

NP-Complete

14004 구재현

Table of Contents

- 1. NP-Complete?
- 2. Problems that is NP-Complete
 - 3SAT / TSP / Longest Path
 - Maximum Indep. Set / Minimum Vertex Cover / Dominating Set / Maximum Clique / Graph Coloring
 - Subset Sum Problem / Knapsack Problem
- 3. Simulated Annealing

What is NP?

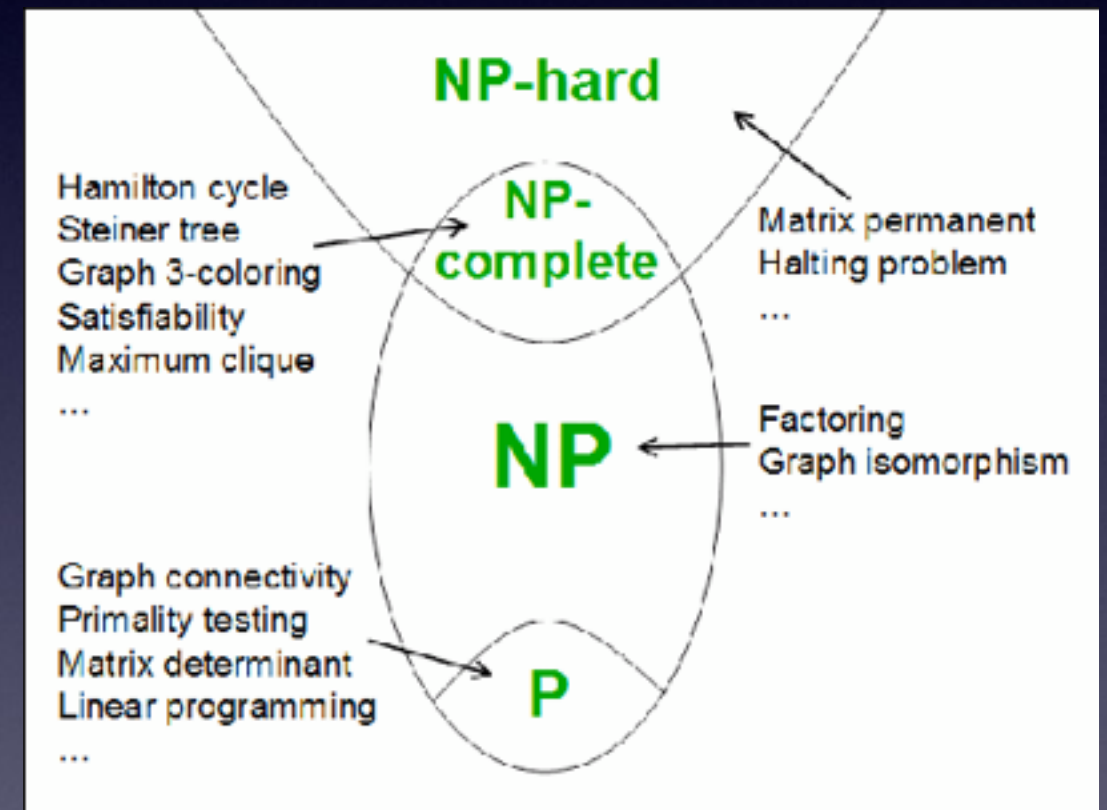
- P : 다항 시간에 “풀 수 있는” 문제들
- NP : 다항 시간에 “채점할 수 있는” 문제들
- NP != 지수 시간 문제는 아님. 근데 지수 시간 문제가 아니면 굳이 NP라고 부를 이유가 없으니 오해가 생김.
- 이 문제는 P 문제라, NP 문제가 아니다 : 틀린 명제
- P가 NP의 부분집합임은 자명. P가 NP와 동일한지는 unsolved.
- NP가 아닌 문제들도 있나요? 네!

NP vs NP-hard

- NP-hard는 NP보다 어려운 문제임.
- NP-hard에 있는 문제들을 풀면, NP에 있는 모든 문제들을 풀 수 있음.
- NP-hard이면서 NP가 아닐수도 있음. (Halting Problem은 NP-hard이면서 NP가 아님.)
- 다만, NP-hard이면서 NP인 문제는 NP-Complete임.
- NP-hard가 아닌 문제들도 있나요? 있다고 하네요!

NP-Complete

- NP와 NP-hard의 교집합.
- NP이면서 NP-Complete이지 않을 수 있나요? 네.
- 오늘의 주제예요!



3-SAT

- ppt 참조.

TSP / Longest Path

- Traveling Salesman (Salesperson) Problem. 외판원 순회 문제 : 모든 정점을 방문하고 돌아오는, 가장 길이가 짧은 사이클을 찾아라!
- Longest Path : N개의 정점이 있는 weighted 그래프에서 가장 길이가 긴 “단순 경로”를 출력하라!
- Both are NP-Complete in GENERAL GRAPH.
- Longest Path is linear in Tree.

Maximum Independent Set

- 그래프가 주어짐.
- 두 정점이 에지로 붙어 있으면, 둘 중 하나만 가져갈 수 있음.
- 최대 몇개의 정점을 가져갈 수 있을까?
- It is NP-hard in general graph.

Minimum Vertex Cover

- 그래프가 주어짐.
- 두 정점이 에지로 붙어 있으면, 둘 중 하나는 가져가야만 함.
- 최소 몇개의 정점을 가져갈 수 있을까?
- It is NP-hard in general graph.
- Maximum Independent Set을 풀면, 이걸 풀 수 있을까?

Dominating Set

- 그래프가 주어짐.
- 정점들을 몇개 고를 거임.
- 안 고른 정점들은, 고른 정점들에 붙어 있어야 함.
- 최소 몇개의 정점을 가져갈 수 있을까?
- It is NP-hard in general graph.

Maximum Clique

- 그래프가 주어짐.
- 정점들을 몇개 고를 거임.
- 고른 정점들의 쌍을 모두 생각함.
- 그들 간에 에지가 있어야 한다! (즉 완전 그래프 꼴)
- 최대 몇개의 정점을 가져갈 수 있을까?
- It is NP-hard in general graph.

Graph Coloring

- 그래프가 주어진다.
- 그래프의 정점을 색으로 칠할 건데, 에지로 연결된 정점은 모두 색이 달라야 함.
- 최소의 색을 쓰자!
- It is NP-hard in general graph.

Maximum Independent Set

- How to solve it in special cases?
- 당연히 정해진 방법은 없고,
- 가끔 DP를 돌릴 수 있을 때가 있음. 그 때 돌려주면 됨.
- 이분 그래프에서 MIS의 풀이는 유명함.
- Vertex Cover도 물론...
- Dominating Set, Maximum Clique도 비슷하게 풀리.. 니까 문제를 냈겠쥬?

연습 문제 1

- 트리 마을의 양숙 (koistudy)
- 전깃줄 (koistudy)
- 사회망 서비스 (BOJ)
- 수강신청 (Large) (koistudy)
- 비숍 II (koistudy) / 잡초 덮기 (koistudy)
- 사다리꼴 (balkan11_trapezoid) (oj.uz)
- 친구 (IOI14_friend) (oj.uz)

Graph Coloring

- k-Coloring : k개의 색으로 색칠 가능?
- Graph Coloring을 k-Coloring으로 변환해서 NP로 풀 수 있음.
- 2-Coloring까지는 Greedy, 3-Coloring은 NP
- 순열 그래프와 선분 그래프에서 Graph Coloring is $O(n \lg n)$ with Greedy Strategy.
- 순열 그래프 예시 : koistudy “Printed Circuit Board”
- 선분 그래프 예시 : koistudy “동계 올림픽 녹화” (If you solved with Greedy)

Subset Sum Problem

- 집합 S 가 있다. $S = \{1, 3, 4, 6, 8, 11 \dots\}$
- 원하는 답 SUM이 있다
- S 의 부분집합의 합이 SUM이 될 수 있나요 없나요?
- koistudy “Subset Sum”
- Knapsack 문제도 비슷함. 설명은 생략함.
- $O(N * SUM)$ 인데 왜 NP요????
- SUM을 10^{100} 을 주는 건 쉬운데, 푸는 건 어렵잖아요!

Alternative solution

- SUM이 작으면, 유명한 동적 계획법을 사용해서, $O(N * SUM)$ 에 해결 가능
- SUM이 엄청 큰데 N이 적당히 작으면, $O(2^{(N/2)} * N)$ 에 해결 가능
- 이 사실은 Subset Sum이 NP라는 사실의 반례가 아니다.
- set의 크기를 bound시키면 어떻게 될까? 3-SUM 문제? k-SUM 문제? 3-SUM 문제는 $O(n^2)$ 보다 빠르게 못 풀까? (open problem)

연습 문제 2

- Subset Sum : http://koistudy.net/?mid=prob_page&NO=561
- Subset Sum ($N \leq 40$) : <https://www.acmicpc.net/problem/1208>
- 3-SUM : <https://www.acmicpc.net/problem/2473>

Simulated Annealing

- 갓 설명사이트
- <http://amugelab.tistory.com/entry/%EB%8F%99%EC%A0%84%EB%92%A4%EC%A7%91%EA%B8%B0-06-KOI%EC%99%80-Simulated-Annealing-%EB%8B%B4%EA%B8%88%EC%A7%88-%EA%B8%B0%EB%B2%95>