F}_D(\vec{r}) = (\vec{p}\cdot\nabla)\vec{E}(\vec{r}) = \mathrm{grad}\left(\vec{p}\cdot\vec{E}(\vec{r})\right) \quad \vec{M}_D(\vec{r}) = \vec{p}\times\vec{E}(\vec{r})$$

Skalarpotential mit Randwerten auf $O(V)$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{V}\frac{\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\mathrm{d}^3r'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{O(V)}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Konstanten

$\varepsilon_0 = 8.854\,187\,812\,8(13)\times 10^{-12}\,\mathrm{A\,s\,V^{-1}\,m^{-1}}$
$\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19)\times 10^{-6}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
$\simeq 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{V\,s\,A^{-1}\,m^{-1}}$
$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}} \simeq 3\times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
$Z_0 = \mu_0 c = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 3.767\,303\,136\,67(57)\times 10^2\,\Omega \simeq 120\pi\Omega$

Greensche Funktionen von $\Delta G(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{1}{\varepsilon}\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,')$
$\Delta\Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = 0, \quad \Gamma(\vec{r},\vec{r}\,') = \Gamma(\vec{r}\,',\vec{r})$

$$\phi(\vec{r}) = \iiint\limits_{V}\rho_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,')G(\vec{r},\vec{r}\,')\mathrm{d}^3r'$$

$$+\,\varepsilon\oiint\limits_{O(V)}\left[G(\vec{r},\vec{r}\,')\frac{\partial\phi(\vec{r}\,')}{\partial n'} - \phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\right]\mathrm{d}^2r'$$

Dirichlet RB: $G(\vec{r},\vec{r}\,') = 0$ für $\vec{r}\,' \in O(V)$
Neumann RB: $-\varepsilon\oiint\limits_{O(V)}\phi(\vec{r}\,')\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n'}\mathrm{d}^2r' = \phi_0$

Halbraum durch geerdete Ebene. Normale $\vec{n}$ zeigt nach V

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{1}{|\vec{r}-[\vec{r}\,'-2\vec{n}(\vec{n}\cdot\vec{r}\,')]|}\right]$

geerdete Kugeloberfläche $K_a(\vec{0})$

$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\left[\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \lambda\frac{1}{\left|\vec{r}-\lambda^2\vec{r}\,'\right|}\right], \quad \lambda = \frac{a}{|\vec{r}\,'|}$

Separation, $\Delta\phi = 0$, Kugelkoordinaten

$$\Delta = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}_{\Delta_r\text{: Radialanteil}} + \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)}_{\Delta_{\vartheta\varphi}\text{: Winkelanteil}}$$

$\phi(r,\vartheta,\varphi) = R_l(r)\cdot Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ Produktansatz
$R_l(r) = Ar^l + Br^{-(l+1)}$ Radiallösung
$Y_{lm} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{2l+1}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}P_{lm}(\cos\vartheta)e^{jm\varphi}$ Kugelflächenfunktionen
$P_{lm}(x) = (-\sqrt{1-x^2})^m\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m}$ zugeord. Legendrefunktionen
$P_l(x) = P_{l0}(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{\mathrm{d}^l(x^2-1)^l}{\mathrm{d}x^l}$ Legendre Polynome

Separation, $\Delta\phi = 0$, Zylinderkoordinaten

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$
$\phi(\vec{r}) = R(\varrho)\cdot P(\varphi)\cdot Z(z)$ Produktansatz
für: $\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = +k^2Z$, $\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}\varphi^2} = -\nu^2P$, $x = k\varrho$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} + (x^2-\nu^2)R = 0$ Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: Bessel Funktionen 1. Art $J_\nu(x)$ und 2. Art $Y_\nu(x)$ (Weber, Neumann)
für: $\frac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2} = -k^2Z$
$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x} - (x^2+\nu^2)R = 0$ mod. Bessel-DGL, Ordnung ν
Lösungen: mod. Bessel Funktionen 1. Art $I_\nu(x)$ und 2. Art $K_\nu(x)$

Stationäre Stromdichte, Strom

Allg.: $\vec{J}(\vec{r},t) = \rho_V(\vec{r},t)\vec{v}(\vec{r},t)$ Stationär: $\frac{\partial \rho_V}{\partial t} = 0$ und $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$

Strom durch Fläche: $I = \iint_F \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$

$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \overset{\text{Gauss}}{\rightarrow} \oiint_{O(V)} \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = 0$ (Kirchhoffscher Knotensatz)

$\vec{J} = \kappa \vec{E}$ (außerhalb von Quellen, Ohmsches Gesetz)

Elektromotorische Kraft (EMK), Urspannung

Eingeprägte elektrische Feldstärke $\vec{E}_E$:

$\oint_C \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = U$ EMK, Urspannung

$\vec{J} = \kappa(\vec{E} + \vec{E}_E)$

$\rightarrow \oint_C \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_C \kappa \vec{E}_E \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \kappa U$ (Kichhoffscher Maschensatz)

Leistungsdichte

$p_V = \vec{E} \cdot \vec{J}$, für dünne Leiter: $P = UI$ (Joulsches Gesetz)

magnetisches Vektorpotential

$\vec{B}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r})$

$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) - \Delta \vec{A}(\vec{r}) = \mu \vec{J}(\vec{r})$

Eichtransformation

$\vec{A}'(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \operatorname{grad} \psi(\vec{r}) \rightarrow \vec{B}'(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r})$

Coulomb-Eichung: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$

$\Delta \vec{A}(\vec{r}) = -\mu \vec{J}(\vec{r})$

Lösung in Coulomb Eichung

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} \frac{I}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \mathrm{d}\vec{s}\,'$ (Stromfaden)

Biot-Savart

$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J}(\vec{r}\,') \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r'$ (allgemein)

$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu}{4\pi} \oint_{\text{Stromweg}} I \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,') \times \mathrm{d}\vec{s}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}$ (Stromfaden)

magnetische Energiedichte, Energie

$w_\mathrm{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\vec{H}(\vec{r}) \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{1}{2}\left(\vec{A}(\vec{r}) \cdot \vec{J}(\vec{r}) + \frac{1}{\mu}\operatorname{div}\left(\vec{A}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r})\right)\right)$

$W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{H}(\vec{r}\,') \cdot \vec{B}(\vec{r}\,') \mathrm{d}^3 r' = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} \,\mathrm{d}V + \frac{1}{2\mu} \oiint_{O(V)} \vec{A} \times \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$

$w_\mathrm{m} = \frac{1}{2}\vec{A} \cdot \vec{J}$, $W_\mathrm{m} = \frac{1}{2} \cdot \iiint_V \vec{A} \cdot \vec{J} \,\mathrm{d}V$ (endliche Stromverteilungen)

Induktivität

$M_{21} = \frac{\phi_{m,2}}{I_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\vec{s}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{s}_2}{|\vec{r}\,'_2 - \vec{r}\,'_1|}$

$L = M_{11} = \frac{\phi_m}{I} = \frac{1}{I} \iint_F \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{F} = \frac{1}{I} \oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{2}{I^2} W_\mathrm{m}$

magnetisches Moment

$\vec{m}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r}\,' \times \vec{J}(\vec{r}\,') \,\mathrm{d}V'$

$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m}(\vec{r}) \times \vec{r}}{r^3} + \ldots, \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\left[\frac{3(\vec{r} \cdot \vec{m}(\vec{r}))\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}(\vec{r})}{r^3}\right] + \ldots$

magnetisches Skalarpotential

$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{0} \rightarrow \vec{H}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \phi_m(\vec{r})$

$\Delta \phi_m = \operatorname{div} \vec{M}$ für räumlich konstantes μ

Zeiger

$E(\vec{r},\, t) = \hat{E}(\vec{r}) \cos(\omega t + \varphi) = \mathfrak{Re}\left\{\hat{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}\right\} = \mathfrak{Re}\left\{\underline{E}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\}$

EQS

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{L} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K} = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K}$

$\underline{\vec{E}} = -\operatorname{grad} \underline{\phi}$ komplexes Skalarpotential

$\Delta \underline{\phi} = \frac{1}{\kappa + \mathrm{j}\omega\varepsilon} \operatorname{div}\left(\underline{\vec{J}}_\mathrm{E} + \underline{\vec{J}}_\mathrm{K}\right)$ Poisson-Gleichung (komplex)

MQS

$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \neq \vec{0}$ und $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{0}$

$\vec{J} = \vec{J}_\mathrm{L} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K} = \kappa \cdot \vec{E} + \vec{J}_\mathrm{E} + \vec{J}_\mathrm{K}$

Homogene Diffusionsgleichung:

$\Delta \Psi(\vec{r},t) - \mu\kappa \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r},t) = 0 \quad \Delta \underline{\Psi}(\vec{r},t) - \mathrm{j}\omega\mu\kappa \underline{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

Eindringtiefe: $\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\kappa}}$

Oberflächenimpedanz: $\underline{Z}_A = \frac{1+\mathrm{j}}{\kappa\delta} = (1+\mathrm{j})\sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\kappa}}$

Oberflächenwiderstand: $R_A = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} = \frac{1}{\kappa\delta}$

Verlustleistung: $P = \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{J} \mathrm{d}V = \iiint_V \frac{1}{\kappa} \left|\vec{J}\right|^2 \mathrm{d}V$

$\langle P \rangle_T = A \int_0^\infty \frac{1}{\kappa} \frac{\kappa^2 E_0^2}{2} \mathrm{e}^{-2\frac{x}{\delta}} \mathrm{d}x = A \frac{\kappa E_0^2}{4} \delta$

Induktion:

$U_\mathrm{ind} = \oint_{C(A)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_A \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\dot{\Phi}$

$U_\mathrm{ind} = \oint_{C(A(t))} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{A(t)} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A} = -\dot{\Phi}$

SRT: System S' bewegt sich mit $\vec{v}$ relativ zum System S ($v \ll c$):

$$\vec{E}'_\parallel = \vec{E}_\parallel \qquad \vec{B}'_\parallel = \vec{B}_\parallel$$

$$\vec{E}'_\perp = \vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B} \qquad \vec{B}'_\perp = \vec{B}_\perp$$

Energieerhaltung, Poyntingscher Vektor

Poynting-Vektor: $\vec{S}(\vec{r},t) = \vec{E}(\vec{r},t) \times \vec{H}(\vec{r},t)$

$\frac{\partial w_\mathrm{mech}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \vec{J} = -\operatorname{div} \vec{S} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ (allgemein)

$\vec{E} \cdot \vec{J} = -\operatorname{div} \vec{S} - \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\vec{H} \cdot \vec{B} + \frac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}\right] = -\operatorname{div} \vec{S} - \frac{\partial w_\mathrm{em}}{\partial t}$ (lhi)

$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V (w_\mathrm{mech} + w_\mathrm{em}) \,\mathrm{d}V = -\oiint_{O(V)} \vec{S} \cdot \mathrm{d}\vec{F}$ (lhi)

harmonische Zeitabhängigkeit:

$\vec{E}(\vec{r},\, t) = \mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right\} = \frac{1}{2}\left[\underline{\vec{E}}(\vec{r})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \underline{\vec{E}}^\star(\vec{r})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right]$

$w_e = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right\} + \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^\star\right\} \overset{\varepsilon \in \mathbb{R}}{=} \cdots + \frac{1}{4}\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^\star$

$w_m = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\omega t}\right\} + \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^\star\right\} \overset{\mu \in \mathbb{R}}{=} \cdots + \frac{1}{4}\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^\star$

$\langle w_e \rangle = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^\star\right\} \overset{\varepsilon \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{4}\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{D}}^\star$

$\langle w_m \rangle = \frac{1}{4}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^\star\right\} \overset{\mu \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{4}\underline{\vec{H}} \cdot \underline{\vec{B}}^\star$

$\langle p_V \rangle = \frac{1}{2}\mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^\star\right\} \overset{\kappa \in \mathbb{R}}{=} \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \cdot \underline{\vec{J}}^\star$

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\underline{\vec{E}} \times \underline{\vec{H}}^\star \quad \langle \vec{S} \rangle = \mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\}$ komplexer Poynting Vektor

$\mathfrak{Re}\left\{\operatorname{div} \underline{\vec{S}}\right\} + \langle p_V \rangle = 0 \quad \mathfrak{Im}\left\{\operatorname{div} \underline{\vec{S}}\right\} + 2\omega(\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) = 0$

$\oiint_{O(V)} \underline{\vec{S}} \cdot \mathrm{d}\vec{A} + \iiint_V \langle p_V \rangle \mathrm{d}V + \mathrm{j}2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) \,\mathrm{d}V = 0$

$\langle P_V \rangle = \iiint_V \langle p_V \rangle \mathrm{d}V = -\oiint_{O(V)} \mathfrak{Re}\left\{\underline{\vec{S}}\right\} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (Wirkleistung)

$2\omega \iiint_V (\langle w_m \rangle - \langle w_e \rangle) \,\mathrm{d}V = -\oiint_{O(V)} \mathfrak{Im}\left\{\underline{\vec{S}}\right\} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (Blindleistung)

Kraft, Spannungstensor, Impuls

$\vec{p}_V^{\,\mathrm{em}} = \varepsilon\mu\vec{S}, \quad \vec{p}^{\,\mathrm{em}} = \iiint_V \varepsilon\mu\vec{S}\mathrm{d}V$

$\mathbf{T} = (T_{ij})$ mit $T_{ij} = \varepsilon\left[E_i E_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\vec{E}|^2\right] + \frac{1}{\mu}\left[B_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}|\vec{B}|^2\right]$

$\vec{f} = \operatorname{div} \mathbf{T} - \varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}\vec{S}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{F} = \oiint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \vec{S}\mathrm{d}V$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}_V^{\,\mathrm{mech}} + \vec{p}_V^{\,\mathrm{em}}\right) = \operatorname{div} \mathbf{T}$ (lokale Impulsbilanz)

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \left(\vec{p}_V^{\,\mathrm{mech}} + \vec{p}_V^{\,\mathrm{em}}\right) \mathrm{d}V = \oiint_{O(V)} \mathbf{T} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$ (integrale Impulsbilanz)

Wellengleichung der Felder

$\Delta\vec{E} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \operatorname{grad} \frac{\rho_V}{\varepsilon} + \mu\frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad \Delta\vec{H} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{J}$

Potentiale und Eichtransformationen

$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

$\Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} \vec{A} = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}, \ \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left[\operatorname{div} \vec{A} + \varepsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t}\right] = -\mu\vec{J}$

Eichtransformation: $\vec{A}\,' = \vec{A} + \operatorname{grad} \Lambda, \quad \phi' = \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}$

LE: $\operatorname{div} \vec{A} = -\varepsilon\mu\frac{\partial \phi}{\partial t}, \ \Delta\phi - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi = -\frac{\rho_V}{\varepsilon}, \ \Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\vec{J}$

CE: $\operatorname{div} \vec{A} = 0, \ \rho_V = 0 \Rightarrow \phi = 0$ und $\Delta\vec{A} - \varepsilon\mu\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu\vec{J}$

Ausbreitungsgeschwindigkeit

$v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}}} = \frac{c}{n}, \ c = 299\,792\,458\,\mathrm{m\,s^{-1}}$

Homogene Wellengleichung, Ebene Wellen bezgl. $\vec{e}_k$

$\Box\Psi(\vec{r},t) = \Delta\Psi(\vec{r},t) - \frac{1}{v_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(\vec{r},t) = 0$

$\Psi(\vec{r},t) = \sum_\omega \left(\Psi_+(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r}) + \Psi_-(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right),\ \vec{k} = \frac{\omega}{v_c}\vec{e}_k$

Phasengeschwindigkeit: $v_p = \frac{\omega}{k}$

Harmonische ebene Wellen

$\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})},\ \Psi(\vec{r},t) = \mathfrak{Re}\{\underline{\Psi}(\vec{r},t)\}$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, Frequenz: $f = \frac{\omega}{2\pi}$, Periode: $T = 1/f$

Geschwindigkeiten: $v_p = f\cdot\lambda = v_c = (c$ für $\varepsilon = \varepsilon_0, \mu = \mu_0)$

Hinlaufende (-) und rücklaufende (+) Welle:

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r})},\quad \underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t \mp \vec{k}\cdot\vec{r})}$

$\underline{\vec{B}} = \pm\frac{1}{\omega}\vec{k}\times\underline{\vec{E}} = \pm\frac{1}{v_p}\vec{e}_k\times\underline{\vec{E}},\ \underline{\vec{E}} = \mp\frac{v_p^2}{\omega}\vec{k}\times\underline{\vec{B}} = \mp v_p\vec{e}_k\times\underline{\vec{B}}$, TEM

$\frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{B}}|} = v_p = v_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}},\ \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \mu v_p = \mu v_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z$ (Impedanz)

Polarisation ebene Wellen

Betrachte Propagation in $+z$-Richtung:

$\underline{\vec{E}} = \left(\underline{E}_{0x}\vec{e}_x + \underline{E}_{0y}\vec{e}_y\right)e^{j(\omega t - kz)},\ \underline{\vec{B}} = \frac{1}{v_p}\vec{e}_z\times\underline{\vec{E}}$

$\underline{E}_{0x} = |\underline{E}_{0x}|\cdot e^{j\varphi_x}\ \underline{E}_{0y} = |\underline{E}_{0y}|\cdot e^{j(\varphi_x+\delta)}$

Lineare Polarisation: $\delta = m\pi,\ m\in\mathbb{Z}$

Pol.-winkel: $\tan\alpha = \pm\frac{|\underline{E}_{0y}|}{|\underline{E}_{0x}|}$, +: $\delta = 2m\pi$, -: $\delta = (2m+1)\pi$

Zirkulare Polarisation: $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z},\ |E_{0x}| = |E_{0y}|$

rechts: $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$, links: $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

Elliptische Polarisation: $\delta = (2m+1)\frac{\pi}{2},\ m\in\mathbb{Z},\ |E_{0x}| \neq |E_{0y}|$

rechts: $\delta = -\frac{\pi}{2} + m(2\pi)$, links: $\delta = \frac{\pi}{2} + m(2\pi)$

Hauptachsen sind die Koordinatenachsen

δ beliebig und $|E_{0x}| \neq |E_{0y}|$: elliptisch, Achsen gedreht

Wellenpaket, harmonisch, $+z$-Richtung

$\Psi(\vec{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty}\underline{A}(k)e^{j(\omega t - kz)}dk,\ \underline{A}(-k) = \underline{A}^\star(k)$, oft: $\underline{A}(k) = A(k)$

konzentriert um k_0: $A(k) \ll A(k_0)$ für $|k-k_0| \gg$ Breite von A

$\to \omega(k) \cong \omega_0 + v_g(k-k_0),\ \omega_0 = \omega(k_0),\ v_g = \left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k_0}$

$\Psi(\vec{r},t) \cong \int_{-\infty}^{\infty}A(k_0+q)e^{jq(v_g t - z)}dq\, e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$

$= H(v_g t - z)\, e^{j(\omega_0 t - k_0 z)}$

Kugelwellen

$\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$ mit $\Psi(\vec{r},t) = \Psi(r,t) \to \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{v_c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(r\Psi) = 0$

$r\Psi$ wie ebene Wellen in 1D, ein- und auslaufende Kugelwellen lokal wieder TEM

TE und TM Wellen

z.B. Überlagerung von TEM-Wellen unterschiedlicher $\vec{e}_{k_i}$

TM: nur $\vec{B}\perp\vec{e}_k$, TE: nur $\vec{E}\perp\vec{e}_k$; $v_p \geq v_c$

Homogene Wellengleichung mit Anfangswerten

$\Box\Psi(\vec{r},t) = 0$ mit $\Psi(\vec{r},t=0) = \Psi_0(\vec{r}),\ \left.\frac{\partial\Psi(\vec{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0} = \dot{\Psi}_0(\vec{r})$

$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n}\left[\tilde{\Psi}_0(\vec{k})\cos(kv_c t) + \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k})\frac{\sin(kv_c t)}{kv_c}\right]e^{j\vec{k}\cdot\vec{r}}d^n k$

$\tilde{\Psi}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n}\Psi_0(\vec{r})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}d^n r,\ \tilde{\dot{\Psi}}_0(\vec{k}) = \int_{\mathbb{R}^n}\dot{\Psi}_0(\vec{r})e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}d^n r$

Kirchhoffsche Lösung (n=3):

$$\Psi(\vec{r},t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi R^2(t)}\oiint_{O(K_{R(t)})}\Psi_0(\vec{r}+\vec{r}')d^2r'\right] + \left[\frac{t}{4\pi R^2(t)}\oiint_{O(K_{R(t)})}\dot{\Psi}_0(\vec{r}+\vec{r}')d^2r'\right]$$

d'Alembertsche Lösung (n=1):

$\Psi(\vec{r},t) = \frac{1}{2}\Psi_0(z+v_c t) + \frac{1}{2}\Psi_0(z - v_c t) + \frac{1}{2v_c}\int_{z-v_c t}^{z+v_c t}\dot{\Psi}_0(u)du$

EM-Wellen: Energie und Impuls

$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})};\quad \underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{B}}_0 e^{j(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})} = \frac{1}{\omega}\vec{k}\times\underline{\vec{E}}$

$\langle w_{em}(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon|\underline{\vec{E}}_0|^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{\mu}|\underline{\vec{B}}_0|^2$

$\langle\vec{S}(\vec{r},t)\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\underline{\vec{E}}_0|^2\vec{e}_k = v_p\langle w_{em}\rangle\,\vec{e}_k = \frac{1}{2}\frac{1}{Z}|\underline{\vec{E}}_0|^2\vec{e}_k$

$\langle\vec{p}_V^{em}\rangle = \varepsilon\mu\langle\vec{S}\rangle = \frac{1}{v_c^2}v_p\langle w_{em}\rangle\,\vec{e}_k = \frac{1}{v_c}\langle w_{em}\rangle\,\vec{e}_k$

EM-Wellen: leitfähige Medien

$\kappa \neq 0 \to \vec{J} = \kappa\vec{E}$

Telegraphen-Gleichungen:

$\left[\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \mu\kappa\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec{E}(\vec{r},t) = \left[\Box - \mu\kappa\frac{\partial}{\partial t}\right]\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{0}$; $\vec{B}$ analog

harmonische Zeitabhängigkeit: $\left[\Delta + \omega^2\varepsilon\mu - j\omega\mu\kappa\right]\underline{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

entspricht Wellengleichung mit komplexen Größen:

$\left[\Delta + \frac{\omega^2}{c^2}\underline{\varepsilon}_r\mu_r\right]\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \left[\Delta + \frac{\omega^2}{\underline{v}_c^2}\right]\underline{\Psi}(\vec{r},t) = 0$

$\underline{\varepsilon}_r = \varepsilon_r' + j\varepsilon_r'' = \varepsilon_r - j\frac{\kappa}{\varepsilon_0\omega} = |\underline{\varepsilon}_r|e^{j\varphi};\ |\underline{\varepsilon}_r| = \sqrt{\varepsilon_r^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon_0^2\omega^2}}$

$\tan\varphi = -\frac{\kappa}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega};\ \underline{v}_c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\underline{\varepsilon}_r\mu_0\mu_r}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{\varepsilon}\mu}}$

Lösung: $\underline{\Psi}(\vec{r},t) = \underline{\Psi}_0 e^{j(\omega t - \underline{\vec{k}}\cdot\vec{r})}$

$\underline{\vec{k}} = \frac{\omega}{\underline{v}_c}\vec{e}_k = \omega\sqrt{\underline{\varepsilon}\mu}\,\vec{e}_k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\underline{\varepsilon}_r\mu_r}\,\vec{e}_k = \frac{\omega}{c}\underline{n}\,\vec{e}_k$ komp. Wellenvek.

$\underline{n} = \sqrt{\underline{\varepsilon}_r\mu_r} = n' - j\gamma$ Kompl. Brech.-Index mit

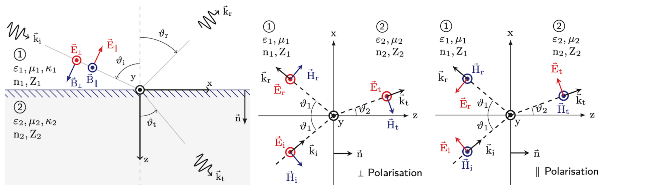
$n' = n\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}},\ \gamma = n\sqrt{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \left(\frac{\kappa}{\varepsilon_0\varepsilon_r\omega}\right)^2}}$

Feldlösungen:

$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}}_0 e^{-\frac{\omega}{c}\gamma\vec{e}_k\cdot\vec{r}}e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c}n'\vec{e}_k\cdot\vec{r})} = \underline{\vec{E}}_0 e^{-k''\vec{e}_k\cdot\vec{r}}e^{j(\omega t - k'\vec{e}_k\cdot\vec{r})}$

$\underline{\vec{B}} = \frac{\underline{k}}{\omega}\vec{e}_k\times\underline{\vec{E}} = \frac{1}{c}(n' - j\gamma)\vec{e}_k\times\underline{\vec{E}}$ TEM, nicht in Phase

EM-Wellen: Reflexion und Brechung



Reflexionsgesetz: $\vartheta_i = \vartheta_r = \vartheta_1$

Brechungsgesetz (Snellius): $n_1\sin\vartheta_1 = n_2\sin\vartheta_2$ mit $\vartheta_2 = \vartheta_t$

Reflexions- und Transmissionskoeff.: $\underline{r} = \frac{\underline{E}_{0r}}{\underline{E}_{0i}}\quad \underline{t} = \frac{\underline{E}_{0t}}{\underline{E}_{0i}}$

$\underline{r}_\perp = \frac{Z_2\cos\vartheta_1 - Z_1\cos\vartheta_2}{Z_1\cos\vartheta_2 + Z_2\cos\vartheta_1},\ 1 + \underline{r}_\perp = \underline{t}_\perp = \frac{2Z_2\cos\vartheta_1}{Z_1\cos\vartheta_2 + Z_2\cos\vartheta_1}$

$\underline{r}_\parallel = \frac{Z_1\cos\vartheta_1 - Z_2\cos\vartheta_2}{Z_2\cos\vartheta_2 + Z_1\cos\vartheta_1},\ \frac{Z_2}{Z_1}\left(1 + \underline{r}_\parallel\right) = \underline{t}_\parallel = \frac{2Z_2\cos\vartheta_1}{Z_2\cos\vartheta_2 + Z_1\cos\vartheta_1}$

Übergang Luft - Metall: $\underline{r}_\perp \simeq -1,\ \underline{t}_\perp \simeq 0,\ \underline{r}_\parallel \simeq +1,\ \underline{t}_\parallel \simeq 0$

mit n:

$\underline{r}_\perp = \frac{n_1\cos\vartheta_1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_2}{n_1\cos\vartheta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_2},\ \underline{t}_\perp = \frac{2n_1\cos\vartheta_1}{n_1\cos\vartheta_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_2}$

$\underline{r}_\parallel = \frac{-n_1\cos\vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_1}{n_1\cos\vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_1},\ \underline{t}_\parallel = \frac{2n_1\cos\vartheta_1}{n_1\cos\vartheta_2 + \frac{\mu_1}{\mu_2}n_2\cos\vartheta_1}$

mit $\mu_1 = \mu_2$:

$\underline{r}_\perp = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_1)}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)},\ \underline{t}_\perp = \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)}$

$\underline{r}_\parallel = \frac{\tan(\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\tan(\vartheta_1 + \vartheta_2)},\ \underline{t}_\parallel = \frac{2\sin\vartheta_2\cos\vartheta_1}{\sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)\cos(\vartheta_1 - \vartheta_2)}$

Brewster-Winkel: $\underline{r}_\parallel = 0$ für $\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vec{k}_r \perp \vec{k}_t,\ \tan\vartheta_1 = \frac{n_2}{n_1}$

Totalreflexion $(n_1 > n_2)$: $\sin\vartheta_{1G} = \frac{n_2}{n_1}$

Feld im Medium 2 bei Totalreflexion:

$\underline{\vec{E}}_t = t\underline{E}_{0i}e^{-\alpha z}e^{j(\omega t - \beta x)}\vec{e}_{E_t}$ evaneszenter Mode

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2Z_2k_2}|t\underline{E}_{0i}|^2 e^{-2\alpha z}(\beta\vec{e}_x + j\alpha\vec{e}_z)$

$\alpha = k_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2\sin^2\vartheta_1 - 1},\ \beta = k_2\frac{n_1}{n_2}\sin\vartheta_1$

Retardierte Greensche Funktion und Potentiale

$G_{ret}(\vec{r} - \vec{r}', t - t') = \frac{\delta(t' - t_{ret})}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|},\ t_{ret} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v_c}$

In Lorenz-Eichung:

$\phi(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint_V\frac{\rho_V(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}d^3r'$

$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{\vec{J}(\vec{r}',t_{ret})}{|\vec{r} - \vec{r}'|}d^3r'$

Lsg. außerhalb Quellgebiet, harm. Anregung:

$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\iiint_V\frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\underline{\vec{J}}(\vec{r}')d^3r' \to$ Nah- und Fernzone

Linearantennen

LE, harm. Anregung, dünner Leiter, Länge ℓ, z.B. z-Richtung:

$\underline{\vec{J}}(\vec{r}')d^3r' = \underline{I}(\vec{r}')\vec{e}_z dz'$

$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\int_{-\ell/2}^{\ell/2}\frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\underline{I}(\vec{r}')\vec{e}_z dz'$

Allg.: $d\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi}\underline{I}(\vec{r}')\left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)\left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + jk\right)\frac{e^{-jk|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

Fernfeld: $d\underline{\vec{H}}(\vec{r}) = \frac{jk}{4\pi}\underline{I}(\vec{r}')\left(d\vec{r}' \times \frac{\vec{r}}{r}\right)\frac{e^{-jkr}}{r}e^{jk\frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}}$

Hertzscher Dipol, am Ursprung, in z-Richtung

$\underline{\vec{A}}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi}\underline{I}\ell\frac{e^{-jkr}}{r}\vec{e}_z = \underline{A}_z\vec{e}_z$

in Kugelkoordinaten:

$\underline{A}_r = \frac{\mu}{4\pi}\underline{I}\ell\frac{e^{-jkr}}{r}\cos\vartheta$, $\underline{A}_\vartheta = -\frac{\mu}{4\pi}\underline{I}\ell\frac{e^{-jkr}}{r}\sin\vartheta$, $\underline{A}_\varphi = 0$

$\underline{\vec{H}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{v_p^2}\underline{I}\ell e^{-jkr}\sin\vartheta\left[\frac{1}{(kr)^2}+\frac{j}{kr}\right]\vec{e}_\varphi$

$\underline{\vec{E}} = \left\{\frac{1}{2\pi}Z\frac{\omega^2}{v_p^2}\underline{I}\ell e^{-jkr}\cos\vartheta\left[\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\right\}\vec{e}_r +$

$\left\{\frac{1}{4\pi}Z\frac{\omega^2}{v_p^2}\underline{I}\ell e^{-jkr}\sin\vartheta\left[\frac{j}{kr}+\frac{1}{(kr)^2}-\frac{j}{(kr)^3}\right]\right\}\vec{e}_\vartheta$

Fernfeld $kr \gg 1$:

$\underline{\vec{H}} = \underline{H}_\varphi\,\vec{e}_\varphi = \frac{j}{4\pi}\frac{\omega^2}{v_p^2}\underline{I}\ell\frac{e^{-jkr}}{kr}\sin\vartheta\,\vec{e}_\varphi$

$\underline{\vec{E}} = \underline{E}_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta = Z\,\underline{H}_\varphi\,\vec{e}_\vartheta$, $Z = \frac{|\underline{\vec{E}}|}{|\underline{\vec{H}}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{k}{\omega\varepsilon}$

$\underline{\vec{S}} = \frac{1}{2}Z\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\omega^2}{v_p^2}\frac{|\underline{I}|\ell}{kr}\right)^2(\sin\vartheta)^2\;\vec{e}_r = S_r(r,\vartheta)\,\vec{e}_r = \langle\vec{S}\rangle$

$D(\vartheta,\varphi) = \frac{S_r(r,\vartheta,\varphi)}{P_{\text{iso}}} = \frac{3}{2}\sin^2\vartheta\;;\;D_{\max} = D(\vartheta=\frac{\pi}{2}) = \frac{3}{2}$

Zylindrische Wellenleiter, z-Richtung, $\kappa = \infty$, harmonisch

Homogene Wellengleichung → Helmholtz-Gleichung:

$\Box\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \vec{0} \rightarrow \left(\Delta + \varepsilon\mu\omega^2\right)\underline{\vec{E}}(\vec{r}) = \vec{0}$

$\Box\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \left(\Delta - \varepsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \vec{0} \rightarrow \left(\Delta + \varepsilon\mu\omega^2\right)\underline{\vec{B}}(\vec{r}) = \vec{0}$

$\vec{e}_z\cdot\left(\text{rot}_t\underline{\vec{E}}_t\right) = -j\omega\underline{B}_z,\;\text{grad}_t\underline{E}_z - \frac{\partial}{\partial z}\underline{\vec{E}}_t = -j\omega\vec{e}_z\times\underline{\vec{B}}_t$

$\vec{e}_z\cdot\left(\text{rot}_t\underline{\vec{B}}_t\right) = j\omega\varepsilon\mu\underline{E}_z,\;\text{grad}_t\underline{B}_z - \frac{\partial}{\partial z}\underline{\vec{B}}_t = j\omega\varepsilon\mu\vec{e}_z\times\underline{\vec{E}}_t$

entkoppelt ('-': vor; '+': rück); $\gamma^2 = \omega^2\varepsilon\mu - k^2$

$\gamma^2\underline{\vec{E}}_t = j\left[\mp k\,\text{grad}_t\underline{E}_z + \omega\vec{e}_z\times\text{grad}_t\underline{B}_z\right]$

$\gamma^2\underline{\vec{B}}_t = j\left[\mp k\,\text{grad}_t\underline{B}_z - \omega\varepsilon\mu\vec{e}_z\times\text{grad}_t\underline{E}_z\right]$

TEM: $\underline{E}_z = \underline{B}_z = \vec{0} \rightarrow \gamma^2 = 0$, oder triviale Lösung

$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}}_t = -\text{grad}\,\phi$ mit $\Delta_t\phi = \Delta_t\phi_t = 0$

$\underline{\vec{B}} = \pm\sqrt{\varepsilon\mu}\,\vec{e}_z\times\underline{\vec{E}}$ ('+' = hin)

$\underline{\vec{H}} = \pm\frac{1}{Z}\,\vec{e}_z\times\underline{\vec{E}}$ ('+' = hin)

TM/TE: $\underline{B}_z = 0$ bzw. $\underline{E}_z = 0$, $\gamma^2 \neq 0$

$\left(\Delta_t+\gamma^2\right)\underline{E}_z = 0$ bzw. $\left(\Delta_t+\gamma^2\right)\underline{H}_z = 0$ mit Randbed.

Dispersionsrelation: $k_\lambda = \sqrt{\mu\varepsilon}\sqrt{\omega^2-\omega_\lambda^2}$ mit $\omega_\lambda = \frac{\gamma_\lambda}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Klassische Leitungstheorie

Im Querschnitt:

$\phi = \phi(x,y), \Delta\phi(x,y) = 0$, $\phi = 0$ bzw. $\phi = U(z)$ auf Leiter

Telegraphengleichungen:

$\frac{\partial\underline{U}(z)}{\partial z} + (R' + j\omega L')\,\underline{I}(z) = 0,\; L' = \frac{\mu\int_C \text{grad}\,\phi\cdot d\vec{s}}{\oint_{O(A)}(\vec{e}_z\times\text{grad}\,\phi)\cdot d\vec{s}}$

$\frac{\partial\underline{I}(z)}{\partial z} + (G' + j\omega C')\,\underline{U}(z) = 0,\; C' = \frac{\varepsilon\oint_{O(A)}(\vec{e}_z\times\text{grad}\,\phi)\cdot d\vec{s}}{\int_C \text{grad}\,\phi\cdot d\vec{s}}$

entkoppelt: $\frac{\partial^2\underline{U}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2\underline{U}(z) = 0,\;\frac{\partial^2\underline{I}(z)}{\partial z^2} - \gamma^2\underline{I}(z) = 0$

Ausbreitungskonstante: $\gamma = \sqrt{Z'Y'} = \sqrt{(R'+j\omega L')\,(G'+j\omega C')}$

$= \alpha + j\beta$

Lösungen: $\underline{U}(z) = u_1e^{-\gamma z} + u_2e^{+\gamma z}$ Randbed. beachten

$\underline{I}(z) = \frac{1}{Z_L}\left(u_1e^{-\gamma z} - u_2e^{+\gamma z}\right)$

Leitungswellenwiderstand: $Z_L = \frac{Z'}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z'}{Y'}} = \sqrt{\frac{R'+j\omega L'}{G'+j\omega C'}}$

Wellenlänge: $\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$, Geschw..: $v_p = \frac{\omega}{\beta}$, $v_g = \frac{d\omega}{d\beta}$

Leitung der Länge L, Abschluss Z_E, A: Anfang, E: Ende

Reflexionsfaktor: $r_E = \frac{Z_E-Z_L}{Z_E+Z_L},\; r_A = r_Ee^{-2\gamma L}$

Impedanz:

$Z_A = Z_L\frac{1+r_A}{1-r_A} = Z_L\frac{1+r_Ee^{-2\gamma L}}{1-r_Ee^{-2\gamma L}} = Z_L\frac{Z_E\cosh(\gamma L)+Z_L\sinh(\gamma L)}{Z_E\sinh(\gamma L)+Z_L\cosh(\gamma L)}$