

Advanced Graph Algo.

Part I

14004 구재현

의 이터마도 물린다 ㅋㅋㅋ

- 1. Directed Acyclic Graph / Strongly Connected Component and Topological Sorting
- 2. Tree / Spanning Trees / Least Common Ancestor / Pseudotree
- 3. Next topic / Skipped topic

Directed Acyclic Graph

- 피자를 만들고 싶다 -> 반죽과 치즈가 필요!
- 치즈를 만들고 싶다 -> 피자가 필요하다 -> ????
- 그래프로써 **방향성이 있고 사이클이 없는 것**을 DAG라 함
- 앞서 말한 요리 순서 등은 DAG의 대표적인 예
- 사이클이 없다는 점 하나로 문제가 쉽게 풀린다

왜 사이클이 없는게 좋은가

- ~~피자를 만드는데 피자가 필요하다 그러면 당연히 빠치자~~
- 실제로 문제를 푸는 방식도 비슷하기 때문에 맞는 말임
- 사이클이 없기 때문에 점화식이 생길 수 있음 -> DP!
- 그래서 사람들은 그래프에서 DAG를 추출해내려고 하는데...

SCC

- 대강 visualization시키면 사이클들을 다 묶어서 하나의 정점으로 두는 것
- 사이클은 컴포넌트의 성질을 갖는다 (a - b 사이클로 묶임, b - c 사이클로 묶임 => a - c 사이클로 묶임)
- 그래서 묶이는 애들을 전부 사이클로 간주한 후 개내들을 짝 묶으면 DAG가 완성!
- Kosaraju's Algorithm이 유명함

위상 정렬

- 우유 -> (반죽, 치즈) -> 피자
- Q : 그래프 보기 힘들니까 그냥 몇번부터 해야할지 알려주면 안돼요??
- DAG니까 순서대로 번호를 매길 수가 있음 (꼭 유일하진 않고)
- 그렇게 번호를 매긴 것이 위상 정렬!
- DFS 재귀함수를 빠져나오는 순서!
- BFS로도 가능
- 하얀 책 Tarjan's Algorithm은, 위상정렬 순서가 뒤바뀌어서 저장된다니
참고

연습 문제 1

- <http://visualgo.net/>
- http://koistudy.net/?mid=prob_page&NO=730
- http://koistudy.net/?mid=prob_page&NO=503
- <https://www.acmicpc.net/problem/4013>
- http://tdpc.contest.atcoder.jp/tasks/tdpc_graph

트리

- 트리 설명충 삼총사
 - 1. 사이클 없고
 - 2. 방향성도 없고
 - 3. 두 점을 잇는 경로가 유일하게 존재하면!
- 이번에는 LCA 풀이만 간략히 서술. 다음에 깊게 팔게요

스패닝 트리

- 트리는 좋다! 좋다고! 우와 ㅏ 아아아아아앙ㅇㅇㅇ
- 하지만, 사이클 있는 일반 그래프는 극혐이다
- 그래서 그래프에서 트리를 추출해낸다 - 스패닝 트리
- 스패닝 트리중 잘 알려진 건 “최소 스패닝 트리”
- 최소 스패닝 트리는 ElgE에 빠르게 풀수 있다! 크루스칼 알고리즘 설명

Lowest Common Ancestor

- 트리에서 경로를 분석하거나 여러가지 증명을 할때 사용할 수 있는 강력한 방법.
- 모든 경로 $P - Q$ 를 $P - \text{LCA}(P,Q) - Q$ 로 분해
- 트리 문제를 풀면서 항상 맞닥뜨리게 되지만, 굳이 항상 구해야만 하지는 않음.
- 하지만 구해야 할 때도 있음 ㅎ
- $O(n)$ / $O(\lg n)$ 에 LCA를 구하는 방법 후술

LCA

- LCA $O(n)$ 풀이 :
- 깊이가 6인 정점 A, 깊이가 3인 정점 B ($\text{dep}(A) < \text{dep}(B)$)
- A를 3번 올린다 : 깊이가 3인 정점 A', 깊이가 3인 정점 B
- 둘을 같이 올린다 : $A == B$ 가 될때까지
- 그 점이 LCA

Lowest Common Ancestor

- LCA $O(\lg n)$ 풀이 :
- $DP[A][i] = A$ 를 2^i 번 조상으로 올렸을 때 정점?
- $DP[A][i] = DP[DP[A][i-1]][i-1] \leftarrow \neg \neg$
- 공간 복잡도 $O(n \lg n)$ 시간 복잡도 $O(n \lg n) * O(1)$
- A 를 3번 올린다 : 깊이가 3인 정점 A' , 깊이가 3인 정점 B
- 3을 이진수로 나타낸다 = 11(2)

LCA

- 둘을 같이 올린다 : $A == B$ 가 될때까지
- -> 2^{17} 번 올렸을때 같나요?
- -> 같다 -> 안 올려준다. 안 같다 -> 올려준다
- -> 2^{16} 번 올렸을때 같나요?
- -> 같다 -> 안 올려준다. 안 같다 -> 올려준다
- ..

- http://koistudy.net/?mid=prob_page&NO=1234

In Part II

- 1. 그래프에서 흔히 다루는 문제들
 - -> P : 최단 경로, 스패닝 트리 / NP : 최장 경로, 최대 독립 집합, 최대 매칭, 지배 집합, 선분 덮개 등...
- 2. 최소 채색수가 2인 그래프? 이분 그래프!
 - -> 네트워크 플로우를 통해서 P에 매칭할 수 있음. 네트워크 플로우와 함께 배움
- 3. NP가 잘 풀리는 그래프 Interval / Trapezoid / Circular Arc / Permutation Graph
 - -> 자료 구조 / DP와의 궁합이 돋보이는 그래프로 DP 수업과 함께 하면서 다룰 예정
- Heavy Light Decomposition은 먼 훗날에...

In Part III

- 트리 다시 수업 (...)
- 1. 트리의 지름 구하기
- 2. 트리에서 DP하는 방법
- 3. 트리에서 LCA 구하는 방법 (복습..)
- 4. 트리의 경로를 분할하는 Heavy Light Decomposition과 응용
- 5. 트리에서 분할 정복 하는 Centroid Decomposition