ΣΑΕ 1

Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου Ι

Σημειώσεις από τις παραδόσεις

Για τον κώδικα σε LaTeX, ενημερώσεις και προτάσεις:
`https://github.com/kongr45gpen/ece-notes`

Οκτώβριος–Ιανουάριος 2017 – 2018
Τελευταία ενημέρωση: 28 Ιανουαρίου 2018

Λάθη & Διορθώσεις

Οι τελευταίες εκδόσεις των σημειώσεων βρίσκονται στο Github (`https://github.com/kongr45gpen/ece-notes/raw/master/sae1.pdf`) ή στη διεύθυνση `http://helit.org/ece-notes/sae1.pdf`.
Περιέχουν διορθώσεις σε λάθη και τυχόν βελτιώσεις.

Μπορείτε να ενημερώνετε για οποιοδήποτε λάθος και πρόταση μέσω PM στο forum, issue στο Github, ή οποιουδήποτε άλλου τρόπου!

Υπεύθυνη καθηγήτρια: Ζωή Δουλγέρη, ασκήσεις από τον Παπαγεωργίου Δημήτρη - δεν υπάρχει διαχωρισμός ασκήσεων και θεωρίας.

Περιεχόμενα

1 Συστήματα **3**
1.1 Μοντελοποίηση συστημάτων . . . 3
1.2 Ορισμοί . . . 4
1.3 Σύστημα κλειστού βρόγχου . . . 6
1.4 Ισοδύναμα λειτουργικά διαγράμματα . . . 7

2 Προδιαγραφές **9**
2.1 Ακρίβεια . . . 9
2.1.1 Ασκήσεις (Παπαγεωργίου) . . . 17
2.2 Ταχύτητα . . . 24
2.2.1 Σε πρωτοβάθμια συστήματα . . . 24
2.2.2 Σε δευτεροβάθμια συστήματα . . . 28
2.2.3 Για συστήματα μεγαλύτερου βαθμού . . . 34
2.2.4 Ασκήσεις . . . 37
2.3 Εύρος ζώνης . . . 42
2.3.1 Σε πρωτοβάθμια συστήματα . . . 44
2.3.2 Σε δευτεροβάθμια συστήματα . . . 46
2.3.3 Σε συστήματα μεγαλύτερου βαθμού . . . 48
2.3.4 Ασκήσεις . . . 51
2.4 Ευστάθεια . . . 58
2.5 Διαγράμματα Nyquist . . . 65
2.5.1 Συνήθη διαγράμματα Nyquist . . . 67
2.5.2 Γενικό κριτήριο Nyquist . . . 68
2.5.3 Ασκήσεις . . . 70
2.6 Γεωμετρικός τόπος ριζών . . . 82
2.6.1 Κανόνες . . . 83
2.6.2 Ασκήσεις . . . 86
2.7 Ευαισθησία σε θόρυβο . . . 94

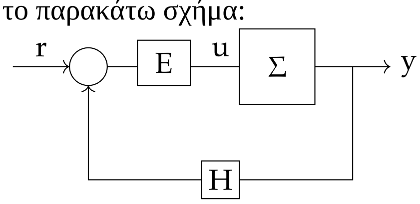
3 Ασκήσεις **106**

Παράρτημα **123**
Ορισμοί . . . 123
Θεωρήματα . . . 123

Κεφάλαιο 1 Συστήματα

Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα μαθήματα τι είναι το σύστημα. Σκοπός του μαθήματος είναι να σχεδιάσουμε έναν "ελεγκτή" ώστε ένα σύστημα να έχει μια επιθυμητή έξοδο.

Για παράδειγμα, αν έχουμε έναν κινητήρα που επιθυμούμε να ελέγξουμε, μπορούμε να τον παραστήσουμε με το παρακάτω σχήμα:



όπου:

- Σ είναι ο κινητήρας
- u είναι η τάση εισόδου (που ρυθμίζουμε εμείς)
- y είναι η έξοδος του συστήματος, εδώ η ταχύτητα του κινητήρα
- Η ροπή του φορτίου εκφράζει την είσοδο της διαταραχής
- H είναι ένας μετρητής που μπορούμε να έχουμε για να ελέγχουμε την ταχύτητα του κινητήρα
- E είναι ο ελεγκτής που θέλουμε να υλοποιήσουμε, ώστε να ρυθμίζει την τάση u εισόδου του κινητήρα για να πετύχουμε την επιθυμητή ταχύτητα.

Έχουμε και μία **είσοδο αναφοράς** που καθορίζει την επιθυμητή έξοδο του συστήματος.

Στα πλαίσια των ΣΑΕ βρίσκουμε το μαθηματικό μοντέλο του συστήματος, καθώς και το μαθηματικό μοντέλο του ελεγκτή, και τα υλοποιούμε με φυσικό τρόπο (για παράδειγμα μέσω κυκλωματικών στοιχείων, μικροελεγκτών, arduino κ.ά).

Παραδείγματα συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι: Τα αμορτισέρ του αυτοκινήτου, οι κινητήρες των CD drives, οι κινητήρες των γραμμών παραγωγής (ώστε για παράδειγμα να είμαστε σίγουροι ότι τα υλικά περνάν από έναν κλίβανο ακριβώς για 30 λεπτά, διατηρώντας σταθερή την ταχύτητα μεταφοράς τους), κ.ά.

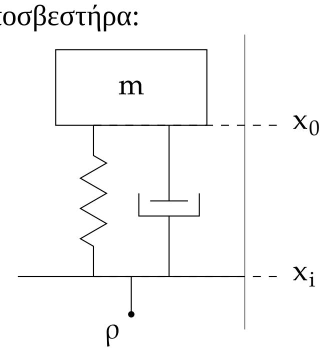
1.1 Μοντελοποίηση συστημάτων

Για το σύστημα ενός σώματος στο οποίο ασκείται δύναμη, έχουμε πολύ απλά:

$$F = m\ddot{x}$$

Για μια δύναμη ελατηρίου, ισχύει $F = \kappa \cdot \delta x$, και για μια δύναμη απόσβεσης/ιξώδους: $F = d\dot{x}$

Ανάρτηση αυτοκινήτου Θεωρούμε ότι η ανάρτηση ενός αυτοκινήτου αποτελείται από ένα ελατήριο και έναν αποσβεστήρα:



Και όπως πριν προκύπτει η σχέση:

$$m\ddot{x}_0 + b(\dot{x}_0 - \dot{x}_i) + \kappa(x_0 - x_i) = 0$$

η οποία μπορεί να μετασχηματιστεί κατά Laplace:

$$m\ddot{x}_0 + b\dot{x}_0 + \kappa x_0 = b\dot{x}_i + \kappa\dot{x}_i$$
$$ms^2X_0(s) + bsX_0(s) + \kappa X_0(s) = X_1(s)bs + \kappa X_1(s)$$
$$\boxed{\frac{X_0(s)}{X_1(s)} = \frac{bs+\kappa}{ms^2+bs+\kappa}}$$

Αυτή είναι μία απλή μέθοδος μοντελοποίησης συστημάτων, αλλά η μοντελοποίηση δεν είναι αντικείμενο αυτού του μαθήματος.

1.2 Ορισμοί

Ορισμός 1.1: Συνάρτηση μεταφοράς

- **Συνάρτηση μεταφοράς:** $G(s) = \dfrac{Y(s) \quad \text{(έξοδος)}}{U(s) \quad \text{(είσοδος)}} = \dfrac{N(s) \quad \text{(αριθμητής)}}{D(s) \quad \text{(παρονομαστής)}}$
- **Χαρακτηριστικό πολυώνυμο:** $D(s)$

Θυμόμαστε ότι στα φυσικά συστήματα δεν γίνεται να έχουμε βαθμό του αριθμητή μεγαλύτερο από το βαθμό του παρονομαστή.

Ορισμός 1.2: Μορφές έκφρασης συνάρτησης μεταφοράς

$$H(s) = \frac{K(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$$
$$H(s) = \frac{G(1+s\tau_{n+1})\cdots(1+s\tau_{n+m})}{(1+s\tau_1)\cdots(1+s\tau_n)} \quad \text{όπου } G = \frac{kz_1\cdots z_m}{p_1\cdots p_m}$$

Ορισμός 1.3: Πόλοι & Μηδενικά

- **Πόλοι** ονομάζονται οι τιμές p για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{s\to p} \left|H(s)\right| = \infty$$

- **Μηδενικά** ονομάζονται οι τιμές z για τις οποίες ισχύει:

$$\lim_{s\to z} \left|H(s)\right| = 0$$

Ορισμός 1.4: DC κέρδος

DC κέρδος ονομάζεται η τιμή της συνάρτησης μεταφοράς για $s = 0$:

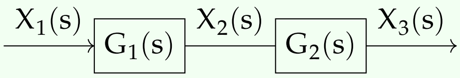
$$\text{dc gain} = H(0)$$

Ουσιαστικά αντιστοιχεί στην τιμή της απόκρισης σε μοναδιαία βηματική συνάρτηση για $t \to \infty$.

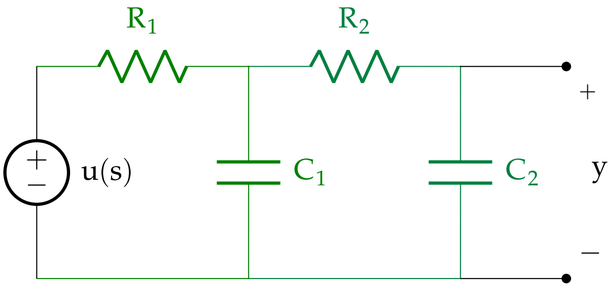
Θεώρημα 1.1: Σύνδεση εν σειρά

Όταν συνδέουμε δύο απομονωμένα συστήματα εν σειρά, για τις συναρτήσεις μεταφοράς τους ισχύει:

$$G(s) = G_1(s)G_2(s)$$



Παράδειγμα



Για το παραπάνω κύκλωμα, αν και έχουμε δύο συστήματα ενωμένα σε σειρά, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα στο παραπάνω κύκλωμα, αφού τα επιμέρους κυκλώματα δεν είναι απομονωμένα και παρουσιάζουν σύνθετες αντιστάσεις εισόδου και εξόδου. Πράγματι, αν επιλύσουμε το κύκλωμα:

$$G_1(s)G_2(s) = \frac{1}{(R_1C_1s+1)}\frac{1}{(R_2C_2s+1)}$$
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{R_1C_1R_2C_2s^2 + (R_1C_1 + R_2C_2 + \underline{R_1C_2})s + 1}$$

Παρατηρούμε τον όρο R_1C_2s που δεν υπάρχει στον απλό πολλαπλασιασμό των δύο συστημάτων.

Άσκηση

Ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς έχουν **ρυθμούς** (ρίζες του παρονομαστή) που δεν είναι πόλοι;

(i) $\dfrac{s+8}{(s+3)(s+10)}$

(ii) $\dfrac{s+1}{(s+1)^2(s+2)}$

(iii) $\dfrac{s+9}{(s+2)^2+9}$

(iv) $\dfrac{s+1}{(s+1)(s+2)}$

Λύση

(i) Έχει μηδενικό στο -8 και πόλους στα -3 και -10.

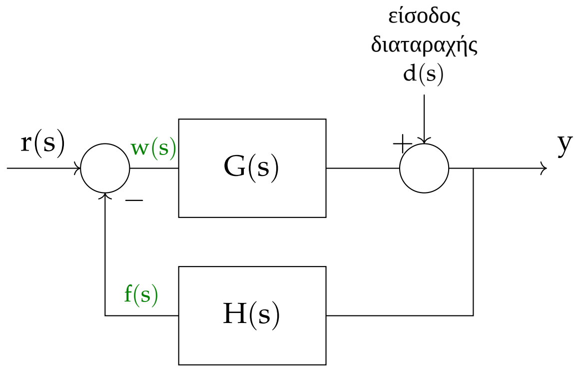
(ii) Έχει μόνο έναν πόλο στο -1 και στο -2.

(iii) Έχει μηδενικό στο -9 και πόλους στα $-2+j3$ και $-2-j3$.

(iv) Έχει μόνο πόλο στο -2.

Η λύση αυτή μπορεί να προκύψει από τους ορισμούς του πόλου και του μηδενικού.

1.3 Σύστημα κλειστού βρόγχου



Ορίζουμε:

$$\textbf{συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόγχου}:\quad T(s) = \frac{y(s)}{r(s)}$$
$$\textbf{συνάρτηση μεταφοράς εισόδου διαταραχής}:\ T_d(s) = \frac{y(s)}{d(s)}$$

Για να υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος, αν δεν λάβουμε υπ' όψιν την είσοδο διαταραχής:

$$\begin{aligned}
y(s) &= G(s)w(s) \\
&= G(s)\big(r(s) - f(s)\big) \\
y(s) &= G(s)\big[r(s) - H(s)y(s)\big] \\
y(s)\big[1 + G(s)H(s)\big] &= G(s)r(s) \\
y(s) &= \frac{G(s)r(s)}{1 + G(s)H(s)} \\
T(s) &= \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}
\end{aligned}$$

Αν συμπεριλάβουμε και την είσοδο διαταραχής, το ζητούμενο είναι η είσοδος αυτή να μην επηρεάζει καθόλου (ή όσο το δυνατόν λιγότερο) την έξοδο. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
y(s) &= d(s) + G(s)w(s) \\
&= d(s) - G(s)f(s) \\
&= d(s) - G(s)H(s)y(s) \implies \\
y(s)\big[1 + G(s)H(s)\big] &= d(s) \implies \\
T_d(s) &= \frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}
\end{aligned}$$

Συνοπτικά:

Θεώρημα 1.2: Συναρτήσεις μεταφοράς σε σύστημα κλειστού βρόγχου

Για ένα σύστημα κλειστού βρόγχου με είσοδο $r(s)$, είσοδο διαταραχής $d(s)$, συνάρτηση $G(s)$ στην ευθεία διαδρομή και $H(s)$ στη διαδρομή ανάδρασης, οι συναρτήσεις μεταφοράς είναι:

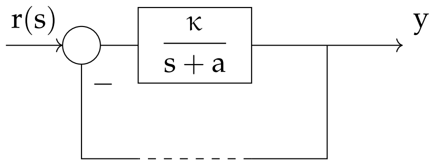
$$\begin{aligned}
T(s) &= \left.\frac{y(s)}{r(s)}\right|_{d(s)=0} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \\
T_d(s) &= \left.\frac{y(s)}{d(s)}\right|_{r(s)=0} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}
\end{aligned}$$

και η συνολική έξοδος του συστήματος είναι:

$$y(s) = T(s)r(s) + T_d(s)d(s)$$

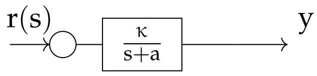
Παρατηρούμε ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι το ίδιο στις δύο συναρτήσεις μεταφοράς.

Παράδειγμα



Θα υπολογίσουμε την έξοδο του συστήματος <u>χωρίς ανάδραση</u> και <u>με ανάδραση</u> σε βηματική είσοδο $r(s) \to u(t)$.

Χωρίς ανάδραση

Το σύστημα χωρίς ανάδραση είναι το παραπάνω χωρίς τον κάτω βρόχο: 

Και ισχύει:

$$y(s) = r(s)\frac{\kappa}{s+a}$$
$$y(s) = \kappa\frac{1}{s}\frac{1}{s+a}$$
$$y(t) = \kappa\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

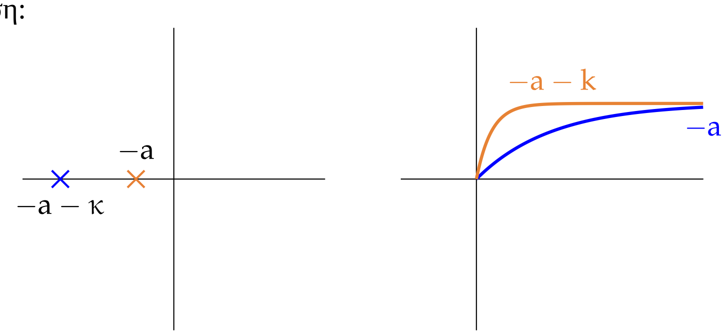
(όπου η σταθερά χρόνου $\tau = \frac{1}{a}$)

Για $t \to \infty$ το αποτέλεσμα είναι $y(t) = \kappa$.

Με ανάδραση

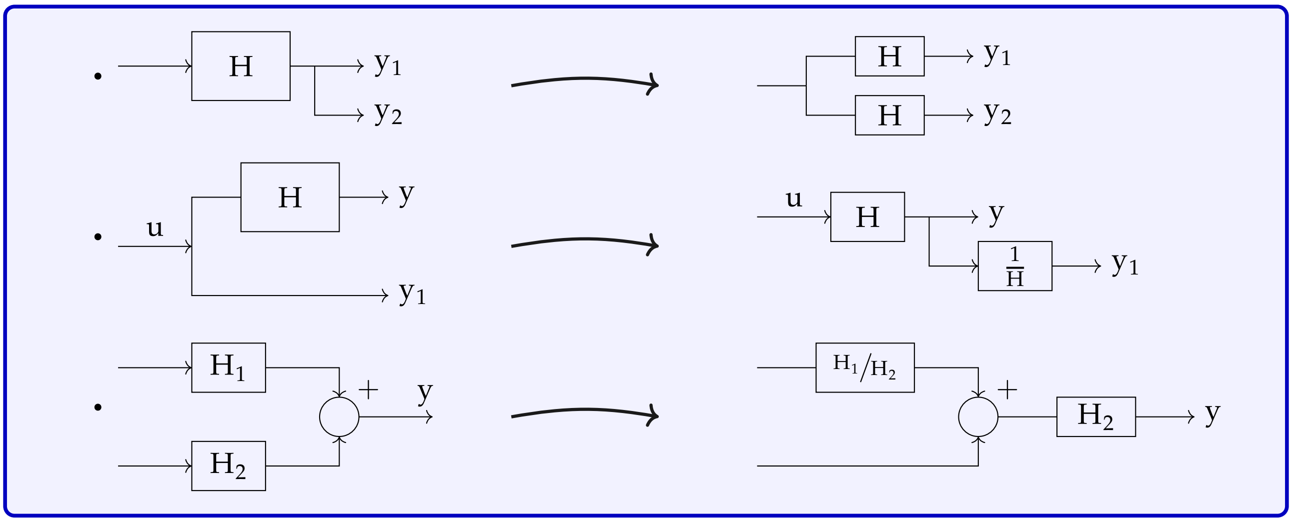
$$y(s) = \frac{G(s)r(s)}{1+G(s)} \implies \cdots \implies \tau' = \frac{1}{a+\kappa}$$

Παρατηρούμε πως το σύστημα αυτό φτάνει πολύ πιο γρήγορα στην τελική του τιμή. Αυτό φαίνεται αν συγκρίνουμε τις σταθερές χρόνου μεταξύ τους, σκεπτόμενοι ότι λειτουργούν ως συντελεστές στην εκθετική συνάρτηση:

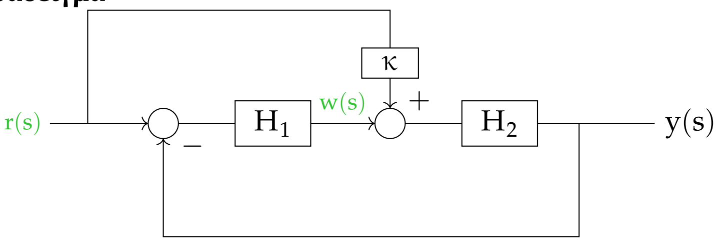


1.4 Ισοδύναμα λειτουργικά διαγράμματα

Για τη διευκόλυνσή της εύρεσης της συνάρτησης μεταφοράς, μπορούμε αντί να βρούμε την έξοδο αλγεβρικά χρησιμοποιώντας ενδιάμεσες συναρτήσεις, να εφαρμόσουμε κανόνες όπως τους παρακάτω:



Παράδειγμα



Χρησιμοποιώντας τους παραπάνω κανόνες, ή την προηγούμενη μέθοδο, μπορούμε να βρούμε:

$$T(s) = \frac{\kappa H_2(s) + H_2(s)H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Ενδεικτικά, με βοηθητικές συναρτήσεις, οι πράξεις γίνονται ως εξής:

$$\begin{aligned}
y(s) &= H_2(s) \cdot \big(\kappa r(s) + w(s)\big) \\
&= H_2 \cdot \Big[\kappa r + H_1\left(r - y\right)\Big] \\
&= \kappa H_2 r + H_2 H_1 r - H_1 H_2 y \implies \\
y \cdot (1 + H_1 H_2) &= \kappa H_2 r + H_2 H_1 r \implies \\
y &= \frac{\kappa H_2 r + H_2 H_1 r}{1 + H_1 H_2} \implies \\
T(s) &= \frac{\kappa H_2(s) + H_2(s) H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s)}
\end{aligned}$$

Κεφάλαιο 2 Προδιαγραφές

Ορίζουμε κάποιες προδιαγραφές που επιθυμούμε να πληροί η έξοδος του συστήματος, όπως η ακρίβεια θέσης, η ταχύτητα της απόκρισης, η ευστάθεια κλπ. Για να μετρήσουμε ποσοτικά αυτά τα κριτήρια, ορίζουμε νέα μεγέθη και χρησιμοποιούμε διάφορες συναρτήσεις ως "εισόδους αναφοράς", όπως την κρουστική $\delta(t)$ (για μελέτη ευστάθειας), τη βηματική $u(t)$, την ράμπα, την ημιτονοειδή (για μελέτη απόκρισης συχνότητας και ταχύτητας) κλπ.

2.1 Ακρίβεια

Το ζητούμενο της ακρίβειας είναι η τελική έξοδος να είναι κοντά στην επιθυμητή είσοδο.

Για να υπολογίσουμε την τελική έξοδο, δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε τον αντίστροφο Μ/Σ Laplace της συνάρτησης για να πάμε στο πεδίο του χρόνου, αλλά αρκεί να χρησιμοποιηθεί το θεώρημα της τελικής τιμής:

$$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$$

Για παράδειγμα, για βηματική είσοδο ($u(t) \to \frac{1}{s}$) σε ένα σύστημα (ss = steady state):

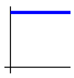
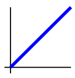
$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} sF(s) = \lim_{s\to 0} sH(s)\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} H(s)$$

Για να μελετήσουμε την ακρίβεια, ορίζουμε το σφάλμα:

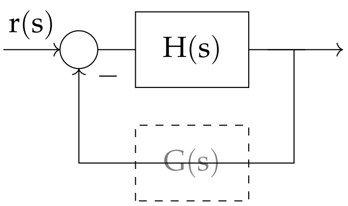
Ορισμός 2.1: Σφάλμα

$$e(s) = r(s) - y(s)$$

Χρησιμοποιούμε διάφορες εισόδους για να βρούμε διάφορα είδη σφαλμάτων του συστήματος:

	$r(t) = u(t)$	$r(s) = \frac{1}{s}$	e_{ssp}	σφάλμα θέσης
	$r(t) = t$	$r(s) = \frac{1}{s^2}$	e_{ssv}	σφάλμα ταχύτητας
	$r(t) = {}^{t^2}/_2$	$r(s) = \frac{1}{s^3}$	e_{ssa}	σφάλμα επιτάχυνσης

Για παράδειγμα, για το σύστημα κλειστού βρόγχου, θυμόμαστε ότι:



Αν θεωρήσουμε ότι η $G(s)$ είναι 1, τότε:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{H(s)}{1+H(s)}$$

$$\text{όπου } H(s) = \frac{G(\tau_{n+1}s+1)\cdots(\tau_{n+m}s+1)}{s^N(1+s\tau_1)\cdots(1+s\tau_n)} \implies$$

$$e(s) = r(s) - y(s) = \frac{1}{1+H(s)} r(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} se(s)$$

(δηλαδή N είναι η τάξη του τυχόν πόλου στο 0).

Εφαρμόζοντας τις διάφορες συναρτήσεις ως εισόδους, σύμφωνα με τα παραπάνω, έχουμε:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1 + \underbrace{\lim_{s\to 0} H(s)}_{K_{pos}}} = \frac{1}{1 + K_{pos}} = \begin{cases} \frac{1}{1+G} & \text{για } N = 0 \\ \frac{1}{1+\infty} = 0 & \text{για } N \geq 1 \end{cases}$$

$$e_{ssv} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0} sH(s)}_{K_v}} = \frac{1}{K_v} = \begin{cases} \frac{1}{0} = \infty & \text{για } N = 0 \\ \frac{1}{G} & \text{για } N = 1 \\ \frac{1}{\infty} = 0 & \text{για } N \geq 2 \end{cases}$$

$$e_{ssa} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{s\to 0} s^2H(s)}_{K_a}} = \frac{1}{K_a} = \begin{cases} \infty & \text{για } N \leq 1 \\ \frac{1}{G} & \text{για } N = 2 \\ 0 & \text{για } N > 2 \end{cases}$$

Δε συζητάμε για ακρίβειες πέραν της επιτάχυνσης, επειδή σπάνια τα συστήματα έχουν πάνω από 2 ολοκληρωτές.

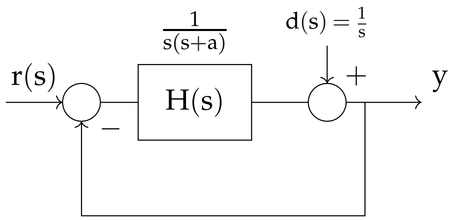
Ορισμός 2.2: Ολοκληρωτής

Ένας **πόλος στο 0** λειτουργεί σαν **ολοκληρωτής**, επειδή έχει την ιδιότητα να ολοκληρώνει το σήμα εισόδου.

Ορισμός 2.3: Τύπος συστήματος

Ο **τύπος του συστήματος** είναι ο αριθμός των ολοκληρωτών που έχει.

Παράδειγμα Έστω το σύστημα:



Ποιά θα είναι η έξοδος του συστήματος στη μόνιμη κατάσταση αν προσθέσουμε την είσοδο διαταραχής;

Γνωρίζουμε για το σύστημα κλειστού βρόχου ότι:

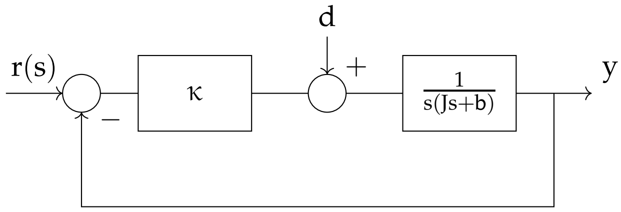
$$\frac{y(s)}{d(s)} = \frac{1}{1 + H(s)}$$

$$\lim_{s\to 0} sy(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{d(s)}{1+H(s)} = \lim_{s\to 0} s\frac{\frac{1}{s}}{1+H(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+H(s)} = 0$$

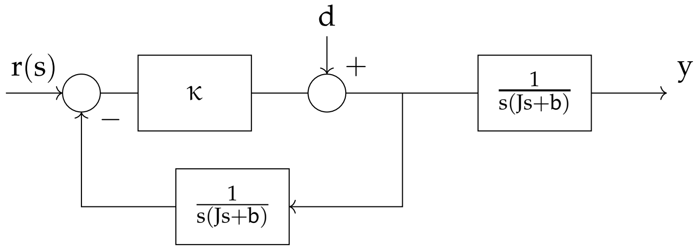
Δηλαδή $y_{ss} = 0$, άρα το σύστημα έχει πάλι τέλεια ακρίβεια, και σφάλμα θέσης 0.

Παράδειγμα

Το παρακάτω διάγραμμα αντιστοιχεί σε έναν κινητήρα:



Το μετασχηματίζουμε στο ισοδύναμό του, ώστε να εφαρμόσουμε τους τύπους κλειστού βρόγχου:

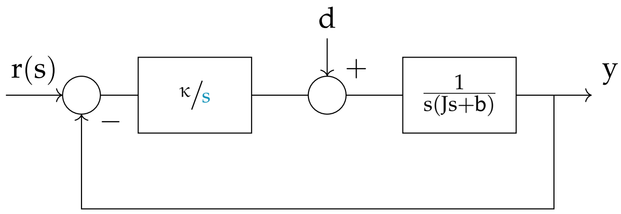


Τότε προκύπτει (για είσοδο $\frac{1}{s}$, αφού αναζητούμε σφάλμα θέσης):

$$
\begin{aligned}
T(s) &= \frac{1}{s(Js+b)}\frac{\kappa}{1+\frac{\kappa}{s(Js+b)}} = \frac{\kappa}{s(Js+b)+\kappa} \\
T_d(s) &= \frac{1}{s(Js+b)}\frac{1}{1+\frac{\kappa}{s(Js+b)}} = \frac{1}{s(Js+b)+\kappa} \\
y(s) &= T(s)r(s) + T_d(s)d(s) \\
&= \frac{1}{s}\frac{\kappa}{s(Js+b)+\kappa} + \frac{1}{s}\frac{1}{s(Js+b)+\kappa} \\
e(s) &= r(s) - y(s) \\
e_{ssp} &= \lim_{s\to 0} se(s) \\
&= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}\frac{\kappa}{s(Js+b)+\kappa} - \frac{1}{s}\frac{1}{s(Js+b)+\kappa}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\kappa}{s(Js+b)+\kappa} - \frac{1}{s(Js+b)+\kappa}\right] \\
&= 1 - \frac{\kappa}{\kappa} - \frac{1}{\kappa} = -\frac{1}{\kappa}
\end{aligned}
$$

Δηλαδή βλέπουμε ότι η διαφορετική θέση της εισόδου διαταραχής επηρεάζει το σφάλμα θέσης του συστήματος.

Αν, προσπαθώντας να μειώσουμε στο 0 το σφάλμα της εξόδου, προσθέσουμε έναν ολοκληρωτή πριν από την είσοδο διαταραχής:



τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος γίνεται:

$$
Js^3 + bs^2 + \kappa = 0
$$

που έχει ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο, άρα οδηγεί σε ασταθές σύστημα (θυμόμαστε από τα Κ3 ότι μόνο τα πολυώνυμα με θετικούς συντελεστές *μπορεί* να οδηγήσουν σε ευστάθεια).

Για να διορθώσουμε αυτήν την ατέλεια, χρησιμοποιούμε έναν **ελεγκτή PI** (Proportional & Integral), δηλαδή πολλαπλασιάζουμε την είσοδό του $e(t)$ με $K_P e(t)$ και ολοκληρώνουμε με $K_I \int e(t)$.

Ελεγκτής PI

Σύμφωνα με την παραπάνω παράγραφο, η έξοδος $u(t)$ ενός ελεγκτή PI είναι:

$$u(t) = K_P \cdot e(t) + K_I \int e(t)\, dt$$

(όπου e η είσοδος) και, μετασχηματίζοντας κατά Laplace:

$$u(s) = \left(K_P + \frac{K_I}{s}\right) = \frac{K_P\left(s + \frac{K_I}{K_P}\right)}{s} = \frac{K_P(s+z)}{s}$$

όπου $z = \frac{K_P}{K_I}$ μία σταθερή τιμή.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, αντικαθιστούμε τη συνάρτηση μεταφοράς κ/s με τη συνάρτηση:

$$K_p\left(\frac{s+z}{s}\right)$$

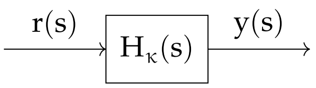
όπου $z = \frac{K_P}{K_I}$, και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται:

$$x(s) = Js^3 + bs^2 + K_p s + K_I = 0$$

που μπορεί να είναι ευσταθές με κατάλληλη επιλογή των σταθερών.

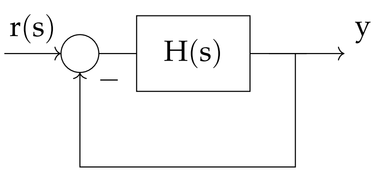
Παράδειγμα

Στο σύστημα χωρίς βρόγχο:



$$e_{ssp} = \lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0}\left(1 - H_\kappa(s)\right)$$
$$e_{ssv} = \lim_{s\to 0} \frac{1 - H_\kappa(s)}{s}$$
$$e_{ssa} = \lim_{s\to 0} \frac{1 - H_\kappa(s)}{s^2}$$

Άσκηση



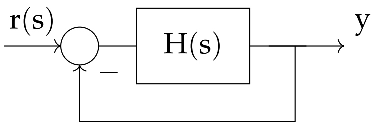
$$H(s) = \frac{s+9}{s^2+7s+3}$$

Τι σφάλμα θέσης έχει το παραπάνω σύστημα;

Λύση

$$
\begin{aligned}
e_{ssp} &= \frac{1}{1+K_{pos}} \\
K_{pos} &= \lim_{s\to 0} H(s) = \frac{9}{3} = 3 \implies \\
e_{ssp} &= \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Άσκηση



Στο παραπάνω σχήμα, θέτουμε:

$$H(s) = \frac{2(s+10)}{s(s+2)(s+5)}$$

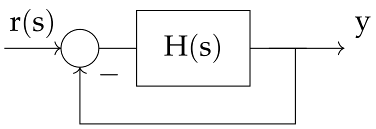
Τι σφάλματα έχει το παραπάνω σύστημα;

Λύση

$$
\begin{aligned}
K_{pos} &= \infty \\
K_v &= \lim_{s\to 0} sH(s) = \frac{20}{10} = 2 \\
K_a &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e_{ssp} &= \frac{1}{1+\infty} &&= 0 \\
e_{ssv} &= \frac{1}{K_v} &&= \frac{1}{2} \\
e_{ssa} &= \frac{1}{0} &&= \infty
\end{aligned}
$$

Άσκηση



Στο παραπάνω σχήμα:

$$H(s) = \frac{1.8\kappa}{s(s+3.3)}$$

Ποιά πρέπει να είναι η σταθερά κ ώστε να ισχύει $e_{ssv} = 0.327$;

Λύση

$$
\begin{aligned}
K_v &= \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{1.8\kappa}{s+3.3} = \frac{18\kappa}{33}\\
e_{ssv} &= \frac{1}{K_v} = \frac{33}{18\kappa} = 0.327 \implies\\
\kappa &= \frac{33}{18\cdot 0.327} \simeq 5.607
\end{aligned}
$$

Άσκηση

$$
H_\kappa(s) = \frac{\kappa s + b}{s^2 + as + b}
$$

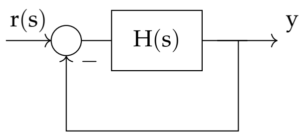
Ποιά είναι τα σφάλματα του συστήματος, και ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς, αν προέρχεται από σύστημα κλειστού βρόγχου *μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης*;

Λύση

Σφάλματα

$$
\begin{aligned}
e_{ssp} &= \lim_{s\to 0}\left[1 - H_\kappa(s)\right] = 1 - \frac{b}{b} = 0\\
e_{ssv} &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{1-H_\kappa(s)}{s}\right] &&= \frac{a-\kappa}{b}\\
e_{ssa} &= \lim_{s\to 0}\left[\frac{1-H_\kappa(s)}{s^2}\right] &&= \infty
\end{aligned}
$$

Συνάρτηση μεταφοράς



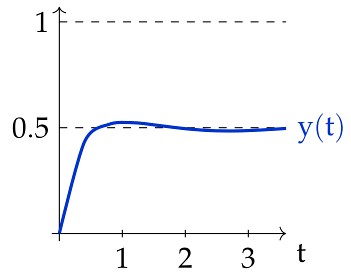
Γνωρίζουμε ή βρίσκουμε ότι, για συστήματα κλειστού βρόγχου:

$$
H_\kappa(s) = \frac{H(s)}{1+H(s)}
$$

άρα:

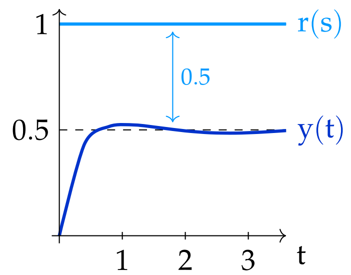
$$
\begin{aligned}
H_\kappa(1+H) &= H \implies\\
H_\kappa + H_\kappa H &= H \implies\\
H(1-H_\kappa) &= H_\kappa \implies\\
H &= \frac{H_\kappa}{1-H_\kappa} \implies\\
H &= \frac{\frac{\kappa s+b}{s^2+as+b}}{1-\frac{ks+b}{s^2+as+b}} = \frac{\frac{\kappa s+b}{\cancel{s^2+as+b}}}{\frac{s^2+as+b-ks-b}{\cancel{s^2+as+b}}} \implies\\
&\boxed{H(s) = \frac{\kappa s + b}{s(s+a-\kappa)}}
\end{aligned}
$$

Άσκηση



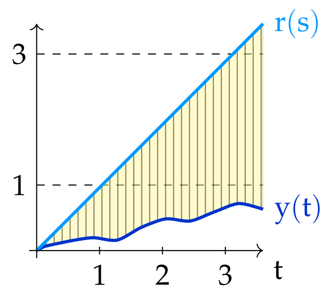
Έστω το σύστημα με την παραπάνω απόκριση στη βηματική συνάρτηση. Ποιός είναι ο τύπος του συστήματος;

Λύση



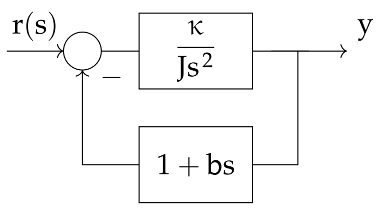
Η επιθυμητή έξοδος του συστήματος είναι 1, αλλά η έξοδός του στη μόνιμη κατάσταση είναι 0.5, επομένως υπάρχει σταθερό σφάλμα 0.5. Άρα το σύστημα έχει τύπο 0.

Γνωρίζουμε ότι, αφού είναι τύπου 0, θα έχει άπειρο σφάλμα ταχύτητας. Πράγματι, αν βάλουμε ως είσοδο τη συνάρτηση ράμπας, το σφάλμα όσο $t \to \infty$ θα αυξάνεται όλο και περισσότερο:



Άσκηση

Ποιά είναι τα σφάλματα του παρακάτω συστήματος;



Λύση

Επειδή δεν έχουμε μοναδιαία αρνητική ανάδραση, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους σφάλματος για συστήματα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης.

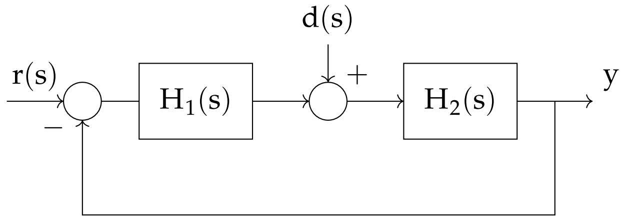
Βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόγχου:

$$y = H(s)\left(r - G(s)y\right) = \cdots = \frac{H(s)}{1 + H(s)G(s)} = \frac{\kappa/Js^2}{1 + bs} = \frac{\kappa}{Js^2 + \kappa bs + \kappa}$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε τους τύπους σφάλματος χωρίς βρόγχο:

$$e_{ssp} = 0 \qquad\qquad e_{ssv} = b \qquad\qquad e_{ssa} = \infty$$

Άσκηση



(α) $H_1(s) = \dfrac{s+2}{s+1} \qquad H_2(s) = \dfrac{10}{s(s+6)}$

(β) $H_1(s) = \dfrac{s+2}{s(s+1)} \qquad H_2(s) = \dfrac{10}{s+6}$

Να βρεθούν και στις δύο περιπτώσεις τα σφάλματα θέσης και ταχύτητας με διάφορες περιπτώσεις διαταραχών.

Λύση, αν δεν υπάρχει διαταραχή d(s)

(α) Έχουμε μοναδιαία αρνητική ανάδραση και το σύστημα έχει έναν ολοκληρωτή, άρα είναι τύπου 1. Το σφάλμα θέσης είναι $e_{ssp} = 0$, και το σφάλμα ταχύτητας μία σταθερά $e_{ssv} = \dfrac{1}{K_v} = \dfrac{1}{\lim_{s\to 0} sH(s)} = \dfrac{1}{\lim_{s\to 0} s\frac{s+2}{s+1}\frac{10}{s(s+6)}} = \dfrac{1}{20/6} = \dfrac{3}{10}$.

(β) Αντίστοιχα με το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε:

$$K_{pos} = \lim_{s\to 0} H(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s(s+1)} \frac{10}{s+6} = \infty$$
$$K_v = \lim_{s\to 0} sH(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s+2}{s+1} \frac{10}{s+6} = 2 \cdot \frac{10}{6} = \frac{10}{3}$$

Άρα:

$$e_{ssp} = \frac{1}{1+K_{pos}} = 0$$
$$e_{ssv} = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{10}$$

Λύση με διαταραχή $d(s) = \frac{A}{s}$

Υπολογίζουμε:

$$y = H_2\left(d + H_1(r-y)\right) \implies \ldots$$
$$\implies y = \underbrace{\frac{H_1H_2}{1+H_1H_2}r}_{y_1} + \underbrace{\frac{H_2}{1+H_1H_2}d}_{y_2}$$

Φαίνεται η επαλληλία στη απόκριση του συστήματος, την οποία θα μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε.

Θυμόμαστε ότι:

$$e(s) = r(s) - y(s) \qquad \text{και} \qquad e_{ss} = \lim_{s\to 0} se(s)$$

Για την εύρεση του αποτελέσματος, θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του σφάλματος.

(α) σφάλμα θέσης Για το σφάλμα θέσης, θεωρούμε $r(s) = \frac{1}{s}$, και έχουμε:

$$
\begin{aligned}
e_{ssp} &= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s} - \frac{H_1H_2}{1+H_1H_2}\frac{1}{s} - \frac{H_2}{1+H_1H_2}\frac{A}{s}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\frac{s+2}{s+1}\frac{10}{s(s+6)}}{1+\frac{s+2}{s+1}\frac{10}{s(s+6)}} - \frac{\frac{10}{s(s+6)}}{1+\frac{s+2}{s+1}\frac{10}{s(s+6)}}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\frac{10(s+2)}{\cancel{s(s+1)(s+6)}}}{\frac{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}{\cancel{s(s+1)(s+6)}}} - A\frac{\frac{10}{\cancel{s(s+6)}}}{\frac{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}{\cancel{s(s+6)}(s+1)}}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+6)+10(s+2)} - A\frac{10(s+1)}{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}\right] \\
&= 1 - \frac{20}{20} - A\cdot\frac{10}{20} \\
&= -\frac{A}{2}.
\end{aligned}
$$

(β) σφάλμα θέσης Αντίστοιχα με παραπάνω, βρίσκουμε:

$$
\begin{aligned}
e_{ssp} &= \lim_{s\to 0} s\left[\frac{1}{s} - \frac{H_1H_2}{1+H_1H_2}\frac{1}{s} - \frac{H_2}{1+H_1H_2}\frac{A}{s}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\frac{s+2}{s(s+1)}\frac{10}{s+6}}{1+\frac{s+2}{s(s+1)}\frac{10}{s+6}} - A\frac{\frac{10}{s+6}}{1+\frac{s+2}{s(s+1)}\frac{10}{s+6}}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{\frac{10(s+2)}{\cancel{s(s+1)(s+6)}}}{\frac{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}{\cancel{s(s+1)(s+6)}}} - A\frac{\frac{10}{\cancel{s+6}}}{\frac{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}{s(s+1)\cancel{(s+6)}}}\right] \\
&= \lim_{s\to 0}\left[1 - \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+6)+10(s+2)} - A\frac{10s(s+1)}{s(s+1)(s+6)+10(s+2)}\right] \\
&= 1 - \frac{20}{20} - A\cdot\frac{0}{20} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι η αλλαγή της θέσης του ολοκληρωτή $\frac{1}{s}$ επηρεάζει και το σφάλμα του συστήματος.

2.1.1 Ασκήσεις (Παπαγεωργίου)

Αντιστοιχίες ηλεκτρικού συστήματος σε μηχανικό σύστημα

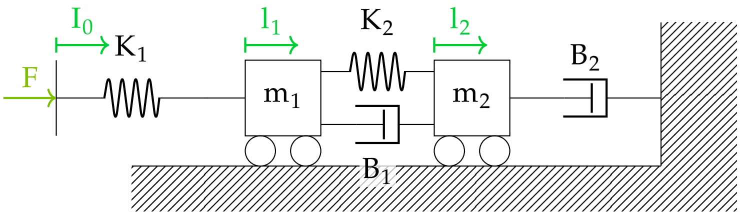
$$
\begin{aligned}
\text{τάση } V &\rightarrow \text{δύναμη } F \\
\text{ρεύμα } I &\rightarrow \text{ταχύτητα } u \\
\text{αντίσταση } R = \tfrac{V}{I} &\rightarrow \text{αποσβεστήρας } B = \tfrac{F}{u} \\
\text{πυκνωτής } i_c = C\tfrac{du_c}{dt} &\rightarrow \text{ελατήριο } \tfrac{1}{\kappa}\tfrac{dF}{dt} \rightsquigarrow F = kx \\
\text{πηνίο } u_L = L\tfrac{di_L}{dt} &\rightarrow \text{αδράνεια } F = ma = m\tfrac{du}{dt}
\end{aligned}
$$

Ένα παράδειγμα μηχανικού συστήματος είναι τα **αμορτισέρ**, τα οποία ουσιαστικά "κόβουν" τις υψηλές συχνότητες που μπορεί να οφείλονται σε ανομοιομορφίες του δρόμου, ώστε να νιώθουμε άνετα μέσα σε ένα αυτοκίνητο.

Οι αριθμοί των ασκήσεων συνήθως δίνονται από το βιβλίο του **Πετρίδη**.

Άσκηση

3.8



Να υπολογιστεί η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος. Σαν έξοδος θεωρείται η μετατόπιση της m_1.

Λύση

Βρίσκουμε το άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται σε κάθε μάζα, και εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα:

$$\text{Για τη μάζα 2: } F = m_2\frac{d^2 l_2}{dt^2} = \underbrace{-K_2(l_2 - l_1)}_{\text{ελατήριο}} - \underbrace{B_2\frac{dl_2}{dt}}_{\text{αποσβ.}} - \underbrace{B_1\left(\frac{dl_2}{dt} - \frac{dl_1}{dt}\right)}_{\text{αποσβεστήρας}}$$

$$\text{Για τη μάζα 1: } F = m_1\frac{d^2 l_1}{dt^2} = -K_1(l_1 - l_0) - B_1\left(\frac{dl_1}{dt} - \frac{dl_2}{dt}\right) - K_2(l_1 - l_2)$$

Μετασχηματίζουμε τις δύο εξισώσεις κατά Laplace:

$$m_2 s^2 L_2 = -K_2(L_2 - L_1) - B_2 s L_2 - B_1(sL_2 - sL_1) \quad (1)$$
$$m_1 s^2 L_1 = -K_1(L_1 - L_0) - B_1(sL_1 - sL_2) - K_2(L_1 - L_2) \quad (2)$$

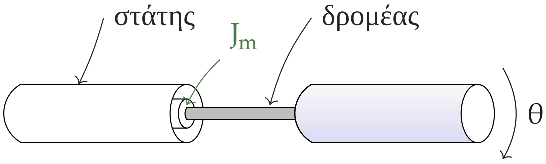
Θυμόμαστε ότι δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν τις αρχικές συνθήκες, αφού αναζητούμε τη συνάρτηση μεταφοράς.

Αναζητούμε μια σχέση της μορφής $H(s) = \frac{L_0(s)}{L_1(s)}$, άρα πρέπει να απαλείψουμε το L_2 από τις δύο παραπάνω σχέσεις:

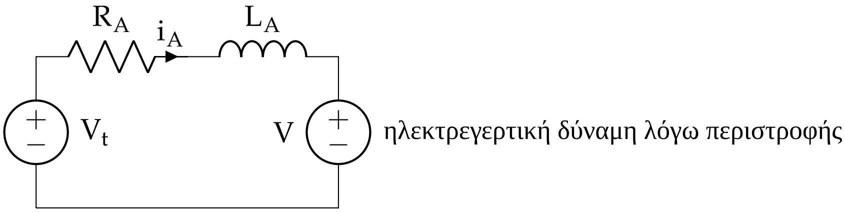
$$(1) \implies L_2 = L_1\frac{K_2 + B_1 s}{m_2 s^2 + K_2 + (B_1 + B_2)s} \overset{(2)}{\implies}$$
$$\frac{L_1}{L_0} = \frac{K_1 m_2 s^2 + K_1 K_2 + K_1(B_1 + B_2)s}{(m_1 s + K_1 + K_2 + B_1 s)\left(m_2 s^2 + K_2 + (B_1 + B_2)s\right) - (K_2 + B_1 s)^2}$$

Άσκηση: Brushed DC κινητήρας

Έστω ένας brushed DC κινητήρας:



με ισοδύναμο κύκλωμα δρομέα:



Το ισοδύναμο κύκλωμα περιγράφεται από την εξίσωση:

$$V_t = R_A i_A + L_a \frac{di_A}{dt} + K_v \frac{d\theta}{dt} \tag{3}$$

και το μηχανικό ισοδύναμο:

$$\underbrace{(J_L + J_m)}_{\frac{Nms^2}{rad}} \underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{\frac{rad}{s^2}} = \underbrace{K_T}_{\frac{Nm}{A}} i_A \tag{4}$$

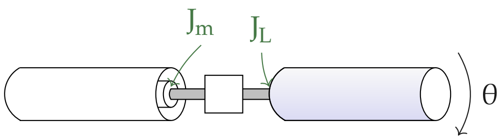
όπου J_L και J_m είναι οι ροπές αδράνειας του κάθε μέρους.

Στη συγκεκριμένη άσκηση θεωρούμε σαν έξοδο τη *γωνία του κινητήρα*, και σαν είσοδο την *τάση του δρομέα* V_t.

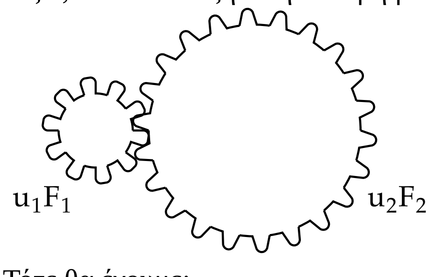
Λύνουμε το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
(4) \implies i_A &= \frac{(J_L + J_m)}{K_T} \frac{d^2\theta}{dt^2} \implies \\
I_A &= \frac{J_L + J_m}{K_T} s^2 \theta \overset{(3)}{\implies} \\
V_T &= \left[(R_A + \overset{\text{(συνήθως αγνοούμε το } L_A)}{\cancelto{0}{L_A}} s) \frac{J}{K_T} s^2 + K_v s \right] \theta \implies \\
\frac{\theta}{V} &= \frac{{}^{1}\!/_{K_v}}{\frac{R_A J}{K_T K_v} s^2 + s}
\end{aligned}
$$

Βέβαια σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να τοποθετηθεί ένας ***μειωτήρας*** μεταξύ του J_m και του J_L:



Ο μειωτήρας είναι το μηχανικό ισοδύναμο ενός ενισχυτή, που κατασκευάζεται ουσιαστικά με δύο γρανάζια, ώστε να αυξηθεί η δύναμη μειώνοντας την ταχύτητα ή αντίστροφα:

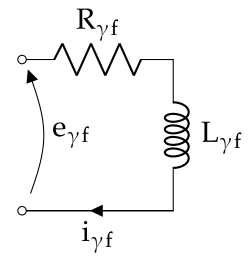


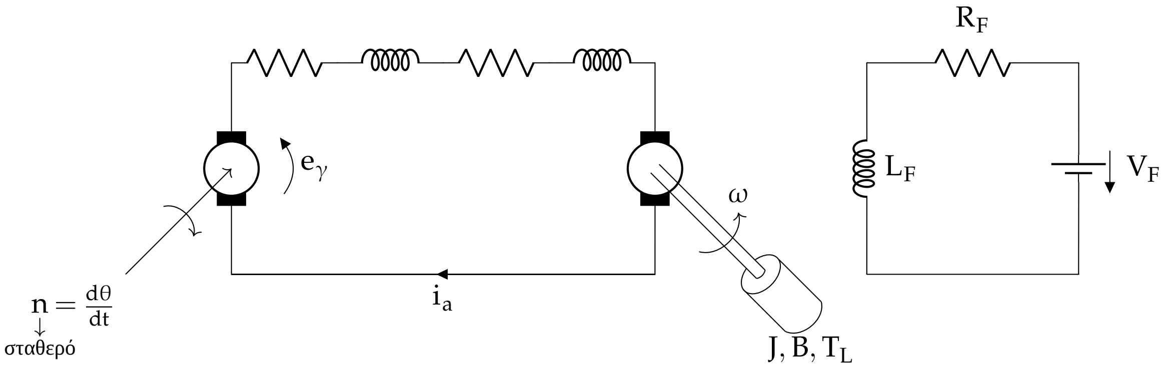
Τότε θα έχουμε:

$$J = J_m + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_L$$

Βέβαια ένα πραγματικό σύστημα θα περιλαμβάνει και δυναμική τριβή με τη μορφή αποσβεστήρα.

Άσκηση: Παράδειγμα 3.5.2





$$e_{\gamma f} = R_{\gamma f} \cdot i_{\gamma f} + L_{\gamma f}\frac{di_{\gamma f}}{dt}$$

$$e_\gamma = K \cdot n \cdot i_{\gamma f} \qquad \left(i_{\gamma f} = \frac{e_\gamma}{\gamma}\right)$$

$$E_{\gamma f} = \left(\frac{R_{\gamma f}}{\gamma} + \frac{L_{\gamma f}}{\gamma}s\right)E_\gamma$$

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + T_L = K_m i_a \to (Js^2 + Bs)\Theta + T_L = K_m I_a$$

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + K\frac{d\theta}{dt} = e_\gamma \to L_s I_a + R \cdot I_A + R \cdot I_A + K_S\Theta = E_\gamma$$

$$(Js^2 + Bs)\Theta + T_L = K_m\left(\frac{E_\gamma - K_s\Theta}{Ls + R}\right)$$

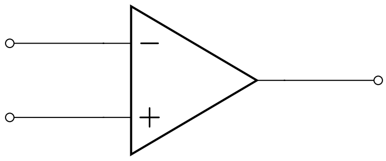
$$\left(Js^2 + Bs + \frac{K_m K_s}{Ls + R}\right)\Theta + T_L = \frac{K_m}{Ls + R}\left(\frac{1}{\frac{R_\gamma f}{\gamma}} + \frac{L_\gamma f}{\gamma}s\right)E_{\gamma f}$$

$$\left(Js + B + \frac{K_m K}{Ls + R}\right)\omega + T_L = \frac{K_m}{Ls + R}\left(\frac{1}{\frac{R_\gamma f}{\gamma} + \frac{L_\gamma f}{\gamma}s}\right)E_{\gamma f}$$

Για $T_L = 0$:

$$\frac{\Omega}{E_{\gamma f}} = \frac{\gamma K_m}{\big((Js + B)(Ls + R) + KK_m\big)\,(L\gamma_f s + R_{\gamma f})}$$

Τελεστικός ενισχυτής

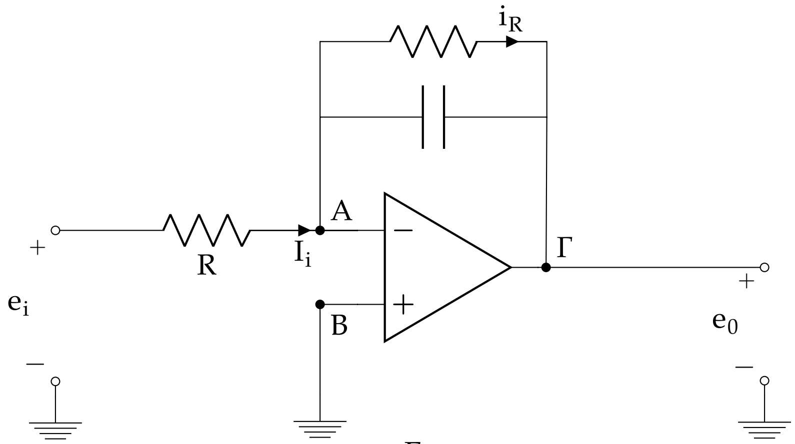


Ο τελεστικός ενισχυτής είναι ιδανικά ένας διαφορικός ενισχυτής άπειρου κέρδους. Αν οι δύο είσοδοι είναι 0, τότε η έξοδος είναι 0, ενώ αν διαφέρουν, η είσοδος είναι άπειρη (ή V_{cc} σε πραγματικό ενισχυτή).

Για τον ιδανικό τελεστικό ενισχυτή κάνουμε τις παραδοχές:

- $R_m = \infty$
- $V_+ = V_-$ (για να έχουμε πεπερασμένη έξοδο)

Άσκηση: A35



Μας ζητείται να βρούμε τον λόγο $\frac{E_o}{E_i}$.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη δεύτερη παραδοχή του ιδανικού τελεστικού, και παρατηρούμε ότι:

$$V_B = V_A = 0$$

άρα:

$$\begin{aligned} &V_{A\Gamma} + V_{\Gamma B} = 0 \\ \implies &V_C + e_o = 0 \\ &\implies V_C = -e_0 \end{aligned}$$

Υπολογίζουμε τα ρεύματα μέσω κυκλωματικών νόμων, και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι (λόγω της άπειρης αντίστασης) δεν πηγαίνει ρεύμα στις εισόδους A και B του ενισχυτή:

$$I_i = i_R + i_2 \tag{5}$$

$$I_i = \frac{e_i}{R} \tag{6}$$

άρα:

$$(5) + (6) \implies \boxed{\frac{e_i}{R} = -c\frac{de_o}{dt} - \frac{e_o}{R}}$$

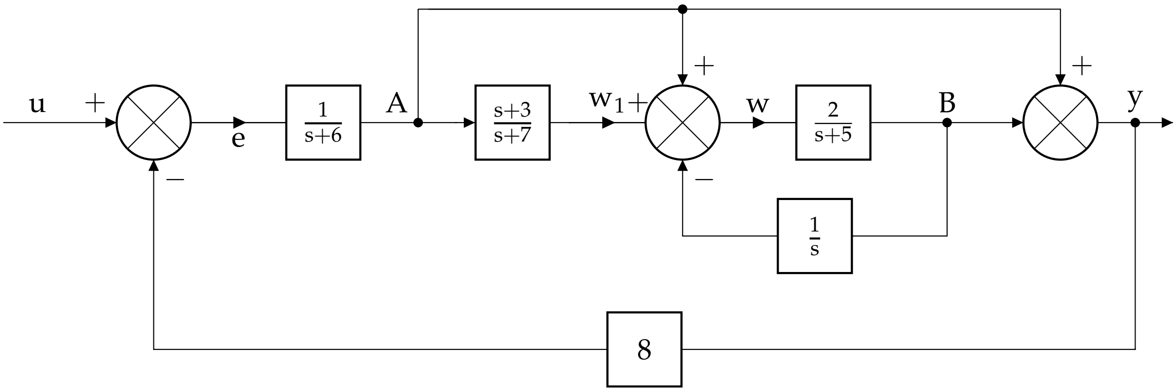
και

$$i_R = \frac{V_C}{R} = -\frac{e_o}{R}$$

Μετασχηματίζοντας την παραπάνω εξίσωση κατά Laplace και λύνοντας, έχουμε:

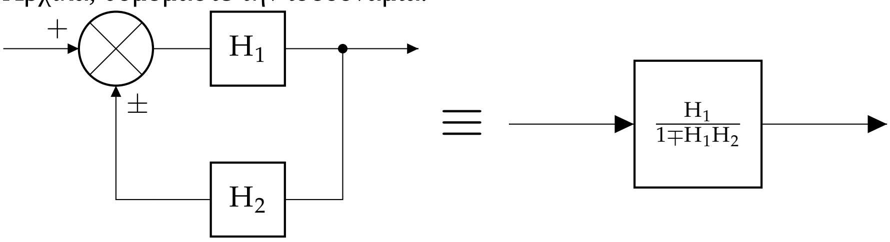
$$\boxed{\frac{E_o}{E_i} = \frac{1}{RCs+1}}$$

Άσκηση: 2.19

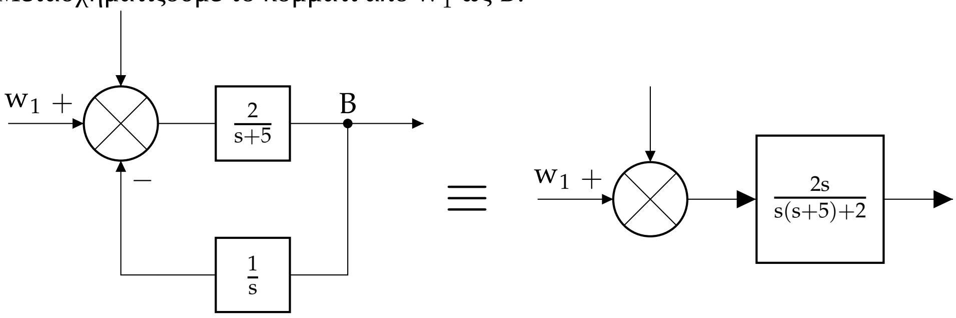


Λύση

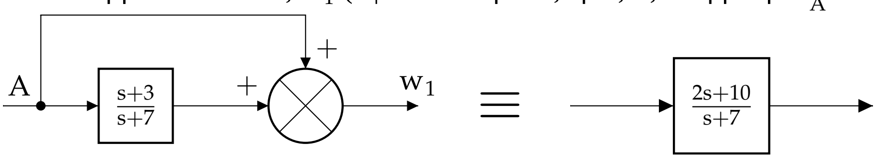
Θα μετασχηματίσουμε το παραπάνω σύστημα σε ένα ισοδύναμό του.
Αρχικά, θυμόμαστε την ισοδυναμία:



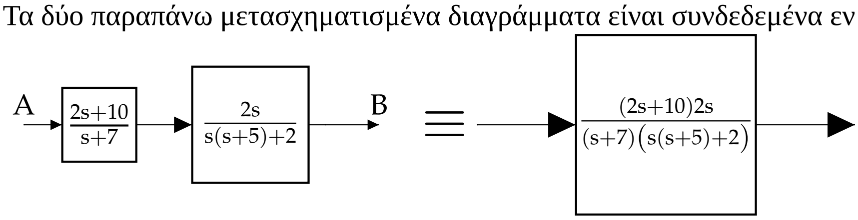
Μετασχηματίζουμε το κομμάτι από w_1 ως B:



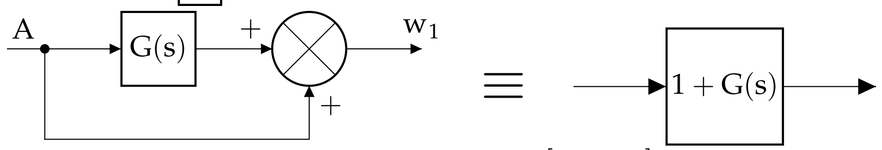
και το κομμάτι από A ως w_1 (αφού κάνουμε τις πράξεις και βρούμε $\frac{w_1}{A} = 1 + \frac{s+3}{s+7}$):



Τα δύο παραπάνω μετασχηματισμένα διαγράμματα είναι συνδεδεμένα εν σειρά, άρα:

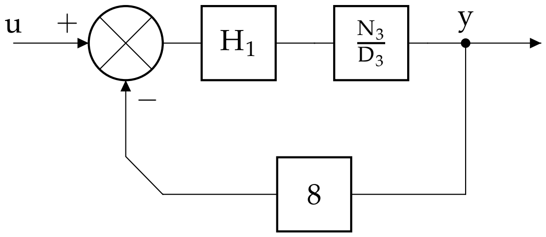


(όπου θέτουμε για ευκολία $G(s) = \frac{(2s+10)2s}{(s+7)\big(s(s+5)+2\big)}$) και το τμήμα του συστήματος εντός του βρόγχου ανάδρασης με το $\boxed{8}$ γίνεται:



με $1+G(s) = \frac{\text{αριθμητής } N_3}{\text{παρονομαστής } D_3} = \frac{(2s+10)2s+(s+7)\left[s(s+5)+2\right]}{(s+7)\left[s(s+5)+2\right]}$.

Άρα το τελικό σύστημα είναι:



και επομένως προκύπτει από πράξεις:

$$\begin{aligned}
\frac{y}{u} &= \frac{\frac{N_3}{D_3(s+6)}}{1+8\frac{N_3}{D_3}\frac{1}{s+6}} \\
&= \frac{N_3}{D_3(s+6)+8N_3} \\
&= \frac{N_3}{D_3(s+6)+8N_3} \\
&= \frac{(2s+10)2s+(s+7)(s^2+5s+2)}{(s+14)(s+7)(s^2+5s+2)+16(2s+10)s}
\end{aligned}$$

Η άσκηση αυτή μπορεί βεβαίως να λυθεί και αλγεβρικά. Συνοπτικά:

$$y = A + B \tag{7}$$

$$B = \frac{2}{s+5}w \tag{8}$$

$$A = \frac{1}{s+6}e \tag{9}$$

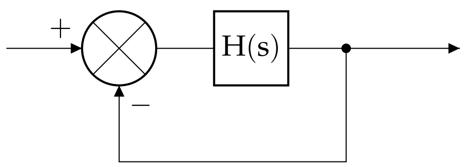
$$e = u - 8y \tag{10}$$

$$w = \left(1+\frac{s+3}{s+7}\right)A - \frac{1}{s}B \tag{11}$$

και λύνοντας το σύστημα μπορεί να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς.

Άσκηση: Ασκήσεις στα σφάλματα

(α) Τι σφάλμα θέσης έχει το σύστημα $H(s) = \frac{s+9}{s^2+7s+3}$ αν συνδεθεί σε μοναδιαία αρνητική ανάδραση;



Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $H_c = \frac{H}{1+H} = \frac{s+9}{s^2+7s+3+s+9}$. Το σφάλμα θέσης στη μόνιμη κατάσταση είναι το $\lim_{s\to 0} s(1-H_C)\frac{1}{s}$, ή θυμόμαστε ότι $e_{ss} = \frac{1}{1+K_P}$ όπου $K_P = \lim_{s\to 0} t$.

Ισχύει:

$$
\begin{aligned}
K_p &= \lim_{s\to 0} \cancel{s} \frac{s+9}{s^2+7s+3} = 3 \\
e_{ss} &= \frac{1}{4} = 0.25\%
\end{aligned}
$$

(β) Έστω συνάρτηση μεταφοράς που συνδέεται σε μοναδιαία αρνητική ανάδραση:

$$H(s) = \frac{2(s+10)}{s(s^2+2)(s+5)}$$

Τότε τα σφάλματα είναι:

$$
\begin{aligned}
e_{sv} &= \lim_{s\to 0} \cancel{s}(1-H_c)\frac{1}{s^{\cancel{2}}} \\
K_v &= \lim_{s\to 0} Hs \\
e_{sv} &= \frac{1}{K_v} \\
e_{sa} &= \lim_{s\to 0} \frac{1}{\cancel{2}} s(1-H_c)\frac{\cancel{2}}{s^3} \\
K_a &= \lim_{s\to 0} H(s) \\
e_{sa} &= \frac{1}{K_a}
\end{aligned}
$$

2.2 Ταχύτητα

Η δεύτερη προδιαγραφή που θα μελετήσουμε για τα συστήματα είναι η ταχύτητα, δηλαδή το πόσο γρήγορα φτάνει ένα σύστημα στην επιθυμητή κατάσταση. Για να μελετήσουμε αυτήν την προδιαγραφή θα χρησιμοποιήσουμε ως είσοδο τη **μοναδιαία βηματική συνάρτηση** $u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$.

2.2.1 Σε πρωτοβάθμια συστήματα

Ως παράδειγμα, ας δούμε το παρακάτω σύστημα:

$$r(s) \longrightarrow \boxed{\frac{k}{s+a}} \longrightarrow y(s)$$

με $H(s) = \frac{k}{s+a}$.

Θυμόμαστε ότι το σφάλμα $r(s) - y(s)$ στη μόνιμη κατάσταση ($t \to \infty$) είναι ορισμένο, και κάνοντας υπολογισμούς, η έξοδος στη μόνιμη κατάσταση προκύπτει:

$$\lim_{s\to 0} sy(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s}\frac{\cancel{1}}{\cancel{s}}\frac{k}{s+a} = \frac{k}{a}$$

και για να μηδενιστεί το σφάλμα, επιθυμούμε η έξοδος να είναι μοναδιαία, άρα πρέπει $\frac{k}{a} = 1 \implies k = a$.

Σε μορφή σταθεράς χρόνου, η H γράφεται:

$$H(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$$

όπου

$$\tau = \frac{1}{a}$$

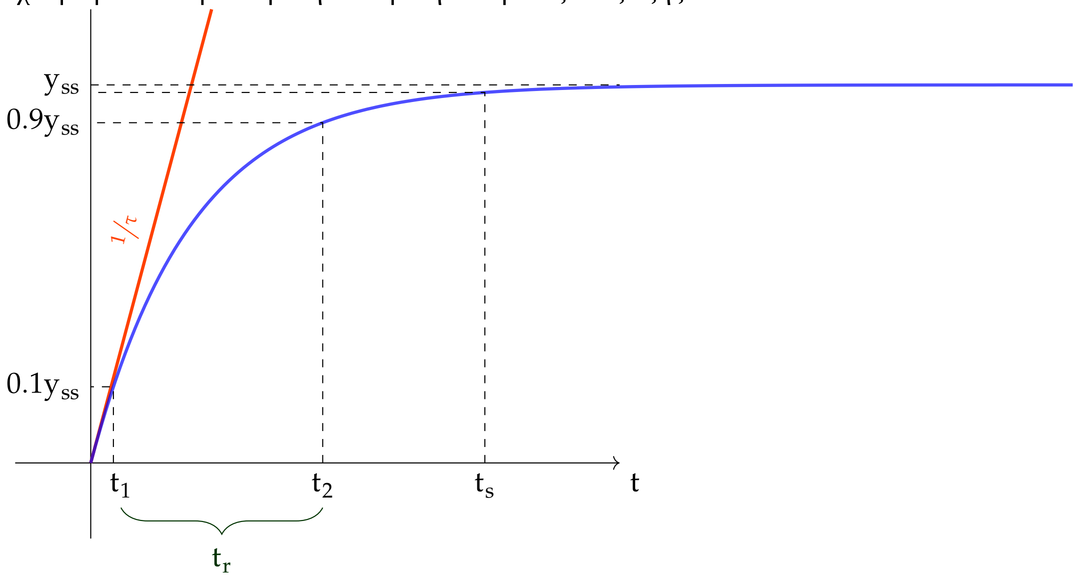
Έχουμε θεωρήσει ότι $k = a$, επομένως το σφάλμα είναι μηδενικό.
Για να βρούμε την έξοδο στο πεδίο του χρόνου, έχουμε ότι:

$$y(s) = \frac{1}{\tau s + 1}\frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{\tau}{\tau s + 1}$$

και, χρησιμοποιώντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace:

$$y(t) = y_{ss}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

Έχουμε μια αποσβεννύμενη απόκριση που μοιάζει ως εξής:



Θα ψάξουμε μετά από πόσο χρόνο έχει φτάσει η έξοδος στο 10% και στο 90% της επιθυμητής τιμής:

$$1 - e^{-t_1/\tau} = 0.1 \implies t_1 = \tau(\ln 10 - \ln 9)$$
$$1 - e^{-t_2/\tau} = 0.9 \implies t_2 = \tau(\ln 10)$$

Ορισμός 2.4: Χρόνος ανόδου σε πρωτοβάθμιο σύστημα

Υπολογίζουμε τον **χρόνο ανόδου** t_r (rise), δηλαδή τον χρόνο μεταξύ της στιγμής που η έξοδος είναι στο 10% και στο 90% της επιθυμητής:

$$t_r = t_2 - t_1 \implies \boxed{t_r = \tau \ln 9 \approx 2.2\tau}$$

Ορισμός 2.5: Χρόνος αποκατάστασης σε πρωτοβάθμιο σύστημα

Ορίζουμε το **χρόνο αποκατάστασης** t_s (steady), ως εξής:

$$1 - e^{-t_s/\tau} = 0.98 \implies \boxed{t_s \approx 4\tau}$$

Επιβεβαιώνουμε δηλαδή ότι η σταθερά χρόνου τ σχετίζεται με την ταχύτητα απόκρισης του συστήματος. Όσο μεγαλύτερη είναι η σταθερά χρόνου, τόσο μικρότερη είναι η ταχύτητά του.

Μάλιστα, αν βρούμε το σφάλμα ταχύτητας του συστήματος αυτού, θα δούμε ότι γίνεται μικρότερο, όσο μεγαλώνει η ταχύτητά του.

Συνδυασμός συστημάτων Έστω δύο εν σειρά συστήματα:

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

και πιο συγκεκριμένα:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad U(s) = \frac{N_u(s)}{D_u(s)}$$

επομένως, αν σπάσουμε σε κλάσματα όπως γνωρίζουμε από τα μαθηματικά:

$$Y(s) = \frac{N}{D}\frac{N_u}{D_u} = \frac{N_1}{D} + \frac{N_2}{D}$$

που μπορεί να δώσει ένα αποτέλεσμα της μορφής:

$$\frac{A}{s+p} + \cdots + \frac{B}{(s+p)^k} + \frac{C}{(s+a)^2+\beta}$$

ή, αντίστοιχα

$$(A_1 + A_2 t + \cdots)e^{-pt} + \ldots$$

Παράδειγμα Έστω το σύστημα:

$$H_z(s) = \frac{k(s+b)}{s+a}$$

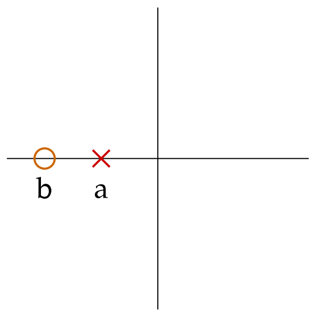
με τελική τιμή (είσοδος = $\frac{1}{s}$):

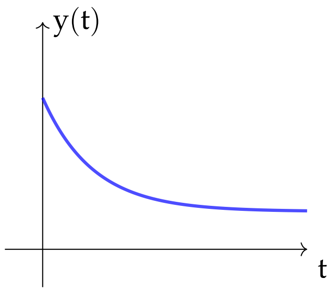
$$y_{ss} = \lim_{s\to 0} sy(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{k(s+b)}{s+a}\frac{1}{s} = \frac{kb}{a}$$

και αρχική τιμή (για $t = 0$):

$$y(0) = \lim_{t\to 0} y(t) = \lim_{s\to\infty} sy(s) = k$$

δηλαδή αυτό το σύστημα δεν ξεκινάει από μηδενική αρχική τιμή.





Μελέτη μηδενικών Θα εξετάσουμε την επίδραση των μηδενικών στην έξοδο του συστήματος.

Έστω ένα σύστημα με έξοδο στο χρόνο:

$$y_z(t) = \frac{kb}{a} + \frac{k(a-b)}{a}e^{-at}$$

Το οποίο αναλύουμε περαιτέρω:

$$\begin{aligned}
&= \overbrace{\frac{kb}{a}}^{y_{ss}}\left(1 - e^{-at}\right) + ke^{-at} \\
&= y_{ss}\left(1 - e^{-at}\right) + \frac{\dot{y}(t)}{b}
\end{aligned}$$

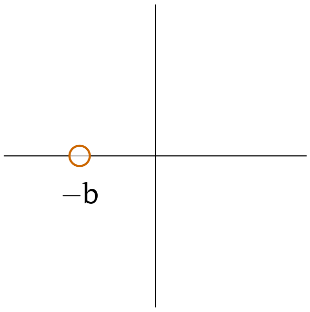
(Τοποθετήσαμε την παράγωγο στην τελευταία σχέση, επειδή μαθηματικά φαίνεται ότι $y(t) = \frac{kb}{a}(1 - e^{-at}) \implies \dot{y} = kbe^{-at}$).

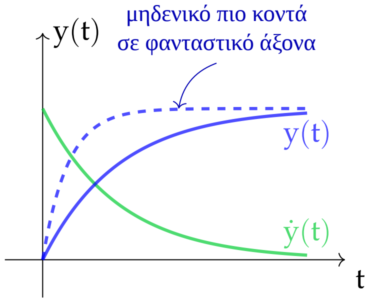
Αναλύοντας κατά Laplace, προκύπτει:

$$Y_z(s) = \frac{kb}{a}\frac{1}{s} + \frac{k(a-b)}{a}\frac{1}{s+a} = \frac{k(b+s)}{s(a+s)}$$

και παρατηρούμε το μηδενικό στο $-b$ και τους πόλους στο 0 και στο $-a$.

Γραφικά:





Το μηδενικό $-b$ της συνάρτησης εκφράζεται από την τιμή $\frac{\dot{y}(t)}{b}$ στη συνάρτηση $y_z(t)$.

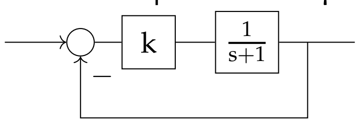
Παρατηρούμε ότι αν υπάρχει μηδενικό, και όσο πιο κοντά πλησιάζει στον φανταστικό άξονα, τόσο μεγαλύτερη επίδραση έχει στην έξοδο του συστήματος, αυξάνοντας την ταχύτητά του.

Άσκηση: Ένα απλό πρόβλημα πρωτοβάθμιου συστήματος

Έστω ένα σύστημα:

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

Αυτό έχει πόλο στο -1, και σταθερά χρόνου $\tau = 1$, άρα χρόνο αποκατάστασης $t_s = 4$ sec, κάτι που είναι πολύ μεγάλο και δεν μας αρέσει καθόλου. Επομένως, προσθέτουμε έναν βρόγχο ανάδρασης μαζί με τον απλούστερο δυνατό ελεγκτή, που είναι το αναλογικό κέρδος $\boxed{k}$:



Απαιτούμε χρόνο αποκατάστασης $t_s \leq 1$ sec, και το ζητούμενο της άσκησης είναι η περιοχή τιμών του k για τις οποίες ικανοποιείται αυτή η προδιαγραφή.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$H(s) = \frac{\frac{k}{s+1}}{1 + \frac{k}{s+1}} = \frac{k}{s + (k+1)}$$

Αυτό έχει σταθερά χρόνου $\tau = \frac{1}{k+1}$, επομένως:

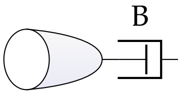
$$t_s \approx 4\tau = \frac{4}{k+1}$$

Πρέπει:

$$t_s \leq 1 \implies \frac{4}{k+1} \leq 1 \implies k \geq 3.$$

2.2.2 Σε δευτεροβάθμια συστήματα

Ένα παράδειγμα δευτεροβάθμιου συστήματος Έστω το σύστημα ενός περιστρεφόμενου κυλίνδρου με απόσβεση:

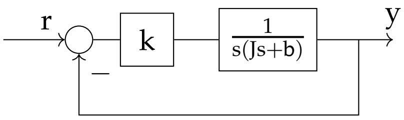


$$u = J\ddot{y} + B\dot{y}$$

Παραπάνω δίνεται η διαφορική εξίσωση του συστήματος, που θα μετασχηματίσουμε κατά Laplace:

$$Js^2 y(s) + Bsy(s) = u(s)$$
$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s(Js+b)}$$

Αντίστοιχα με το προηγούμενο παράδειγμα, προσθέτουμε έναν ελεγκτή και έναν βρόγχο ανάδρασης:



με έξοδο:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\frac{k}{s(Js+b)}}{1+\frac{k}{s(Js+b)}} = \frac{k}{Js^2+Bs+k} = \frac{k/J}{s^2+B/Js+k/J} = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2} = \boxed{\frac{\omega_n^2}{(s+\sigma)^2+\omega_d^2}}$$

όπου θέσαμε:

$$\begin{aligned}
\omega_n^2 &= k/J & &\implies \omega_n = \sqrt{\frac{k}{J}} \\
2\zeta\omega_n &= B/J, \quad \zeta \le 1 & &\implies \zeta = \frac{B}{2\sqrt{Jk}} \\
s_{1,2} &= -\sigma \pm j\omega_d & &\text{(ρίζες παρ/τή)} \\
\\
\sigma &= \zeta\omega_n \\
\omega_d &= \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}
\end{aligned}$$

Ορισμός 2.6: Σταθερές Συστημάτων 2ου βαθμού

- ω_n: **φυσική συχνότητα**
- ζ: **συντελεστής απόσβεσης**
- ω_d: **συχνότητα ταλαντώσεων**

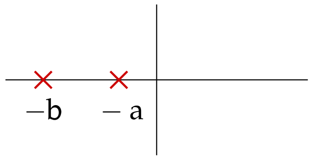
Θεώρημα 2.1: Συντελεστής απόσβεσης συστημάτων 2ου βαθμού

- Αν $\zeta < 1$, οι πόλοι του συστήματος είναι **μιγαδικοί συζυγείς**.
- Αν $\zeta = 1$, το σύστημα έχει έναν **διπλό πραγματικό πόλο**.
- Αν $\zeta > 1$, το σύστημα έχει δύο **πραγματικούς πόλους**.

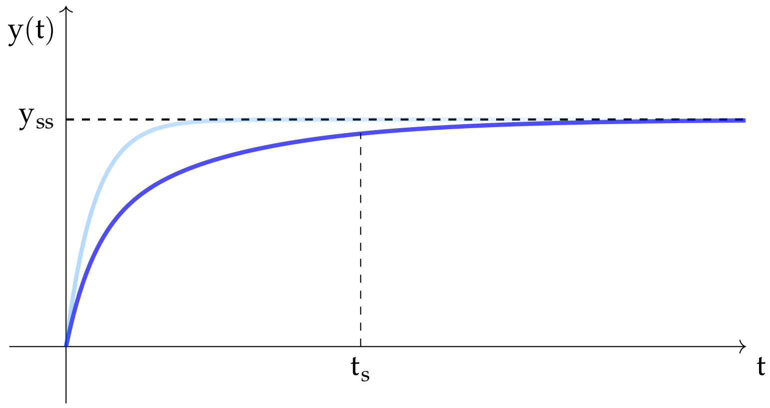
Μετά από πράξεις που δεν παρουσιάζονται, η έξοδος του συστήματος ξεχωρίζεται στις δύο παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν έχουμε **δύο πραγματικούς πόλους** $p1,\ p2$:

$$y(t) = y_{ss}\left[1 + \frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2}\left(\frac{e^{p_1 t}}{p_1} - \frac{e^{p_2 t}}{p_2}\right)\right]$$



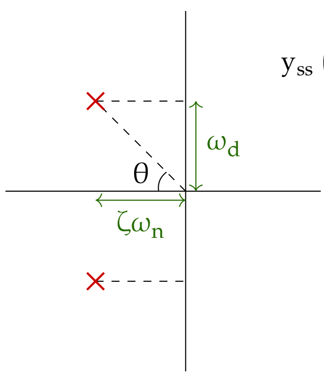
Δηλαδή η απόκριση του συστήματος αποτελείται από το άθροισμα δύο εκθετικά αποσβεννύμενων αποσβέσεων. Πρακτικά, παίζει ρόλο ο πόλος που προκαλεί την πιο αργή απόσβεση (ειδικά αν οι πόλοι απέχουν αρκετά μεγάλη απόσταση μεταξύ τους), καθώς η άλλη απόσβεση εξαλείφεται γρήγορα. Ο αργός πόλος επιβάλλει το ρυθμό του.

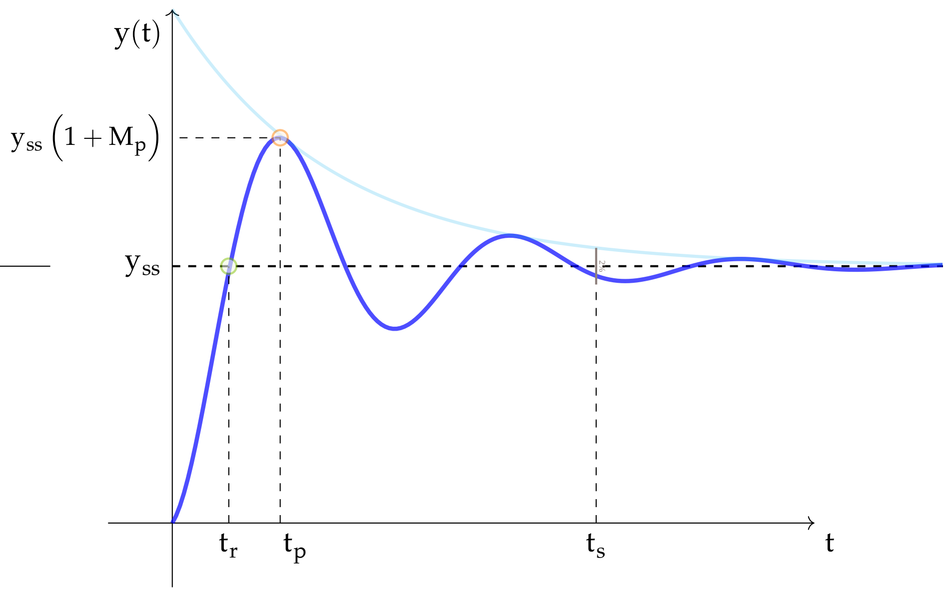


- Αν έχουμε **δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες** $-\sigma \pm j\omega_d$:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_{ss}\left[1 - e^{-\zeta\omega_n t}\cdot\left(\cos\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\omega_d t\right)\right] \\ &= y_{ss}\left[1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot\sin\left(\omega_d t + \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right] \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η έξοδος του συστήματος μοιάζει κάπως έτσι:





Αποδεικνύεται επίσης ότι ισχύουν αρκετές σχέσεις, που παρουσιάζονται παρακάτω.

Θεώρημα 2.2: Χρόνος αποκατάστασης σε δευτεροβάθμιο σύστημα με συζυγείς πόλους

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

(Προσοχή! Αυτή η σχέση ισχύει μόνο όταν έχουμε δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες, και όχι πραγματικές!)

Ο χρόνος ανόδου ορίζεται διαφορετικά από τα πρωτοβάθμια συστήματα:

Ορισμός 2.7: Χρόνος ανόδου σε δευτεροβάθμιο σύστημα με συζυγείς πόλους

Ως **χρόνος ανόδου** ορίζεται ο χρόνος μέχρι η έξοδος να φτάσει την πρώτη φορά στην επιθυμητή τιμή.
Αποδεικνύεται ότι είναι ίσος με:

$$\boxed{t_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d}}$$

όπου θ η γωνία του ενός πόλου.

Ορισμός 2.8: Χρόνος Υπερύψωσης

Ο χρόνος t_p (peak) μέχρι η έξοδος να φτάσει στην πρώτη κορυφή της ημιτονοειδούς κυματομορφής είναι:

$$\boxed{t_p = \frac{\pi}{\omega_d}}$$

Βλέπουμε ότι αρκετές στιγμές η έξοδος έχει τιμή μεγαλύτερη της εξόδου. Η υπερύψωση αυτή μπορεί σε κάποιες περιπτώσεις να μην είναι επιθυμητή, επειδή για παράδειγμα δεν θέλουμε το ρεύμα σε ένα κύκλωμα να ξεπεράσει μια μέγιστη τιμή, ή ο βραχίονας ενός ρομπότ να φτάσει έξω από κάποια όρια.

Ορισμός 2.9: Υπερύψωση

Αποδεικνύεται ότι το **ποσοστό υπερύψωσης** της πρώτης κορυφής είναι:

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)} = e^{-\sigma t_p}$$

Η πρώτη κορυφή στην οποία έχουμε υπερύψωση φτάνει στην τιμή:

$$y\left(t_p\right) = y_{ss}(1 + M_p)$$

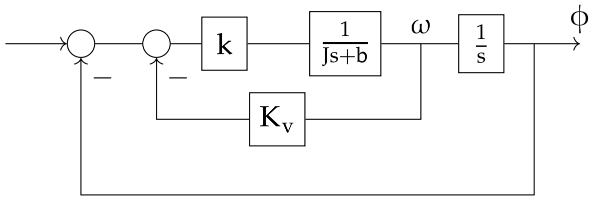
Αυξάνοντας τη σταθερά k, μειώνουμε τους χρόνους t_p και t_r, καθώς και την M_p, αλλά αυξάνεται το ζ και η συχνότητα των αποσβεννύμενων ταλαντώσεων, δηλαδή το σύστημα γίνεται πιο "ζωηρό".

Τέλος, για τη γωνία του πόλου, αποδεικνύεται ότι:

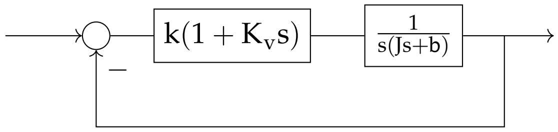
$$\boxed{\cos\theta = \zeta}$$

Παραδείγματα συστήματος δεύτερης τάξης

(α)



(β)



(α) Εκτελούμε πράξεις για να βρούμε την απόκριση του συστήματος:

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{1}{s}\omega && \Longrightarrow \\
s\phi &= \omega && \Longrightarrow \\
s\phi &= \frac{k}{Js+b}\cdot\left[r(s) - K_v\omega - \phi\right] && \overset{(12)}{\Longrightarrow} \\
s\phi &= \frac{k}{Js+b}\left[r(s) - sK_v\phi - \phi\right] && \Longrightarrow \\
s\phi(Js+b) &= k\left[r(s) - sK_v\phi - \phi\right] && \Longrightarrow \\
\phi\left[Js^2 + bs + kK_vs + k\right] &= kr(s) && \Longrightarrow \\
\frac{\phi}{r} &= \frac{k}{Js^2 + (b + kK_v)s + k} && \Longrightarrow \\
H(s) &= \frac{{}^{k}\!/\!{}_{J}}{s^2 + \left(\frac{B+kK_v}{J}\right)s + {}^{k}\!/\!{}_{J}}
\end{aligned}
\tag{12}
$$

(β) Η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$
H(s) = \frac{{}^{K}\!/\!{}_{J}(1 + K_v s)}{s^2 + \left(\frac{B+kK_v}{J}s\right) + {}^{K}\!/\!{}_{J}}
$$

Παρατηρούμε ότι τα δύο συστήματα έχουν παρόμοιες συναρτήσεις μεταφοράς, αλλά το δεύτερο έχει ένα μηδενικό.

Παράδειγμα με μηδενικό Έστω μια συνάρτηση μεταφοράς που έχει μηδενικό στο $-z$:

$$
\begin{aligned}
H_z(s) &= \frac{b(s+z)}{s^2 + a_1 s + a_0} \\
&= y_{ss}\frac{{}^{\omega_n^2}\!/\!{}_{z}(s+z)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\
&= y_{ss}\boxed{\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \frac{s}{z}\left(\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n + \omega_n^2}\right)}
\end{aligned}
$$

Η τελευταία σχέση, αν παρατηρήσουμε ότι ο τελεστής s εκφράζει την **παραγώγιση** μιας συνάρτησης στο πεδίο του χρόνου, βλέπουμε ότι ισχύει η σχέση $y_z(t) = y(t) + \frac{\dot{y}(t)}{z}$:

$$
\boxed{y_z(t) = \underbrace{y(t)}_{\text{έξοδος χωρίς μηδενικό}} + \underbrace{\frac{\dot{y}(t)}{z}}_{\text{επίδραση μηδενικού}}}
$$

Άσκηση: Συνάρτηση χωρίς και με μηδενικό

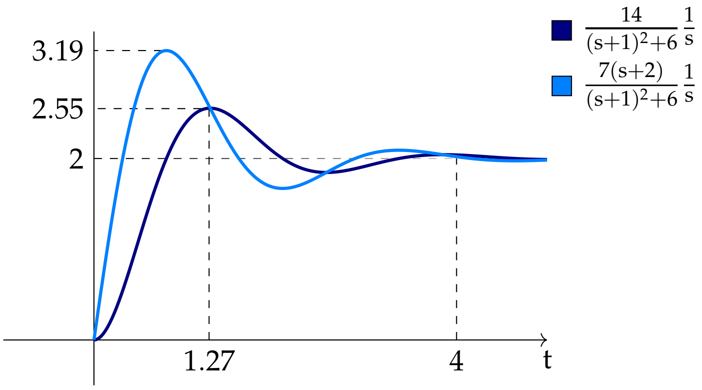
Έστω οι συναρτήσεις μεταφοράς:

$$H_a = \frac{14}{(s+1)^2+6}, \quad H_b = \frac{7(s+2)}{(s+1)^2+6}$$

με τελική έξοδο (είσοδος βηματική):

$$y_{ss_1} = \lim_{s\to 0} s\frac{14}{(s+1)^2+6}\frac{1}{s} = 2$$
$$y_{ss_2} = \lim_{s\to 0} s\frac{7(s+2)}{(s+1)^2+6}\frac{1}{s} = 2$$

Αν προσομοιώσουμε/εφαρμόσουμε τύπους, η έξοδος των συστημάτων θα είναι:



Βλέπουμε ότι το σύστημα με το μηδενικό έχει πιο γρήγορη απόκριση, αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται και η υπερύψωση.

Συνήθως το ζ ως προδιαγραφή είναι ανάμεσα στο 0.4 και 0.8, ενώ αν δεν θέλουμε καθόλου υπερύψωση, παίρνουμε $\zeta \geq 1$, που οδηγεί πραγματικές ρίζες.

Άσκηση

Ποιό από τα παρακάτω συστήματα θα εμφανίσει τη μεγαλύτερη υπερύψωση, ως απόκριση στη μοναδιαία βηματική συνάρτηση;

(α) $\dfrac{8}{s^2+2s+1}$

(β) $\dfrac{48}{s^2+2s+16}$

(γ) $\dfrac{48}{s^2+8s+16}$

(δ) $\dfrac{8}{s^2+2s+4}$

Λύση

Για την κάθε μία από τις παραπάνω συναρτήσεις έχουμε, από τους τύπους:

(α) $\zeta = 1 \implies$ δεν υπάρχει υπερύψυση!

(β) $\zeta = \frac{1}{4} \implies M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \simeq 0.44$

(γ) $\zeta = 1 \implies$ δεν υπάρχει υπερύψωση!

(δ) $\zeta = \frac{1}{2} \implies M_p \simeq 0.16$

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **(β)**.

Άσκηση

Ποιό από τα παρακάτω συστήματα έχει ταχύτερη απόκριση;

(α) $\dfrac{s+10}{(s+2)(s+5)}$

(β) $\dfrac{s+1}{(s+2)(s+5)}$

(γ) $\dfrac{10}{(s+2)(s+5)}$

(δ) $\dfrac{s+3}{(s+2)(s+5)}$

Λύση

Το ταχύτερο σύστημα είναι αυτό με το πιο "σημαντικό" μηδενικό, δηλαδή αυτό που βρίσκεται πιο κοντά στον φανταστικό άξονα, άρα το **(β)**, με μηδενικό $z = -1$.

Άσκηση

Να συγκριθούν τα συστήματα ως προς ταχύτητα απόκρισης:

(α) $\dfrac{10}{(s+5)^2+3}$

(β) $\dfrac{10(s+2)}{(s+5)^2+3}$

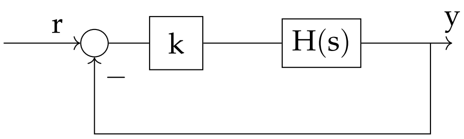
(γ) $\dfrac{10(s+3)}{(s+5)^2+3}$

Λύση

Το (β) είναι το (α) με πρόσθεση της παραγώγου του (α) διά 2, ενώ το (γ) είναι το (α) με πρόσθεση της παραγώγου του (α) διά 3. Επομένως το **(β)**, που έχει πιο σημαντικό μηδενικό, είναι ταχύτερο.

Άσκηση

Έστω ένα σύστημα κλειστού βρόχου:



όπου $H(s) = \dfrac{10}{(s+6)(s+7)}$.

Θέλουμε να βρεθεί η **περιοχή τιμών** της σταθεράς k, ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω προδιαγραφές:

$$e_{ss} < 0.5$$
$$M_p < 0.1$$
$$t_s < 660 \text{ ms}$$

Λύση

Έχουμε, για κάθε προδιαγραφή:

1. Για το e_{ss}:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_{pos}} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} kH(s)} = \frac{1}{1+\lim_{s\to 0} k\frac{10}{(s+6)(s+7)}} = \frac{1}{1+k\frac{10}{6\cdot 7}}$$

$$e_{ss} < 0.5 \implies \boxed{k > 4.2}$$

2. Για το $M_p < 0.1$:

$$\ln M_p = \frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$\implies \zeta = \frac{\left|\ln M_p\right|}{\sqrt{\ln^2 M_p - \pi^2}}$$

$$\implies \zeta > \frac{|\ln 0.1|}{\sqrt{\ln^2 0.1 + \pi^2}} \implies \boxed{\zeta > 0.59}$$

Για να χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα που βρήκαμε για το ζ, πρέπει να το εφαρμόσουμε επάνω στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο του συστήματος, που μετά από πράξεις προκύπτει:

$$s^2 + \underbrace{13}_{\zeta\omega_n} s + \underbrace{10k+42}_{\omega_n^2}$$

Επομένως θέλουμε:

$$\zeta = \frac{13}{2\sqrt{42+10k}} > 0.59 \implies \boxed{k < 8.3}$$

3. Αν για τις παραπάνω προδιαγραφές υπολογίσουμε το χρόνο αποκατάστασης

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{13} \simeq 0.3077 \simeq 308 \text{ ms}$$

φαίνεται ότι ήδη πληροί την προδιαγραφή $t_s < 660$ ms.

Σε διαφορετική περίπτωση, αν δηλαδή για αυτό το σύστημα μάς δινόταν μια προδιαγραφή που δεν ικανοποιούνταν (π.χ. $t_s < 220$ ms), δεν θα ήταν δυνατό να λυθεί η άσκηση με αυτό το σύστημα, αλλά θα έπρεπε να προστεθεί ένας ακόμα ελεγκτής.

2.2.3 Για συστήματα μεγαλύτερου βαθμού

Ένα σύστημα μεγαλύτερου από 2 βαθμού μπορεί να έχει τη μορφή:

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{k(s+z_1)\cdots(s+z_n)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)\left[(s+\zeta_\kappa\omega_k)^2+(\omega_{d_k})^2\right]}$$

Αν αναλύσουμε σε απλά κλάσματα το παραπάνω, χωρίζοντας πραγματικούς και μιγαδικούς συζυγείς πόλους, λαμβάνουμε:

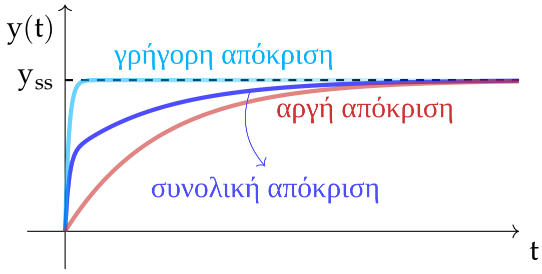
$$y(s) = \frac{a}{s} + \sum_{i}^{n} \frac{a_i}{s+p_i} + \sum_{k}^{q} \frac{b_k(s+\zeta_k\omega_k) + c_k\omega_{kd}}{s^2 + 2\zeta_k\omega_k s + \omega_k^2}$$

Και, μετασχηματίζοντας αντίστροφα κατά Laplace

$$y(t) = a + \sum a_i e^{-p_i t} + \sum b_k e^{-\zeta_k\omega_k t} \cos \omega_d t + \sum c_k e^{-\zeta_k\omega_k t} \sin \omega_d t$$

Απλοποίηση συστημάτων Σε αυτό το σημείο κάνουμε μια σημαντική παρατήρηση: Αν έχουμε δύο μακρινούς πόλους, για παράδειγμα -2 και -20, που δίνουν αντίστοιχα αποκρίσεις:

$$e^{-2t}, \quad e^{-20t}$$



Η πιο *αργή* απόκριση e^{-2t} κυριαρχεί τη *γρηγορότερη* απόκριση e^{-20t}, η οποία αποσβένεται γρήγορα και δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα.

Επομένως, **μόνο όταν ασχολούμαστε με την ταχύτητα απόκρισης ενός συστήματος**, μπορούμε προσεγγιστικά να απαλλαγούμε από τους γρήγορους πόλους, αυτούς δηλαδή που βρίσκονται *πιο μακριά από τον φανταστικό ημιάξονα*.

Παράδειγμα Στη συνάρτηση μεταφοράς $\frac{10}{\left[(s+2)^2+5\right](s+10)}$ μπορούμε να απαλλαχθούμε από τον πόλο $p = -10$, αλλά προσέχουμε ώστε **να παραμείνει ίδιο το DC κέρδος** του απλοποιημένου συστήματος. Δηλαδή η απλοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς θα προκύψει:

$$\frac{K}{(s+2)^2+5}$$

Για $s = 0$, η αρχική συνάρτηση έχει κέρδος:

$$\text{gain}_1 = \frac{10}{(2^2+5)(0+10)} = \frac{1}{9}$$

και η δική μας απλοποίηση έχει κέρδος:

$$\text{gain}_2 = \frac{K}{(0+2)^2+5} = \frac{K}{9}$$

Επομένως, αφού $\text{gain}_1 = \text{gain}_2$, προκύπτει $K = 1$.

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{100(s+20)}{(s+2)(s+50)}$$

Επειδή εδώ έχουμε μηδενικό, δεν μπορούμε να απαλλαγούμε από τον πόλο, διότι θα αλλάξει εντελώς η απόκριση της συνάρτησης.

Επομένως γενικά προσέχουμε:

Προϋποθέσεις απλοποίησης πόλου

1) Διατηρούμε ίδιο το DC κέρδος
2) Προσοχή στην κανονικότητα του συστήματος (διαφορά αριθμού ριζών αριθμητή και παρονομαστή)
3) Προσοχή σε μηδενικά κοντά σε πόλο

Άσκηση: Παράδειγμα με τρία συστήματα

Να βρεθούν οι βηματικές αποκρίσεις των παρακάτω συστημάτων στο χρόνο:

$$H_1 = \frac{3}{s+3}$$
$$H_2 = \frac{60}{(s+3)(s+20)}$$
$$H_3 = \frac{18.75(s+3.2)}{(s+3)(s+20)}$$

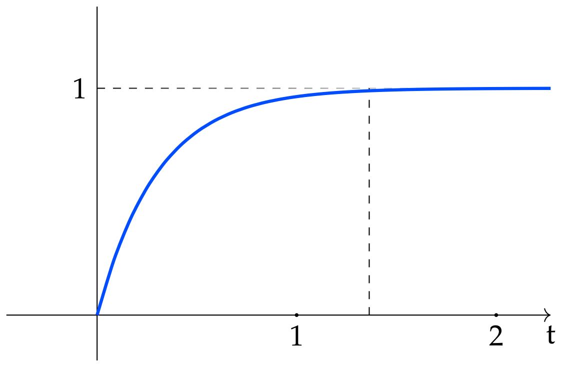
Λύση

1) Πολλαπλασιάζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς με την είσοδο $\frac{1}{s}$:

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{3}{(s+3)s} = \frac{A_1}{s} - \frac{B_1}{s+3} \\ &\overset{...}{=} \frac{1}{s} - \frac{1}{s+3} \end{aligned}$$

Άρα:

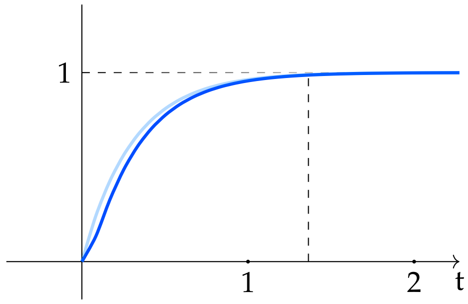
$$y(t) = 1 - e^{-3t}$$



2) Εικάζουμε ότι η απόκριση του συστήματος H_2 είναι παρόμοια με αυτήν του H_1, αφού έχουν ίδιο DC κέρδος ($H_1 \to \frac{3}{3} = 1, H_2 \to \frac{60}{3 \cdot 20} = 1$, και απλώς προστέθηκε ένας μακρινός πόλος στη συνάρτηση μεταφοράς.

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε:

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{A_2}{s} + \frac{B_2}{s+3} + \frac{C_2}{s+20}\right\} = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} + \frac{-1.18}{s+3} + \frac{0.18}{s+20}\right\} = 1 - 1.18e^{-3t} + 0.18e^{-20t}$$

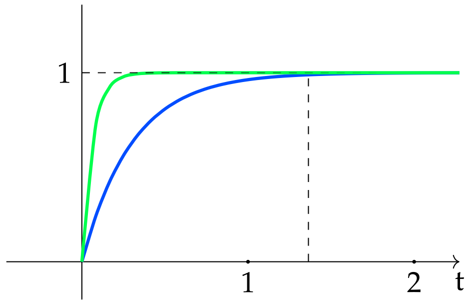


3) Εδώ έχουμε ένα μηδενικό $z = -3.2$ **κοντά** στον πόλο $p_1 = -3$, επομένως λύνουμε αναλυτικά:

$$\begin{aligned} y(s) &= H_3\frac{1}{s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{\Gamma}{s+20} \\ &\overset{\dots}{=} \frac{1}{s} - \frac{0.0735}{s+3} - \frac{0.92}{s+20} \end{aligned}$$

Άρα

$$y(t) = 1 - 0.0735e^{-3t} - 0.92e^{-20t}$$



Εδώ το μηδενικό επηρεάζει το αποτέλεσμα, και η γρήγορη απόκριση του $(s+20)$ κυριαρχεί, οπότε δε θα ήταν σωστό να την αγνοήσουμε.

2.2.4 Ασκήσεις

Άσκηση

Έχουμε τέσσερις συναρτήσεις μεταφοράς:

$$\begin{aligned} G_1 &= \frac{16}{(s+2)(s+8)} \\ G_2 &= \frac{16}{5}\frac{s+5}{(s+2)(s+8)} \\ G_3 &= \frac{16}{2+\Delta_z}\frac{s+2+\Delta_z}{(s+2)(s+8)} \\ G_4 &= 16\frac{s+1}{(s+2)(s+8)} \end{aligned}$$

Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η κρουστική απόκριση των παραπάνω συστημάτων.

Λύση

Ουσιαστικά θα πάρουμε έναν αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace.

G_1 Δουλεύουμε πάνω στο G_1 κλασικά, σπάζοντας σε επιμέρους κλάσματα:

$$G_1 = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+8}$$

και με κάποιον τρόπο βρίσκουμε τους συντελεστές:

$$A = \left.\frac{16}{s+8}\right|_{s=-2} = \frac{16}{6}$$
$$B = \left.\frac{16}{s+2}\right|_{s=-8} = -\frac{16}{6}$$

και ο αντίστροφος Laplace είναι:

$$\mathscr{L}^{-1}\{G_1\} = \frac{16}{6}\left(e^{-2t} - e^{-8t}\right)$$

G_2 Αντίστοιχα:

$$G_2 = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+8}$$
$$A = \left.\frac{16}{5}\frac{s+5}{s+8}\right|_{s=-2} = \frac{8}{5}$$
$$B = \left.\frac{16}{5}\frac{s+5}{s+2}\right|_{s=-8} = \frac{8}{5}$$

άρα:

$$\mathscr{L}^{-1}\{G_2\} = \frac{8}{5}\left(e^{-2t} + e^{-8t}\right)$$

Παρατηρούμε και στις δύο παραπάνω απαντήσεις την επίδραση του κυρίαρχου, δηλαδή του πιο αργού πόλου $s = -2$ (αντιστοιχεί στο e^{-2t}), ο οποίος είναι πιο κοντά στο 0.

G_3 Έχουμε:

$$G_3 = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s+8}$$
$$A = \left.\frac{16}{2+\Delta_z}\frac{s+2+\Delta_z}{s+8}\right|_{s=-2} = \frac{16}{6}\frac{\Delta_z}{2+\Delta_z}$$
$$B = \left.\frac{16}{2+\Delta_z}\frac{s+2+\Delta_z}{s+2}\right|_{s=-8} = -\frac{16}{6} + \frac{16}{6}\frac{\Delta_z}{6}$$
$$\mathscr{L}^{-1}\{G_3\} = \frac{16}{2+\Delta_z}\left(\frac{\Delta_z}{6}e^{-2t} + \left(1 - \frac{\Delta_z}{6}\right)e^{-8t}\right)$$

Παρατηρούμε ότι όσο πιο μικρό (κοντά στο 0) είναι το Δ_z, τόσο λιγότερη σημασία έχει ο όρος e^{-2t}, και επικρατεί ο γρηγορότερος e^{-8t}. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από τη συνάρτηση μεταφοράς: Αν θεωρήσουμε ότι $\Delta_z \to 0$, τότε εξαφανίζονται τα $(s+2)$ στον αριθμητή και παρονομαστή, και η συνάρτηση γίνεται $\frac{16}{2+0}\frac{1}{(s+8)}$.

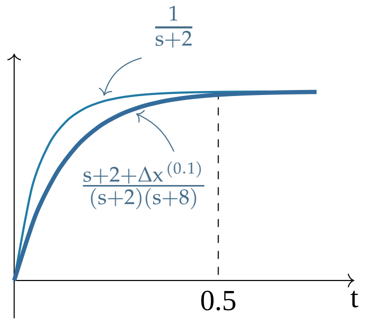
Για παράδειγμα, αν θέσουμε:

$$\Delta_z = 0.1$$

τότε η έξοδος θα γίνει:

$$\frac{16}{6}(\underbrace{0.047e^{-2t}}_{\text{μικρός όρος}} - 0.98e^{-8t})$$

Στην ουσία δηλαδή, το μηδενικό στη θέση $-(2+\Delta_z) \to -2$ ακυρώνει τον πόλο $s = -2$:

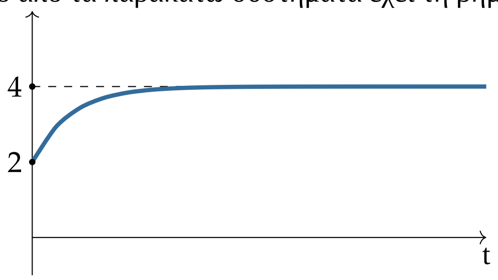


Μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το χρόνο αποκατάστασης του συστήματος:

$$t_s = 4\tau = 4\frac{1}{-p \leftarrow \text{ πόλος}} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Άσκηση

Ποιό από τα παρακάτω συστήματα έχει τη βηματική απόκριση που φαίνεται στο σχήμα;



(α) $\dfrac{12}{s+2}$

(β) $\dfrac{2(s+6)}{s+3}$

(γ) $\dfrac{2(s+3)}{s+2}$

(δ) $\dfrac{6}{s+3}$

Λύση

Για το κάθε σύστημα ψάχνουμε αρχική και τελική τιμή, ώστε να επιβεβαιώσουμε την απόκριση:

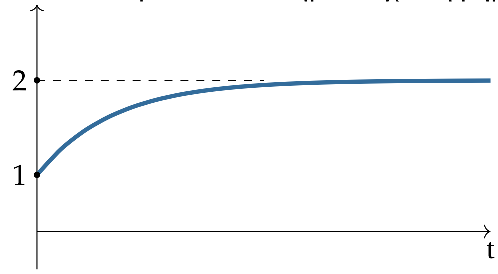
(α) $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s}\frac{12}{s+3}s = 0$ άρα δεν βολεύει.

(β) $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s}\frac{2(s+6)}{s+3}s = 2$ και $\lim\limits_{s\to 0} \frac{1}{s}\frac{2(s+6)}{s+3}s = 4$, που είναι οι επιθυμητές τιμές.

Άρα η σωστή απάντηση είναι η **(β)**.

Άσκηση

Ποιό από τα παρακάτω συστήματα έχει τη βηματική απόκριση που φαίνεται στο σχήμα;



(α) $\dfrac{4}{s+2}$

(β) $\dfrac{6}{s+2}$

(γ) $\dfrac{3(s+2)}{s+3}$

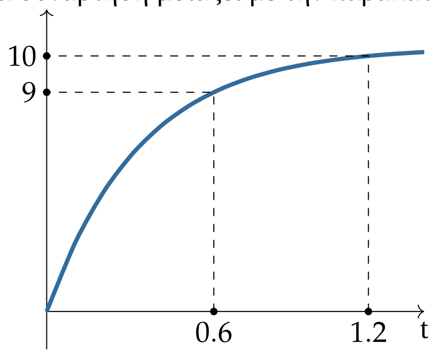
(δ) $\dfrac{s+4}{s+2}$

Λύση

Αντίστοιχα με παραπάνω, υπολογίζουμε αρχική και τελική τιμή για κάθε σύστημα. Η σωστή απάντηση είναι η **(δ)**, αφού ισχύει $\lim_{s\to\infty}\frac{s+4}{s+2} = 1$ και $\lim_{s\to 0}\frac{s+4}{s+2} = 2$.

Άσκηση

Ποιά συνάρτηση μοιάζει με την παρακάτω απόκριση;



(α) $\dfrac{10}{s+5}$

(β) $\dfrac{20}{s+2}$

(γ) $\dfrac{50}{s+2}$

(δ) $\dfrac{50}{s+5}$

Λύση

Η τελική τιμή της συνάρτησης είναι το 10, επομένως οι απαντήσεις (α) και (γ) απορρίπτονται, αφού το όριό τους στο ∞ δεν είναι 10.

Για να βρούμε τη σωστή απάντηση, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace των εναπομείναντων συναρτήσεων, ή πιο εύκολα, να παρατηρήσουμε ότι στα 1.2s η συνάρτηση φτάνει πολύ κοντά στην τελική της τιμή, δηλαδή για τη σταθερά χρόνου ισχύει $4\tau \approx 1.2 \implies \tau \approx 0.3$. Αυτή η σταθερά χρόνου αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση μεταφοράς $\frac{\alpha}{0.3s+1} \approx \frac{\alpha'}{s+3.33}$. Άρα η σωστή απάντηση είναι η **(δ)**.

Άσκηση

Ποιό από τα παρακάτω συστήματα έχει τη μεγαλύτερη ταχύτητα ανόδου;

(α) $\dfrac{s+10}{(s+2)^2+5}$

(β) $\dfrac{s+3}{(s+2)^2+5}$

(γ) $\dfrac{s+10}{(s+2)^2+10}$

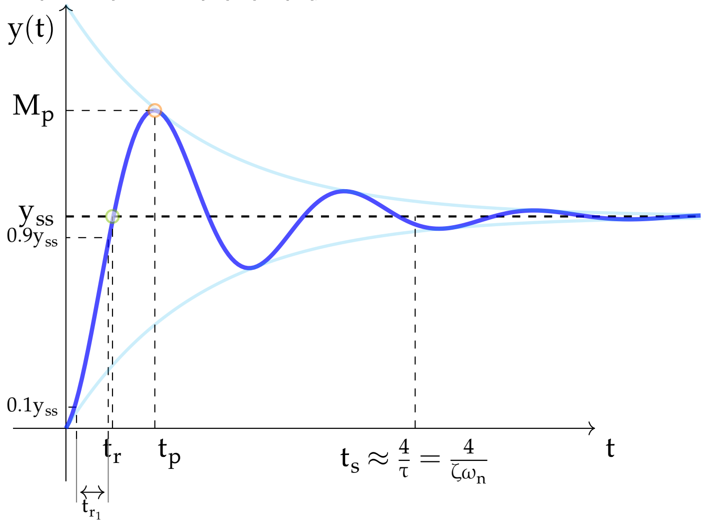
(δ) $\dfrac{s+3}{(s+2)^2+10}$

Λύση

Θυμίζουμε ότι οι παρονομαστές των παραπάνω συναρτήσεων έχουν γραφεί με τη μορφή $(s+\sigma)^2+\omega_d^2$, και έχουν λύση $\underline{-\sigma \pm j\omega_d}$.

Η ταχύτητα ανόδου εξαρτάται από τον χρόνο ανόδου.

Θυμόμαστε επίσης ότι για μεγαλύτερο ω_d ή μηδενικό z κοντά στον φανταστικό άξονα, έχουμε μικρότερο χρόνο ανόδου t_{r_1}, ενώ ο χρόνος ανόδου t_{r_1} ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται μέχρι η απόκριση να φτάσει από το 10% ως το 90% (προσοχή στη διαφορά από το χρόνο t_r μέχρι την πρώτη φορά που φτάνουμε στην επιθυμητή τιμή):



Η σωστή απάντηση είναι η **(δ)**, η οποία έχει το μεγαλύτερο ω_d και το μηδενικό $z=-3$ που είναι κοντινότερο στον άξονα.

(Βέβαια γρήγορη ταχύτητα ανόδου δεν σημαίνει και γρήγορη απόκριση).

Άσκηση

Πόσο πρέπει να είναι τα k_p ώστε να έχουμε μοναδιαίο DC κέρδος, και ποιός είναι ο χρόνος αποκατάστασης του κάθε συστήματος;

(α) $\dfrac{k_{p_1}}{s+3}$

(β) $\dfrac{k_{p_2}}{(s+3)(s+20)}$

Λύση

(α) $k_{p_1} = 3$, η χρονική σταθερά είναι $\tau = \frac{1}{3}$, άρα ο χρόνος αποκατάστασης προκύπτει $t_s = \frac{4}{3}$.

(β) $k_{p_2} = 60$, ο κυρίαρχος πόλος είναι ο πιο κοντινός ($s = -3$), και επομένως $\tau = \frac{1}{3}$ και $t_s = \frac{4}{3}$.

Σε περίπτωση που μας δινόταν $\dfrac{K_{p_2}(s+3.1)}{(s+3)(s+20)}$, το μηδενικό στο -3.1 θα αλληλοαναιρούνταν με τον πόλο στο -3, και επομένως ο κυρίαρχος πόλος θα ήταν στο -20.

Άσκηση

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{18}{s^2 + 11s + 18}$$

Ποιός είναι ο χρόνος αποκατάστασής της;

Λύση

Έχουμε **δύο πραγματικές ρίζες**, οπότε δεν είναι σωστό να ακολουθήσουμε τη μεθοδολογία με τα σ και ω_d.

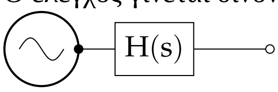
Οι πόλοι του συστήματος βγαίνουν -2 και -9, ο κυρίαρχος είναι ο -2, επομένως $t_s = \frac{4}{2} = 2$.

2.3 Εύρος ζώνης

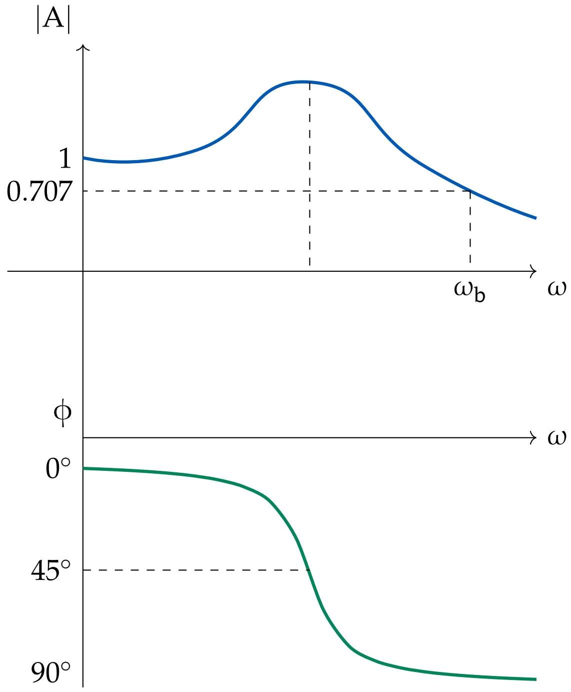
Το **εύρος ζώνης** είναι μία προδιαγραφή του συστήματος που σχετίζεται με το πεδίο της συχνότητας. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να απαιτήσει να έχουμε ένα συγκεκριμένο **εύρος ζώνης** ω_b, για παράδειγμα $\omega_b > a$.

Η μελέτη αυτής της προδιαγραφής μπορεί να μελετηθεί με τη βοήθεια των **διαγραμμάτων Bode** (προφ. "Μπόντε"), τα οποία εκφράζουν το πλάτος και τη φάση για κάθε συχνότητα.

Ο έλεγχος γίνεται δίνοντας ως είσοδο στο σύστημα ένα μεγάλο εύρος συχνοτήτων:

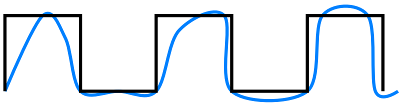


και στη συνέχεια κατασκευάζουμε δύο διαγράμματα, ένα για το πλάτος ως συνάρτηση της συχνότητας, και ένα για τη φάση, ως εξής:



Τα περισσότερα συστήματα είναι χαμηλοπερατά.

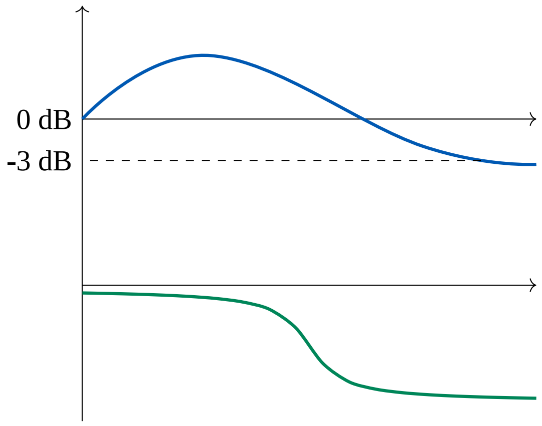
Όσο μεγαλύτερο είναι το εύρος ζώνης ενός συστήματος, τόσο ταχύτερη είναι η απόκριση του συστήματος. Αυτό μπορούμε να το διαπιστώσουμε αν σκεφτούμε την τετραγωνική κυματομορφή, που έχει συχνότητες που εκτείνονται μέχρι το άπειρο (αν θυμηθούμε τις σειρές Fourier), επομένως ένα σύστημα που θέλει να την αναπαραστήσει, όσο μεγαλύτερο εύρος ζώνης έχει, τόσο πιο γρήγορα θα αποκριθεί στην είσοδο.



Επομένως, είναι επιθυμητό να έχουμε μεγάλο εύρος ζώνης για να αυξήσουμε την ταχύτητα, αλλά πρέπει να λάβουμε σε αυτήν την περίπτωση υπ' όψιν και τον θόρυβο, ο οποίος βρίσκεται κυρίως στις υψηλότερες συχνότητες.

Τα διαγράμματα Bode γίνονται συνήθως σε λογαριθμική κλίμακα, που ορίζεται ως εξής:

$$20\log\left|\frac{\omega}{\omega_0}\right|$$



και ορίζουμε το εύρος ζώνης να είναι η απόσταση μεταξύ των συχνοτήτων στις οποίες η έξοδος έχει τιμή -3 dB, που αντιστοιχεί στην τιμή 0.707, αν το πλάτος 1 αντιστοιχεί σε 0 dB.

Προσοχή ότι η λογαριθμική κλίμακα στον οριζόντιο άξονα των συχνοτήτων δηλώνει ότι στην αρχή των αξόνων δεν έχουμε τη συχνότητα 0, αλλά απλώς μία μικρή συχνότητα.

Δεκαδικός λογάριθμος

Προσοχή! Με την πράξη log εννοούμε τον **δεκαδικό** λογάριθμο, και όχι τον φυσικό ln. Δηλαδή:

$$\log = \log_{10}$$

Επίσης ισχύει $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

2.3.1 Σε πρωτοβάθμια συστήματα

Ας ασχοληθούμε με το σύστημα $H(s) = \dfrac{1}{1+s\tau}$.

Στην απόκριση συχνότητας μάς ενδιαφέρει η έξοδος του συστήματος σε ημιτονοειδείς όρους, δηλαδή για $s = j\omega$, οπότε:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

Η απόκριση φάσης είναι:

$$\phi(\omega) = \operatorname{Arg}\left(H(j\omega)\right) = \operatorname{Arg}\left(\frac{1-j\omega\tau}{(1+j\omega\tau)(1-j\omega\tau)}\right) = -\tan^{-1}\frac{\overbrace{\frac{-\omega\tau}{(1+j\omega\tau)(1-j\omega\tau)}}^{\text{φανταστικό μέρος}}}{\underbrace{\frac{1}{(1+j\omega\tau)(1-j\omega\tau)}}_{\text{πραγματικό μέρος}}} = -\tan^{-1}(\omega\tau)$$

Η απόκριση συχνότητας τότε θα είναι:

$$\begin{aligned} 20\log\left|H(j\omega)\right| &= -20\log\left|1+j\omega\tau\right| \\ &= -20\log\left(1+\omega^2\tau^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= -10\log(1+\omega^2\tau^2) \end{aligned}$$

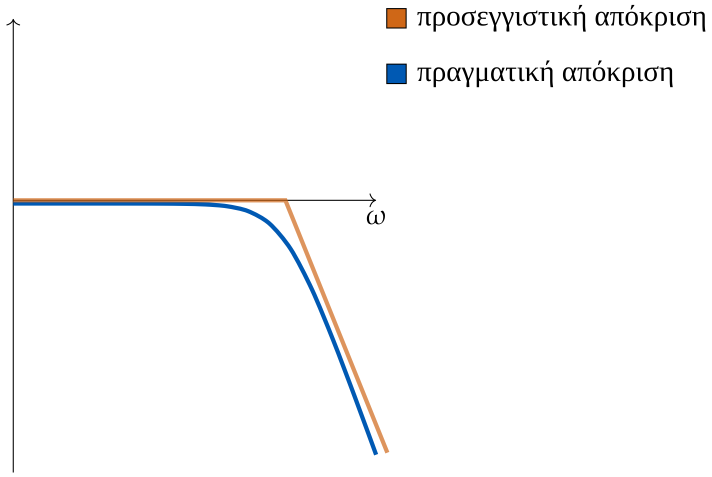
Ο σκοπός όμως είναι την παραπάνω έκφραση να γνωρίζουμε προσεγγιστικά πώς μπορεί να παρουσιαστεί σε διάγραμμα.

Ψάχνουμε τις ασύμπτωτες για την παραπάνω σχέση, και έχουμε:

$$\begin{cases} \text{για } \omega \ll \frac{1}{\tau} & = 0\ \text{dB} \\ \text{για } \omega \gg \frac{1}{\tau} & = -20\log\omega\tau = \underbrace{-20\log\omega}_{\omega_c=\frac{1}{\tau}} - 20\log\tau \end{cases}$$

(όπου ονομάζουμε την $\omega_c = \frac{1}{\tau}$ χαρακτηριστική συχνότητα του συστήματος)

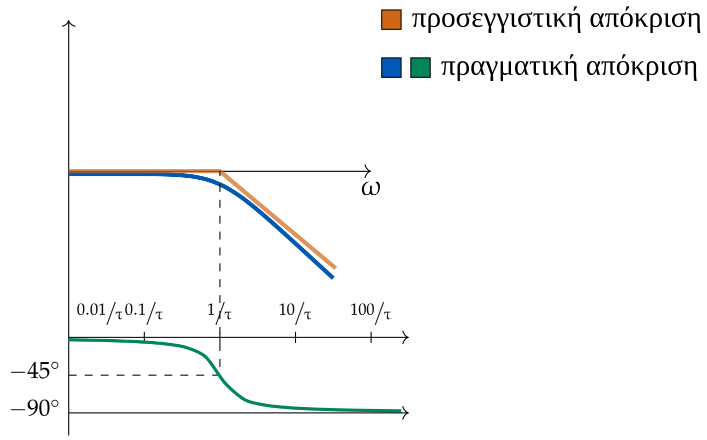
Έτσι, έχουμε δύο ασύμπτωτες ευθείες, και μπορούμε να προσεγγίσουμε τη συνάρτηση:



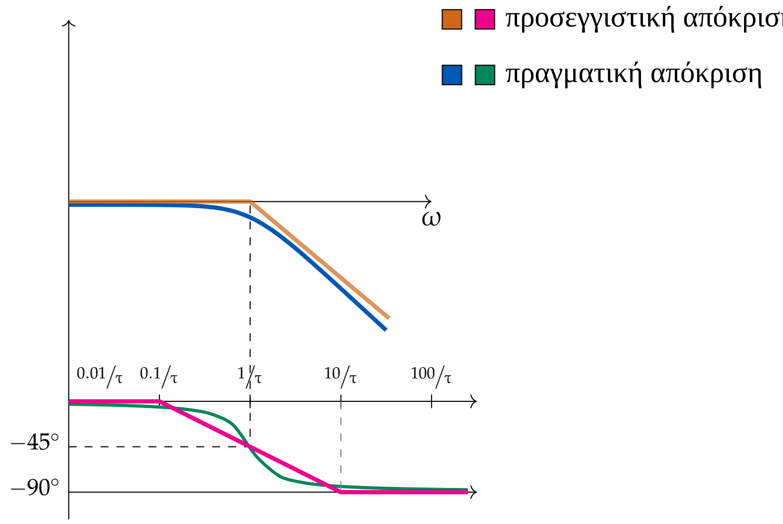
(Η χειρότερη προσέγγιση ίσως γίνεται στο σημείο όπου τέμνονται οι ευθείες, στο οποίο η πραγματική τιμή είναι $-10\log 2 = -3$ dB).

Για το σχεδιασμό του διαγράμματος φάσης, έχουμε:

$$\begin{cases} \text{για } \omega = 0 & = 0 \\ \text{για } \omega = \infty & = -90^\circ \\ \text{για } \omega = \omega_c & = -45^\circ \end{cases}$$



Επίσης, μπορούμε να κάνουμε μια γραμμική προσέγγιση αυτής της εξόδου στη φάση, θεωρώντας οριζόντια έξοδο μία δεκάδα πριν και μετά από τη χαρακτηριστική συχνότητα, και γραμμική ανάμεσα:



δηλαδή:

$$\phi = -45 - 45\log|\omega_t|$$

Αν είχαμε μια συνάρτηση με ένα κέρδος $\kappa \neq 1$, τότε στο διάγραμμα μέτρου απλώς προστίθεται μια σταθερά $20 \log \kappa$, και το διάγραμμα θα ανεβεί προς τα πάνω ή προς τα κάτω, ανάλογα με το αν $\kappa > 1$ ή $\kappa < 1$ αντίστοιχα.

Με τα διαγράμματα Bode μπορούμε επομένως να βρούμε την έξοδο του συστήματος σε ημιτονοειδή είσοδο. Για την απόκριση ταχύτητας, ενδιαφέρουν περισσότερο τα διαγράμματα πλάτους και όχι φάσης.

2.3.2 Σε δευτεροβάθμια συστήματα

Θυμίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς δευτεροβάθμιων συστημάτων:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

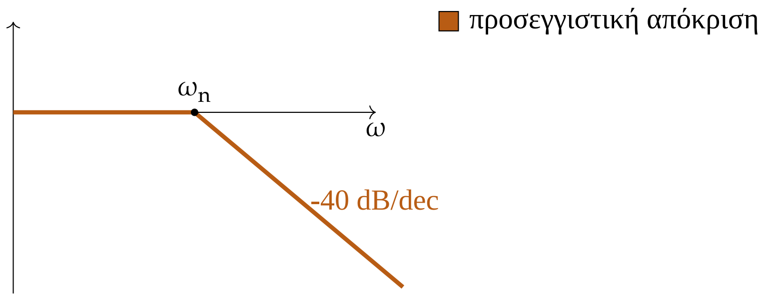
Όπως παραπάνω, για να πάρουμε την απόκριση συχνότητας θεωρούμε $s = j\omega$:

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

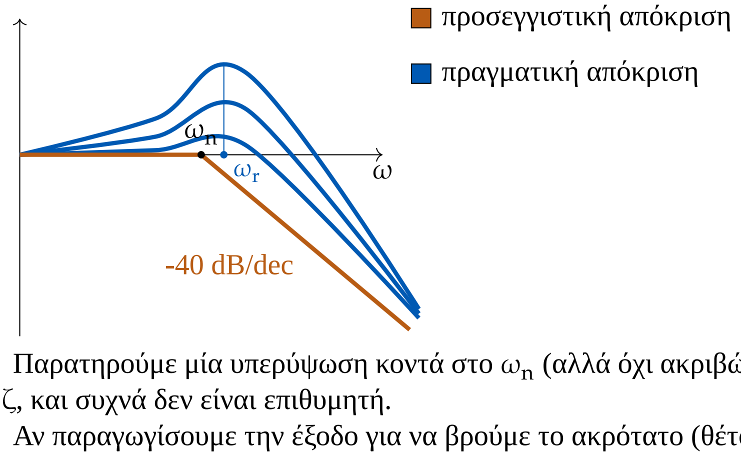
$$\left|H(j\omega)\right|_{dB} = -10 \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + 4\zeta^2 \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right]$$

Κάνουμε προσέγγιση με ασυμπτώτους:

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_n} \ll 1 & 0 \text{ dB} \\ \frac{\omega}{\omega_n} \gg 1 & -40 \log \frac{\omega}{\omega_n} \end{cases}$$



Στην πραγματικότητα, η απόκριση συχνότητας μοιάζει ως εξής, και εξαρτάται από το ζ:



Παρατηρούμε μία υπερύψωση κοντά στο ω_n (αλλά όχι ακριβώς επάνω του), που αυξάνεται όσο μειώνεται το ζ, και συχνά δεν είναι επιθυμητή.

Αν παραγωγίσουμε την έξοδο για να βρούμε το ακρότατο (θέτουμε $u = \frac{\omega}{\omega_n}$ για ευκολία):

$$\frac{dH}{du} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 + (2\zeta u)^2}}$$

η οποία μηδενίζεται για $\frac{\omega}{\omega_n} = u = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$. Αυτό ορίζεται αν $\zeta < 0.707$, δηλαδή υπάρχει υπερύψωση μόνο όταν $\boxed{\zeta < 0.707}$.

Θεώρημα 2.3: Εύρος ζώνης δευτεροβάθμιου συστήματος

Το *εύρος ζώνης* (μέχρι τα -3 dB) αποδεικνύεται ότι είναι:

$$\omega_b = \omega_n \left[1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}\right]^{1/2}$$

Θεώρημα 2.4: Συχνότητα συντονισμού δευτεροβάθμιου συστήματος

Η **συχνότητα συντονισμού** ω_r, δηλαδή η συχνότητα κατά την οποία έχουμε υπερύψωση, είναι:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \qquad \zeta < 0.707$$

ενώ το πλάτος της υπερύψωσης:

$$M_r = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$$

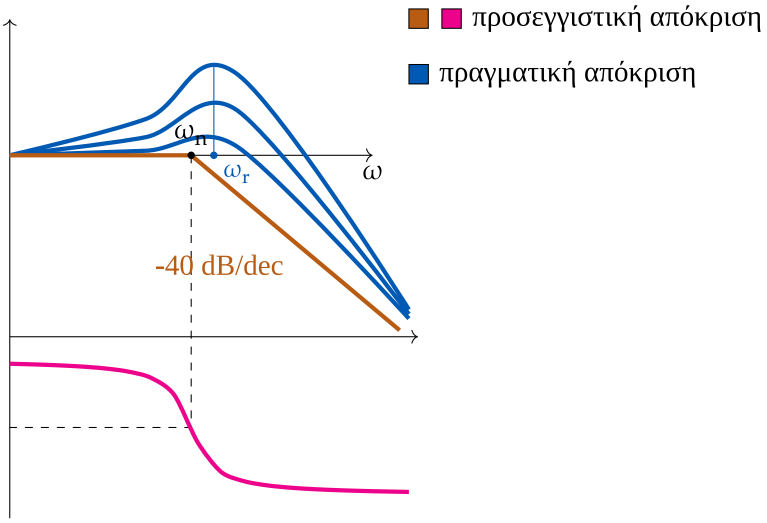
Όσον αφορά τη φάση,

$$\phi(\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

Ασυμπτωτικά:

$$\begin{cases} \frac{\omega}{\omega_n} = 0 & \phi = 0 \\ \frac{\omega}{\omega_n} = 1 & \phi = -\pi/2 \\ \frac{\omega}{\omega_n} \to \infty & \phi = -\pi \end{cases}$$

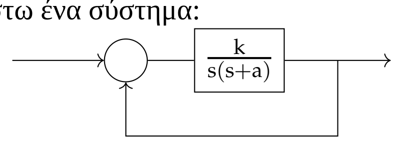
και συμπληρώνουμε το διάγραμμα Bode:



Βέβαια η πραγματική συμπεριφορά εξαρτάται πάλι από το ζ.

Άσκηση

Έστω ένα σύστημα:



Ζητείται να βρεθούν οι σταθερές k και a, ώστε η υπερύψωση συχνότητας να είναι $M_{pr} = 1.04$ για συχνότητα συντονισμού $\omega_r = 11.47$ rad/s. Και από εκεί, ζητείται να προσδιοριστεί ο χρόνος αποκατάστασης t_s και το εύρος ζώνης ω_b.

Λύση

Από τους παραπάνω τύπους, έχουμε:

$$\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = 1.04 \implies 4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 0.92 = 0 \implies \zeta^2 = \begin{cases} 0.64 \\ 0.352 \end{cases} \implies \cancel{\zeta = 0.8} \text{ ή } \boxed{\zeta = 0.6}$$

Απορρίπτουμε την περίπτωση $\zeta = 0.8$, αφού για να υπάρχει υπερύψωση **στη συχνότητα** πρέπει $\zeta < 0.707$. Άρα $\zeta = 0.6$.

Τότε υπολογίζουμε ακόμα ότι $\omega_n = \frac{\omega_r}{\sqrt{1-2\zeta^2}} \approx 21.67\,\mathrm{rad/s}$.

Η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος βγαίνει μετά από πράξεις $\dfrac{k}{s^2+as+k} = \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$.

Άρα $k = 21.67^2 = 469.59$, και $a = 2\zeta\omega_n = 2\cdot 0.6\cdot 21.67 = 26.00$.

Ο χρόνος αποκατάστασης είναι (αφού έχουμε συζυγείς ρίζες, διότι $\zeta < 1$):

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{13} \approx 0.3077\,\mathrm{s}$$

Και το εύρος ζώνης:

$$\omega_b = \omega_n \left[1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}\right]^{1/2} \approx 24.88\,\mathrm{rad/s}$$

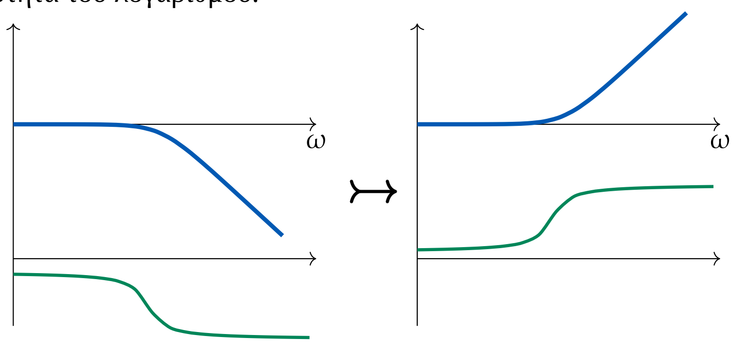
2.3.3 Σε συστήματα μεγαλύτερου βαθμού

Γενικά ισχύει:

$$H(s) = \frac{G}{s^n}\frac{(\tau_j s+1)\cdots}{(t_i s+1)\cdots}$$

Αυτό αντιστοιχεί, όπως έχουμε δει παραπάνω, σε ένα άθροισμα πιο απλών κλασμάτων. Επομένως, για να βρούμε το διάγραμμα Bode, απλώς προσθέτουμε τις επιμέρους αποκρίσεις.

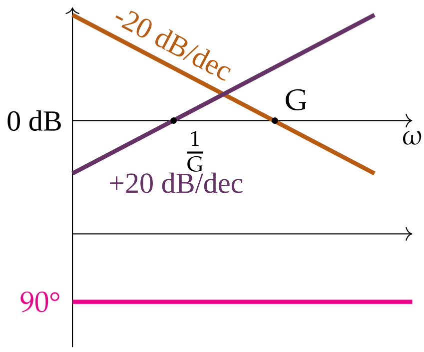
Επίσης, αν έχουμε ένα σύστημα $\frac{1}{\tau s+1}$, και το αντιστρέψουμε, $\frac{\tau s+1}{1}$, η έξοδος θα είναι αντίθετη, από την ιδιότητα του λογαρίθμου.



Για το απλό σύστημα $H(s) = \dfrac{G}{s}$, έχουμε:

$$|H|_{dB} = 20\log G - 20\log\omega$$
$$\phi = -\pi/2$$

και το διάγραμμα Bode γίνεται (σε συνδυασμό με το $H(s) = Gs$):



Γενικά, μπορούμε να συνθέσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση μεταφοράς με τα παρακάτω στοιχεία:

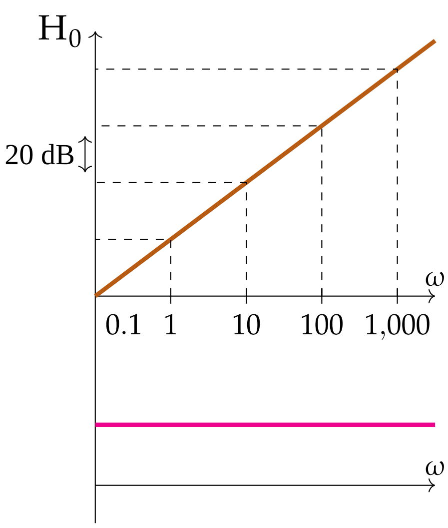
- $H_0 = Gs^{\nu}$
- $H_1 = \left(\frac{s}{\rho} + 1\right)$ για $p > 0$
- $H_2 = \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)$ για $\omega_n > 0$ και $0 < \zeta < 1$.

Για παράδειγμα, για την $\frac{s(s+3)}{(s+4)\left((s+5)^2+4\right)}$:

$$\frac{s(s+3)}{(s+4)\left((s+5)^2+4\right)} = \frac{\overbrace{s}^{H_0} \cdot (s+3)}{(s+4) \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_n^2} + \frac{2\zeta s}{\omega_n} + 1\right)} = \frac{\overbrace{s}^{H_0} \cdot 3 \cdot \overbrace{\left(\frac{s}{3} + 1\right)}^{H_1}}{4 \cdot \underbrace{\left(\frac{s}{4} + 1\right)}_{H_1} \cdot \underbrace{\left(\frac{s^2}{29} + \frac{2 \cdot 0.928 \cdot s}{5.39} + 1\right)}_{H_2}}$$

Για καθεμία από αυτές, έχουμε:

- $\left|H_0(j\omega)\right|_{dB} = 20 \log G\omega^{\nu} = 20 \log G + 20\nu \log \omega$ και:
  $\phi_0 = \nu \cdot 90°$
  Και το αντίστοιχο διάγραμμα Bode είναι:

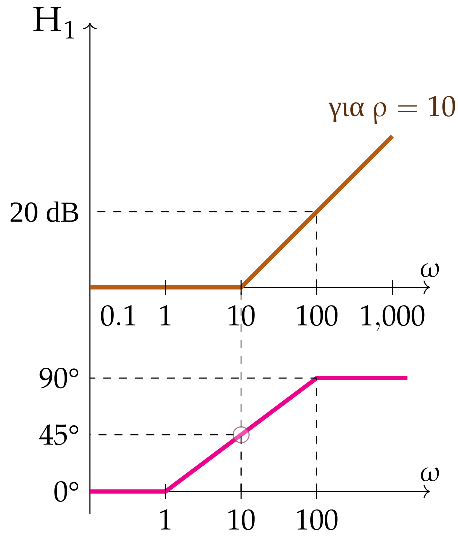
  όπου παρατηρούμε ότι έχουμε αύξηση της απόκρισης κατά 20 dB ανά δεκάδα.
  Η ευθεία αυτή θα έχει αντίθετη κλίση αν το $H_0(s)$ βρίσκεται στον παρονομαστή

- $\left|H_1(j\omega)\right|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega < p \\ 20\log\omega - 20\log p & \text{αν} \omega > p \end{cases}$

  και:

  $$\phi_1 \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{αν } \omega < 0.1p \\ 45^\circ + 45^\circ \log\frac{\omega}{p} & \text{αν } 0.1p < \omega < 10p \\ 90^\circ & \text{αν } \omega > 10p \end{cases}$$

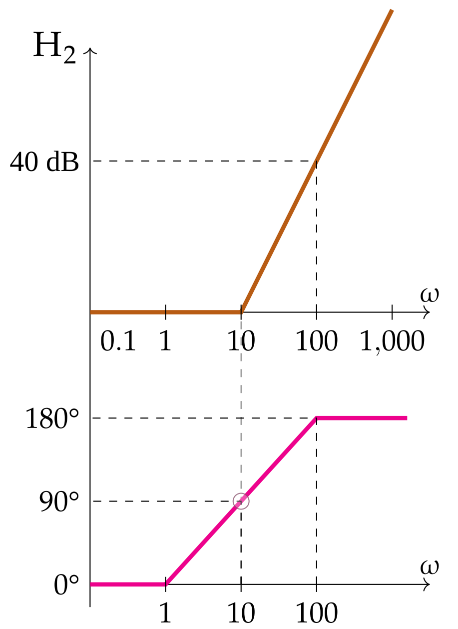
  Άρα η απόκριση γίνεται:



- $H_2 = \dfrac{s^2}{\omega_n^2} + \dfrac{2J}{\omega_n}s + 1$ και αποδεικνύεται ότι:

$$\left|H_2(j\omega)\right|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{αν } \omega < \omega_n \\ 40\log\omega - 40\log\omega_n & \text{αν } \omega > \omega_n \end{cases}$$

$$\phi_2 \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{αν } \omega < 0.1\omega_n \\ 90^\circ + 90^\circ \log\frac{\omega}{\omega_n} & \text{αν } 0.1\omega_n < \omega < 10\omega_n \\ 180^\circ & \text{αν } \omega > 10\omega_n \end{cases}$$



2.3.4 Ασκήσεις

Άσκηση

Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του $H(s) = \dfrac{40(s+1)}{s^2(s^2+s+4)}$

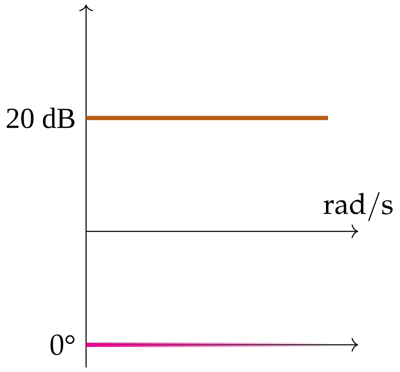
Λύση

Έχουμε:

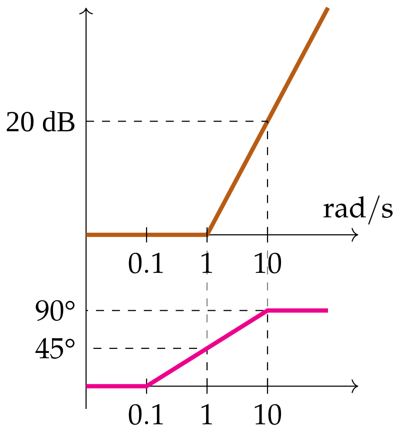
$$H(s) = \underset{\substack{\downarrow \\ H_0}}{(10)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ H_1 \\ p=1}}{(s+1)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ H_0^{-1} \\ \nu=2}}{\frac{1}{s^2}} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ H_2^{-1} \\ \omega_n=2}}{\frac{1}{\frac{s^2}{4}+\frac{s}{4}+1}} = G_1 \cdot G_3 \cdot G_2 \cdot G_4$$

και εργαζόμαστε για κάθε συνάρτηση ξεχωριστά, σχεδιάζοντας το διάγραμμα Bode της, ώστε να τα συνδυάσουμε στο τέλος:

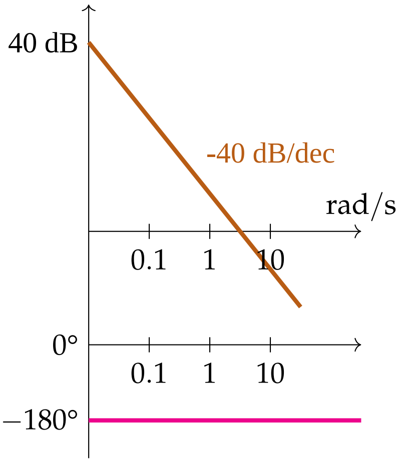
- $|G_1|_{dB} = 20\log 10 + \cancelto{0}{20 \cdot 0 \cdot \log\omega}$
  $\phi = \frac{\nu\pi}{2} = 0$



- $|G_3|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{για } \omega < 1 \\ 20\log\omega - \cancelto{0}{20\log 1} & \text{για } \omega > 1 \end{cases}$
  $\phi_3 \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{αν } \omega < 0.1p \\ 45^\circ + 45^\circ \log\frac{\omega}{p} & \text{αν } 0.1p < \omega < 10p \\ 90^\circ & \text{αν } \omega > 10p \end{cases}$

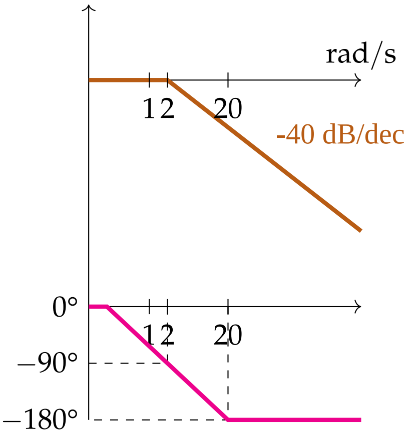


- $|G_2|_{dB} = \cancelto{0}{20\log 1} + 20(-2)\log\omega = -40\log\omega$
  $\phi = \frac{\nu\pi}{2} = -\pi$

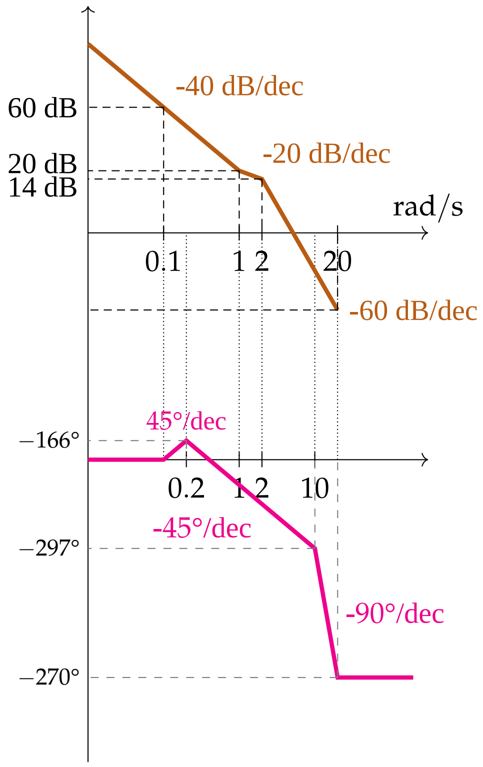


- $|G_4|_{dB} \approx \begin{cases} 0 & \text{για } \omega < 2 \text{ rad/s} \\ -40\log\omega + 40\log 2 & \text{για } \omega > 2 \end{cases}$

$$\phi = \begin{cases} 0^\circ & \text{αν } \omega < 0.2 \\ -90^\circ - 90^\circ \log\frac{\omega}{2} & \text{αν } 0.2 < \omega < 20 \\ -180^\circ & \text{αν } \omega > 20 \end{cases}$$

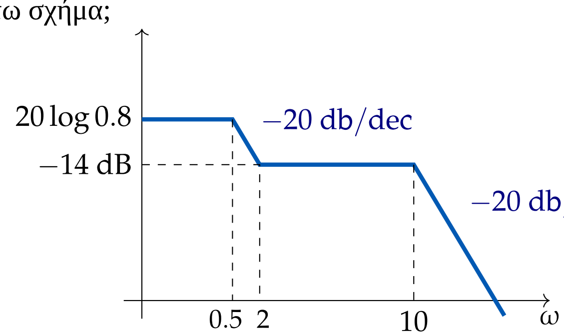


Τελικά, για να βρούμε τη σωστή απάντηση, προσθέτουμε όλα τα παραπάνω διαγράμματα (αφού ο πολλαπλασιασμός γίνεται πρόσθεση μετά την εφαρμογή του λογαρίθμου):



Άσκηση

Ποιά είναι η συνάρτηση μεταφοράς της οποίας το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode φαίνεται στο παρακάτω σχήμα;



Επιλέξτε μία από τις πιθανές απαντήσεις

(α) $\dfrac{10(s+1)(s+2)}{(s+0.5)(5s+10)(s+10)}$

(β) $\dfrac{10(s+0.5)}{(s+2)(s+10)}$

(γ) $\dfrac{10(s+1)(s+2)}{(s+0.5)(5s+5)(s+10)}$

(δ) $\dfrac{10(s+10)}{(s+0.5)(s+2)}$

Λύση

Κανονικά, φέρνουμε όλες τις συναρτήσεις μεταφοράς στη μορφή (π.χ. για την **(α)**):

$$\frac{10\left(\frac{s}{1}+1\right)2\left(\frac{s}{2}+1\right)}{0.5\left(\frac{s}{0.5}+1\right)10\left(\frac{s}{2}+1\right)10\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

και ελέγχουμε τις θέσεις των πόλων και των μηδενικών για τα σημεία μείωσης του κέρδους. Για παράδειγμα, για το **(γ)**:

$$(\gamma)=\frac{10\cancel{(s+1)}2\left(\frac{s}{2}+1\right)}{0.5\left(\frac{s}{0.5}+1\right)5\cancel{(s+1)}10\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Στην παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι απλοποιούνται ο πόλος και το μηδενικό για $s=-1$, και μένουν ένας πόλος με συντελεστή $\frac{1}{0.5}$ (άρα υπάρχει πτώση 20dB/dec από τη συχνότητα 0.5 και μετά), ένα μηδενικό με συντελεστή $\frac{1}{2}$ (άρα υπάρχει άνοδος που ακυρώνει την πτώση από το 2 και μετά), και ένας πόλος με συντελεστή $\frac{1}{10}$ (άρα υπάρχει ξανά πτώση από το 10 και μετά).

Εναλλακτικά, σε αυτήν την άσκηση, μπορώ να υπολογίσω το κέρδος της κάθε συνάρτησης μεταφοράς, που πρέπει να είναι $20\log 0.8\text{dB}$, άρα να έχει μέτρο 0.8.

Έτσι, για κάθε απάντηση έχουμε:

$$(\alpha)\ \frac{10\cdot 1\cdot 2}{0.5\cdot 10\cdot 10}=0.4\xrightarrow{\text{dB}}20\log 0.4\neq 20\log 0.8$$

$$(\beta)\ \frac{10\cdot 0.5}{2\cdot 10}=0.25\nrightarrow 20\log 0.8$$

$$(\gamma)\ \frac{10\cdot 1\cdot 2}{0.5\cdot 5\cdot 10}=0.8\rightarrow 20\log 0.8 \quad \checkmark$$

$$(\delta)\ \frac{10\cdot 10}{0.5\cdot 2}=100\nrightarrow 20\log 0.8$$

Άσκηση

Τι τιμή έχει το προσεγγιστικό διάγραμμα μέτρου και φάσης στη συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{100}{(s+1)^2(s+10)}$$

στη συχνότητα $\omega = 1\ {}^{\text{rad}}/_{\text{s}}$;

Λύση

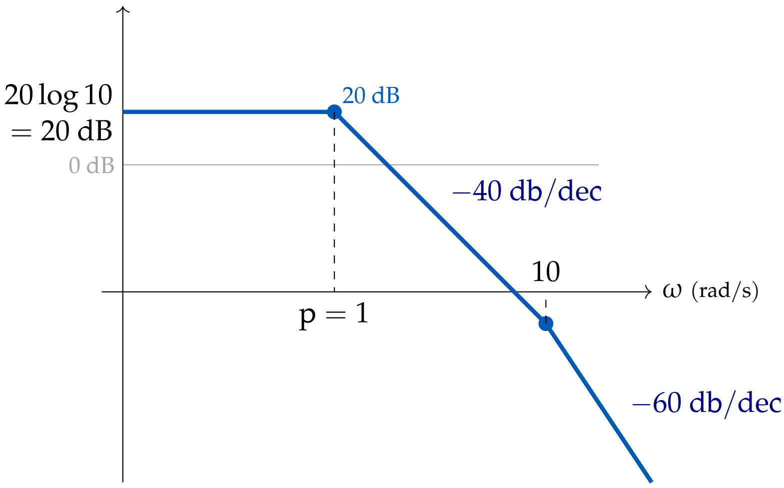
> Εδώ μας ζητείται η τιμή του προσεγγιστικού διαγράμματος, όχι η ακριβής τιμή.

Αν ζητούνταν η ακριβής τιμή, θα θέταμε $s=j\omega=j\cdot 1$, και υπολογίζαμε το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού που θα προέκυπτε από τη συνάρτηση μεταφοράς.

Αρχικά, μετασχηματίζουμε ελαφρά τη συνάρτηση μεταφοράς:

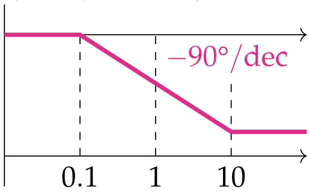
$$\frac{100}{(s+1)^2)(s+10)}\longrightarrow\frac{100}{1\left(\frac{s}{1}+1\right)^2 10\left(\frac{s}{10}+1\right)}=\frac{10}{\left(\frac{s}{1}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Εδώ έχουμε έναν πόλο για $\omega=10\,\text{rad/s}$, ο οποίος ξεκινάει μία πτώση 20dB/dec σε εκείνη τη συχνότητα, και έναν διπλό πόλο $\omega=1\,\text{dB/dec}$, του οποίου η επίδραση είναι μια πτώση κατά $2\cdot 20=40\,\text{dB/dec}$. Άρα το προσεγγιστικό διάγραμμα μοιάζει κάπως έτσι:

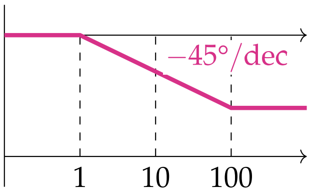


Το διάγραμμα φάσης είναι λίγο πιο δύσκολο, επειδή η απόκριση επηρεάζεται μία δεκάδα πριν και μία δεκάδα μετά από τη συχνότητα του κάθε πόλου.

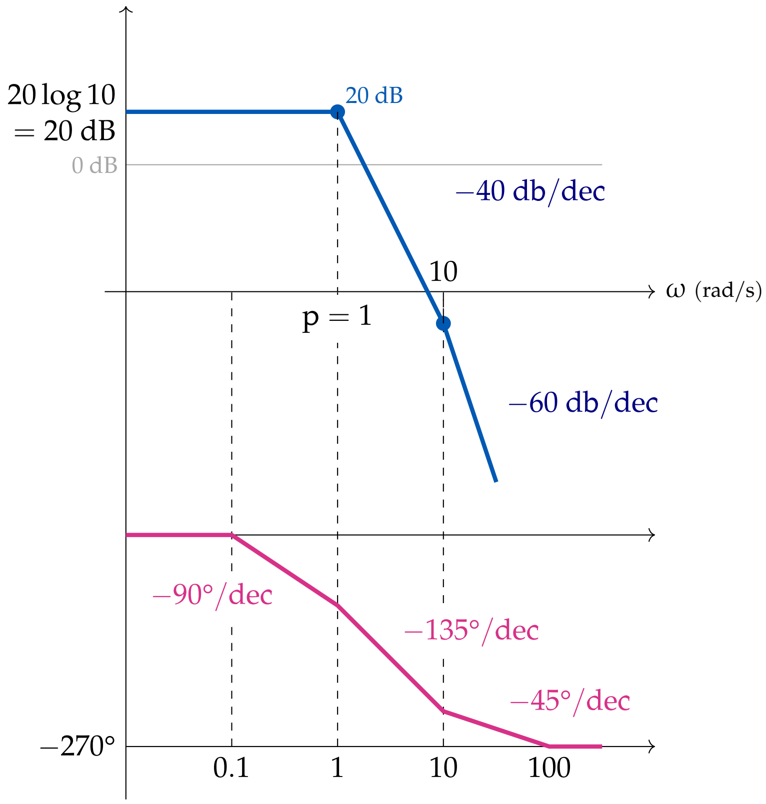
Έτσι, για $p = 1$ (διπλός πόλος), η επίδραση ξεκινάει από την $\omega = 0.1p = 0.1\,\mathrm{rad/s}$, με μία κλίση $2 \cdot /(-45°) = -90°/\mathrm{dec}$, μέχρι και την $\omega = 10p = 10\,\mathrm{rad/s}$.



Αντίστοιχα, για τον απλό πόλο $p = 10$, ξεκινάμε από $1\,\mathrm{rad/s}$ μέχρι τα $100\,\mathrm{rad/s}$ με κλίση $-45°/\mathrm{dec}$.



Προσθέτοντας τα δύο παραπάνω διαγράμματα για τις φάσεις, έχουμε:



Γενικά είναι εύκολο να εργαζόμαστε με συναρτήσεις μεταφοράς των οποίων οι πόλοι και τα μηδενικά είναι μεταξύ τους πολλαπλασιασμένα με παράγοντες του 10.

Άσκηση

Ποιά από τις παρακάτω συναρτήσεις μεταφοράς έχει διάγραμμα Bode κέρδους με κλίση $-60\,\mathrm{dB/dec}$ στο $\omega = 30\,\mathrm{rad/s}$;

α. $\dfrac{s+70}{(s+1)(s+2)(s+4)(s+6)}$

β. $\dfrac{s+60}{(s+80)(s+90)(s^2+18s+100)}$

γ. $\dfrac{s+4}{(s+2)(s^2+18s+100)}$

δ. $\dfrac{s+4}{(s+6)(s+9)(s^2+18s+100)}$

Λύση

Ας μελετήσουμε κάθε συνάρτηση ξεχωριστά:

α. Ο όρος $s+70$ είναι πιο μακριά από τα $30\,\mathrm{rad/s}$, άρα τον αγνοούμε. Στον παρονομαστή έχουμε 4 όρους πριν από το 30, άρα κλίση $-4 \cdot 20 = -80\,\mathrm{dB/dec}$, που δεν συμφωνεί με την εκφώνηση.

β. Οι όροι $s+60$, $s+80$ και $s+90$ είναι πολύ μακριά και δεν μας απασχολούν. Ο όρος $s^2+18s+100$ είναι ένα πολυώνυμο με μιγαδικές ρίζες και $\sqrt{100} = 10\omega_n$, άρα έχει κλίση $-40\,\mathrm{dB/dec}$ (αφού $30 > 10 = \omega_n$), και δεν συμφωνεί με την εκφώνηση.

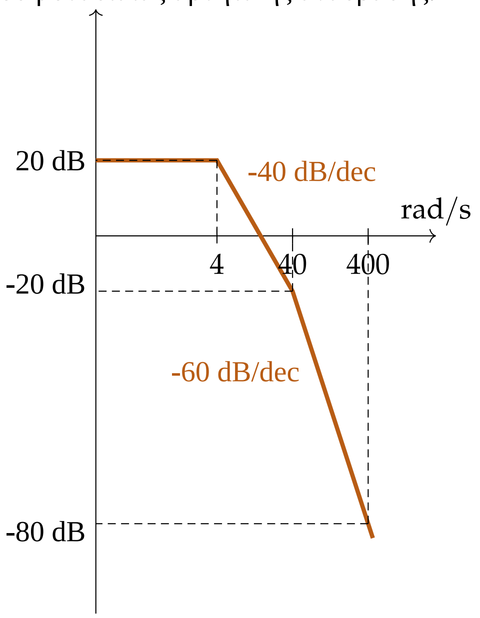
γ. Μετά από το $\omega = 10\,\mathrm{rad/s}$ συνεισφέρουν το μηδενικό με $20\,\mathrm{dB/dec}$, ο απλός πόλος με $-20\,\mathrm{dB/dec}$, και το πολυώνυμο με $-40\,\mathrm{dB/dec}$. Συνολικά έχουμε $+20-20-40 = -40\,\mathrm{dB/dec}$, άρα δεν συμφωνούμε με την εκφώνηση.

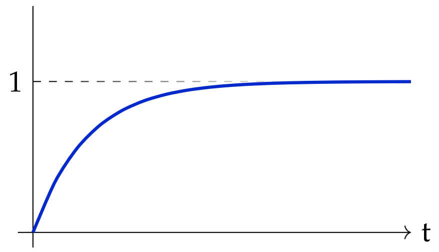
δ. Έχουμε μηδενικό (20 dB/dec) και τέσσερις πόλους ($-20 \cdot 4 = -80$ dB/dec), άρα συνολικά 60 dB/dec, που είναι και η ζητούμενη απάντηση.

Άρα το σωστό αποτέλεσμα είναι το **(δ)**.

Άσκηση

Δίνεται το διάγραμμα Bode πλάτους, καθώς και η βηματική απόκριση ενός συστήματος. Να βρεθεί η αντίστοιχη συνάρτηση μεταφοράς, και το σφάλμα θέσης αν την τοποθετήσουμε σε σύστημα κλειστού βρόγχου μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης.





Λύση

Παρατηρούμε μία πτώση κατά -40 dB/dec στη συνάρτηση μεταφοράς. Οπότε, προκύπτει το ερώτημα αν αυτή προέρχεται από δύο απλούς πραγματικούς πόλους, ή από δύο μιγαδικούς συζυγείς.

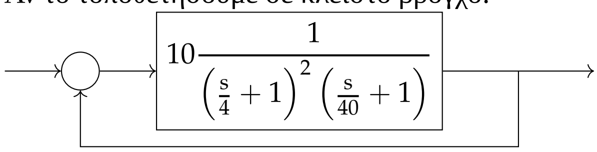
Παρατηρούμε ότι η βηματική απόκριση δεν παρουσιάζει υπερύψωση, αλλά είναι υπεραποσβεννύμενη. Επομένως δεν έχουμε μιγαδικούς πόλους, αλλά δύο πραγματικούς.

Υπολογίζουμε το κέρδος G του συστήματος: αφού το διάγραμμα Bode ξεκινάει από την τιμή $20\,\text{dB} = 20 \log G \implies G = 10$. Η συνάρτηση μεταφοράς έχει μια κλίση -40 dB/dec που ξεκινάει από $\omega = 4$ rad/s, άρα στον παρονομαστή της έχει δύο όρους της μορφής $\left(\frac{s}{4} + 1\right)$. Επίσης, έχει μια επιπλέον κλίση -20 dB/dec από το $\omega = 40$ rad/s και μετά, άρα έναν όρο της μορφής $\left(\frac{s}{40} + 1\right)$.

Επομένως, τελικά η συνάρτηση γίνεται:

$$H(s) = 10 \frac{1}{\left(\frac{s}{4} + 1\right)^2 \left(\frac{s}{40} + 1\right)}$$

Αν το τοποθετήσουμε σε κλειστό βρόγχο:



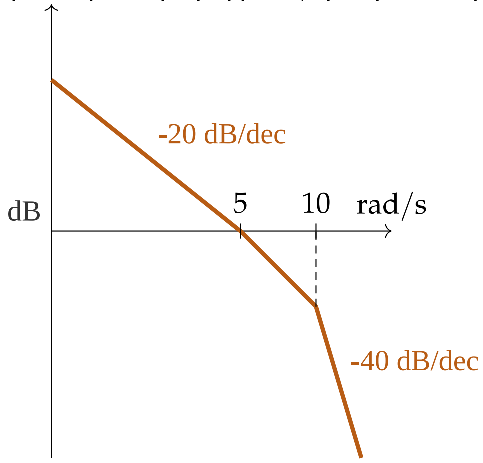
Το σύστημα έχει τύπο 0 (αφού δεν υπάρχουν ολοκληρωτές), άρα και πεπερασμένο σφάλμα θέσης:

$$K_p = \lim_{s \to 0} \cancel{s} \frac{1}{\cancel{s}} H(s) = 10$$

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = 0.09$$

Άσκηση

Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς με το παρακάτω προσεγγιστικό διάγραμμα Bode:



Λύση

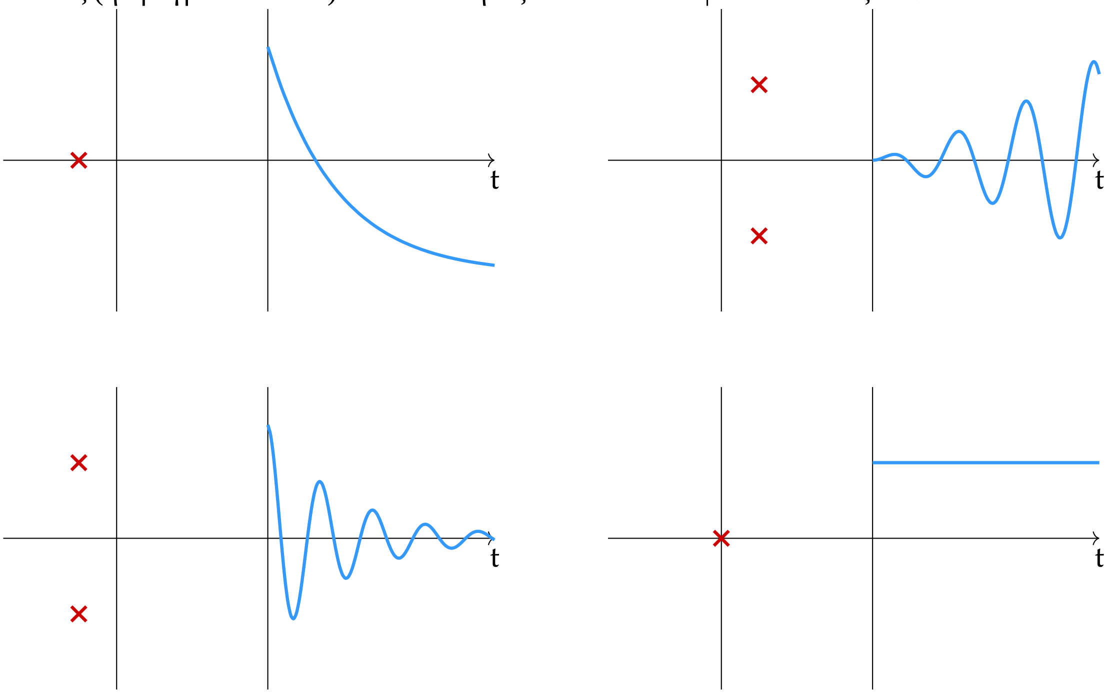
Έχουμε πτώση $-20\,\text{dB/dec}$ από τη συχνότητα $\omega = 0$, άρα έχουμε έναν πόλο στο 0, δηλαδή έναν ολοκληρωτή. Μετά από τα $\omega = 10\,\text{rad/s}$, εμφανίζεται και μία δεύτερη πτώση $-20\,\text{dB/dec}$ που υποδηλώνει πόλο στο 10.

Θυμόμαστε ότι το DC κέρδος του ολοκληρωτή $\frac{G}{s^N}$ είναι και το σημείο τομής του με τον οριζόντιο άξονα, δηλαδή σε αυτήν την περίπτωση το 5. Άρα η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή:

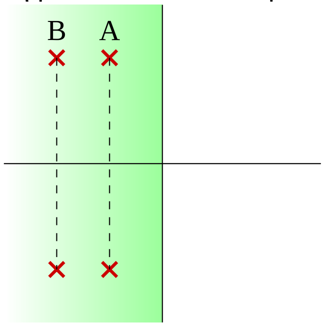
$$H(s) = \frac{5}{s\left(\frac{s}{10} + 1\right)} = \frac{50}{s(s+10)}$$

2.4 Ευστάθεια

Για να ελέγξουμε την ευστάθεια του συστήματος χρησιμοποιούμε τη **συνάρτηση δέλτα**. Θυμόμαστε ότι ένα σύστημα είναι ευσταθές αν έχει πόλους μόνο στο αριστερό ημιεπίπεδο, και οριακά ευσταθές αν έχει συζυγείς πόλους (ή πραγματικό πόλο) πολλαπλότητας 1 επάνω στον φανταστικό άξονα:



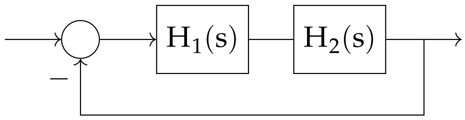
Θα ασχοληθούμε επίσης με τη **σχετική ευστάθεια**, που δηλώνει το πόσο ευσταθές είναι ένα σύστημα σε σχέση με ένα άλλο. Για παράδειγμα, αν έχουμε δύο συστήματα A και B με πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο:



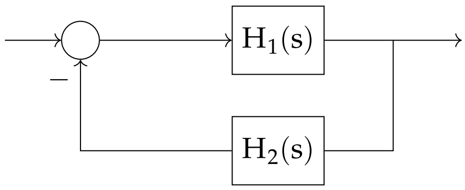
Τότε παρατηρούμε ότι και τα δύο είναι ευσταθή, αλλά το A έχει πόλους πιο κοντά στον φανταστικό άξονα, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι "λιγότερο ευσταθές".

Έστω δύο συστήματα με συναρτήσεις μεταφοράς κλειστού βρόγχου T_1 και T_2:

$$T_1(s) = \frac{H_1 H_2}{1 + H_1 H_2}$$

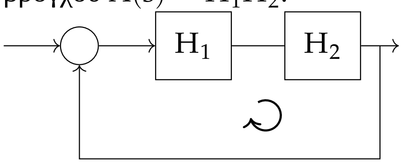


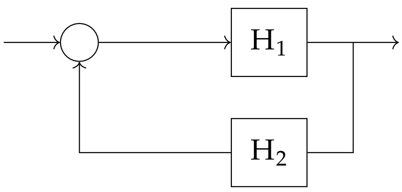
$$T_1(s) = \frac{H_1}{1 + H_1 H_2}$$



και τα δύο έχουν τον ίδιο παρονομαστή (άρα και χαρακτηριστικό πολυώνυμο) στη συνάρτηση μεταφοράς, επομένως είναι ισοδύναμα ως προς την ευστάθεια.

Επομένως μπορούμε να μελετάμε τα παρακάτω ισοδύναμα συστήματα, με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόγχου $A(s) = H_1 H_2$:

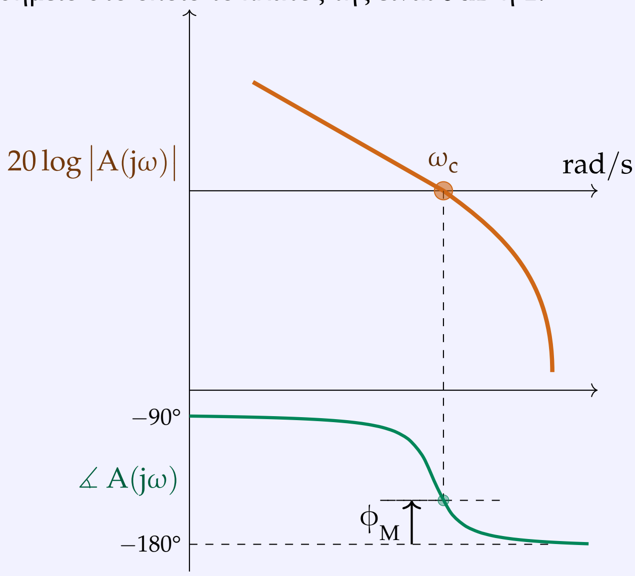




Για τη μελέτη της ευστάθειας, ορίζουμε το **περιθώριο φάσης** και το **περιθώριο κέρδους**.

Ορισμός 2.10: Περιθώριο φάσης

Περιθώριο φάσης ονομάζεται η απόσταση της φάσης της συνάρτησης μεταφοράς από τις $180°$, στο σημείο στο οποίο το πλάτος της είναι $0\,\mathrm{dB}$ ή 1:

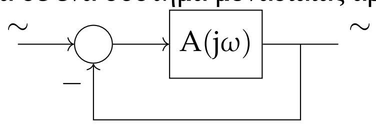


Το περιθώριο φάσης συμβολίζεται ϕ_M (margin) και έχει τύπο:

$$\boxed{\phi_M = 180° + \measuredangle A(j\omega_c)}$$

όπου ω_c είναι το σημείο τομής του πλάτους με τον άξονα των $0\,\mathrm{dB}$.

Για να καταλάβουμε ποιοτικά τη σημασία της απόστασης της φάσης από τις $180°$, δίνουμε ένα ημιτονοειδές σήμα σε ένα σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης:



Αν η συνάρτηση $A(j\omega)$ προκαλεί σε εκείνο το σημείο διαφορά φάσης $180°$, τότε στην έξοδο εμφανίζεται αρχικά ένα αντίθετο ημίτονο (αφού $\sin(t - 180°) = -\sin(t)$). Αυτό όμως αφαιρείται από την είσοδο λόγω της ανάδρασης, άρα η είσοδος διπλασιάζεται, και αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται συνεχώς, οδηγώντας σε συνεχώς αυξανόμενη και άρα ασταθή έξοδο.

Για την ευστάθεια θέλουμε όσο το δυνατόν πιο **θετικό περιθώριο φάσης**.

Επίσης, για το εύρος ζώνης ω_b της συνάρτησης (δηλαδή το εύρος μεταξύ των συχνοτήτων στις οποίες το κέρδος είναι $-3\,\mathrm{dB}$), ισχύει:

$$\boxed{\omega_b > \omega_c}$$

Ορισμός 2.11: Περιθώριο κέρδους

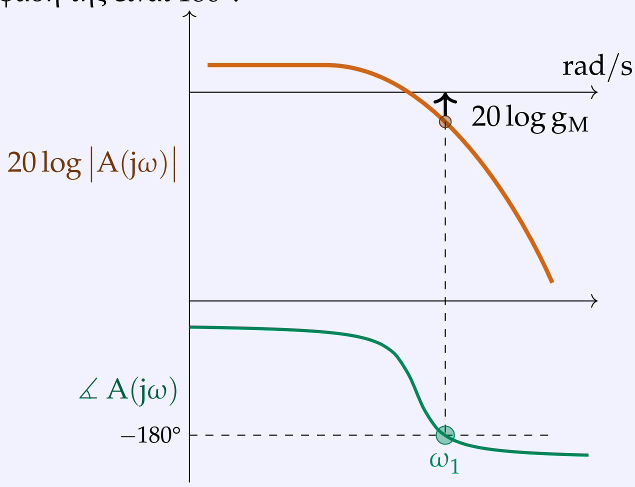
Ως περιθώριο κέρδους ορίζουμε τον αριθμό:

$$g_M = \frac{1}{|A(j\omega_1)|}$$

όπου ω_1 είναι η συχνότητα στην οποία η συνάρτηση μεταφοράς εισάγει διαφορά φάσης 180°.
Για να έχουμε ευστάθεια, θέλουμε $g_M > 1$, ή, εκφρασμένο σε dB:

$$\boxed{-20\log|A(j\omega_1)| > 0}$$

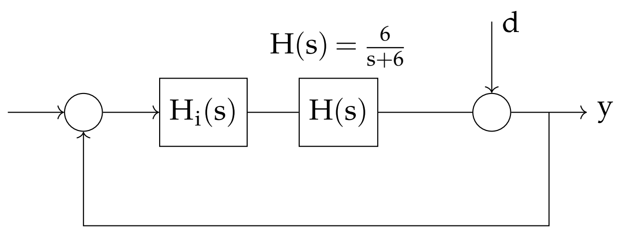
Δηλαδή το περιθώριο φάσης είναι η απόσταση (από κάτω προς τα επάνω) του πλάτους της A, όταν η φάση της είναι 180°.



Παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το πλάτος της συνάρτησης μεταφοράς, τόσο πιο κοντά στον άξονα των 0 dB φτάνει (και μειώνεται το περιθώριο κέρδους), και το σύστημα γίνεται ασταθές μόλις τον ξεπεράσει.

Άσκηση: Εφαρμογή

Για το παρακάτω σύστημα:



Να σχεδιαστεί ο ελεγκτής $H_i(s)$ ώστε να τηρούνται ταυτόχρονα οι προδιαγραφές:

1) Για βηματική είσοδο διαταραχής $d = s(t)$, να έχουμε $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

2) Για το εύρος ζώνης να ισχύει $\omega_b > 35\,\text{rad/s}$

3) Για τα περιθώρια να ισχύει $g_M = \infty$ και $\phi_M > 70°$

Λύση

Θυμόμαστε ότι η συνάρτηση $H_i(s)$ θα πρέπει να περιέχει έναν ολοκληρωτή για να καλύπτει την πρώτη προδιαγραφή, άρα να έχει τη μορφή $\underbrace{\frac{\kappa}{s}}_{\text{ελεγκτής I}}$ ή τη μορφή $\underbrace{\frac{\kappa(s+z)}{s}}_{\text{ελεγκτής PI}}$.

Η προδιαγραφή $\omega_b > 35\,\text{rad/s}$ σημαίνει ότι $\omega_c > 35\,\text{rad/s}$.

Ας ξεκινήσουμε να μελετάμε την $\frac{\kappa}{s}$. Η απαίτηση $g_M = \infty$ ικανοποιείται, αφού η συνάρτηση μεταφοράς δεν φτάνει ποτέ στις 180°, άρα έχει άπειρο περιθώριο κέρδους.

Για την απαίτηση $\omega_c > 35$, μελετάμε τις συναρτήσεις μεταφοράς. Η $H_i(s)$ έχει πλάτος (σε dB) $20\left[\log\kappa - \log\omega\right]$, και η $H(s)$ έχει πλάτος $20\left[-\log\frac{\omega}{6}\right]$. Επομένως πρέπει:

$$20\left[\log\kappa - \log\omega_c - \log\frac{\omega_c}{6}\right] = 0 \implies \log\left(\frac{\kappa}{\frac{\omega_c^2}{6}}\right) = 0$$

άρα:

$$\frac{6\kappa}{\omega_c^2} = 1 \implies \omega_c = \sqrt{6\kappa}$$

$$\omega_c > 35 \implies \kappa > \frac{35^2}{6} \implies \underline{\kappa > 204.16}$$

Ας εξετάσουμε και το περιθώριο φάσης στη συχνότητα ω_c:

$$\begin{aligned} \phi_M &> 70° \implies \\ 180° - 90° - \tan^{-1}\frac{\omega_c}{6} &> 70° \implies \\ 90° - 80.2° &\not> 70° \end{aligned}$$

κάτι που δεν ισχύει, επομένως δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ελεγκτή I, και πρέπει να τοποθετήσουμε τον PI. Με τον ίδιο συλλογισμό, θα οδηγηθούμε σε ένα αποτέλεσμα:

$$\kappa \geq 5.8 \qquad z = 10$$

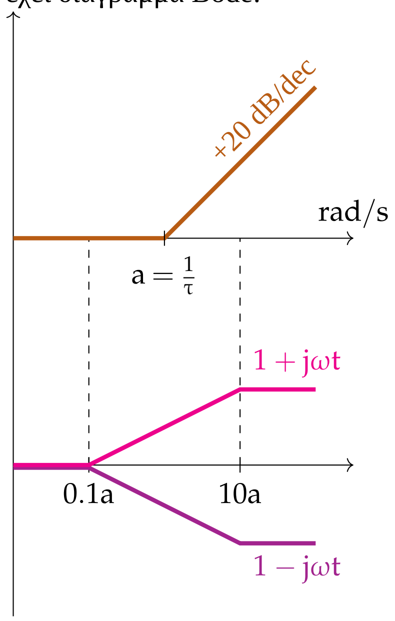
Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση μεταφοράς με ένα μηδενικό:

$$\frac{s-a}{a} = (1 \pm s\tau)$$

η οποία για τις φανταστικές συχνότητες γίνεται:

$$1 - j\omega t \quad ή \quad 1 + j\omega t$$

και έχει διάγραμμα Bode:



Παρατηρούμε ότι το μέτρο παραμένει σταθερό ανεξάρτητα από το πρόσημο του a, αλλά η φάση αλλάζει προσανατολισμό ανάλογα με αυτό το πρόσημο, δηλαδή αν ο πόλος βρίσκεται αριστερά ή δεξιά του φανταστικού άξονα.

Γενικότερα, αν έχουμε ένα σύστημα βαθμού αριθμητή m και παρονομαστή n:

$$\frac{N(s) \qquad n}{D(s) \qquad m}$$

ισχύει:

$$\text{Για } (1+j\omega\tau): \begin{cases} \omega \to 0 & \Longrightarrow \phi = 0^\circ \\ \omega \to \infty & \Longrightarrow \phi = 90^\circ \end{cases}$$

$$\text{Για } (1-j\omega\tau): \begin{cases} \omega \to 0 & \Longrightarrow \phi = 0^\circ \\ \omega \to \infty & \Longrightarrow \phi = -90^\circ \end{cases}$$

και αυτά ονομάζονται *Συστήματα μη ελάχιστης φάσης*.

Σύστημα με καθυστέρηση Έστω ένα σύστημα που βάζει καθυστέρηση T δευτερολέπτων στην είσοδο u:

$$y(t) = u(t-T)$$

Αν πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace έχουμε:

$$y(s) = e^{-sT}u(s)$$

Δηλαδή το σύστημα είναι μία πολύ απλή συνάρτηση:

$$\xrightarrow{u} \overset{H(s)}{\boxed{e^{-sT}}} \xrightarrow{y}$$

και για να κατασκευάσουμε το διάγραμμα Bode, θεωρούμε $s = j\omega$, και:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-j\omega T} \\ |H(j\omega)| &= 1 \\ \measuredangle H(j\omega) &= -\omega T \end{aligned}$$

Γενικότερα, αν είχαμε ένα σύστημα $H_1(j\omega)$ και εφαρμόζαμε μία καθυστέρηση σε αυτό, θα είχαμε:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= e^{-j\omega T}H_1(j\omega) \\ |H(j\omega)| &= |H_1(j\omega)| \\ \measuredangle H(j\omega) &= -\omega T + \measuredangle H_1(j\omega) \end{aligned}$$

Δηλαδή εισάγεται μία καθυστέρηση φάσης στο σύστημα.

Άσκηση: Παράδειγμα

Έστω ότι δίνεται μία συνάρτηση μεταφοράς με χρονική καθυστέρηση:

$$A(s) = e^{-sT}A_1(s)$$

όπου ισχύει:

$$A_1(s) = \frac{15(s+3)}{(s+1)(s+7)}$$

Πόση μπορεί να είναι η χρονική καθυστέρηση μέχρι το σύστημα να γίνει ασταθές;

Λύση

Με πράξεις βρίσκουμε ότι το σημείο ω_c στο οποίο η A_1 (και ισοδύναμα η A) έχουν μέτρο 0 dB είναι:

$$\left|A(j\omega_c)\right| = 0 \iff \left|\frac{15(j\omega_c+3)}{(j\omega_c+1)(j\omega_c+7)}\right| = 0 \iff \frac{15\sqrt{\omega_c^2+3^2}}{\sqrt{\omega_c^2+1^2}\sqrt{\omega_c^2+7^2}} \iff \omega_c = 13.6 \cong 15$$

Για αυτήν την τιμή υπολογίζουμε:

$$\measuredangle A_1(j\omega_c) \cong -71$$

Τότε, το περιθώριο φάσης για την A_1 (η απόσταση από τις 180°) είναι:

$$\theta_M\left(A_1(j\omega c)\right) = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ = \frac{109\pi}{180}\,\text{rad}$$

και, λόγω της καθυστέρησης, το περιθώριο φάσης για την A γίνεται:

$$\theta_M\left(A(j\omega_c)\right) = -\omega_c T + \theta_M\left(A_1(j\omega_c)\right) \cong -\omega_c T + 1.9024$$

(προσοχή στο ότι πρέπει να λαμβάνουμε τις μονάδες σε rad!)

Τελικά, προκύπτει ότι:

$$T < 0.1396\,\text{s},$$

δηλαδή η καθυστέρηση του συστήματος πρέπει να είναι μικρότερη από 0.1396 δευτερόλεπτα για να έχουμε ευστάθεια.

Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου:

$$A(s) = \frac{300\kappa}{(s+2)(s+3)(s+5)}$$

Για το σύστημα <u>κλειστού</u> βρόχου:

(1) Ποιά τιμή πρέπει να έχει το κ ώστε να έχουμε ευστάθεια;

(2) Ποιά τιμή πρέπει να έχει το κ ώστε το περιθώριο κέρδους να είναι $g_M = 3$;

Λύση Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστύ βρόχου προκύπτει:

$$s^3 + 10s^2 + 31s + 30 + 300\kappa = 0$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το **κριτήριο ευστάθειας Routh** για να μελετήσουμε την ευστάθεια του συστήματος:

$$\begin{array}{c|ccc} s^3 & 1 & 31 & 0 \\ s^2 & 10 & 30+300\kappa & 0 \\ s^1 & 28-30\kappa & 0 & \\ s^0 & 30+300\kappa & & \end{array}$$

Θυμόμαστε ότι για να έχουμε ευστάθεια πρέπει όλοι οι συντελεστές της πρώτης στήλης να είναι θετικοί:

$$28 - 30\kappa \geq 0 \quad \Longrightarrow \boxed{\kappa \leq 0.93}$$

$$30 + 300\kappa \geq 0 \quad \text{(ισχύει επειδή το κ είναι θετικό)}$$

Για το δεύτερο ερώτημα, θυμόμαστε ότι το περιθώριο κέρδους αναφέρεται στην οριακή τιμή με την οποία μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το κέρδος του συστήματος για να έχουμε ευστάθεια, δηλαδή:

$$g_M \kappa = 0.93 \Longrightarrow \boxed{\kappa = 0.31}$$

2.5 Διαγράμματα Nyquist

Έστω η συνάρτηση μεταφοράς:

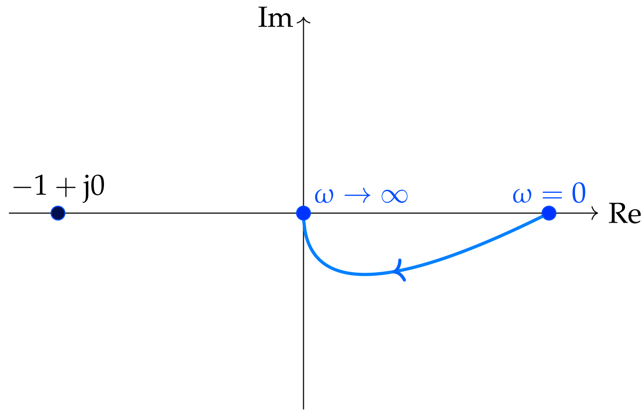
$$\frac{1}{1+s\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{1+j\omega\tau}$$

με μέτρο $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$ και φάση $-\tan^{-1}\omega\tau$.

Το διάγραμμα Nyquist είναι μία αναπαράσταση της συνάρτησης μεταφοράς στο μιγαδικό επίπεδο.

Για $\omega \rightarrow 0$, το μέτρο γίνεται 1 και η φάση 0.
Για $\omega \rightarrow \infty$, το μέτρο γίνεται 0 και η φάση $\pi/2$.
Για $\omega = \frac{1}{\tau}$ (χαρακτηριστική συχνότητα), το μέτρο γίνεται $\frac{1}{\sqrt{2}}$, και η φάση $-\frac{\pi}{4}$.

Μπορούμε επομένως να κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα τοποθετώντας τα τρία παραπάνω σημεία στο μιγαδικό επίπεδο:



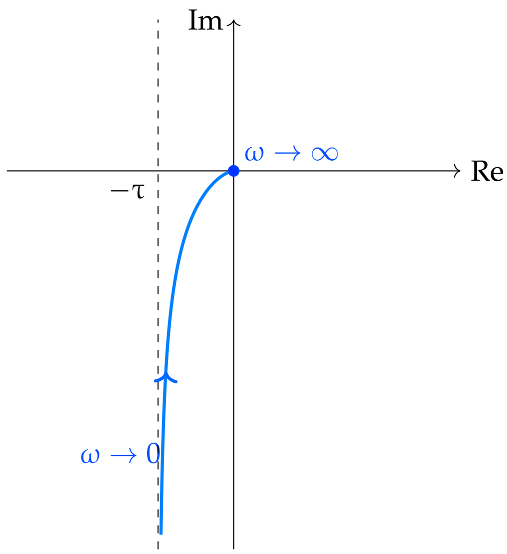
Παράδειγμα Έστω η συνάρτηση μεταφοράς με ολοκληρωτή:

$$A(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau)} = \frac{1}{\omega^2\tau + j\omega} = \frac{\omega^2\tau - j\omega}{Re^2 + Im^2} = -\frac{\tau}{\omega^2\tau^2+1} - j\frac{1}{\omega(\omega^2\tau^2+1)}$$

Τότε, αντίστοιχα με παραπάνω, μπορούμε να βρούμε τα σημεία και να σχεδιάσουμε το διάγραμμα Nyquist:

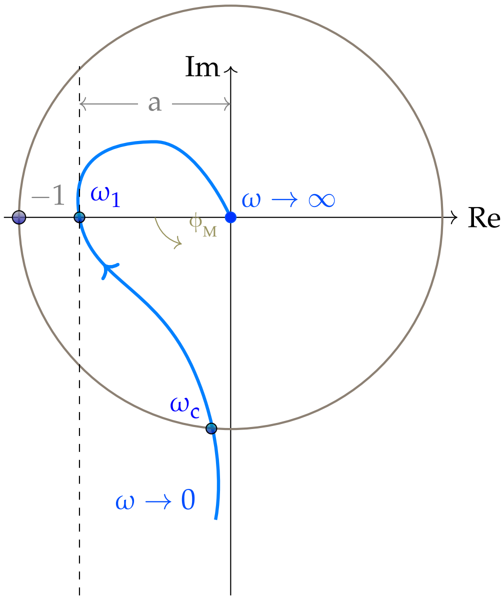
$$\text{Για } \omega = 0 : A(j\omega) = -\frac{\tau}{1} - j\infty \quad (\text{τείνει στο άπειρο με ασύμπτωτη την } x = -\tau)$$
$$\text{Για } \omega = \frac{1}{\tau} : A(j\omega) = -\frac{\tau}{2} - j\frac{\tau}{2}$$
$$\text{Για } \omega = \infty : A(j\omega) = -0 - j0$$

Άρα το διάγραμμα είναι:



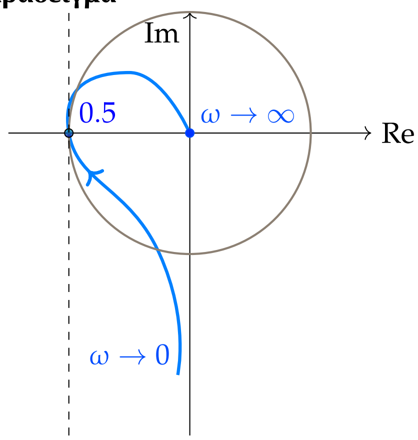
Γενικά για τα διαγράμματα Nyquist έχει σημασία το **κρίσιμο σημείο** $-1 + j0$. Αν το διάγραμμα δεν περνάει στα αριστερά του σημείου αυτού, τότε το σύστημα είναι ευσταθές.

Πιο συγκεκριμένα, έστω μια συνάρτηση μεταφοράς $A(j\omega)$ και το διάγραμμα Nyquist της:



Στο παραπάνω διάγραμμα, το περιθώριο κέρδους εκφράζεται από τον αριθμό με τον οποίο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το κέρδος της συνάρτησης στο σημείο τομής με τον πραγματικό άξονα μέχρι να συναντήσουμε το κρίσιμο σημείο, ενώ το περιθώριο φάσης εκφράζει το πόσο μπορούμε να περιστρέψουμε τη φάση της συνάρτησης για να έχουμε ευστάθεια, και αντιστοιχεί στη γωνία ϕ_M.

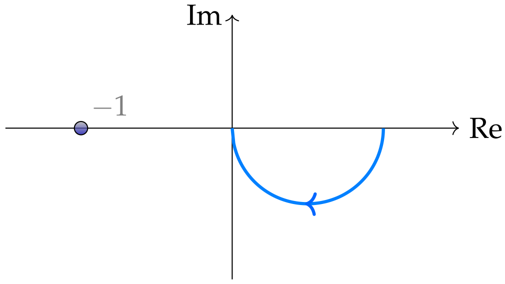
Παράδειγμα



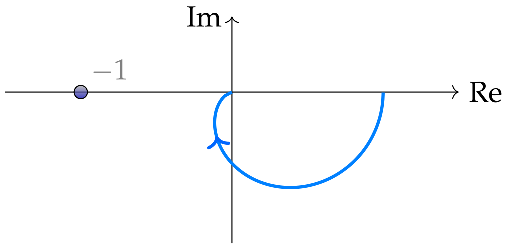
Στο παραπάνω διάγραμμα φάσης το περιθώριο κέρδους είναι $\frac{1}{0.5} = 2$, δηλαδή μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το κέρδος με τον αριθμό 2 μέχρι να φτάσουμε στο κρίσιμο σημείο.

2.5.1 Συνήθη διαγράμματα Nyquist

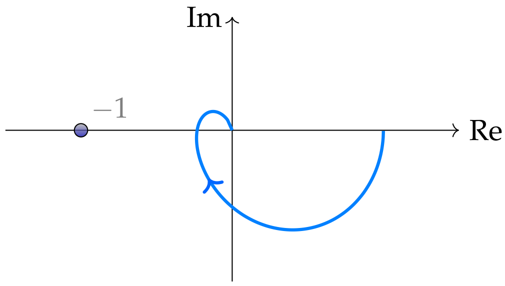
$$\frac{1}{1+j\omega\tau_1}$$



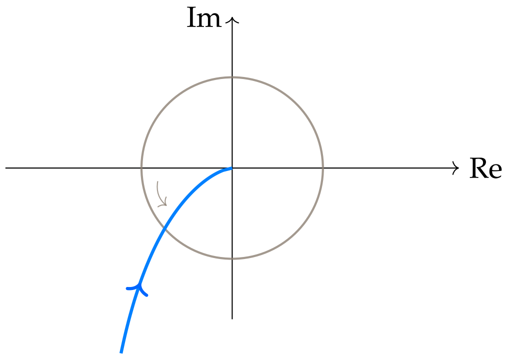
$$\frac{1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



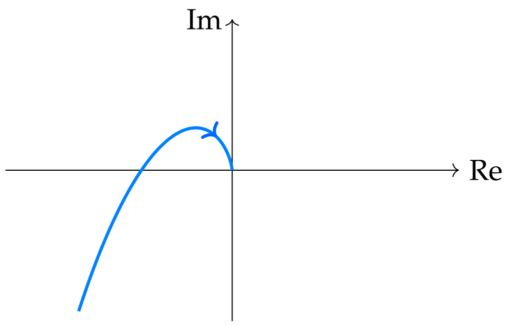
$$\frac{1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$$



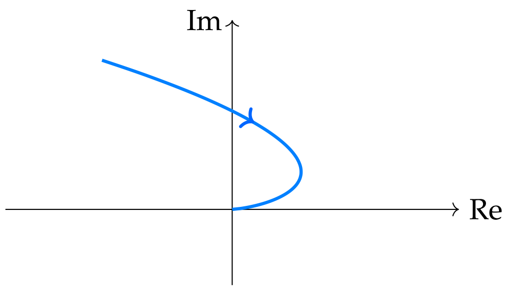
$$\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau_1)}$$



$$\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



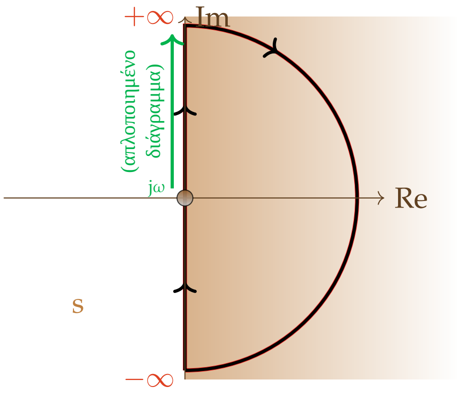
$$\frac{1}{(j\omega)^2(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



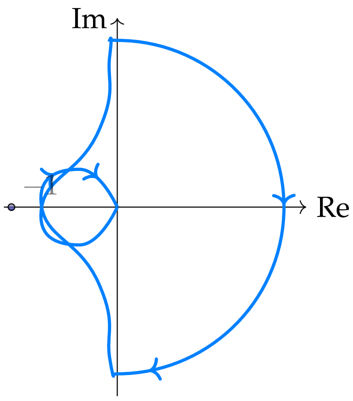
2.5.2 Γενικό κριτήριο Nyquist

Παραπάνω παρουσιάστηκε το απλοποιημένο κριτήριο Nyquist, για το οποίο παίρναμε τιμές του ω μεταξύ του 0 και του $+\infty$.

Για την εφαρμογή του γενικευμένου κριτηρίου Nyquist, δεν θεωρούμε πάντα ότι $s = j\omega$, αλλά παίρνουμε τιμές του s από το 0 μέχρι το $+j\infty$, μετά συνεχίζουμε με ένα ημικύκλιο άπειρης ακτίνας μέχρι το $\omega = -j\infty$, για να επιστρέψουμε ξανά στο 0.

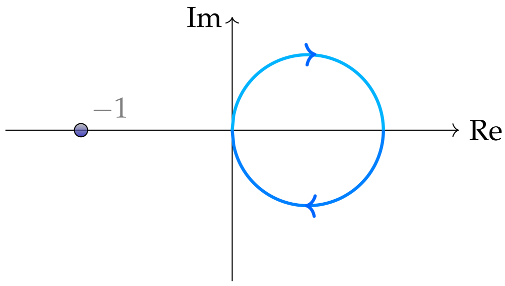


Τότε το διάγραμμα Nyquist γίνεται:

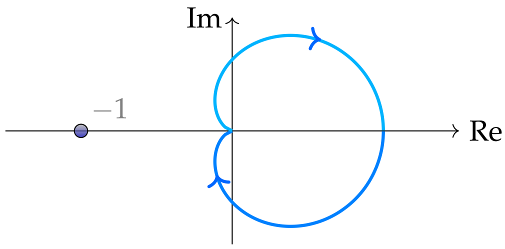


και τα παραπάνω συνήθη διαγράμματα:

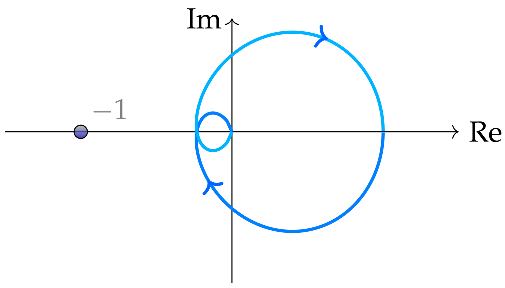
$$\frac{1}{1+j\omega\tau_1}$$



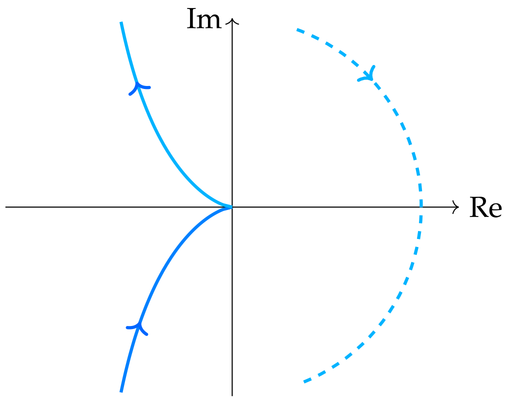
$$\frac{1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



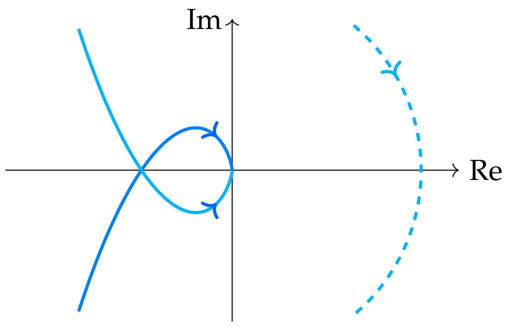
$$\frac{1}{(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)(1+j\omega\tau_3)}$$



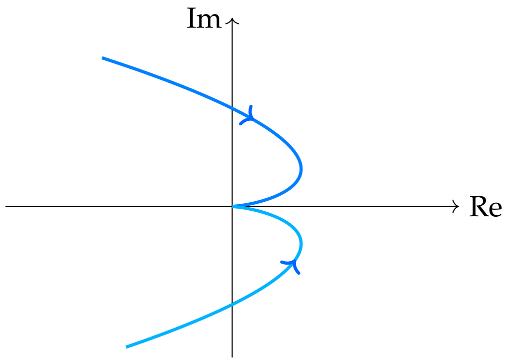
$$\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau_1)}$$



$$\frac{1}{j\omega(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



$$\frac{1}{(j\omega)^2(1+j\omega\tau_1)(1+j\omega\tau_2)}$$



Για το διάγραμμα Nyquist (στη γενικευμένη μορφή) ισχύει:

$$N = Z - P$$

όπου:

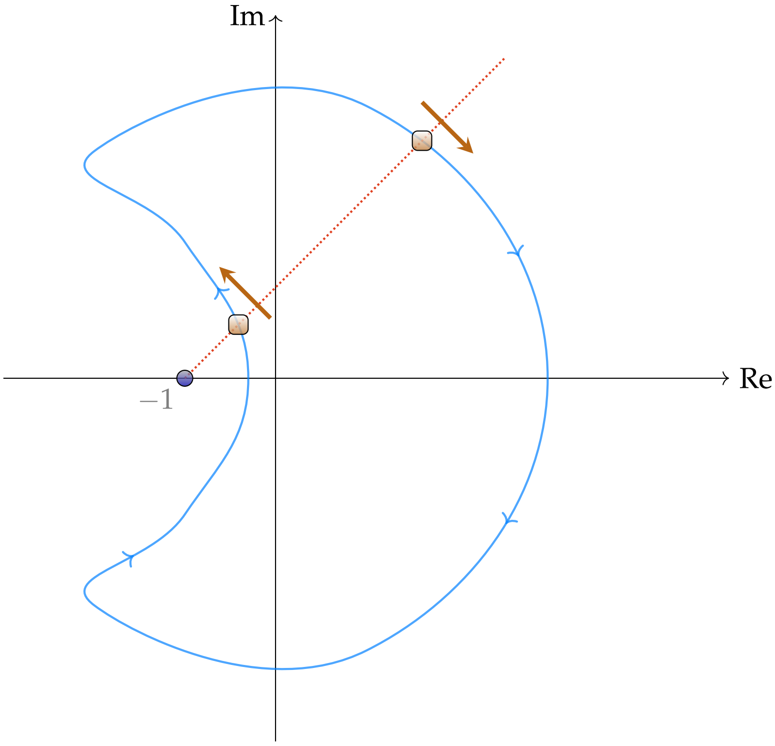
- N ο αριθμός των περικυκλώσεων γύρω από το -1 κατά την ωρολογιακή φορά
- Z είναι ο αριθμός των **ασταθών πόλων** του συστήματος **κλειστού βρόχου** (δηλαδή οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης $1 + A(s)$)
- P είναι ο αριθμός των **ασταθών πόλων** του συστήματος **ανοιχτού βρόχου** (δηλαδή οι πόλοι της $A(s)$)

(όπου με τον όρο *ασταθείς πόλοι* εννοούμε τους πόλους που βρίσκονται στο δεξί ημιεπίπεδο)

Το ζητούμενο συνήθως είναι να βρούμε τον αριθμό των ασταθών πόλων του συστήματος *κλειστού βρόχου*, ενώ, όπως αναφέραμε παραπάνω, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το απλοποιημένο κριτήριο, επειδή η $A(s)$ έχει και ασταθείς πόλους.

Για να βρούμε τον αριθμό N των περικυκλώσεων Για να βρούμε τον αριθμό των περικυκλώσεων, παίρνουμε μια ημιευθεία με οποιαδήποτε κλίση από το κρίσιμο σημείο (-1).

Για κάθε σημείο τομής της *ημιευθείας* με το *διάγραμμα*, αντιστοιχίζουμε έναν αριθμό, ανάλογα με τη φορά του διαγράμματος σε σχέση με την ευθεία: -1 αν το διάγραμμα τείνει να στρέψει την ευθεία κατά την *αντιωρολογιακή* φορά, και $+1$ αν το διάγραμμα τείνει να στρέψει την ευθεία κατά την *ωρολογιακή* φορά:



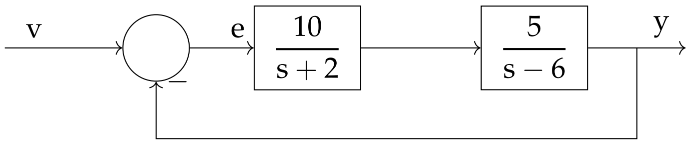
Το ζητούμενο N είναι το άθροισμα των αριθμών που αντιστοιχούμε στο κάθε σημείο τομής, δηλαδή:

$$N = -1 + 1 = 0$$

2.5.3 Ασκήσεις

Άσκηση

Να σχεδιαστεί το πλήρες διάγραμμα Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος:



Λύση

Κατ' αρχάς, παίρνω τη συνάρτηση ανοιχτού βρόχου:

$$A(s) = \frac{50}{(s+2)(s-6)}$$

και ξεκινώ την κατασκευή του διαγράμματος.

- Για $\omega = 0$:

$$A(0) = \frac{50}{-12} = -4.16$$

- Για $\omega \to \infty$:

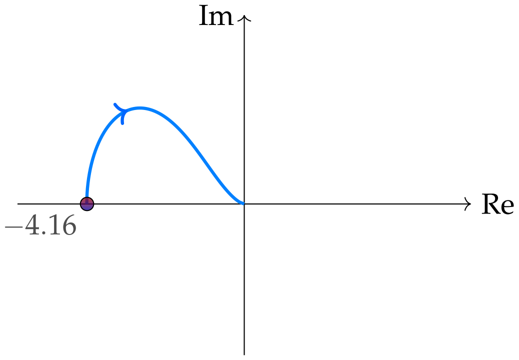
$$A(\infty) = 0$$

Μάλιστα, με δύο πόλους πολλαπλότητας 1, η φάση του διαγράμματος στο $+\infty$ καταλήγει στις $-180°$, για πολύ μεγάλο ω, όπως γνωρίζουμε από τα διαγράμματα Bode.

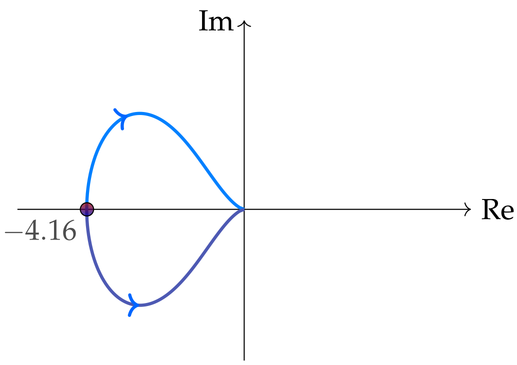
- Για να βρούμε αν το διάγραμμα βρίσκεται στο επάνω ή στο κάτω ημιεπίπεδο, κάνουμε τις πράξεις για $s = j\omega$:

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= \frac{50}{(j\omega+2)(j\omega-6)} \\ &= \frac{-50(\omega^2+12)+200j\omega}{(\omega^2+12)^2+16\omega^2} \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το φανταστικό μέρος ($\frac{200\omega}{(\omega^2+12)^2+16\omega^2}$) είναι θετικό, άρα το απλό διάγραμμα Nyquist βρίσκεται στην επάνω μεριά του επιπέδου:

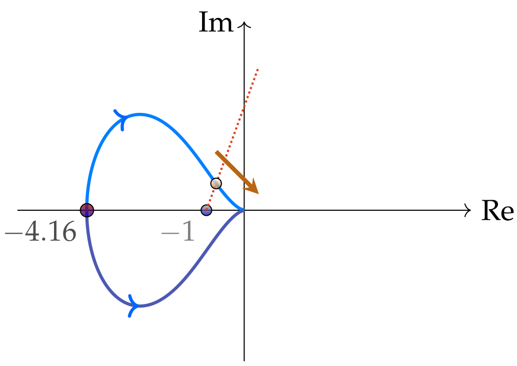


Για να σχεδιάσουμε το πλήρες διάγραμμα Nyquist, λαμβάνουμε υπ' όψιν και τα αρνητικά ω, δηλαδή σχεδιάζουμε και το συζυγές του παραπάνω διαγράμματος:



Όσον αφορά το ημικυκλικό κομμάτι που παρουσιάσαμε στη θεωρία, σε εκείνο ισχύει ότι για $s \to \infty : |A(s)| = 0$, οπότε αντιστοιχεί στο σημείο 0.

Για να βρούμε αν το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ασταθές, πρώτα θεωρούμε μια ημιευθεία γύρω από το -1:



Αυτή τέμνει το διάγραμμα Nyquist σε ένα σημείο με ωρολογιακή φορά, οπότε αντιστοιχούμε σε αυτόν τον αριθμό 1. Επομένως, για το δείκτη Nyquist ισχύει:

$$N = +1$$

Η συνάρτηση ανοιχτού βρόχου έχει έναν πόλο στο δεξί ημιεπίπεδο (τον +6):

$$P = 1$$

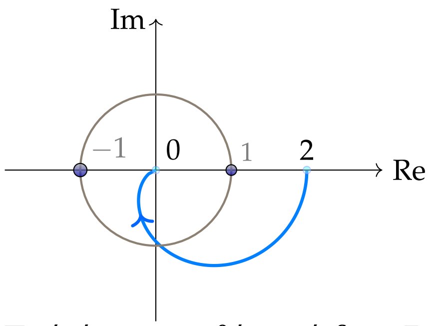
Άρα τελικά ο αριθμός των πόλων του κλειστού βρόχου υπολογίζεται:

$$N = Z - P \implies \boxed{Z = N + P = 2}$$

Δηλαδή το σύστημα κλειστού βρόχου έχει δύο ασταθείς πόλους, και επομένως είναι ασταθές.

Άσκηση

Δίνεται το παρακάτω διάγραμμα Nyquist:

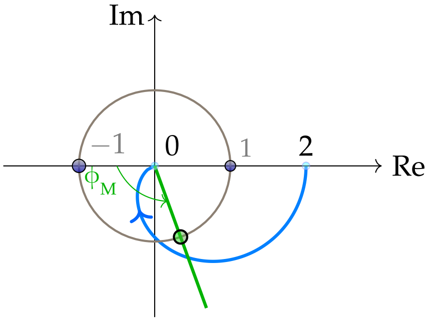


Ποιό είναι το περιθώριο κέρδους; Σε ποιό διάστημα ανήκει το περιθώριο φάσης;

Λύση

Το περιθώριο κέρδους είναι άπειρο, αφού δεν υπάρχει αριθμός με τον οποίο μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε το κέρδος της συνάρτησης για να φτάσει το σημείο -1.

Για το περιθώριο φάσης, παίρνουμε το σημείο τομής της συνάρτησης με το μοναδιαίο κύκλο:



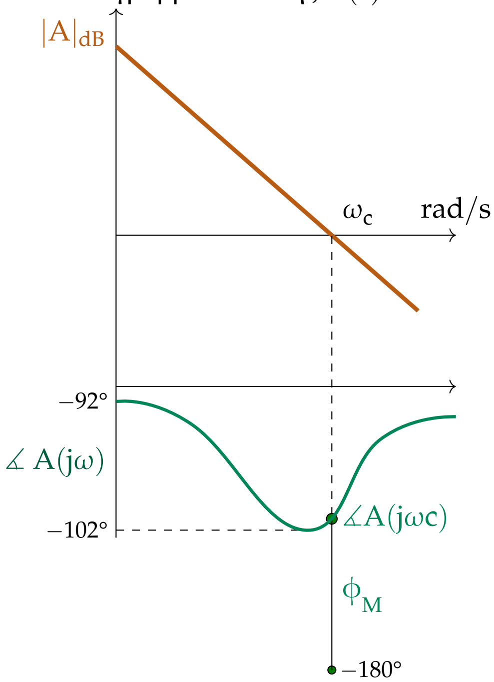
Παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι ισχύει $90° < \phi_M < 150°$.

Διαισθητικά, αν περιστρέψουμε το διάγραμμα κατά το περιθώριο φάσης, δηλαδή κατά ϕ_M, τότε η καμπύλη θα συμπέσει με το κρίσιμο σημείο -1, άρα θα αρχίσουμε να έχουμε αστάθεια.

Αντίστοιχα, αν "φουσκώσουμε" (κάνουμε scaling) την καμπύλη, πολλαπλασιάζοντας το μέτρο της με έναν αριθμό που είναι το περιθώριο κέρδους, τότε μια καμπύλη πάλι θα συμπέσει με το -1, και θα υπάρχει αστάθεια. Στη συγκεκριμένη άσκηση βέβαια, όσο κι αν μεγαλώσουμε την καμπύλη, αυτή δεν πρόκειται να φτάσει στο -1.

Άσκηση

Δίνεται το διάγραμμα Bode της A(s):



Ποιό είναι το περιθώριο φάσης;

Λύση

Αν ω_c είναι η συχνότητα στην οποία η συνάρτηση έχει μηδενικό κέρδος, θα έχουμε:

$$\phi_M = \measuredangle A(j\omega_c) - (-180°) = 180° + \measuredangle A(j\omega_c)$$

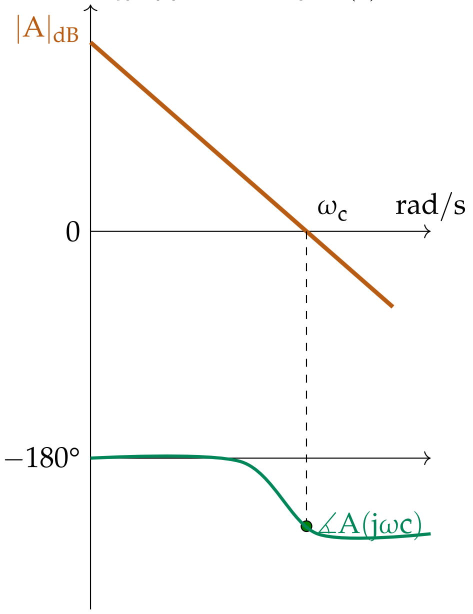
Από το διάγραμμα παρατηρούμε ότι $\measuredangle A(j\omega_c) \in (-102°,\ -92°)$, ή, προσεγγιστικά, $\measuredangle A(j\omega_c) = -98°$.

Άρα:

$$\phi_M = 180° - 98° = 102°$$

Άσκηση

Δίνεται το διάγραμμα Bode της $A(s)$:



Είναι το σύστημα ευσταθές;

Λύση

Για το **περιθώριο φάσης** ισχύει:

$$\phi_M = 180° + \measuredangle A(j\omega_c)$$

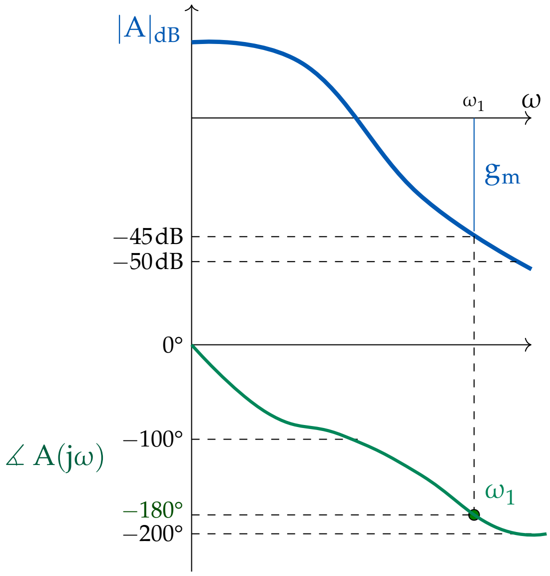
Όμως για τη γωνία $\measuredangle A(j\omega_c)$ παρατηρούμε από το διάγραμμα ότι ισχύει $\measuredangle A(j\omega_c) < -180°$. Επομένως:

$$\phi_M < 0$$

άρα το σύστημα είναι *ασταθές*.

Άσκηση

Ποιό είναι το περιθώριο κέρδους για το παρακάτω διάγραμμα Bode;



Λύση

Για το περιθώριο κέρδους ισχύει:

$$g_m = 0 - |A(\omega_1)|_{dB}$$

όμως για τη συχνότητα ω_1 στην οποία η φάση είναι $-180°$ ισχύει περίπου $|A(\omega_1)|_{dB} = -45\,dB$, άρα:

$$g_m = 0 - (-45) = 45\,dB$$

Άσκηση

Να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος με χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$s^4 + 8s^3 + 18s^2 + 16s + 5 = 0$$

Λύση

Εδώ μπορούμε να εφαρμόσουμε το κριτήριο ευστάθειας Routh:

$$\begin{array}{c|rrr} s^4 & 1 & 18 & 5 \\ s^3 & 8 & 16 & 0 \\ s^2 & \frac{8\cdot18-1\cdot16}{8} = 16 & \frac{8\cdot5-1\cdot0}{8} = 5 & \\ s^1 & 13.5 & 0 & \\ s^0 & 5 & & \end{array}$$

Εφ' όσον δεν υπάρχει αλλαγή προσήμου στην πρώτη στήλη, το σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση

Να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος με χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + 3s + 5 = 0$$

Λύση

Εφαρμόζουμε κριτήριο Routh:

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 2 & 3 \\
s^4 & 1 & 2 & 5 \\
s^3 & \varepsilon & -2 & \\
s^2 & \frac{2\varepsilon+2}{\varepsilon} & 5 & \\
s^1 & \frac{4\varepsilon-4-5\varepsilon^2}{2\varepsilon+2} & 0 & \\
s^0 & 5 & &
\end{array}
$$

Στην 3η σειρά προκύπτει 0. Για αυτό θεωρούμε έναν αριθμό $\varepsilon > 0$ αλλά πολύ μικρό. Όταν προκύπτει 0 στην πρώτη θέση στήλης, τότε έχουμε πόλο στον φανταστικό άξονα ή στο δεξί ημιεπίπεδο.

Ο πρώτος όρος της προτελευταίας γραμμής είναι αρνητικός, αφού:

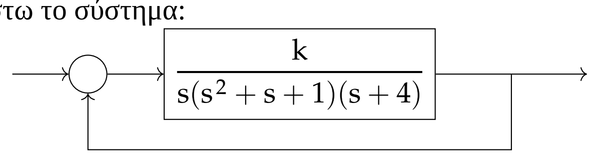
$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{-4\varepsilon - 4 - 5\varepsilon^2}{2\varepsilon + 2} = -2$$

Οι υπόλοιποι όροι της πρώτης στήλης είναι θετικοί.

Αφού έχουμε 2 εναλλαγές προσήμου στην $1^η$ στήλη, έχουμε 2 ρίζες στο δεξί ημιεπίπεδο, και το σύστημα είναι ασταθές.

Άσκηση

Έστω το σύστημα:



Είναι το σύστημα ευσταθές για κάποιο εύρος k, και ποιό είναι αυτό;

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος (αν θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς *ανοιχτού* βρόχου είναι G):

$$G_{\Sigma MKB}(s) = \frac{G}{1+G} = \frac{k}{s(s^2+s+1)(s+4)+k} = \frac{k}{s^4+5s^3+5s^2+4s+k}$$

Και εφρμόζουμε το κριτήριο Routh:

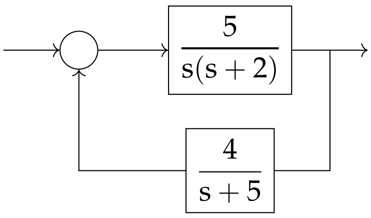
$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 5 & k \\
s^3 & 5 & 4 & 0 \\
s^2 & \frac{21}{5} & & \\
s^1 & \frac{84-25k}{21} & 0 & \\
s^0 & k & &
\end{array}
$$

Για να είναι ευσταθές το σύστημα θέλουμε να μην υπάρχει καμία εναλλαγή προσήμου στην πρώτη στήλη, δηλαδή:

$$
\left.\begin{array}{l}
84 - 25k > 0 \implies k < 3.36 \\
\qquad\qquad\qquad\quad k > 0
\end{array}\right\} \implies 0 < k < 3.36
$$

Άσκηση

Δίνεται το παρακάτω σύστημα:

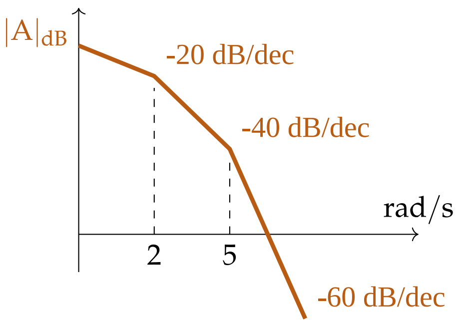


Να προσδιοριστούν το περιθώριο φάσης και το περιθώριο κέρδους.

Λύση

(α) Για το περιθώριο φάσης βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου και σχεδιάζουμε το διάγραμμα Bode:

$$G(s) = \frac{5}{s(s+2)}\frac{4}{s+5} = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$$



Βρίσκουμε την ω_c ώστε $\left|A(j\omega_c)\right| = 1$:

$$G(s) = \frac{20}{j\omega\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)\left(\frac{j\omega}{5}+1\right)\cdot 2\cdot 5}$$

(i) Για $\omega_c \ll 2$:

$$G(s) \approx \frac{20}{2\cdot 5j\omega}$$

Και $|G| = 1 \implies \omega_c = 2$, άτοπο αφού υποθέσαμε ότι $\omega_c \ll 2$.

(ii) Για $\omega_c \ll 5$:

$$G(s) \approx \frac{20}{2.5(j\omega)\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)}$$

Λύνουμε την εξίσωση $G(s) = 1$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left|G(s)\right| = 1 &\implies \\
\left|\frac{20}{5s(s+2)}\right| = 1 &\implies \\
\frac{4}{\left|-\omega^2 + 2j\omega\right|} = 1 &\implies \\
16 = \left|-\omega^2 + 2j\omega\right|^2 &\implies \\
\omega^4 + 4\omega^2 = 16 &\implies \underline{\omega_c = 1.57}
\end{aligned}$$

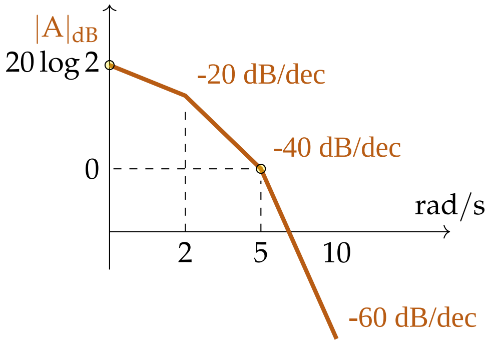
Επομένως, για $\omega_c = 1.57\,\text{rad/s}$, έχουμε (για τον κάθε πόλο):

$$\left.\begin{aligned}
\measuredangle\frac{1}{s} &= -90^\circ \\
\measuredangle\frac{1}{s+2} = \measuredangle\frac{1}{1.57j+2} = \tan^{-1}\left(\frac{1.57}{2}\right) &= -38^\circ \\
\measuredangle\frac{1}{s+5} &= -17^\circ
\end{aligned}\right\} \overset{+}{\Rightarrow} \measuredangle A(j\omega_c) = -145^\circ$$

Άρα τελικά:

$$\phi_M = \measuredangle A(j\omega_c) - (-180^\circ) = 35^\circ$$

Μάλιστα, μπορούμε να σχεδιάσουμε αναλυτικά το προσεγγιστικό διάγραμμα Bode, υπολογίζοντας την τιμή για $\omega = 1$, η οποία προκύπτει $20\log 2\,\text{dB}$:



Συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\begin{cases}
\text{για } \omega \in [1,2] \implies & |A|_{dB} = 20\log 2 - 20\log(\omega) \\
\text{για } \omega \in [2,5] \implies & |A|_{dB} = 20\log 2 - 20\log(\omega) - 20\log\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
\text{για } \omega \in [5,\infty) \implies & |A|_{dB} = 20\log 2 - 20\log(\omega) - 20\log\left(\frac{\omega}{2}\right) - 20\log\left(\frac{\omega}{5}\right)
\end{cases}$$

(β) Για να βρούμε το περιθώριο κέρδους, πρώτα ψάχνουμε τη συχνότητα ω_a για την οποία ισχύει $\measuredangle A(j\omega_a) = -180^\circ$:

$$\begin{aligned}
\left(\measuredangle\frac{1}{s}\right) + \left(\measuredangle\frac{1}{s+2}\right) + \left(\measuredangle\frac{1}{s+5}\right) &= -180^\circ \\
-90^\circ + \measuredangle\frac{1}{j\omega_a+2} + \measuredangle\frac{1}{j\omega_a+5} &= -180^\circ \\
-90^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a}{5}\right) &= -180^\circ \\
-\tan^{-1}\left(\frac{\omega_a}{2}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_a}{5}\right) &= -90^\circ
\end{aligned}$$

Για να προχωρήσουμε χρησιμοποιούμε την ταυτότητα:

$$\boxed{\tan^{-1}(x) + \tan^{-1}(y) = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)}$$

Άρα:

$$\tan^{-1}\left(\frac{\frac{7\omega_a}{10}}{1-\frac{\omega_a^2}{10}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\frac{7\omega_a}{10}}{\frac{10-\omega_a^2}{10}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{7\omega_a}{10-\omega_a^2}\right) = 90°$$

Για να τείνει η γωνία στις 90° πρέπει:

$$\frac{7\omega_a}{10-\omega_a^2} \to \infty \implies 10-\omega_a^2 = 0 \implies \underline{\omega_a = \sqrt{10} \approx 3.16}$$

Εφ' όσον $\omega_a \in (2,5]$ παίρνουμε την κατάλληλη προσέγγιση για το πλάτος της συνάρτησης:

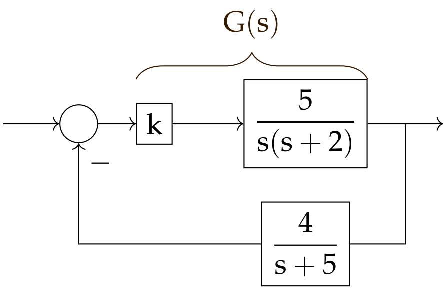
$$\left|A(j\omega_a)\right|_{dB} = 20\log 2 - 20\log(3.16) - 20\log\left(\frac{3.16}{2}\right) \approx -7.95\,\text{dB}$$

Άρα τελικά:

$$g_m = -|A| = 7.95\,\text{dB}$$

Εναλλακτικά, για να βρούμε το περιθώριο κέρδους μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο Routh, και να ψάξουμε ποιός είναι ο μέγιστος όρος με τον οποίο μπορούμε να πολλαπλάσιασουμε τη συνάρτηση ανοιχτού βρόχου και να παραμείνουμε στην ευστάθεια.

Για αυτό χρειάζεται να θεωρήσουμε το σύστημα:



με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_c = \frac{G}{1+GF} = \frac{5k(s+5)}{s(s+2)(s+5)+k\cdot 20}$$

και χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s(s+2)(s+5) + 20k = 0 \iff s^3 + 7s^2 + 10s + 20k = 0$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Routh:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 10 \\ s^2 & 7 & 20k \\ s^1 & \frac{70-20k}{7} & 0 \\ s^0 & 20k & \end{array}$$

Θέλουμε $\begin{cases} \frac{70-20k}{7} > 0 \implies 70-20k > 0 \implies k < \frac{7}{2} \\ 20k > 0 \implies k > 0 \end{cases}$, δηλαδή $k_{max} = \frac{7}{2}$.

Επομένως:

$$g_m = k_{max} = 3.5 \to 20\log\left(\frac{7}{2}\right) = 10.88\,\text{dB}$$

Η διαφορά των $\approx 3\,\mathrm{dB}$ μεταξύ των δύο αποτελεσμάτων οφείλεται στο ότι λάβαμε *προσεγγιστικό* διάγραμμα Bode, το οποίο εισάγει ένα σφάλμα. Στην προκειμένη περίπτωση, πιο σωστό είναι το αποτέλεσμα που προέκυψε από το κριτήριο Routh.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί διαγραμμα Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια του συστήματος κλειστού βρόχου, αν η συνάρτηση ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+5)}$$

Λύση

Πρώτα βρίσκουμε τις ακραίες τιμές:

$$A(0) = 0.133 + j0$$
$$\left|A(\infty)\right| = 0 + j0$$

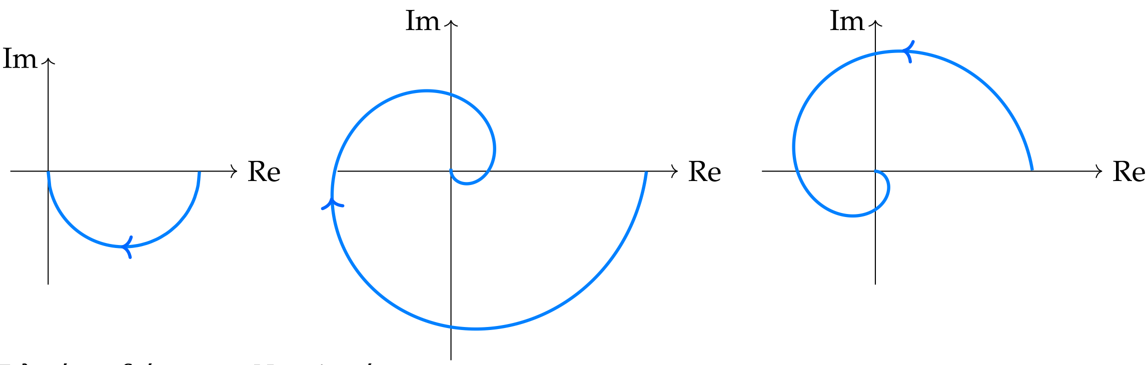
Αφού έχουμε ένα μηδενικό ($90°$) και δύο πόλους ($2 \cdot (-90°)$), η γωνία στο ∞ γίνεται:

$$\phi(\omega \to \infty) = -90°$$

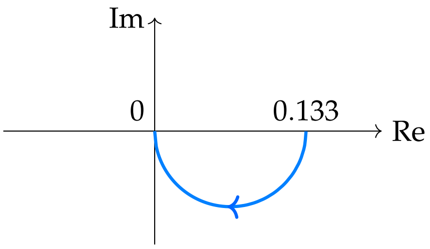
Για να ελέγξουμε από ποιά μεριά είναι το διάγραμμα, θεωρούμε:

$$\begin{aligned}\frac{s+2}{s^2+8s+15} &= \frac{j\omega+2}{-\omega^2+8j\omega+15} = \frac{(j\omega+2)(15-\omega^2-8j\omega)}{(-\omega^2+15+8j\omega)(15-\omega^2-8j\omega)} \\ &= \frac{15j\omega - j\omega^3 - 8j^2\omega^2 + 30 - 2\omega^2 - 16j\omega}{(15-\omega^2)^2+(8\omega)^2} = \underbrace{\frac{30+6\omega^2}{\omega^4+34\omega^2+225}}_{>0} \underbrace{-j\frac{\omega(\omega^2+1)}{\omega^4+34\omega^2+225}}_{<0}\end{aligned}$$

Με τη μελέτη της μορφής του μιγαδικού, μπορούμε να καταλάβουμε ότι το μηδέν προσεγγίζεται από κάτω. Εναλλακτικοί τρόποι προσέγγισής του είναι οι εξής:



Τελικά, το διάγραμμα Nyquist είναι:



Αφού δεν περικυκλώνεται το -1, το σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist:

$$G(s) = \frac{10(s+2)}{(s+3)^2+25}$$

Λύση

Έχουμε:

$$A(j\omega) = \frac{10\left(4\omega^2+68-j\omega(\omega^2-22)\right)}{\omega^4-32\omega^2+1156}$$

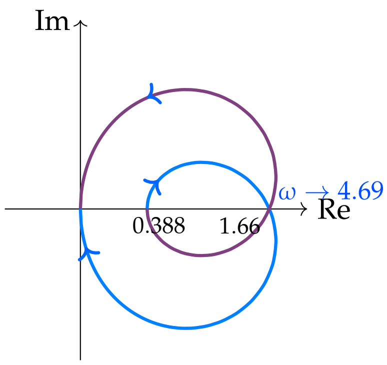
και επιπλέον:

$$\begin{aligned} \omega = 0: &\quad A(j\omega) = 0.588 \\ \omega \to \infty: &\quad \left|A(j\omega)\right| = 0 \end{aligned}$$

Θα ψάξουμε ακόμα τα σημεία τομής με τον πραγματικό άξονα:

$$\text{Im}\left[A(j\omega)\right] = 0 \implies \omega(\omega^2-22) = 0 \implies \begin{cases} \omega &= 0 \\ \omega &= \sqrt{22} = 4.69 \end{cases}$$

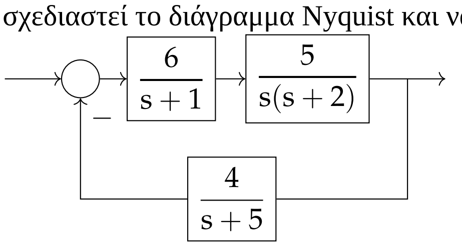
Τέλος, παρατηρούμε ότι $\text{Re}\left[A(j\omega)\right] = 1.66$, ότι για $\omega \in [0,\ 4.69] \implies \omega^2 - 22 < 0 \implies \text{Im}\left[A(j\omega)\right] > 0$, άρα προσεγγίζουμε από επάνω, και ότι στον φανταστικό άξονα πηγαίνουμε μόνο όταν $\text{Re}\left[A(j\omega)\right] = 0 \implies \omega \to \infty$:



Αφού το -1 δεν περικυκλώνεται, έχουμε $N = 0$. Επειδή δεν υπάρχουν πόλοι δεξιά, ισχύει $P = 0$. Άρα τελικά $Z = 0$, και το σύστημα είναι ευσταθές.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί το διάγραμμα Nyquist και να εξεταστεί η ευστάθεια:



Λύση

Η (ισοδύναμη) συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$A(s) = \frac{6}{s+1}\frac{7}{s^2+5s+2}\frac{8}{s+2} = \frac{336}{s^4+8s^3+19s^2+16s+4}$$

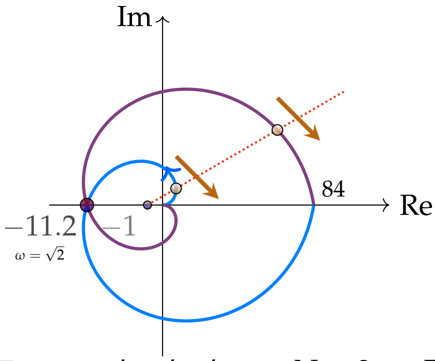
άρα:

$$A(j\omega) = \frac{336}{\omega^4 - j8\omega^3 - 19\omega^2 + j16\omega + 4} = \frac{336\left[(\omega^4 - 19\omega^2 + 4) + j(8\omega^3 - 16\omega)\right]}{\omega^8 + 26\omega^6 + 113\omega^4 + 104\omega^2 + 16}$$

Αντίστοιχα με την προηγούμενη άσκηση, υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
A(0) &= 84 \\
\left|A(\infty)\right| &= 0 \\
\operatorname{Im}\left[A(j\omega)\right] &= 0 \implies 8\omega^3 - 16\omega = 0 \implies \omega = 0 \text{ ή } \omega = \sqrt{2} \\
\operatorname{Im}\left[A(j\omega)\right] &< 0 \quad (\text{άρα προσεγγίζουμε από κάτω}) \\
A(j\sqrt{2}) &= -11.2 \\
\phi(\infty) &= -90° - 90° - 90° - 90° = -360°
\end{aligned}$$

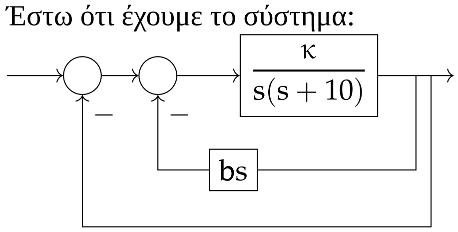
Άρα το διάγραμμα γίνεται:



Παρατηρούμε ότι έχουμε $N = 2$ και $P = 0$, άρα $Z = 2$, δηλαδή το σύστημα είναι ασταθές.

2.6 Γεωμετρικός τόπος ριζών

Έστω ότι έχουμε το σύστημα:



Τότε η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή

$$H_p(s) = \frac{\prod_i (s + z_i)}{s^N \prod_j (s + p_j)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Για το συγκεκριμένο σύστημα, η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$H_p(s) = \frac{\kappa}{s(s + 10 + \kappa b)}$$

Για να βρούμε το **γεωμετρικό τόπο ριζών**, χρειάζεται να βρούμε μια εξίσωση της μορφής:

$$\boxed{1 + K_\gamma H_p(s) = 0}$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορούμε να εργαστούμε με $K_\gamma = \kappa$ ή $K_\gamma = b$, δηλαδή:

(α) Για $K_\gamma = \kappa, \quad b = \text{const.}$:

$$1 + Kb \cdot \frac{(s + {}^1\!/_b)}{s(s+10)} = 0$$

(β) Για $K_\gamma = b, \quad \kappa = \text{const.}$:

$$1 + bk\frac{s}{s^2 + 10s + \kappa} = 0$$

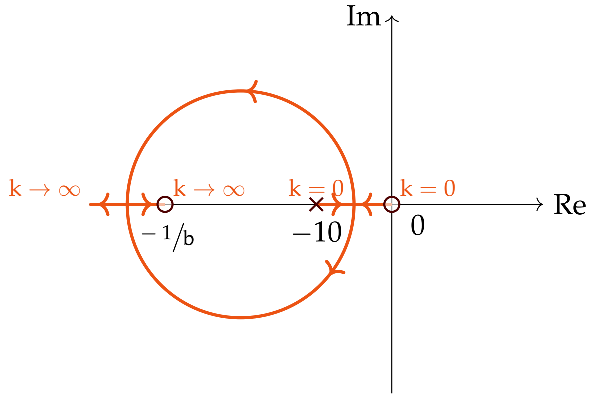
Επομένως, έχουμε τη μορφή:

$$1 + K_\gamma \frac{N(s)}{D(s)} = 0 \implies D(s) + K_\gamma N(s) = 0$$

Όταν στην παραπάνω εξίσωση θέσουμε το $K_\gamma = 0$, τότε αποκτά τη μορφή $D(s) = 0$, δηλαδή οι λύσεις της είναι οι πόλοι που αντιστοιχούν στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο.

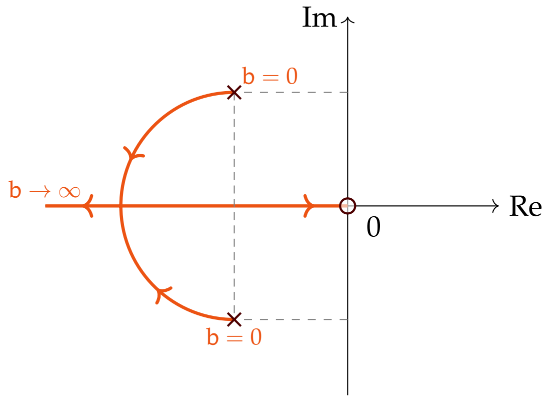
Αντίστοιχα, αν θέσουμε $K_\gamma \to \infty$, τότε αποκτά τη μορφή $N(s)$, δηλαδή οι λύσεις είναι τα μηδενικά της συνάρτησης μεταφοράς.

Για όλες τις υπόλοιπες τιμές του κ, η λύση της παραπάνω εξίσωσης αποκτά μια τιμή στο μιγαδικό επίπεδο. Ο γεωμετρικός τόπος των ριζών αυτών μπορεί να σχεδιαστεί:



Αυτό σημαίνει ότι, επιλέγοντας τις τιμές του κ, μπορούμε να έχουμε πόλους για το σύστημα μόνο στα συγκεκριμένα σημεία που φαίνονται παραπάνω και ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο. Παρ' όλα αυτά, μπορούμε να μελετήσουμε πώς η μεταβολή του κ επηρεάζει τις θέσεις των πόλων του συστήματος. Για παράδειγμα, στο συγκεκριμένο διάγραμμα, παρατηρούμε πως όσο αυξάνεται το $\kappa \to \infty$, τότε, ακολουθώντας τα βελάκια, ο ένας πόλος πηγαίνει στο ∞, αλλά ο άλλος πηγαίνει όλο και πιο δεξιά, καθιστώντας το σύστημα πιο αργό.

Αντίστοιχα, για το b με την εξίσωση $1 + b\kappa\frac{s}{s^2+10s+\kappa} = 0$, έχουμε τον εξής γεωμετρικό τόπο:



2.6.1 Κανόνες

Για να διευκολυνθούμε στο σχεδιασμό των διαγραμμάτων γεωμετρικών τόπων, ακολουθούμε μερικούς **κανόνες**:

- Το πλήθος των πόλων της $D(s)$ είναι το πλήθος των κλάδων n
- Το πλήθος των πόλων της γης είναι 2
- Το πλήθος των μηδενικών είναι ίσο με το πλήθος των κλάδων που τείνουν σε ένα μηδενικό m
- Η διαφορά του πλήθους των πόλων και των μηδενικών είναι το πλήθος των κλάδων που τείνουν στο άπειρο
- Τα τμήματα του *πραγματικού* άξονα που ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο είναι αυτά που αφήνουν δεξιά τους περιττό πλήθος πόλων και μηδενικών.
- Το σημείο τομής των ασυμπτώτων με τον πραγματικό άξονα είναι το:

  $$\sigma_A = \frac{\sum p_i - \sum z_i}{n - m}$$

  Και η γωνία σε εκείνο το σημείο είναι

  $$\theta_i = \frac{(2i+1)\cdot 180}{n-m} \qquad i = 0, 1, \dots, n-m-1$$

  (όπου n και m ο *αριθμός* των πόλων και των μηδενικών αντίστοιχα)
- Για να βρούμε τα **σημεία σύγκλισης** (**σημεία απόσχισης**) δύο καμπυλών, βρίσκουμε τη λύση της παραγώγου:

  $$\frac{dH_p(s)}{ds} = 0$$

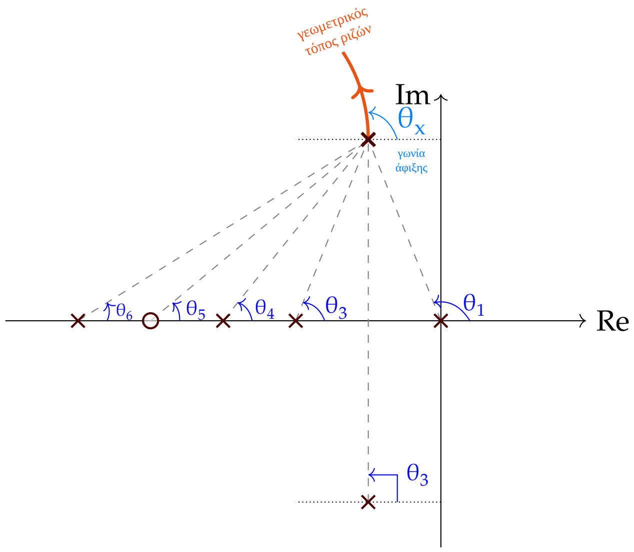
  και απορρίπτουμε τυχόν λύσεις που δεν ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο.

  Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, για $\frac{1}{b} = 20$, βρίσκουμε $s^2+40s+200 = 0$, άρα $s = -5.35$ και $s = -34.14$ για το πρώτο διάγραμμα, και $s = -6$ για το δεύτερο διάγραμμα.
- Για τη γωνία αναχώρησης από ένα μηδενικό ή έναν πόλο s ισχύει:

  $$\sum \measuredangle(s - z_i) - \sum \measuredangle(s - p_i) = 180°$$

  Δηλαδή το άθροισμα όλων των γωνιών αναχώρησης από μηδενικά μείον πόλους είναι 180°.

  Για να βρούμε τη γωνία αναχώρησης από έναν πόλο, βρίσκουμε τις γωνίες από τους υπόλοιπους πόλους και μηδενικά, και εφαρμόζουμε τον τύπο:



$$\theta_4 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_5 + \theta_x) = 180°$$

- Επειδή έχουμε συζυγείς μιγαδικές ρίζες, έχουμε συμμετρία ως προς τον οριζόντιο άξονα.

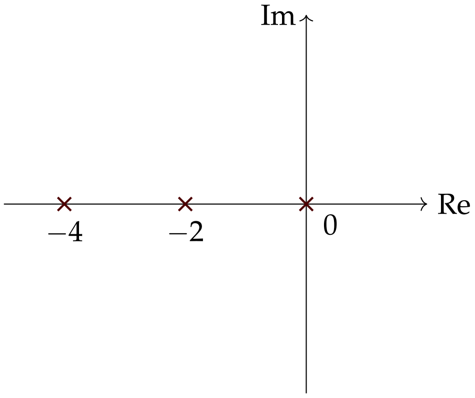
Παράδειγμα Θέλουμε να βρούμε το γεωμετρικό τόπο των ριζών για την:

$$A(s) = \frac{\kappa}{s(s+2)(s+4)}$$

Λύση Η εξίσωση που πρέπει να λύσουμε είναι:

$$1 + \kappa \frac{1}{s(s+2)(s+4)} = 0$$

Αρχικά τοποθετούμε στο μιγαδικό επίπεδο τους πόλους:



Εφ' όσον έχουμε 3 πόλους, έχουμε και 3 κλάδους, και επειδή δεν υπάρχει κανένα μηδενικό, οι κλάδοι αυτοί πηγαίνουν στο άπειρο.

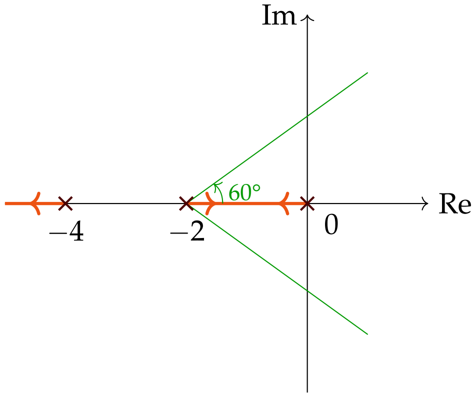
Το σημείο τομής των ασυμπτώτων είναι:

$$\sigma_A = \frac{-4-2-0}{3-0} = -2$$

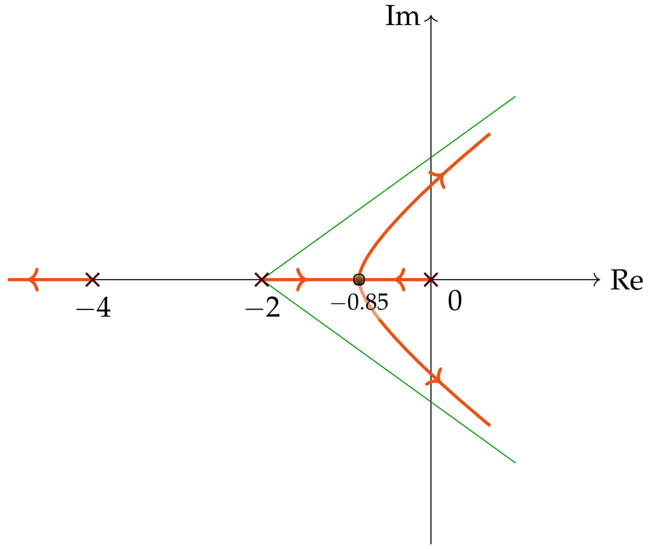
και οι ασύμπτωτες έχουν γωνία (από τον τύπο $\theta_i = \frac{(2i+1)\cdot 180}{n-m}$):

$$\theta_1 = 60°$$
$$\theta_2 = -60°$$
$$\theta_3 = 180°$$

επομένως στο διάγραμμα μπορούμε να προσθέσουμε τις ασύμπτωτες και τα κομμάτια του πραγματικού άξονα:



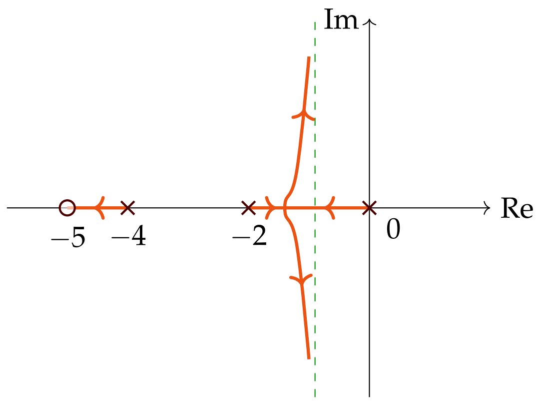
Επίσης, λύνοντας την εξίσωση $\frac{dA}{ds} = 0$, βρίσκουμε το σημείο απόσχισης στη θέση $s \approx -0.85$, και μπορούμε να σχεδιάσουμε το γεωμετρικό τόπο:



Για να έχουμε **άπειρο περιθώριο κέρδους**, θέλουμε να μην εμφανίζεται κανένα κομμάτι του γεωμετρικού τόπου στο δεξί ημιεπίπεδο. Για να το διορθώσουμε αυτό στη συνάρτηση του παραδείγματος, μπορούμε να αλλάξουμε τη διεύθυνση των ασυμπτώτων, προσθέτοντας ένα μηδενικό, για παράδειγμα στη θέση $\mu = -5$:

$$A(s) = \frac{\kappa(s+\mu)}{s(s+2)(s+4)}$$

Τότε ο γεωμετρικός τόπος θα αποκτήσει αυτήν τη μορφή (αφού ακολουθήσουμε πάλι την παραπάνω διαδικασία):



2.6.2 Ασκήσεις

Άσκηση

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών για το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου:

$$GF = \frac{k}{(s+1)(s^2+4s+5)}$$

για $k > 0$

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς *κλειστού* βρόχου είναι, αν έχουμε μοναδιαία αρνητική ανάδραση:

$$\frac{GF}{1+GF} = \frac{GF}{1+k\frac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)}}$$

δηλαδή στον παρονομαστή εμφανίζεται η μορφή $1 + aL(s) = 1 + k\frac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)}$ που επιθυμούμε, με $a = k$ και:

$$L(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2+4s+5)} = \frac{1}{(s+1)\big(s-(-2+j)\big)\big(s-(-2-j)\big)}$$

Για να σχεδιάσουμε το διάγραμμα, λαμβάνουμε υπ' όψιν ότι:

- Έχουμε 3 πόλους, άρα 3 κλάδους
- Για τις ασύμπτωτες ευθείες ισχύει:

$$\text{Αριθμός Ασυμπτώτων} = \text{Αριθμός πόλων} - \text{Αριθμός μηδενικών} = 3 - 0 = 3$$

  Το **κέντρο** των ασυμπτώτων είναι:

$$\frac{\sum p_i - \sum z_j}{A_p - A_z} = \frac{-1-2+j-2-2}{3} = -1.67$$

  και η γωνία που σχηματίζουν είναι:

$$\theta_\rho = \frac{2\rho+1}{A_\rho - A_z} \cdot 180°$$

  όπου $\rho = 0,\ 1, \ldots,\ A_\rho - A_z - 1$, A_ρ ο αριθμός των πόλων, και A_z ο αριθμός των μηδενικών, δηλαδή:

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \frac{1}{3} \cdot 180° &&= 60° \\ \theta_1 &= \frac{2+1}{3} \cdot 180° &&= 180° \\ \theta_2 &= \frac{5}{3} \cdot 180° &&= 300°\end{aligned}$$

  Σε αυτό το σημείο μπορούμε να επισημάνουμε ότι οι γωνίες θ_ρ θα βγαίνουν πάντα ίδιες, καθώς εξαρτώνται μόνο από τον αριθμό τον πόλων, οπότε δεν χρειάζεται να τις υπολογίζουμε κάθε φορά.

- Για τη γωνία αναχώρησης ισχύει:

$$\phi_j = \left(\sum \measuredangle z_i - \sum \measuredangle p_k\right)_{s=p_j} + 180°$$

  Θυμόμαστε τη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου:

$$\frac{k}{(s+1)(s+2-j)(s+2+j)}$$

  οπότε απλά θέτουμε s για κάθε πόλο και βρίσκουμε τη γωνία που σχηματίζει αυτός ο μιγαδικός αριθμός.

  – Για το $-2+j$:

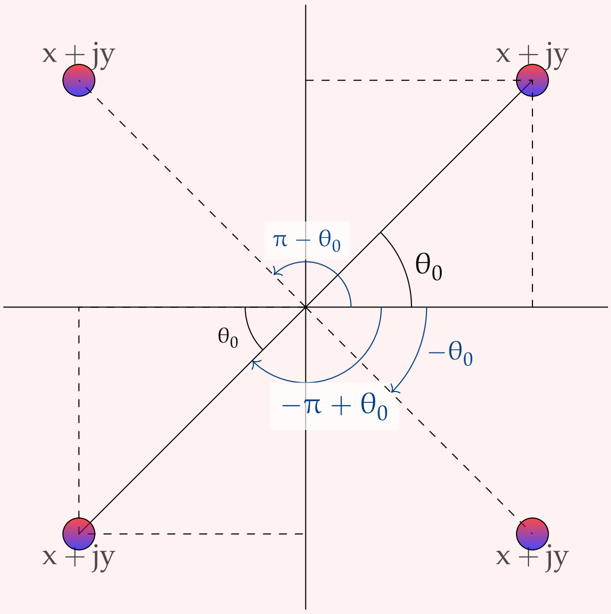
$$\phi = -\measuredangle(-2+j+1) - \measuredangle 0 - \measuredangle(-2+j+2+j) + 180° = -135° - 90° + 180° = -45°$$

    Για να βρούμε τις γωνίες του κάθε πόλου, μπορούμε να βρούμε με κάποιον τρόπο το όρισμα του μιγαδικού (π.χ. $\mathrm{Arg}(-1+j)$), από τη συνάρτηση atan2 που δέχεται ως όρισμα το φανταστικό και το πραγματικό μέρος, ή από τη συνάρτηση arctan, προσέχοντας όμως να αφαιρέσουμε ή να προσθέσουμε 180° αν χρειάζεται, ελέγχοντας αν η γωνία βρίσκεται στο σωστό τεταρτημόριο.

atan2

Η συνάρτηση atan2 εκφράσει το **όρισμα ενός μιγαδικού αριθμού** $x + jy$.
Έχει την ίδια τιμή με την arctan στο 1° τεταρτημόριο, αλλά μπορεί να είναι **διαφορετική στα υπόλοιπα τεταρτημόρια**.
Έχει 2 ορίσματα, και ορίζεται ως εξής:

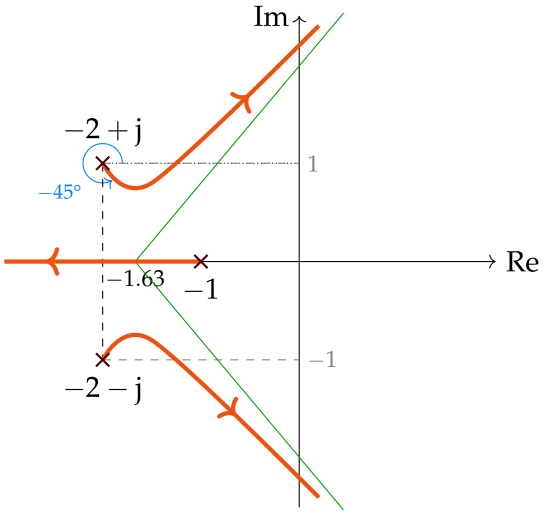
$$\operatorname{atan2}(y, x) = \measuredangle(x + jy) = \begin{cases} \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x, y > 0 \\ \pi - \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y > 0 \\ -\pi + \arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x < 0,\ y < 0 \\ -\arctan\left|\frac{y}{x}\right|, & x > 0,\ y < 0 \end{cases}$$



$$\theta_0 = \arctan\left|\frac{y}{x}\right|$$

- Τα βελάκια πηγαίνουν από τους πόλους προς το άπειρο ή προς τα μηδενικά.

Άρα το διάγραμμα γίνεται:



Παρατηρούμε πως όσο αυξάνουμε το k, οι δύο επάνω πόλοι πηγαίνουν όλο και περισσότερο προς τα δεξιά, και κάποια στιγμή φτάνουν τον κατακόρυφο άξονα, οπότε έχουμε αστάθεια.

Για να βρούμε τα σημεία τομής του γεωμετρικού τόπου με τον κατακόρυφο άξονα, μπορούμε επομένως να εφαρμόσουμε το κριτήριο Routh για τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου $s^3 + 5s^2 + 9s + 5 + k = 0$:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 9 \\ s^2 & 5 & 5+k \\ s^1 & \frac{40-k}{5} & 0 \\ s^0 & 5+k & \end{array}$$

Θέλουμε $k > -5$ και $40 - k > 0$, άρα τελικά $\underline{k < 40}$.

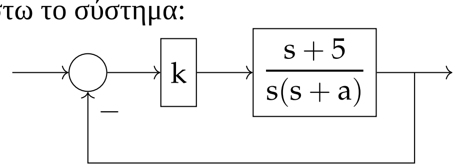
Για να βρούμε τα σημεία τομής, θεωρούμε τη **βοηθητική εξίσωση του κριτηρίου Routh αμέσως επάνω από την πρώτη αλλαγή προσήμου**, δηλαδή στο s^2:

$$5s^2 + 5 + k = 0 \xrightarrow{k=40} \underline{s = \pm j3}$$

Άρα τα σημεία τομής των ασυμπτώτων με τον φανταστικό άξονα είναι τα $s = \pm 3$.

Άσκηση

Έστω το σύστημα:



Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών ως προς το a, για $k = 2$.

α) Για ποιά τιμή του a το σύστημα γίνεται ασταθές;

β) Για ποιά τιμή του a έχει πραγματικές ρίζες η χαρακτηριστική εξίσωση;

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$k\frac{s+5}{s(s+a)}$$

και η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

$$\frac{k\frac{s+5}{s(s+a)}}{1+k\frac{s+5}{s(s+a)}} = \frac{k(s+5)}{\underbrace{s(s+a)+k(s+5)}_{\text{Χαρακτηριστική Εξίσωση}}}$$

Πρέπει να φέρουμε την χαρακτηριστική εξίσωση $s(s+a)+k(s+5)=0$ στη μορφή $1+aL(s)=0$. Έχουμε:

$$\begin{aligned} s(s+a)+k(s+5)=0 &\implies \\ s^2+ks+5k=-as &\implies \\ 1+a\frac{s}{s^2+ks+5k}&=0 \end{aligned}$$

με $L(s)=\frac{s}{s^2+ks+5k}$ ή, για $k=2$:

$$L(s)=\frac{s}{s^2+2s+10}$$

Το σύστημα ανοιχτού βρόχου έχει πόλους στα $-1\pm 3j$, και ένα μηδενικό στο 0. Επομένως έχουμε δύο κλάδους που ξεκινούν από τους πόλους.

Έχουμε μία ασύμπτωτη, για την οποία δεν χρειάζεται να βρούμε το κέντρο και τη γωνία, επειδή γνωρίζουμε πως είναι αυτή που αντιστοιχεί στον οριζόντιο άξονα. Επειδή η ημιευθεία των αρνητικών πραγματικών αριθμών ανήκει στο γεωμετρικό τόπο (αφού έχει ένα μηδενικό στα δεξιά), είναι και η μοναδική ασύμπτωτη.

Για να βρούμε τα σημεία απόσχισης (**σημεία θλάσης**) μπορούμε να λύσουμε μία από τις ισοδύναμες εξισώσεις:

$$\frac{da}{ds}=0 \iff \frac{dL(s)}{ds}=0$$

Εδώ έχουμε $1+aL(s)=0$ άρα:

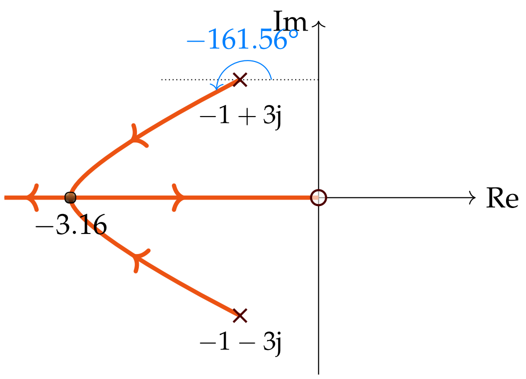
$$-a(s)=\frac{s^2+2s+10}{s}$$

επομένως:

$$\begin{aligned} \frac{s(2s+2)-(s^2+2s+10)}{s^2}=0 &\iff \\ s^2+2s-s^2-2s-10=0 &\iff \\ s^2-10=0 &\iff s=\pm 3.16 \implies \underline{s=-3.16} \text{ (για να ανήκει στο γεωμ. τόπο)} \end{aligned}$$

Επιπλέον πρέπει να βρούμε τις γωνίες αναχώρησης για τους πόλους:

$$\begin{aligned} \phi &= 180^\circ + \measuredangle(-1+3j) - \measuredangle\big((-1+3j)+1+3j\big) - \measuredangle 0 \\ &= 180^\circ + \underbrace{\text{atan2}(3,-1)}_{180^\circ-71.56^\circ} - \underbrace{\text{atan2}(3,0)}_{90^\circ} \\ &= -161.56^\circ \end{aligned}$$



Απ' ό,τι παρατηρούμε από το γεωμετρικό τόπο, δεν έχουμε αστάθεια για κανένα a.

Η χαρακτηριστική εξίσωση θα έχει διπλή πραγματική ρίζα στο σημείο -3.16, όπου οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου συναντώνται.

Άσκηση

Δίνεται ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου (μετά από ένα κέρδος k) και μοναδιαία αρνητική ανάδραση:

$$H_p(s) = \frac{s + \frac{1}{b}}{s(s+10)}$$
$$b = 0.05$$

Να βρεθεί το περιθώριο κέρδους, αφού σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών.

Λύση

Αφού έχουμε δύο πόλους, ο γεωμετρικός τόπος έχει δύο κλάδους. Θα έχουμε 1 ασύμπτωτη (αφού υπάρχουν 2 πόλοι και 1 μηδενικό), άρα δεν χρειάζεται να υπολογίσουμε γωνίες και κέντρο ασυμπτώτων (αφού η γωνία γνωρίζουμε ότι είναι στις 180°), δηλαδή αντιστοιχεί με τον οριζόντιο άξονα. Το ένα μηδενικό στη θέση $-\frac{1}{b}$ προκύπτει από τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου $H_c = \frac{kH_s}{1+1\cdot kH_s} = \frac{k\left(s+\frac{1}{b}\right)}{s(s+10)+k\left(s+\frac{1}{b}\right)}$.

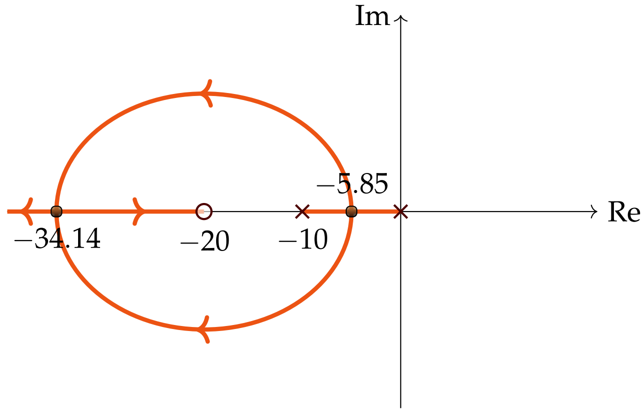
Για να βρούμε το σημείο θλάσης, λύνουμε τη *χαρακτηριστική εξίσωση*:

$$1 + kL(s) = 0$$

όπου $L(s) = \frac{s+\frac{1}{b}}{s(s+10)}$, και λύνουμε την εξίσωση $\frac{dk}{ds} = 0$:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \iff$$
$$\iff \frac{s(s+10) - \left(s+\frac{1}{b}\right)(2s+10)}{\dots} = 0 \implies \begin{cases} s_1 & = -5.857 \\ s_2 & = -34.1421 \end{cases}$$

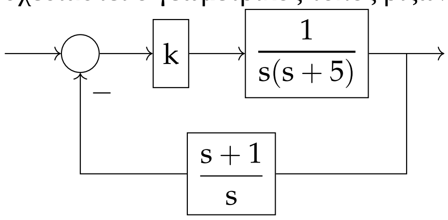
Και οι δύο τιμές ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο.



Το περιθώριο κέρδους είναι ∞, αφού δεν έχουμε καμιά τιμή δεξιά του φανταστικού άξονα. Για να βρούμε συγκεκριμένες τιμές του k ή των πόλων, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $1 + kL(s) = 0$.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών και το σφάλμα μόνιμης κατάστασης του συστήματος:



Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς *ανοιχτού βρόχου* είναι:

$$A(s) = \frac{k(s+1)}{s^2(s+5)}$$

όπως προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό των δύο συναρτήσεων μεταφοράς.

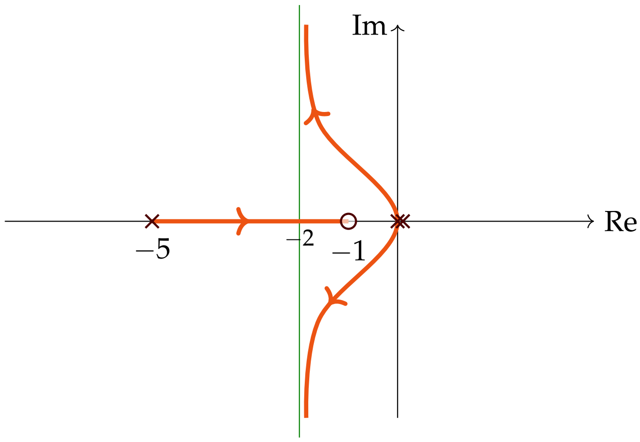
Έχουμε έναν διπλό και έναν μονό πόλο, καθώς και ένα μηδενικό, επομένως 2 ασυμπτώτους, με γωνίες $\theta_\rho = \frac{2\rho+1}{\#\text{Ασύμπτ.}} = 90°$ και $270°$, όπου $\rho = 0, 1$.

Για να βρούμε το σημείο θλάσης, θεωρούμε τη χαρακτηριστική εξίσωση $\frac{k(s+1)}{s^2(s+5)}+1 = 0$, και λύνουμε την:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \implies$$
$$\implies \frac{(s+1)'\left(s^2(s+5)\right) - \left(s^2(s+5)\right)'(s+1)}{\text{παρονομαστής}} = 0 \implies$$
$$\implies s = 0$$

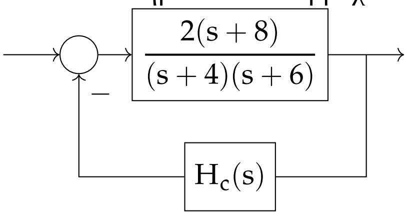
Το κέντρο ξ των ασυμπτώτων το βρίσκουμε ως εξής:

$$\xi = \frac{\sum p - \sum z}{\text{Αρ. Ασ.}} \qquad \text{όπου} \begin{cases} \sum r & \text{το άθροισμα των πόλων} \\ \sum z & \text{το άθροισμα των μηδενικών} \\ \text{Αρ. Ασ.} & \text{ο αριθμός των ασυμπτώτων} \end{cases}$$
$$= \frac{-5-(-1)}{2} = -2$$



Άσκηση: Προηγούμενο Θέμα Εξετάσεων

Δίνεται το σύστημα κλειστού βρόχου που φαίνεται στο σχήμα:



(α) Για $H_c(s) = k$, σχεδιάστε προσεγγιστικά τον τόπο ριζών και δώστε μια εκτίμηση για το χρόνο αποκατάστασης t_s του *κλειστού βρόχου* για πολύ μεγάλα κέρδη ($t \to \infty$).

(β) Θεωρούμε τον ελεγκτή:

$$H_c(s) = k(s+a)$$

Προσδιορίστε το a και τοποθετήστε τους πόλους έτσι ώστε να εξασφαλίσετε ότι ο χρόνος αποκατάστασης θα είναι $t_s < 0.5\,\text{s}$.

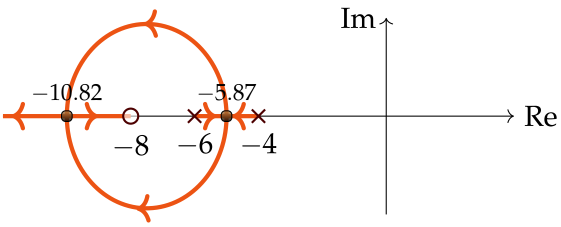
Λύση

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = \frac{2k(s+8)}{(s+4)(s+6)}$$

Έχουμε 2 πόλους, 1 μηδενικό, και 1 ασύμπτωτη ευθεία με γωνία 180°. Για το σημείο θλάσης έχουμε:

$$\frac{dk}{ds} = \frac{d\left[-\frac{(s+4)(s+6)}{2(s+8)}\right]}{ds} = 0$$
$$\implies \cdots \implies$$
$$\implies s^2 + 16s + 36 = 0 \implies \begin{cases} s_a &= -5.17 \\ s_b &= -10.83 \end{cases}$$



Για να βρούμε το χρόνο αποκατάστασης, πρώτα βρίσκουμε τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου G:

$$G = \frac{\frac{2(s+8)}{(s+4)(s+6)}}{1 + k\frac{2(s+8)}{(s+4)(s+6)}}$$
$$= \frac{2(s+8)}{(s+4)(s+6) + 2k(s+8)}$$

Παρατηρούμε ότι στον κλειστό βρόχο συνεχίζει να υπάρχει το μηδενικό $(s+8)$. Καθώς αυξάνουμε το k, ο ένας από τους πόλους τείνει στο −8, δηλαδή θα είναι $-8 + \Delta p$, άρα θα είναι πολύ κοντά στο $(s+8)$, άρα το μηδενικό και ο πόλος αλληλοαναιρούνται. Επομένως μένει ο πόλος που τείνει στο $-\infty$, ο οποίος αντιστοιχεί σε χρόνο αποκατάστασης που τείνει στο 0 (το προς τα πού τείνουν να βρεθούν οι πόλοι φαίνεται από τα βελάκια στο διάγραμμα).

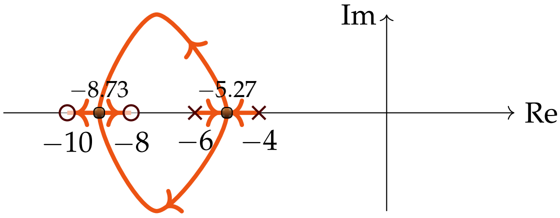
(β) Η νέα συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = \frac{k2(s+8)(s+a)}{(s+4)(s+6)}$$

Αν οι πόλοι είναι της μορφής $-\sigma \pm j\omega_d$, τότε θέλουμε $t_s = \frac{4}{\sigma} < 0.5\,s \implies \sigma > 8$, δηλαδή θέλουμε να θέσουμε το k έτσι ώστε κάποιοι πόλοι να βρίσκονται αριστερά από το -8.

- Έστω ότι βάζουμε ένα μηδενικό μεταξύ του -4 και 0.
  Τότε ο γεωμετρικός τόπος δεν θα πηγαίνει αριστερά από το -8, επομένως δεν θα έχουμε τον επιθημητό χρόνο αποκατάστασης.
- Έστω ότι βάζουμε ένα μηδενικό μεταξύ του -6 και -4.
  Με την ίδια λογική με παραπάνω, δεν μπορούμε να βάλουμε το μηδενικό εκεί.
- Έστω ότι βάζουμε ένα μηδενικό μεταξύ του -8 και -6.
  Με την ίδια λογική με παραπάνω, δεν μπορούμε να βάλουμε το μηδενικό εκεί.
- Άρα μπορούμε να βάλουμε το μηδενικό μόνο πέρα από το -8.

Αν για παράδειγμα θέσουμε $a = 10$, τότε:



Για να βρούμε ακριβώς το k, βρίσκουμε τα σημεία θλάσης:

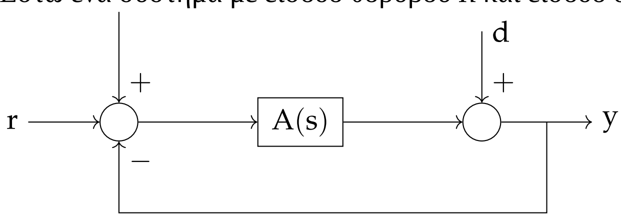
$$\frac{dk}{ds} = 8s^2 + 112s + 368 = 0 \implies$$
$$s = -5.267 \text{ ή } = -8.73$$

Άρα, για το συγκεκριμένο a, ισχύει $k > k_a$, όπου:

$$k_a = -\left.\frac{(s+4)(s+6)}{2(s+8)(s+10)}\right|_{s=-2.73} = 6.96$$

2.7 Ευαισθησία σε θόρυβο

Έστω ένα σύστημα με είσοδο θορύβου n και είσοδο διαταραχής d:



Οι συναρτήσεις μεταφοράς για την είσοδο r, την είσοδο θορύβου n και την είσοδο διαταραχής d είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} H_{yr}(s) &= \frac{A(s)}{1+A(s)} \\ H_{yn}(s) &= \frac{A(s)}{1+A(s)} \\ H_{yd}(s) &= \frac{1}{1+A(s)} \end{aligned}}$$

Αυτό που επιθυμούμε είναι να μειώσουμε όσο περισσότερο γίνεται την επίδραση των σημάτων διαταραχής d και θορύβου n. Για να το πραγματοποιήσουμε αυτό, μπορούμε να λάβουμε υπ' όψιν ότι ο θόρυβος είναι σήμα υψηλών συχνοτήτων (π.χ $\omega > 100$), ενώ η διαταραχή είναι χαμηλών συχνοτήτων (π.χ. $\omega < 1$). Επομένως θέλουμε για το κάθε σήμα να αποκόψουμε αυτές τις συχνότητες, δηλαδή για παράδειγμα:

$$\begin{aligned} &\left|H_{yn}(j\omega)\right| \quad \text{για } \omega > 100 \\ &\left|H_{dn}(j\omega)\right| \quad \text{για } \omega < 1 \end{aligned}$$

Άσκηση: Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς του παραπάνω συστήματος κλειστού βρόχου:

$$A(s) = \frac{10k(s+3)}{(s+5)(s+10)}$$

Να προσδιοριστεί η σταθερά k ώστε να έχουμε απόρριψη διαταραχών 20 dB για $\omega \le 1\,\mathrm{rad/s}$, δηλαδή

$$\left|H_{yd}(j\omega)\right| \le -20\,\mathrm{dB}$$

Να βρεθούν τα περιθώρια φάσης και κέρδους.

Λύση

Η συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής, όπως είδαμε παραπάνω, είναι:

$$H_{yd}(s) = \frac{1}{1+A(s)}$$

και θέλουμε για το μέτρο της:

$$\begin{aligned} 20\log\left|\frac{1}{1+A(j\omega)}\right| &\le \cancel{-20} \quad \log\left(1/10\right) \\ \left|\frac{1}{1+A(j\omega)}\right| &\le \frac{1}{10} \\ &\boxed{\left|1+A(j\omega)\right| \ge 10} \end{aligned}$$

για $\omega \le 1$.

Προσεγγιστικά, θεωρούμε ότι η παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει:

$$\left|A(j\omega)\right|_{\omega\le 1} \ge 10$$

και αν αντικαταστήσουμε την A για $s = j\omega$:

$$\left|\frac{30k\left(1+j\omega/3\right)}{50\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}\right| \omega = 1$$

Αν αγνοήσουμε τους όρους της μορφής $\left(1+\frac{j\omega}{p}\right)$ (αφού πριν από τη χαρακτηριστική τους συχνότητα προσεγγιστικά έχουν κέρδος 0 dB ή 1), θα έχουμε μια τιμή $k \approx 16$.

Αναπτύσσοντας την παραπάνω σχέση, λύνουμε την εξίσωση για να βρούμε ακριβώς την τιμή του k:

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{(10k+15)y+(49+30k)}{49+15j}\right| \\
&= \frac{10^2+50^2}{15^2+49^2}k^2 + \frac{(60\cdot 19+20\cdot 15)}{15^2+49^2}k - 99 \\
&= 0.3808k^2 + 1.2338k + 99 = 0 \\
&\implies \begin{cases} k &= 14.58 \\ k &= -17.8 \quad \text{απορρίπτεται επειδή το k πρέπει είναι θετικό} \end{cases}
\end{aligned}$$

Επομένως για το επιθυμητό k ισχύει $\underline{k \geq 14.58}$, κάτι αρκετά κοντά στο προσεγγιστικό $k \approx 16$, το οποίο μάλιστα είναι εντός του σετ τιμών του ακριβούς k, αφού $16 \geq 14.58$.

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή:

$$\frac{\frac{3}{5}k\left(1+\frac{j\omega}{3}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)} = \frac{8.75\left(1+\frac{j\omega}{3}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{5}\right)\left(1+\frac{j\omega}{10}\right)}$$

Το περιθώριο κέρδους είναι ∞, αφού έχουμε δύο απλούς πόλους και ένα μηδενικό, άρα στο $\omega \to \infty$, η συνάρτηση μεταφοράς φάσης του συστήματος γίνεται $-90° - 90° + 90° = 180°$, αλλά δεν φτάνει ποτέ την τιμή 180°.

Αν υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης μεταφοράς ώστε να έχει μέτρο 1, θα βρούμε ότι $\underline{\omega_c = 145.8}$, και επομένως το περιθώριο φάσης είναι:

$$\phi_M = 180 + \measuredangle \underbrace{A(j\omega_c)}_{-85.5}\Bigg|_{\omega_c=145.3} = 94.5$$

Άσκηση: Παλιό θέμα εξετάσεων

Δίνεται το ελεγχόμενο σύστημα:

$$H_p(s) = \frac{6(s+6)}{(s+3)(s+9)}$$

Να σχεδιαστεί σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έτσι ώστε να έχουμε:

- Σφάλμα θέσης $e_{ss} < 0.1$
- Περιθώριο φάσης $\theta_m \geq 60°$
- Απόρριψη θορύβου για $\omega = 150\,\mathrm{rad/s}$ τέτοια ώστε $\left|H_{yn}(j\omega)\right| < 0.5$

Επίσης να σχεδιαστεί ένα πρόχειρο διάγραμμα Bode της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου. (δηλαδή χωρίς να βρίσκουμε την τιμή του κάθε σημείου).

Λύση

Η συνάρτηση είναι τύπου 0, επομένως έχει πεπερασμένο σφάλμα θέσης.

Εισάγουμε έναν *proportional* ελεγκτή $\underline{H_c = k}$ πριν από την H_p έτσι ώστε να προσθέσουμε μια παράμετρο που να μεταβάλλεται. Επομένως τελικά η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

$$A(s) = H_c H_p = \frac{k \cdot 6(s+6)}{(s+3)(s+9)}$$

Για το σφάλμα θέσης, από τη θεωρία θυμόμαστε ότι ισχύει:

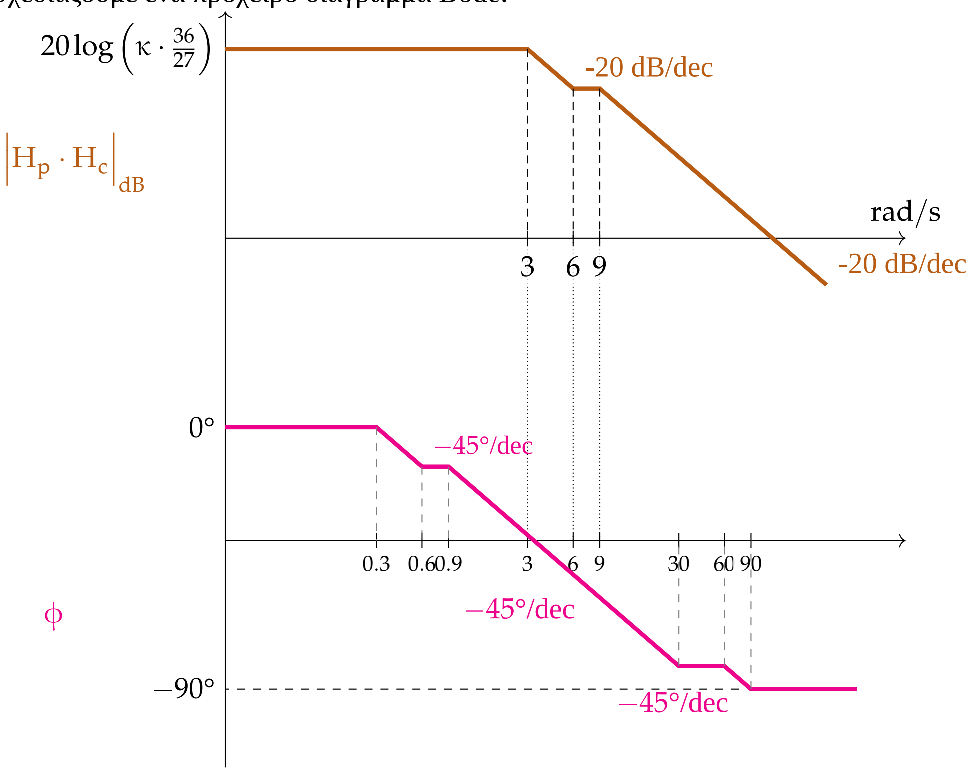
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + k\frac{6(s+6)}{(s+3)(s+9)}\Big|_{s=0}} < 0.1$$

$$\implies \cdots \implies k > 6.75$$

Για να υπολογίσουμε το περιθώριο φάσης, πρώτα φέρνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη μορφή:

$$\frac{6^2\left(\frac{s}{6}+1\right)}{9 \cdot 3\left(\frac{s}{3}+1\right)\left(\frac{s}{9}+1\right)}$$

και σχεδιάζουμε ένα πρόχειρο διάγραμμα Bode:



Το διάγραμμα φάσης παίρνει τιμές μόνο μεγαλύτερες από $-90°$. Αφού όμως το περιθώριο φάσης είναι $180° + \measuredangle A$, ισχύει:

$$\measuredangle A > -90°$$
$$180° + \measuredangle A > 180° - 90°$$
$$\boxed{\theta_m > 90°}$$

δηλαδή η δεύτερη συνθήκη ήδη ικανοποιείται.

Για την απόρριψη θορύβου, έχουμε:

$$\left|H_{yn}(j\omega)\right| < 0.5$$

$$\left|H_{yn}\right| = \frac{|A|}{|1+A|} < 0.5$$

Αφού η τιμή $|1 + A|$ είναι πολύ μεγαλύτερη από το $|A|$, το $|A|$ είναι πολύ μικρότερο του 1, και ο παρονομαστής προσεγγίζεται από το 1. Επομένως, προσεγγιστικά θα έχουμε:

$$\left|A(j\omega)\right|_{\omega=150} < 0.5$$

Άρα, αν θέσουμε $\omega = 150\,\mathrm{rad/s}$, θα πάρουμε:

$$\left|A(j\omega)\right|_{\omega=150\,\mathrm{rad/s}} = \frac{6k \cdot 150}{150 \cdot 150} < 0.5 \implies \underline{k < 12.5}$$

Επομένως τελικά ο περιορισμός για το k είναι $6.75 < k < 12.5$.

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση:

$$A(s) = \frac{k(s+6)}{(s+3)(s+8)(s^2+4s+8)}$$

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών με μοναδιαία αρνητική ανάδραση.

Υπάρχει περιθώριο τιμών του k για το οποίο το σύστημα είναι ασταθές; Αν ναι, και επιθυμούμε το σύστημα να είναι ευσταθές για κάθε k, πρέπει να προσθέσουμε πόλο ή μηδενικό; Επιλέξτε και σχεδιάστε ξανά το γεωμετρικό τόπο ριζών σε αυτήν την περίπτωση.

Λύση

Η $s^4 + 4s + 8$ έχει ρίζες $-2 \pm 2j$.

Έχουμε 4 πόλους, άρα 4 κλάδους, και 1 μηδενικό, άρα 3 ασύμπτωτες.

$$\text{Αρ. Ασ.} = \text{Αρ. Π.} - \text{Αρ. Μ} = 3$$

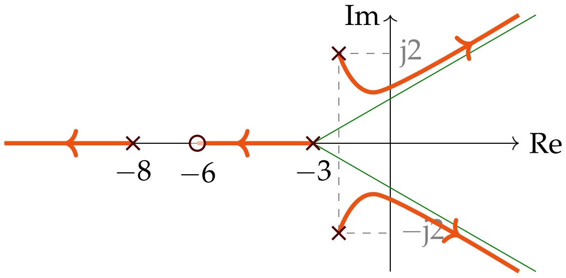
Μετρώντας περιττό ή άρτιο αριθμό πόλων και μηδενικών, βλέπουμε ότι από τον οριζόντιο άξονα στο γεωμετρικό τόπο ανήκουν τα σημεία $(-\infty. -8)$ και $(-6, -3)$.

Από την εμπειρία μας (ή από τον τύπο $\frac{2\rho+1}{\text{Αρ.Ασ.}} \cdot 180°$) γνωρίζουμε ότι οι γωνίες των ασυμπτώτων είναι:

$$\theta_0 = +60°$$
$$\theta_1 = -60°$$
$$\theta_2 = 180°$$

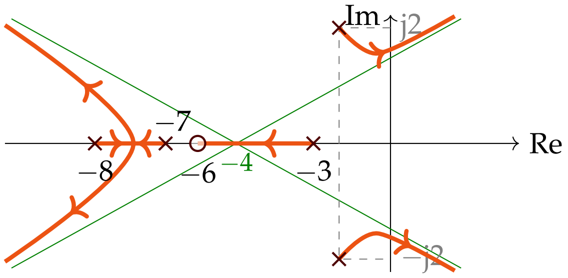
Το κέντρο των ασυμπτώτων είναι στο σημείο με τετμημένη:

$$\frac{\sum \rho - \sum z}{\text{Αρ. Ασ.}} = \frac{-4-3\ -3+6}{3} = -3$$



Για μερικά k οι δύο κλάδοι στα δεξιά έχουν σημεία δεξιά του φανταστικού άξονα, επομένως για αυτά το σύστημα είναι ασταθές. Για να μην ισχύει αυτό προσθέτουμε έναν πόλο ή μηδενικό.

- Έστω ότι προσθέτουμε **πόλο**, π.χ. στη θέση $p_1 = -7$. Τότε έχουμε 4 ασυμπτώτους με γωνίες $\pm 45°$ και $180° \pm 45°$ και κέντρο $\frac{-2-2-3+6-8-7}{4} = -4$.



Το σημείο αναχώρησης των δύο αριστερών κλάδων μπορούμε να το βρούμε από τον αντίστοιχο τύπο, αλλά δεν θα χρειαστεί.

Παρατηρούμε ότι η προσθήκη ενός πόλου (σε οποιοδήποτε σημείο) μάς δίνει 4 ασυμπτώτους, και ο γεωμετρικός τόπος θα συνεχίσει να έχει σημεία στο δεξί ημιεπίπεδο ($\implies$ αστάθεια). Επομένως η προσθήκη πόλου δεν είναι κατάλληλη.

- Έστω ότι τοποθετούμε ένα **μηδενικό** στη θέση:

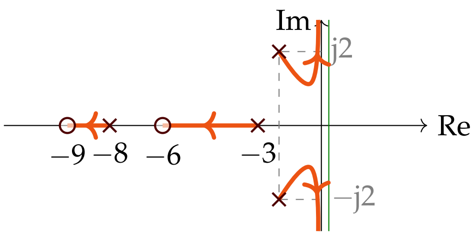
$$z_1 = -a$$

Τότε οι ασύμπτωτοι θα έχουν γωνία $\pm 90°$. Θέλουμε όμως να βρίσκονται αριστερά του φανταστικού άξονα (ώστε να έχουμε ευστάθεια), άρα το κέντρο τους να είναι αριστερά του 0, δηλαδή να είναι αρνητικό:

$$\frac{-2-2-3+6-8+a}{2} \leq 0 \implies \frac{-9+a}{2} \leq 0 \implies \underline{a \leq 9}$$

Άρα κάθε μηδενικό $z_1 \geq -9$ ικανοποιεί την παραπάνω συνθήκη.

  - Έστω ότι $z_1 = 9$.
    Τότε το κέντρο των ασυμπτώτων είναι $\frac{-2-2-3+6-8+9}{2} = 0$, δηλαδή οι ασύμπτωτες ταυτίζονται με τον φανταστικό άξονα:



Τότε επιβεβαιώνουμε πως όντως το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε κέρδος k.

Αν μας ζητούνταν ο χρόνος αποκατάστασης να είναι μικρότερος από 2s, τότε θα θέλαμε:

$$t_s = \frac{4}{\sigma} < 2$$

δηλαδή $\sigma > 2$ (όπου $p = -\sigma \pm j\omega_d$, δηλαδή σ είναι η απόλυτη τιμή του πραγματικού μέρους των μιγαδικών πόλων).

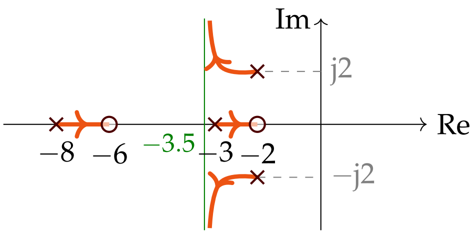
Δηλαδή το κέντρο των ασυμπτώτων θα έπρεπε να είναι αριστερά του -2, έτσι ώστε να βεβαιωθούμε ότι ο γεωμετρικός τόπος θα είναι πιο δύσκολο να φύγει δεξιά της κατακόρυφης ευθείας στο -2:

$$\frac{-4-8-3+6-z}{4-2} < -2 \implies -\frac{11}{2} - \frac{z_x}{2} < -2 \implies z_x > -5.$$

Έτσι, αν για παράδειγμα τοποθετήσουμε το μηδενικό του προηγούμενου ερωτήματος, αντί για τη -9, στη θέση:

$$z_x = 2$$

Ο γεωμετρικός τόπος ριζών θα γίνει:



Πράγματι, για μεγάλο κέρδος k, ο πόλος που τείνει στο -2 εξουδετερώνεται από το μηδενικό εκεί, και παραμένουν οι δύο κυρίαρχοι πόλοι που απομακρύνονται από τον οριζόντιο άξονα, και τελικά ισχύει:

$$t_s = \frac{4}{3.5} \simeq 1.14$$

Να σημειωθεί βέβαια ότι το μηδενικό που προσθέσαμε στη συνάρτηση ανοιχτού βρόχου ισχύει και στην αντίστοιχη του κλειστού, όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε δεδομένου ότι γνωρίζουμε πως υπάρχει μοναδιαία αρνητική ανάδραση.

Άσκηση

Σε ποιά περιοχή τιμών θα επιλέξουμε το a έτσι ώστε να εξασφαλίζεται ότι για μεγάλα κέρδη στο σύστημα κλειστού βρόχου (με μοναδιαία αρνητική ανάδραση) θα έχουμε $t_s < 0.5\,\text{s}$, αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι:

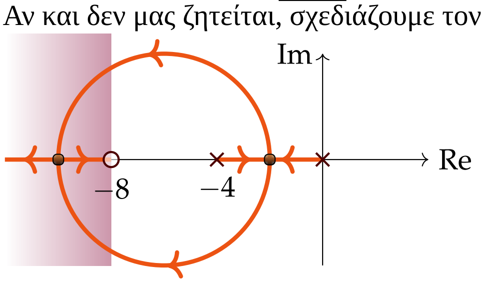
$$A(s) = \frac{k(s+a)}{s(s+4)}$$

Λύση

Αν το πραγματικό μέρος του κυρίαρχου πόλου είναι $-\sigma$, τότε αυτό που θέλουμε είναι $t_s = \frac{4}{\sigma} < 0.5 \implies \underline{\sigma > 8}$.

Άρα θέλουμε να ισχύει $\underline{a \geq 8}$, και θεωρούμε εδώ ότι $a = 8$.

Αν και δεν μας ζητείται, σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό τόπο ριζών για να βοηθηθούμε στην επίλυση:



Όντως, για μεγάλα k οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου βρίσκονται αριστερά από το -8, και θα έχουμε σωστό χρόνο αποκατάστασης.

Άσκηση

Δίνεται ο ελεγκτής:

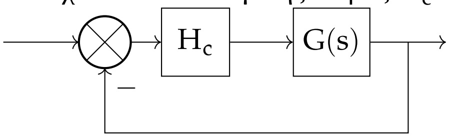
$$G(s) = \frac{1}{s+2}$$

σε σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης.

Θέλουμε να ικανοποιούνται οι εξής προδιαγραφές:

- $e_{ss} = 0$ (σφάλμα σταθερής κατάστασης)
- $t_s < \frac{1}{3}$ (χρόνος αποκατάστασης)
- $M_p = 0$ (υπερύψωση)
- $g_m = \infty$ (περιθώριο κέρδους)

Να σχεδιαστεί ο ελεγκτής σειράς H_c που να πληροί τις παραπάνω προδιαγραφές.



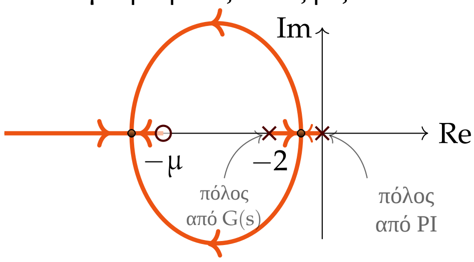
Λύση

Αφού θέλουμε μηδενικό σφάλμα, χρειαζόμαστε έναν ολοκληρωτή, έναν πόλο στο 0. Για να μπορέσουμε να ικανοποιήσουμε και το μικρό χρόνο αποκατάστασης, χρησιμοποιούμε έναν **ελεγκτή PI** (μηδενικό + ολοκληρωτής):

$$H_c = \frac{k_p(s+\mu)}{s}$$

όπου k_p και μ σταθερές που πρέπει να προσδιορίσουμε.

Τότε ο γεωμετρικός τόπος ριζών είναι:



Παρατηρούμε ότι δεν έχουμε σημεία στα δεξιά, άρα το περιθώριο κέρδους είναι ∞. Για τις υπόλοιπες δύο προδιαγραφές, θα επιλέξουμε κατάλληλα τις σταθερές k και μ.

- Για να έχουμε $t_s < \frac{1}{3}$, θέλουμε για τον κυρίαρχο πόλο (του συστήματος κλειστού βρόχου) με πραγματικό μέρος $-\sigma$ να ισχύει:

  $$\frac{4}{\sigma} < \frac{1}{3} \implies \underline{\sigma > 12}$$

  Όμως, όπως παρατηρούμε από το γεωμετρικό τόπο που σχεδιάσαμε, ακολουθώντας τα βελάκια (δηλαδή για αυξανόμενο k), καταλήγουμε σε δύο πόλους στο σύστημα κλειστού βρόχου: $-\mu$ και $-\infty$. Επειδή όμως θέλουμε ο κυρίαρχος πόλος $-\mu$ να έχει πραγματικό μέρος $-\sigma < -12$, τελικά ισχύει:

  $$-\mu \leq -12$$

  (η ισότητα ισχύει επειδή το k είναι μεγάλο αλλά όχι άπειρο, επομένως δεν φτάνουμε στη συνθήκη $\sigma = 12$, αλλά $\sigma > 12$).

  Εδώ αυθαίρετα θεωρούμε ότι $\mu = 12$.

- Το σύστημα μεταφοράς κλειστού βρόχου, αν έχει δύο μιγαδικούς πόλους, έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$\frac{N}{s^2 + \underbrace{(2+k_p)}_{2\zeta\omega_n} s + \underbrace{12k_p}_{\omega_n^2}}$$

Για να μην έχουμε **υπερύψωση**, θα πρέπει $\zeta = 1$ (ώστε να είναι πραγματικές οι ρίζες). Έχουμε:

$$12k_p = \omega_n^2 \implies \omega_n = \sqrt{12k_p}$$

και:

$$2 + k_p = 2\zeta\omega_n$$

άρα για το ζ ισχύει:

$$\zeta = \frac{2+k_p}{2\omega_n} = \frac{2+k_p}{2\sqrt{12k_p}}$$

Για να είναι $\zeta > 1$, από την παραπάνω εξίσωση πρέπει:

$$2 + k_p > 2\sqrt{12k_p} \implies \underline{k_p^2 - 44k_p + 4 > 0}$$

Το παραπάνω πολυώνυμο έχει ρίζες $k_{p_1} = 0.0911$ και $k_{p_2} = 43.909$, επομένως η σχέση ισχύει για $k < k_{p_1}$ και $k > k_{p_2}$. (Μάλιστα, τα k_{p_1} και k_{p_2} είναι οι τιμές όπου $\zeta = 1$, δηλαδή έχουμε *διπλή* πραγματική ρίζα, άρα αντιστοιχούν στα *σημεία θλάσης* του γεωμετρικού τόπου ριζών).

Εναλλακτικά, μπορούσαμε να βρούμε τη **διακρίνουσα** του πολυωνύμου του παρονομαστή, και να φροντίσουμε ώστε αυτό να έχει πραγματικές ρίζες ($\Delta \geq 0$), *ή* να βρούμε τα **σημεία θλάσης** του γεωμετρικού τόπου ριζών από τον τύπο $\frac{dH(s)}{ds}$.

Έτσι, **επιλέγουμε** $\underline{k_p = 50}$ για να ικανοποιήσουμε την 4^{η} προδιαγραφή.

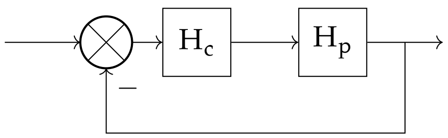
Άσκηση: Παλιό θέμα (2 Ιουνίου 2013)

Δίνεται το σύστημα:

$$H_p(s) = \frac{9}{(s+4)(s+6)}$$

Να σχεδιαστεί σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση που να πληροί τις προδιαγραφές:

1. $e_{ss} = 0$ (σφάλμα θέσης)
2. $e_{sv} < 0.3$ (σφάλμα ταχύτητας)
3. $\omega_b > 5.5\,\text{rad/s}$ (εύρος ζώνης)
4. $\theta_m > 30°$ (περιθώριο φάσης)



Λύση

- Για να έχουμε *μηδενικό σφάλμα θέσης*, θέλουμε σύστημα τύπου 1 (μηδενικό σφάλμα θέσης και πεπερασμένο σφάλμα ταχύτητας) επομένως θα προσθέσουμε σίγουρα ένα μηδενικό, ή ακόμα καλύτερα έναν ελεγκτή PI:

$$H_c(s) = \frac{k_p(s+\mu)}{s}$$

Τότε, το σφάλμα θέσης στον κλειστό βρόχο είναι μηδενικό, αφού το σύστημα H_pH_c είναι τύπου 1.

Για το σφάλμα ταχύτητας, βρίσκουμε πρώτα την αντίστοιχη σταθερά:

$$\begin{aligned} K_v &= \lim_{s\to 0} sA(s) \\ &= \lim_{s\to 0} s\frac{k_p(s+\mu)}{s(s+4)(s+6)} \\ &= \frac{9k_p\mu}{24} \end{aligned}$$

άρα για το σφάλμα θέσης:

$$\begin{aligned} & e_{sv} = \frac{1}{K_v} = \frac{24}{9K_p\mu} < 0.3 \\ \implies & \underline{K_p\mu > 8.88} \end{aligned}$$

- Όσον αφορά το εύρος ζώνης, γνωρίζουμε ότι:

$$\omega_b > \omega_c$$

όπου ω_b το εύρος ζώνης της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου (μέχρι τα $-3\,\mathrm{dB}$)
ω_c το εύρος ζώνης της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου (μέχρι τα $0\,\mathrm{dB}$)

Επομένως μπορούμε να μελετήσουμε τη συνάρτηση ανοιχτού βρόχου, και επιλέγουμε να ισχύει $\omega_c = 5.5\,\mathrm{rad/s}$. Θυμόμαστε επίσης ότι το εύρος ζώνης είναι το εύρος εντός του οποίου το κέρδος της συνάρτησης μειώνεται *το πολύ* κατά $3\,\mathrm{dB}$.

Πρώτα προσεγγίζουμε κατά Bode τη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου:

$$\begin{aligned} & A(s) = \cdots \\ \implies & |A|_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(\frac{9K_p\mu}{24}\right) - 20\log\omega + 20\log\omega - 20\log\mu - 20\log\omega + 20\log 4. \end{aligned}$$

Θέλουμε ο παραπάνω όρος να είναι 0 στη συχνότητα $\omega_c = 5.5$. Πριν το θέσουμε αυτό, **επιλέγουμε** $\underline{K_p \cdot \mu = 9}$, και έχουμε

$$\begin{aligned} & |A|_{\mathrm{dB}} = 0 \\ \implies & 0 = 20\log\frac{81}{24} - 20\log\mu - 20\log 5.5 \\ \implies & 20\log\mu = 7.8 \implies \underline{\mu = 2.45} \end{aligned}$$

- Ελέγχουμε και την τελευταία προδιαγραφή $\theta_m > 30°$. Το περιθώριο φάσης ορίζεται:

$$\theta_m = 180° + \measuredangle A(j5.5)$$

όπου:

$$\begin{aligned}\measuredangle A(j5.5) &= -90° + \tan^{-1}\left(\frac{5.5}{2.45}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5.5}{4}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{5.5}{6}\right)\\ &= -120.49°\end{aligned}$$

άρα τελικά:

$$\theta_m = 180° - 120.49° > 30°$$

δηλαδή ισχύει η ζητούμενη προδιαγραφή.

Σε περίπτωση που παρατηρούσαμε ότι δεν ισχύει, μπορούσαμε να μεταβάλλουμε τις παραμέτρους στις προηγούμενες απαντήσεις, μέχρι να φτάσουμε στην επιθυμητή απάντηση.

Άσκηση

Να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών για την:

$$A(s) = \frac{k(s+p)}{(s+1)(s+3)(s+6)}$$

με μοναδιαία αρνητική ανάδραση,

α) Για το k, δεδομένου ότι $\rho = 10$

β) Για το ρ, δεδομένου ότι $k = 1$

Λύση

α) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$\frac{k(s+10)}{(s+1)(s+3)(s+6)} = L(s)$$

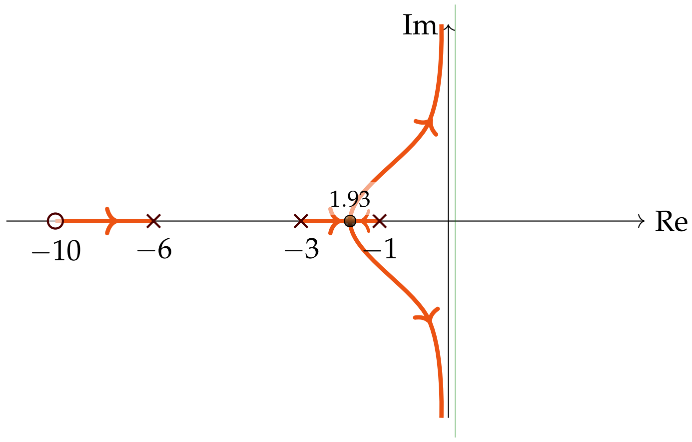
Έχουμε δύο ασυμπτώτους στις $\pm 90°$ με κέντρο $\frac{-1-3-6+10}{2} = 0$.

Έχουμε τρεις κλάδους, και το σημείο τομής των δύο από αυτούς υπολογίζεται από τη σχέση $\frac{dK(s)}{ds} = 0$, όπου:

$$K(s) = -\frac{1}{L(s)}$$

$$\frac{dK(s)}{ds} = 0 \implies \boxed{\begin{aligned} s_1 &= -1.93\\ s_2 &= -4.95\\ s_3 &= -13.1\end{aligned}}$$

Τα σημεία s_2 και s_3 απορρίπτονται αφού δεν ανήκουν στο γεωμετρικό τόπο.



β) Ο παρονομαστής/χαρακτηριστική εξίσωση της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι:

$$1 + \frac{k(s+\rho)}{(s+1)(s+3)(s+6)} = 0$$

Θέλουμε να τη φέρουμε στη μορφή:

$$1 + \rho L(s) = 0$$

Για να το πετύχουμε αυτό, κάνουμε πράξεις στην παραπάνω εξίσωση:

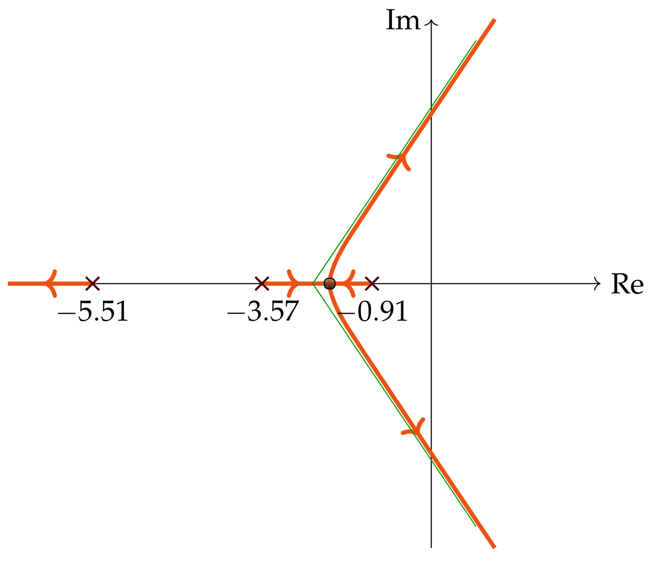
$$\begin{aligned}
&(s+1)(s+3)(s+6) + k(s+\rho) = 0 \\
\Longrightarrow\ &(s+1)(s+3)(s+6) + ks + k\rho = 0 \\
\Longrightarrow\ &\frac{(s+1)(s+3)(s+6)+ks}{(s+1)(s+3)(s+6)+ks} + \frac{k\rho}{(s+1)(s+3)(s+6)+ks} = 0 \\
\Longrightarrow\ &1 + \rho\frac{k}{ks+(s+1)(s+3)(s+6)}
\end{aligned}$$

Άρα το αντίστοιχο σύστημα γίνεται:

$$\frac{1}{s+(s+1)(s+3)(s+6)} = \frac{1}{(s+0.91)(s+3.57)(s+5.51)}$$

Έχουμε 3 ασυμπτώτους με κέντρο $\frac{-0.91-3.57-5.51}{3} = -3.31$. Το σημείο θλάσης είναι:

$$\frac{d - \frac{1}{L(s)}}{ds} = 0 \implies -s^3 + 10s^2 + 28s + 18 \implies s = -2 \text{ ή } \cancel{-4.66}$$



Κεφάλαιο 3 Ασκήσεις

Άσκηση

Δίνεται ένα σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(s) = \frac{10}{(s+6)(s+7)}$$

Να σχεδιαστεί ένα σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έτσι ώστε να ισχύουν οι παρακάτω προδιαγραφές:

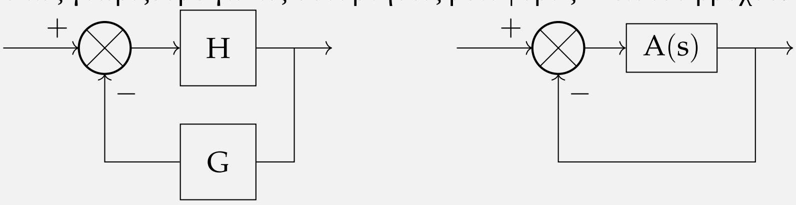
- Σφάλμα θέσης $e_{ss} < 0.5$
- Υπερύψωση $M_p < 0.1$
- Χρόνος αποκατάστασης $t_s < 660\,\text{ms}$

Σημείωση

Αν μας δινόταν σύστημα με ανάδραση G μη μοναδιαία, μπορούμε να το μετασχηματίσουμε σε σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης με συνάρτηση ανοιχτού βρόχου A, όπου:

$$H_c = \frac{H}{1+GH} = \frac{A}{1+A}$$

όπως γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις μεταφοράς κλειστού βρόχου.



Η παραπάνω σχέση λύνεται ως προς A:

$$A = (1+A)H_c \implies A(1-H_c) = H_c \implies \boxed{A = \frac{H_c}{1-H_c}}$$

Λύση

Θα θεωρήσουμε για αρχή ότι το σύστημα είναι τέτοιο ώστε να έχει υπερύψωση, την οποία θέλουμε να περιορίσουμε.

Το σύστημα μπορεί να είναι τύπου 0, αφού το σφάλμα θέσης είναι πεπερασμένο και δεν έχουμε κάποιον επιπλέον περιορισμό για τα σφάλματα. Τότε για το σφάλμα θέσης ισχύει:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

όπου

$$K_p = \lim_{s\to 0} H(s)$$

Αν θεωρήσουμε ότι **εισάγουμε έναν απλό ελεγκτή κέρδους** k, τότε $K_p = \frac{10k}{42}$, και το σφάλμα είναι:

$$e_{ss} = \frac{42}{42+10k} < 0.5 \implies \underline{k > 4.2}$$

Όσον αφορά την υπερύψωση, αυτή δίνεται από τον τύπο:

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Για να βρούμε το ζ χρειάζεται πρώτα να υπολογίσουμε την έκφραση του **συστήματος κλειστού βρόχου** ώστε να βρούμε τη **χαρακτηριστική του εξίσωση**:

$$H_c = \frac{\frac{10k}{(s+6)(s+7)}}{1 + \frac{10}{(s+6)(s+7)}} = \frac{10k}{(s+6)(s+7) + 10k}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση που προκύπτει από τον παρονομαστή αυτού του κλάσματος είναι:

$$s^2 + 13s + 42 + 10k = 0$$

Μπορούμε να λάβουμε περιπτώσεις για $\zeta < 1$ και $\zeta > 1$. Όταν $\zeta > 1$ δεν υπάρχει καθόλου υπερύψωση. Σε αυτήν τη λύση θα μελετήσουμε μόνο τη $\zeta < 1$:

$$\zeta\omega_n = 13$$
$$t_s = \frac{4.16}{\zeta\omega_n} = \frac{2 \cdot 4.16}{13} = 0.64\,\text{s}$$

άρα ικανοποιείται η τελευταία συνθήκη.

Για την υπερύψωση υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}
M_p &= e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \implies \\
0.1 &> e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \implies \\
-2.3 &> \frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \implies \\
\zeta^2 &> \frac{1}{2.85} \implies \\
\zeta &> 0.59 \implies \underline{0.59 < \zeta < 1}
\end{aligned}$$

Από το ζ πρέπει να υπολογίσουμε και τις επιθυμητές τιμές του k:

$$\omega_n^2 = 42 + 10k$$
$$2\zeta\omega_n = 13 \implies \omega_n = 10.83$$

Επίσης επιλέγουμε αυθαίρετα $\underline{\zeta = 0.6}$.

Τότε $\omega_n^2 = 117 = 10k + 42 \implies \underline{k = 7.53}$.

Σε μία πιο αναλυτική λύση θα σχηματίζαμε μια ανισότητα για το k με βάση τους περιορισμούς του ζ. Εφ' όσον αυτό δεν ζητείται από την άσκηση, μπορούμε να επιλέξουμε μια τυχαία τιμή που να πληροί τις προδιαγραφές.

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα

$$H_p(s) = \frac{2}{(s+1)(s+4)}$$

Να σχεδιαστεί σύστημα ελέγχου κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση έτσι ώστε:

- t_s ο ελάχιστος δυνατός αφού ικανοποιηθούν όλες οι συνθήκες.

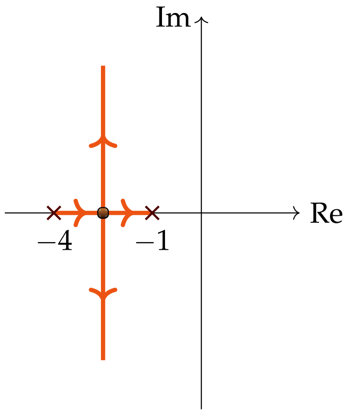
- Σφάλμα θέσης $e_{ss} < 0.1$
- Περιθώριο φάσης $\theta_m > 30°$
- Περιθώριο κέρδους $g_m = \infty$
- Απόσβεση θορύβου τουλάχιστον 20 dB για $\omega = 100\,\text{rad/s}$
- Απόρριψη διαταραχών τουλάχιστον 20 dB για $\omega = 0\,\text{rad/s}$

Λύση

Αρχικά, θεωρούμε ότι ο ελεγκτής που προσθέτουμε θα είναι ένας απλός πολλαπλασιαστής k.
Το σφάλμα θέσης είναι:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \to 0} A(s)} = \frac{1}{1 + \frac{2k}{4}} < 0.1 \implies \underline{k > 18}$$

Σχεδιάζουμε γρήγορα το γεωμετρικό τόπο ριζών:



Για να έχουμε τον ταχύτερο δυνατό χρόνο αποκατάστασης, θέλουμε οι πόλοι μας να βρίσκονται επάνω στην κατακόρυφη ευθεία, διότι σε εκείνο το σημείο ο πιο αργός πόλος αποκτά την πιο αρνητική τιμή (προσέγγιση κυρίαρχου πόλου). Επομένως, θέλουμε οι πόλοι να είναι μιγαδικοί.

Για να υπολογίσουμε ακριβώς το χρόνο αποκατάστασης, βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου:

$$H_\kappa(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)} = \frac{2k}{s^2 + 5s + 4 + 2k}$$

Οι πόλοι υπολογίζονται $\frac{-5 \pm \sqrt{9-8k}}{2}$, και ισχύει (αν θεωρήσουμε ότι οι πόλοι είναι **συζυγείς μιγαδικοί** όπως διαπιστώσαμε από το γεωμετρικό τόπο ριζών, άρα $\zeta < 1$):

$$\begin{aligned} 2\zeta\omega_n &= 5 \implies \zeta\omega_n = 2.5 \\ \omega_n^2 &= 4 + 2k \end{aligned}$$

Τότε ο χρόνος αποκατάστασης είναι:

$$t_s = \frac{4.16}{\zeta\omega_n} = 1.66\,\text{s}$$

Για να ισχύει $\zeta < 1$ όπως απαιτήσαμε παραπάνω, πρέπει ισοδύναμα $9 - 8k < 0 \implies \underline{k > \frac{9}{8}}$.

Όσον αφορά την απόρριψη θορύβου, θυμόμαστε ότι ο θόρυβος εισέρχεται στην είσοδο ενός συστήματος, και απαιτούμε το μέτρο της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου να είναι μικρότερο από -20 dB (δηλαδή 0.1) για $\omega = 100\,\text{rad/s}$:

$$\left| \frac{A}{1 + A} \right| < 0.1$$

Εδώ **προσεγγίζουμε** ότι $1 + A \simeq 1$ επειδή θεωρούμε πως το A είναι πολύ μικρό. Άρα θέλουμε:

$$|A| < 0.1 \iff \frac{2k}{1 \cdot 4\left(\frac{s}{1}+1\right)\left(\frac{s}{4}+1\right)}$$

Μπορούμε να **προσεγγίσουμε** την παραπάνω ποσότητα αφαιρώντας τις μονάδες, αφού το s είναι κοντά στο 100:

$$\frac{2k}{4\left(\frac{s}{1}\right)\left(\frac{s}{4}\right)} < 0.1 \iff \frac{2k}{100 \cdot 100} < 0.1 \iff \underline{k < 500}$$

Για την απόρριψη των διαταραχών, η συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής είναι διαφορετική, επειδή αυτή εισέρχεται στο τέλος του συστήματος:

$$H_{yd} = \frac{1}{1+A}$$

τότε για $\omega = 0$ θέλουμε:

$$\left|\frac{A}{1+A}\right| < 0.1$$

Υποθέτουμε ότι το A είναι αρκετά μεγάλο για να είναι μικρό το κλάσμα, επομένως **προσεγγίζουμε** ότι $1 + A \simeq A$, και έχουμε:

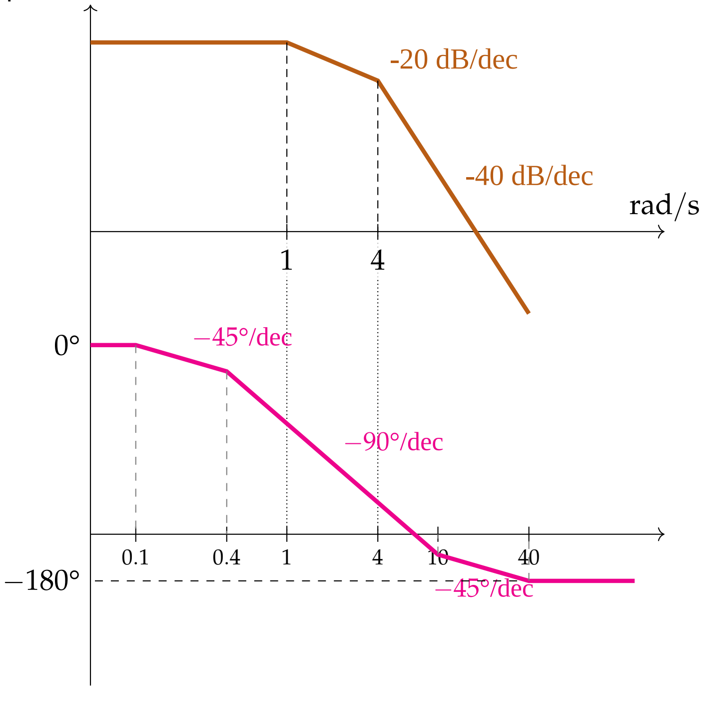
$$\left|\frac{1}{1+A}\right| \simeq \left|\frac{1}{A}\right| < 0.1 \implies |A| > 10$$

Έχουμε ότι $|A| = \frac{2k}{1 \cdot 4\left(\frac{s}{10+1}\right)\left(\frac{s}{4}+1\right)} = \frac{2k}{4}$ για $\omega = 0$.

Επομένως τελικά:

$$\frac{2k}{4} > 10 \implies \underline{k > 20}$$

Για τον υπολογισμό περιθωρίου φάσης και κέρδους, μπορούμε να σχεδιάσουμε πρόχειρα ένα διάγραμμα Bode:



Η συνάρτηση μεταφοράς τείνει ασυμπτωτικά στις 180° για $\omega \to \infty$, αλλά δεν φτάνει ποτέ εκεί, επομένως πάντα το περιθώριο κέρδους είναι ∞.

Για την επιλογή του περιθωρίου φάσης, ψάχνουμε το σημείο τομής της καμπύλης του πλάτους με τη μονάδα. Όσο μικρότερο είναι το κέρδος, τόσο μεγαλύτερο είναι και το περιθώριο φάσης. Επομένως, **επιλέγουμε** το μικρότερο k που να βρίσκεται εντός του εύρους των συνθηκών $k = 20$, και χρειάζεται μετά μόνο να **επαληθεύσουμε** πως το περιθώριο φάσης τότε θα είναι όντως μεγαλύτερο των 30°.

Αφού κάνουμε τις αντίστοιχες πράξεις, προκύπτει (για $k = 20$) $\phi_m \simeq 45° > 30°$, που είναι εντός των προδιαγραφών.

Άσκηση

Δίνεται η συνάρτηση μεταφοράς:

$$H_p(s) = \frac{40(s+2)}{(s+8)(s+10)}$$

Να σχεδιαστεί σύστημα μοναδιαίας αρνητικής ανάδρασης που να ικανοποιεί τις προδιαγραφές:

- Σφάλμα ταχύτητας $e_{sr} < 0.1$
- Απόρριψη θορύβου τουλάχιστον 20 dB για $\omega = 200\,\mathrm{rad/s}$
- Απόρριψη διαταραχών τουλάχιστον 20 dB για $\omega = 1\,\mathrm{rad/s}$

Λύση

Στη συγκεκριμένη άσκηση θέλουμε να έχουμε πεπερασμένο σφάλμα ταχύτητας, άρα σύστημα τύπου 1, δηλαδή με έναν ολοκληρωτή. Επομένως, θα εισαγουμε έναν **ελεγκτή PI**, ή έναν **ελεγκτη PI με ένα μηδενικό** στη θέση $-\mu$. Το μηδενικό βοηθάει έτσι ώστε να μετακινηθεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών στα αριστερά και να μην έχουμε προβλήματα αστάθειας.

Επομένως, ο ελεγκτής που εισάγουμε είναι:

$$\frac{K_p(s+\mu)}{s}$$

και η συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = \frac{40K_p(s+2)(s+\mu)}{s(s+8)(s+10)}$$

Για τον υπολογισμό του *σφάλματος ταχύτητας*, έχουμε:

$$K_v = \frac{1}{\frac{40K_p \cdot 2 \cdot \mu}{80}} = K_p\mu$$

$$e_{sv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K_p\mu} < 0.1 \implies \underline{K_p\mu > 10.}$$

Για τον υπολογισμό της *απόρριψης θορύβου*, πρώτα υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς του θορύβου:

$$H_{yn} = \frac{A}{1+A}$$

η οποία πρέπει να είναι μικρότερη των -20 dB, δηλαδή μικρότερη από 0.1: $\left|H_{yn}\right|_{\omega=200} < 0.1$ Αυτό θα σημαίνει ότι ο αριθμητής είναι πολύ μικρός σε σχέση με τον παρονομαστή, δηλαδή το $|A|$ είναι πολύ μικρό, άρα προσεγγίζουμε ότι $\left|H_{yn}\right| \simeq |A| < 0.1$.

Για να υπολογίσουμε το $|A|$, πρώτα φέρνουμε το $A(s)$ σε διαφορετική μορφή:

$$A(s) = \frac{2 \cdot 40 \cdot \mu \cdot K_p \cdot \left(\frac{s}{2}+1\right)\left(\frac{s}{\mu}+1\right)}{10 \cdot 8 \cdot s \cdot \left(\frac{s}{8}+1\right)\left(\frac{s}{10}+1\right)}$$

Αφού $s = j200$ που είναι μια πολύ μεγάλη τιμή, μπορούμε να προσεγγίσουμε ότι $\frac{s}{\triangle}+1 \approx \frac{s}{\triangle}$. Επομένως το παραπάνω κλάσμα μπορεί να γίνει:

$$\frac{40\mu K_p \cdot \frac{200}{2}\left(\frac{200}{\mu}+1\right)}{10 \cdot 8 \cdot 200 \cdot \frac{200}{8} \cdot \frac{200}{10}} \approx \frac{40K_p}{200}$$

Επομένως, επειδή $|A| < 0.1$, έχουμε (αποφεύγουμε την προσέγγιση για τον όρο $\left(\frac{200}{\mu}+1\right)$ επειδή δεν γνωρίζουμε το μέγεθος του μ):

$$\left|\frac{40K_p\sqrt{\mu^2+40000} \cdot 200}{200^3}\right| < 0.1 \implies$$

$$K_p\sqrt{\mu^2+40000} \leq 100 \implies$$

$$\underline{K_p^2\mu^2 + K_p^2 \cdot 40000 \leq 10000}$$

Για την *απόρριψη διαταραχών*, η συνάρτηση μεταφοράς τους είναι:

$$H_{yd} = \frac{1}{1+A}$$

Έχουμε και λαμβάνουμε την προσέγγιση:

$$\left|\frac{1}{1+A}\right|_{\omega=1} \leq 0.1 \implies |A(j\omega)|_{\omega=1} \geq 10$$

Το μέτρο του $A(s)$ είναι:

$$|A(s)| = \frac{40K_p\sqrt{\mu^2+1}\sqrt{2^2+1}}{\sqrt{8^2+1}\sqrt{10^2+1}}$$

Αν λύσουμε την ανισότητα $|A| \geq 10$, θα βρούμε $\underline{K_p\sqrt{\mu^2+1} \geq 9}$. Αν λαμβάναμε προσέγγιση όπως και στην προηγούμενη άσκηση, θα βρίσκαμε $K_p\sqrt{\mu^2+1} \geq 10$. Ίσως αυτή δεν είναι μια τόσο εύστοχη προσέγγιση, αφού το 1 είναι πολύ κοντά στο 2 σε ένα από τα μηδενικά.

Τελικά έχουμε καταλήξει με τρεις ανισότητες που πρέπει να φροντίσουμε να ικανοποιούνται.

Από την $K_p\mu > 10$, επιλέγουμε αυθαίρετα ότι $K_p\mu = 15$. Τότε η δεύτερη ανισότητα παίρνει τη μορφή:

$$225 + K_p^2 \cdot 40000 \leq 10000 \implies K_p^2 \implies \underline{K_p \leq 0.49}$$

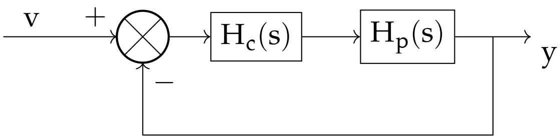
Αν αυθαίρετα επιλέξουμε $K_p = 0.4$, τότε από το $K_p\mu = 15$ έχουμε $\mu = 37.5$.

Τέλος, επαληθεύουμε την ανισότητα $K_p\sqrt{\mu^2+1} \geq 10$:

$$K_p\sqrt{\mu^2+1} = 0.4 \cdot \sqrt{37.5^2+1} \approx 15.005 \geq 10.$$

Άσκηση

Δίνεται το σύστημα κλειστού βρόχου με μοναδιαία αρνητική ανάδραση:



όπου:

$$H_p(s) = \frac{3}{s^2 - 9}$$

(α) Αρχικά εισάγουμε έναν αναλογικό ελεγκτή $H_c(s) = K_p$.
Για ποιές τιμές του K_p το σύστημα γίνεται οριακά ευσταθές;

(β) Να σχεδιαστεί ελεγκτής $H_c(s)$ τέτοιος ώστε να έχουμε ευστάθεια και χρόνο αποκατάστασης $t_s < 1\,\mathrm{s}$.

(γ) Για τον ελεγκτή του προηγούμενου ερωτήματος να βρείτε το σφάλμα θέσης στη μόνιμη κατάσταση και να σχολιάσετε το αποτέλεσμα.

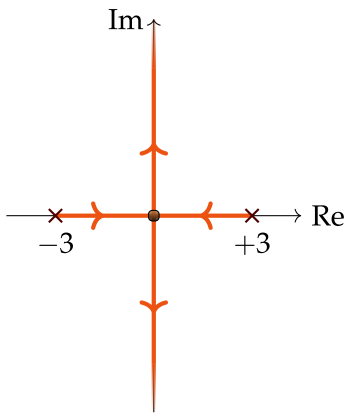
(δ) Προτείνετε επιπλέον όρους που θα πρέπει να εισαχθούν στον ελεγκτή ώστε να μηδενιστεί το σφάλμα θέσης, και να διατηρηθούν οι υπόλοιπες προδιαγραφές. Σχεδιάστε το γεωμετρικό τόπο ριζών, δικαιολογήστε την επιλογή σας, και υπολογίστε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης για βηματική είσοδο.

Λύση

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = \frac{K_p \cdot 3}{s^2 - 9}$$

Σχεδιάζουμε τον γεωμετρικό τόπο ριζών, δεδομένου ότι έχουμε 2 ασυμπτώτους, κέντρο ασυμπτώτων $\frac{\sum p - \sum z}{\text{Αρ. Ασ.}} = 0$ με γωνίες $\pm 90°$.



Οριακή ευστάθεια έχουμε όταν οι πόλοι βρίσκονται επάνω στον πραγματικό άξονα. Για να βρούμε τα K_p για τα οποία οι πόλοι βρίσκονται σε αυτή τη θέση, θα μπορούσαμε πρώτα να βρούμε το K_p όπου οι πόλοι είναι 0, και όλα τα K_p μεγαλύτερα από αυτό ικανοποιούν τη ζητούμενη συνθήκη, όπως φαίνεται από την κατεύθυνση των βελών στο γεωμετρικό τόπο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος κλειστού βρόχου, έτσι ώστε να έχει δύο συζυγείς ρίζες:

$$G_\kappa(s) = \frac{3K_p}{s^2 - 9 + 3K_p}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι $s^2 \underbrace{-9+3K_p}=0$. Για να έχουμε δύο συζυγείς ρίζες, πρέπει ο όρος $-9+3K_p$ να είναι θετικός (για να έχουμε μια μορφή $s^2+a^2>0$ που έχει μόνο φανταστικές ρίζες).

Επομένως:

$$-9+3K_p>0 \implies \underline{K_p>3}.$$

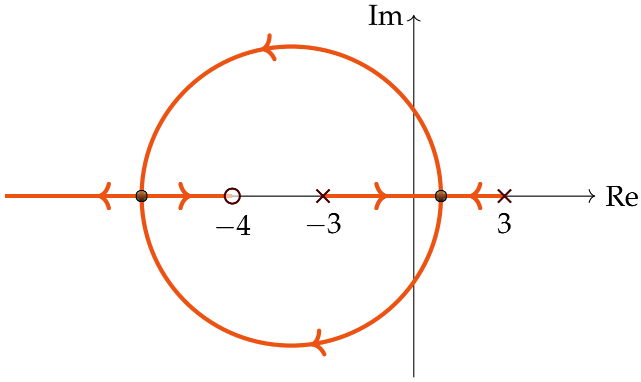
(β) Επιλέγουμε να τοποθετήσουμε ένα μηδενικό, έτσι ώστε να μετακινήσουμε το γεωμετρικό τόπο ριζών προς τα αριστερά:

$$H_c(s)=k(s+z)$$

Τότε η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s)=\frac{k(s+z)3}{s^2-9}$$

Μπορούμε να τοποθετήσουμε ένα μηδενικό στη θέση -4:



Για $z=4$, η αντίστοιχη του κλειστού είναι:

$$G_\kappa=\frac{3k(s+4)}{3k(s+4)+s^2-9}$$

με χαρακτηριστική εξίσωση $s^2-9+3k(s+4)=0 \iff s^3+3ks-9+12k=0$, η οποία έχει $\zeta\omega_n=\frac{3k}{2}$.

Θέλουμε $t_s<1$, άρα $\zeta\omega_n>4 \implies \frac{3k}{2}>4 \implies \underline{k>\frac{8}{3}}$.

(γ) Το σύστημα είναι τύπου 0, με:

$$e_{ss}=\frac{1}{1+K_p}$$
$$K_p=\lim_{s\to 0}A(s)=-4.66$$
$$e_{ss}=-0.27$$

Το σφάλμα e_{ss} είναι αρνητικό, άρα η έξοδος $y=-e+r$ (όπου e το σφάλμα και r η είσοδος) θα είναι μεγαλύτερη από την επιθυμητή είσοδο.

Τώρα πρέπει να βρούμε και το σφάλμα λόγω της διαταραχής.

Η συνάρτηση μεταφοράς της διαταραχής είναι:

$$\frac{y}{d}=\frac{H_p}{1+H_cH_p}=\frac{\frac{3}{s^2+9}}{1+\frac{9(s+4)}{s^2-9}}=\frac{3}{s^2-9+9(s+4)}$$

Στη μόνιμη κατάσταση, αν έχουμε μια βηματική διαταραχή και μηδενική είσοδο, η έξοδος θα είναι:

$$y = \lim_{s \to 0} s \frac{y}{d} \frac{1}{s} = \left. \frac{y}{d} \right|_{s=0} \simeq \underline{0.09}$$

Επιπλέον, αν έχουμε μηδενική διαταραχή και βηματική είσοδο, μπορούμε να βρούμε την έξοδο στη μόνιμη κατάσταση, αξιοποιώντας το σφάλμα που βρήκαμε παραπάνω:

$$e = v - y \implies y = v - e \implies \underline{y_{ss} = 1.27}$$

Η συνολική έξοδος θα είναι, σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας:

$$y = y_r + y_d = 1.27 + 0.09 \simeq 1.36$$

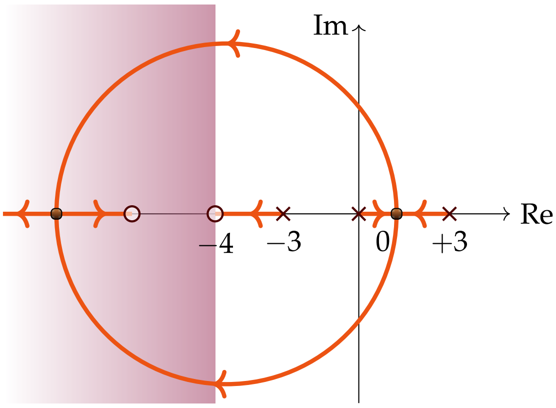
άρα και το συνολικό σφάλμα:

$$e_{ss} = 1 - 1.36 = \underline{-0.36}$$

(δ) Θέλουμε το σφάλμα μόνιμης κατάστασης να γίνει 0, άρα θα χρησιμοποιήσουμε έναν ελεγκτή PI, δηλαδή της μορφής $\frac{k(s+z)}{s}$, δηλαδή ο ελεγκτής θα γίνει:

$$H_c = \frac{k(s+z)}{s}(s+4)$$

Τοποθετώ το μηδενικό πιο αριστερά από το -4 έτσι ώστε στο γεωμετρικό τόπο να ανήκουν κομμάτια με πραγματικό μέρος πριν το -4. Ο γεωμετρικός τόπος θα γίνει:



Επιβεβαιώνουμε με τη συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού και κλειστού βρόχου:

$$A = \frac{k(s+z)(s+4) \cdot 3}{s(s^2-9)}$$

$$H_\kappa = \frac{3k(s+z)(s+4)}{s(s^2-9) + 3k(s+z)(s+4)}$$

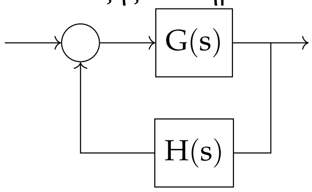
Από τη χαρακτηριστική εξίσωση (παρονομαστής του H_κ) παρατηρούμε ότι οι πόλοι του συστήματος κλειστού βρόχου (οι λύσεις της)είναι της μορφής:

$$(s+4+\varepsilon)\ (s+z+d)\ (s+\cdots)$$

όπου $\varepsilon \ll 4$ και $\delta \ll z$. Ο πόλος στο $4+\varepsilon$ εξουδετερώνεται από το μηδενικό $(s+4)$, επομένως δεν τον λαμβάνουμε υπ' όψιν ως κυρίαρχο πόλο.

Άσκηση: Θέμα Εξετάσεων

Δίνεται το εξής σύστημα:



όπου

$$G(s) = \frac{2(s+8)}{s(s+4)(s+6)}$$

(α) Για τον ελεγκτή $H(s) = k$ ($k > 0$), να σχεδιαστεί ο γεωμετρικός τόπος ριζών και να βρεθεί ο χρόνος αποκατάστασης t_s για μεγάλο k.

(β) Για τον ελεγκτή $H(s) = k(s+z)$ να τοποθετήσετε το μηδενικό και να σχεδιάσετε το γεωμετρικό τόπο ριζών έτσι ώστε $t_s < 0.5\,s$ για κατάλληλα k.

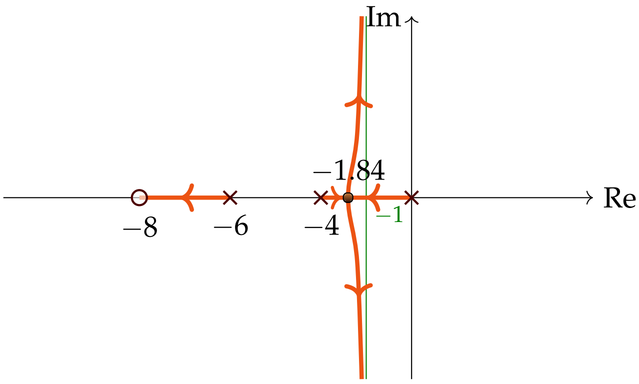
Λύση

(α) Για το σχεδιασμό του γεωμετρικού τόπου ριζών έχουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση όπως γνωρίζουμε από τη θεωρία:

$$1 + 2k\frac{s+8}{s(s+4)(s+6)}$$

Έχουμε 3 μηδενικά και 1 πόλο, άρα 3 κλάδους (από τους οποίους 2 καταλήγουν στο ∞). Το σημείο τομής των ασυμπτώτων προκύπτει -1, και οι γωνίες $\pm 90°$.

Λύνοντας την εξίσωση $\frac{dG(s)}{ds}$ μπορούμε να βρούμε το σημείο απόσχισης στη θέση ≈ -1.84.



Αφού για $k \to \infty$ οι κυρίαρχοι πόλοι στα δεξιά τείνουν σε πραγματικό μέρος -1. Επομένως ο χρόνος αποκατάστασης είναι $t_s \approx \frac{4}{p} = 4\,s$.

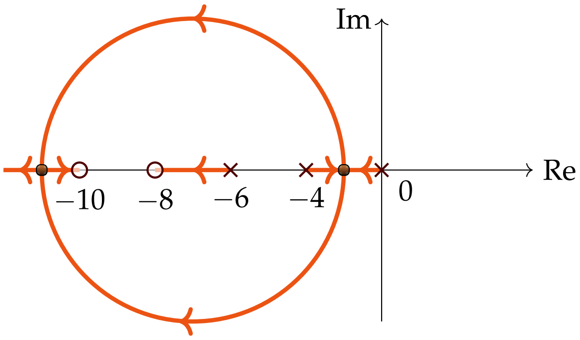
(β) Για την τοποθέτηση του μηδενικού μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεωμετρικό τόπο ριζών που έχουμε ήδη σχεδιάσει. Αυτό που επιθυμούμε είναι $\frac{4}{p} \approx t_s < 0.5\,s$, άρα πρέπει να βρούμε έναν κυρίαρχο πόλο τέτοιο ώστε $-p < -8$.

Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου:

$$T(s) = \frac{2(s+8)}{s(s+4)(s+6) + 2k(s+z)(s+8)}$$

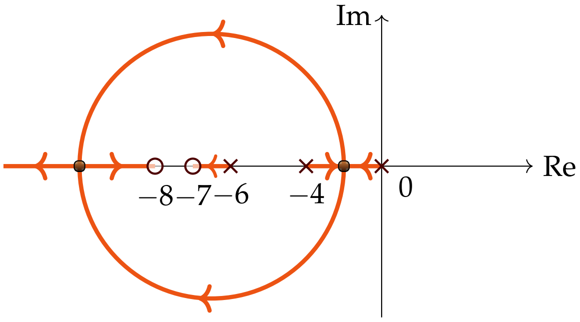
Για την επιλογή του μηδενικού μπορούμε να δοκιμάζουμε τιμές για αυτό μέχρι να βρούμε κάποια κατάλληλη, σχεδιάζοντας το γεωμετρικό τόπο (αφού πραγματοποιήσουμε την ανάλυση όπως γνωρίζουμε). Ενδεικτικά:

- **Για** $z = 10$:



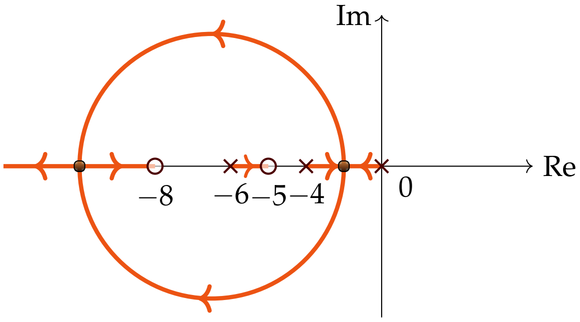
Εδώ θα κυριαρχήσει ο κοντινότερος στον φανταστικό άξονα πόλος. Οι πόλοι που βρίσκονται στον κλάδο μεταξύ -8 και -6 οδηγούν σε αργή απόκριση επειδή κυριαρχούν για οποιοδήποτε k, και όχι σε κατάλληλο χρόνο αποκατάστασης.

- **Για** $z = 7$:



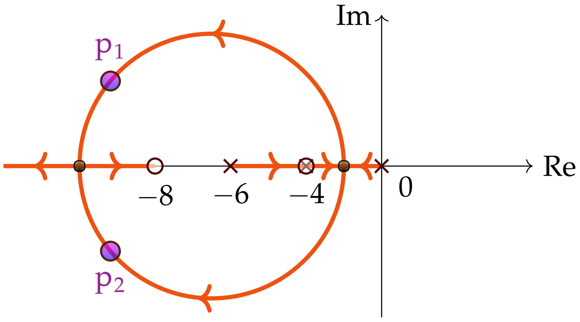
Εδώ ο κυρίαρχος πόλος θα είναι -7 για μεγάλα k, άρα η λύση είναι μη αποδεκτή.

- **Για** $z = 5$:



Ο κυρίαρχος πόλος -5 συνεχίζει να οδηγεί σε μη αποδεκτή λύση.

- **Για** $z = 4$:



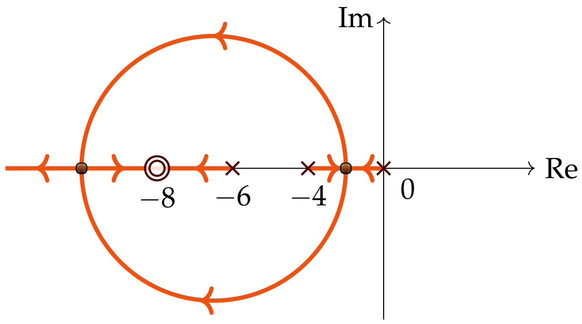
Εδώ ο γεωμετρικός τόπος φαίνεται ότι ικανοποιεί τα κριτήρια και μπορούμε να βρούμε δύο πόλους που να έχουν τον επιθυμητό χρόνο απόκρισης (όπως οι p_1 και p_2 στο σχήμα). Παρ' όλα αυτά, αν θεωρήσουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση του κλειστού βρόχου που είναι ο παρονομαστής της συνάρτησης μεταφοράς:

$$\frac{2(s+8)}{s(s+4)(s+6)+2k(s+4)(s+8)} = \frac{2(s+8)}{(s+4)\left[s(s+6)+2k(s+8)\right]}$$

Δηλαδή ο πόλος στο $s+4$ **παραμένει και δεν απαλείφεται** από τη συνάρτηση μεταφοράς, αν και δε φαίνεται στο γεωμετρικό τόπο ριζών!

Επομένως η λύση αυτή δεν είναι αποδεκτή.

- **Για** $z = 8$:



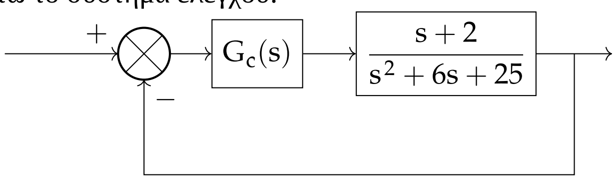
Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου γίνεται:

$$\frac{2(s+8)}{s(s+4)(s+6)+2k(s+8)^2}$$

Σε αυτήν τη συνάρτηση, για αρκετά μεγάλα k, το μηδενικό στο -8 εξουδετερώνεται από τον πόλο στο -8, αφού ο όρος $s(s+4)(s+6)$ γίνεται αμελητέος. Επομένως παραμένουν πόλοι στη συνάρτηση κλειστού βρόχου μόνο αριστερά του -8, και προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Άσκηση: Θέμα Εξετάσεων

Έστω το σύστημα ελέγχου:



(α) Για $G(s) = k$ σχεδιάστε το γεωμετρικό τόπο ριζών. Τοποθετήστε τους πόλους για το σύστημα κλειστού βρόχου υπολογίζοντας την τιμή k έτσι ώστε να έχουμε τον μικρότερο χρόνο αποκατάστασης $t_s = t_{s_{min}}$, έχοντας ως περιορισμό ότι $k \le 15$.

(β) Χρησιμοποιώντας ελεγκτή της μορφής:

$$G(s) = k\frac{s+z}{s+p}$$

βελτιώστε το χρόνο αποκατάστασης έτσι ώστε να είναι μικρότερος από $t_s < 0.5\,s$.

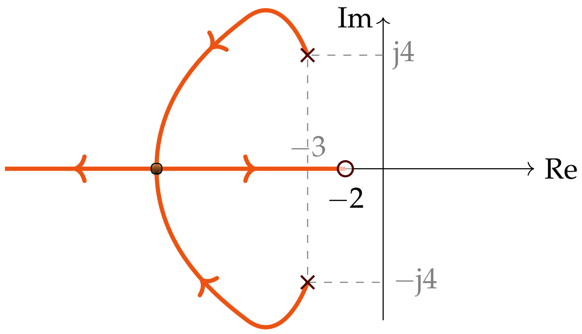
Δεδομένου ότι πρέπει $k \le 15$, βρείτε τις τιμές k, z, p σχεδιάζοντας το γεωμετρικό τόπο ριζών, και υπολογίστε προσεγγιστικά το νέο χρόνο αποκατάστασης.

Λύση

(α) Οι πόλοι του συστήματος προκύπτουν από τη λύση της χαρακτηριστικής εξίσωσης $s^2 + 6s + 25$ και είναι οι:

$$-3 \pm j4$$

Σχεδιάζουμε το γεωμετρικό τόπο ριζών:



Για να βρούμε τα σημεία θλάσης, βρίσκουμε την $A(s) = \frac{k(s+2)}{s^2+6s+25}$ (συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου), και υπολογίζουμε τις λύσεις της εξίσωσης $\frac{dL(s)}{ds}$, όπου $L(s) = \frac{s+2}{s^2+6s+25}$:

$$\frac{dL(s)}{ds} = 0 \iff \frac{(s^2+6s+25)-(2s+6)(s+2)}{(\cdots)^2} = 0 \iff -s^2-4s+13 = 0 \iff s = -6.12 \text{ ή } \cancel{2.12}$$

αφού απορρίψαμε τη λύση 2.12 που βρίσκεται εκτός του γεωμετρικού τόπου.

Για να έχουμε ελάχιστο χρόνο αποκατάστασης, το ιδανικό θα ήταν να φτάσει ένας πόλος στο -2, έτσι ώστε να εξουδετερωθεί με το μηδενικό. Όπως παρατηρούμε από το γεωμετρικό τόπο ριζών, αυτό γίνεται για μεγάλα k. Όμως από την εκφώνηση έχουμε έναν περιορισμό για τα k, για τα οποία πρέπει $k \leq 15$, επομένως δεν μπορούν να είναι αυθαίρετα μεγάλα.

Πράγματι, για $k = 15$, η χαρακτηριστική εξίσωση του συστήματος είναι $s^2 + 21s + 55 = 0$ με ρίζες -17.93 και -3.66, από τις οποίες καμία δεν είναι κοντά στο -2.

Επομένως θα πρέπει να τοποθετήσουμε τους πόλους στο σημείο θλάσης, όπου ο κυρίαρχος πόλος έχει τη μικρότερη τιμή, άρα έχουμε το μικρότερο χρόνο αποκατάστασης. Για να βρούμε το k σε εκείνη τη θέση, λύνουμε την εξίσωση $1 + kL(s) = 0 \iff k(s) = -\frac{1}{L(s)}$:

$$k' = -\left.\frac{1}{L(s)}\right|_{s=-6.12} = -\left.\frac{s^2+6s+25}{s+2}\right|_{s=-6.12} = \underline{6.24}.$$

(β) Θυμόμαστε ότι $t_s = \frac{4}{\sigma}$, όπου ο κυρίαρχος πόλος του συστήματος κλειστού βρόχου είναι $-\sigma - j\omega$, δηλαδή:

$$t_s < 0.5 \implies \frac{4}{\sigma} < 0.5 \implies \underline{\sigma > 8}.$$

Έχουμε ήδη μηδενικό στο -2, οπότε σκεφτόμαστε να τοποθετήσουμε έναν πόλο στην ίδια θέση ώστε να εξουδετερωθούν και να μην επηρεάζουν το χρόνο αποκατάστασης. Υπολογίζουμε τη συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου για να το επιβεβαιώσουμε αυτό, δεδομένης της συνάρτησης μεταφοράς ανοιχτού βρόχου $k\frac{s+z}{s+p}\frac{s+2}{s^2+6s+25}$:

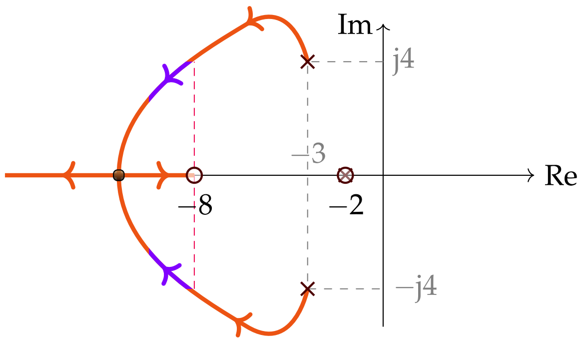
$$H_\kappa = \frac{k(s+z)(s+2)}{(s+p)(s^2+6s+25)+k(s+2)(s+z)}$$

Αν θέσω $p = 2$:

$$= \frac{k(s+z)(s+2)}{(s+2)\left[(s^2+6s+25)+k(s+z)\right]}$$

Οπότε όντως το $(s+2)$ του αριθμητή εξουδετερώνεται με το $(s+2)$ του παρονομαστή.

Επομένως θέτουμε: $\boxed{\begin{array}{l} z = 8 \\ p = 2 \end{array}}$ και ο γεωμετρικός τόπος ριζών γίνεται:



Παρατηρούμε βέβαια ότι λόγω του περιορισμού $k \leq 15$ υπάρχει ένα όριο στις τιμές που μπορούμε να επιλέξουμε. Λύνουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση:

$$s^2 + \underbrace{(6+s)}_{2\zeta\omega_n} s + 25 + 8k = 0$$

Πρέπει:

$$\frac{4}{\zeta\omega_n} < 0.5 \implies \zeta\omega_n > 8 \implies \frac{6+k}{2} > 8 \implies \underline{k > 10}$$

Αυθαίρετα θεωρούμε ότι $\underline{k = 14}$. Τότε όντως $2\zeta\omega_n = 2 + k = 20 \implies \zeta\omega_n = 10$, άρα τελικά:

$$t_s = \frac{4}{10} = \underline{0.4\,s}.$$

Άσκηση: Θέμα Εξετάσεων

Ένας ελεγκτής προπόρευσης φάσης έχει συνάρτηση μεταφοράς:

$$G_c(s) = KG_1(s)$$

όπου:

$$G_1(s) = \frac{\tau s + 1}{a\tau s + 1}, \quad \text{με } 0 < a < 1$$

(α) Για $a = 0.1$, σχεδιάστε προσεγγιστικά τα διαγράμματα Bode πλάτους και φάσης για τον G_1.

(β) Είναι γνωστό ότι ο ελεγκτής αυτός προσθέτει φάση:

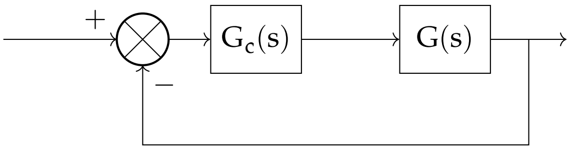
$$\bar{\phi} \to \sin\bar{\phi} = \frac{1-a}{1+a}$$

για $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$.

Βρείτε προσεγγιστικά το κέρδος στη συχνότητα $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$ για $a = 0.1$.

(γ) Έστω το σύστημα:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$



Προσδιορίστε το K έτσι ώστε η σταθερά σφάλματος ταχύτητας να είναι $K_v = 20\,s^{-1}$.

(δ) Να σχεδιάσετε προσεγγιστικά το διάγραμμα Bode για τη συνάρτηση $G(s)G_c(s)$, και βρείτε το περιθώριο φάσης ϕ_M.

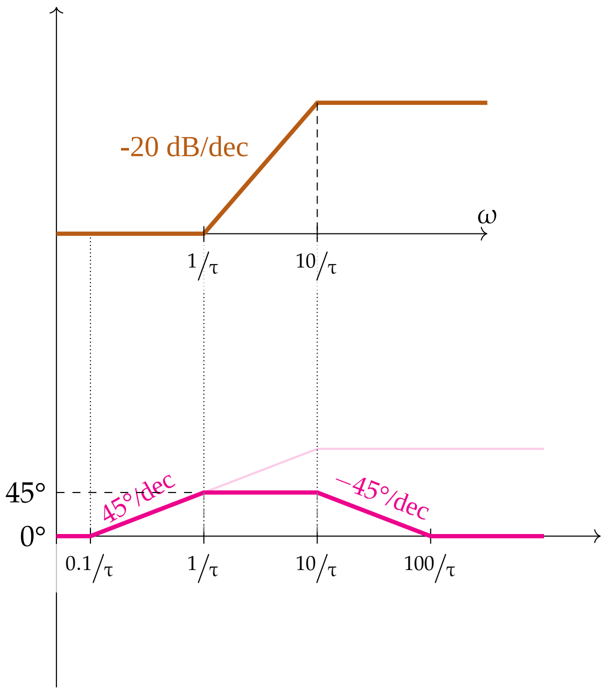
(ε) Να βρείτε τον ελεγκτή G_c που να μεταβάλλει τη φάση έτσι ώστε να έχουμε περιθώριο φάσης $\bar{\phi}_M > 50°$, και επιλέξτε τη συχνότητα $\bar{\omega}$ στην οποία πρέπει να τοποθετηθεί.

Λύση

(α) Η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται:

$$\frac{\tau s + 1}{\frac{\tau}{10}s + 1}$$

Σε αυτήν τη μορφή μπορούμε να σχεδιάσουμε το διάγραμμα Bode:



(β) Έχουμε:

$$\omega = \frac{1}{\tau\sqrt{0.1}} = 3.16\frac{1}{\tau} < 10\frac{1}{\tau}$$

Επομένως είμαστε ενδιάμεσα στις συχνότητες $1/\tau$ και $10/\tau$.

Για να βρούμε το κέρδος, έχουμε:

$$\left|G_1(s)\right|_{\omega=3.16\frac{1}{\tau}} \simeq \left|3.16\frac{1}{\tau}\tau j+1\right| \approx 3.16\,\text{dB ή } 3.31\,\text{dB}$$

αφού στη θέση $\frac{3.16}{\tau}$ επιδρά μόνο το μηδενικό και όχι ο πόλος.

(γ) Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου είναι:

$$A(s) = GG_c = k\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}\frac{4}{s(s+2)}$$

Έχουμε:

$$K_v = \lim_{s\to 0} sA(s) = \frac{4k}{2} = 20$$

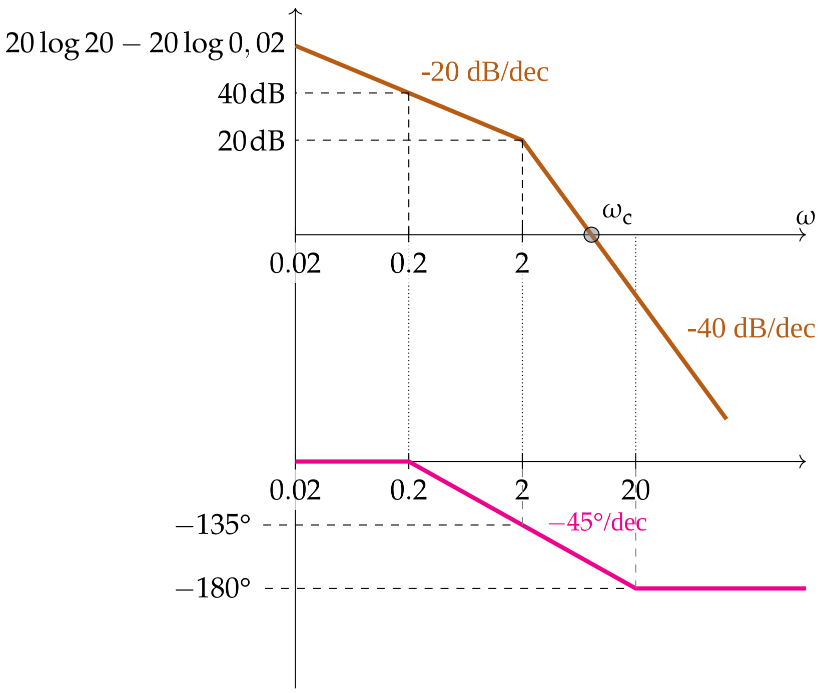
Άρα $\underline{k=10}$.

(δ) Φέρνουμε τη συνάρτηση μεταφοράς στη μορφή:

$$\frac{40}{2}\frac{1}{s\left(\frac{s}{2}+1\right)}$$

Το μόνιμο κέρδος σε dB είναι $20\log\frac{40}{2}$, και λόγω του ολοκληρωτή γίνεται $20\log 20 - 20\log\omega$. Δηλαδή λόγω του μηδενικού το πλάτος μειώνεται ήδη από τη μηδενική συχνότητα. Αφού γνωρίζουμε ότι η επίδραση των υπόλοιπων πόλων ξεκινά από το 0.2, αυθαίρετα αποφασίζουμε να ξεκινήσουμε το διάγραμμα από τη συχνότητα 0.02, όπου το κέρδος είναι $20\log 20 - 20\log 0.02 = 60\,\text{dB}$.

Το διάγραμμα Bode είναι:



Παρατηρούμε ότι το ω_c (συχνότητα όπου το κέρδος είναι 0dB) βρίσκεται μεταξύ 2rad/s και 20rad/s.

Για να το υπολογίσουμε έχουμε:

$$20\log 20 - 20\log\omega_c - 20\log\frac{\omega}{2} = 0 \iff \underline{\omega_c = 6.48\,\text{rad/s}}$$

Άρα η φάση σε εκείνο το σημείο είναι:

$$\begin{aligned}\phi\big|_{\omega=\omega_c} &= -\measuredangle(j\omega) - \measuredangle\left(\frac{j\omega}{2}+1\right)\\ &= -90° - \tan^{-1}\left(\frac{6.48}{2}\right) = -162.8476°\end{aligned}$$

άρα τελικά:

$$\underline{\theta_M = 17.15°}$$

(ε) Για τον ελεγκτή ισχύει:

$$|G_c|\big|_{\omega=\bar{\omega}} = \sqrt{\frac{1}{a}+1}$$

όπου για $a = 0.1$, $G_c = \sqrt{10}$.

Με την αλλαγή των παραμέτρων του ελεγκτή, μεταβάλλεται και η συχνότητα ω_c όπου το κέρδος της συνάρτησης είναι $0\,\text{dB}$. Αποφασίζουμε να τοποθετήσουμε τη συχνότητα $\bar{\omega}$ του ελεγκτή στην ω_c.

Γνωρίζουμε ότι $\bar{\omega} = \frac{1}{\tau\sqrt{a}}$. Από τη συνάρτηση μεταφοράς $A(s)$, βρίσκουμε το σημείο στο οποίο το κέρδος είναι $0\,\text{dB} = 1$ (για $a = 0.1$):

$$\begin{aligned}\big|A(s)\big|_{\omega=\omega_c} &= 1 \iff\\ \left|40\frac{\tau s+1}{0.1\tau s+1}\frac{1}{s(s+2)}\right|_{\omega=\omega_c=\bar{\omega}} &= 1\\ \sqrt{10}\frac{40}{\sqrt{\omega^4-4\omega^2}} &= 1 \implies \bar{\omega} = \omega_c = 11.33\,\text{rad/s}\end{aligned}$$

Τότε $\tau = \frac{1}{11.33\sqrt{0.1}} = 0.279$, και αν επαληθεύσουμε το διάγραμμα Bode παρατηρούμε ότι όντως επαληθεύεται η άσκηση, αφού ισχύει ότι $\sin\phi = \frac{1-a}{1+a}$.

Παράρτημα

Ορισμοί

1.1 Συνάρτηση μεταφοράς . . . 4
1.2 Μορφές έκφρασης συνάρτησης μεταφοράς . . . 4
1.3 Πόλοι & Μηδενικά . . . 4
1.4 DC κέρδος . . . 4
2.1 Σφάλμα . . . 9
2.2 Ολοκληρωτής . . . 10
2.3 Τύπος συστήματος . . . 10
2.4 Χρόνος ανόδου σε πρωτοβάθμιο σύστημα . . . 25
2.5 Χρόνος αποκατάστασης σε πρωτοβάθμιο σύστημα . . . 25
2.6 Σταθερές Συστημάτων 2ου βαθμού . . . 28
2.7 Χρόνος ανόδου σε δευτεροβάθμιο σύστημα με συζυγείς πόλους . . . 30
2.8 Χρόνος Υπερύψωσης . . . 30
2.9 Υπερύψωση . . . 30
2.10 Περιθώριο φάσης . . . 60
2.11 Περιθώριο κέρδους . . . 61

Θεωρήματα

1.1 Σύνδεση εν σειρά . . . 5
1.2 Συναρτήσεις μεταφοράς σε σύστημα κλειστού βρόγχου . . . 6
2.1 Συντελεστής απόσβεσης συστημάτων 2ου βαθμού . . . 28
2.2 Χρόνος αποκατάστασης σε δευτεροβάθμιο σύστημα με συζυγείς πόλους . . . 30
2.3 Εύρος ζώνης δευτεροβάθμιου συστήματος . . . 47
2.4 Συχνότητα συντονισμού δευτεροβάθμιου συστήματος . . . 47