3. Calculez les dérivées partielles premières et secondes au point $(x, y) = (1, 0)$ de la fonction $f(x, y) = x^3 \cdot e^{y^2}$.

4. Soit la fonction de trois variables $f(x, y, z) = xy^2ze^{x^2}$. Déterminez toutes les dérivées partielles secondes et évaluez-les au point $(1, -1, 2)$.

3) $f_x(x,y) = \underline{3x^2 \cdot e^{(y^2)}}$ $\Big\}$ $g(x) = y^2$, $f(x) = e^x$

$f_y(x,y) = x^3 e^{y^2} \cdot 2y$

$= \underline{2e^{y^2} x^3 \cdot y}$

$\Big\{$ $f_x(1,0) = 3$, $f_y(1,0) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

3. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2e^{y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^3ye^{y^2}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6xe^{y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6x^2ye^{y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,0) = 0$
$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 6x^2ye^{y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2x^3(1+2y^2)e^{y^2}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0) = 2$

$(uv)' = u'v + v'u$

$f_{xx} = \underline{6x\, e^{y^2}}$

$f_{xy} = 3x^2 \cdot e^{y^2} \cdot 2y$

$f_{yx} = 6e^{y^2} x^2 y$

$f_{yy} = 2x^3 \left[e^{y^2} \cdot y\right]$

$f_{yy} = 2x^3(e^{y^2} \cdot 2y \cdot y + e^{y^2})$

$f_{yy} = 2x^3 e^{y^2}(2y^2 + 1)$

$f_{yy}(1,0) = 2$

x: x, y, z

y

z

$u'v + v'u$

4. Soit la fonction de trois variables $f(x,y,z) = xy^2ze^{x^2}$. Déterminez toutes les dérivées partielles secondes et évaluez-les au point $(1,-1,2)$.

$f_x = y^2z(e^{x^2} + xe^{x^2}\cdot 2x)$

$= y^2z\boxed{e^{x^2}(2x^2+1)}$ *

$f_y = 2xyze^{x^2}$; $f_z = xy^2e^{x^2}$

$f_{xx} = y^2z(e^{x^2}2x\cdot(2x^2+1) + 4xe^{x^2})$

$= y^2ze^{x^2}2x(2x^2+1+2)$

$= y^2ze^{x}2x(2x^2+3)$

usando * :

$f_{yx} = 2yze^{x^2}(2x^2+1)$

$f_{zz} = 0$

1. La demande D d'un produit dépend du prix p de ce produit et du prix q d'un produit de substitution. La formule est

$$D(p,q) = a - bpq^{-\alpha}$$

où a, b et α sont des constantes positives avec $\alpha < 1$. Déterminez les dérivées partielles de la fonction de demande et interprétez concrètement leur signe.

$D_p = -bq^{-\alpha}$

$D_q = -bp(-\alpha)\cdot q^{-\alpha-1}$

$= bp\alpha q^{-\alpha-1}$

$\frac{\partial D}{\partial q} =$

1. $\frac{\partial D}{\partial p} = -bq^{-\alpha}$; $\frac{\partial D}{\partial q} = \alpha bpq^{-\alpha-1}$.

La première dérivée partielle est négative ; il est en effet normal que, si le prix p du produit de départ augmente tandis que le prix q du bien de substitution est inchangé, la demande du bien de départ diminue.

La seconde dérivée partielle est positive ; il est en effet logique que, si le prix q du bien de substitution augmente tandis que le prix p du bien de départ est inchangé, la demande du bien de départ augmente.

2. Calculez les élasticités partielles des fonctions suivantes :

a) $f(x,y) = x^2y$ $\quad f_x = 2xy$; $f_y = x^2$

b) $f(x,y) = Ax^ay^b$

c) $f(x,y) = xye^{x+y}$ $\rightsquigarrow e^x \cdot e^y$

d) $D_1 = Ap^{-0{,}28} \cdot m^{0{,}34}$

b) $f_x = Aax^{a-1}y^b$

$f_y = Ax^ab \cdot y^{b-1}$

c) $f_x = ye^y(e^x + x \cdot e^x)$

$f_x = ye^{x+y}(x+1)$

$u'v + uv'$

$f_y = xe^{x+y}(y+1)$

d) $D_p = A(-0{,}28)\,p^{-1{,}28} \cdot m^{0{,}34}$

$D_m = A(0{,}34)\,p^{-0{,}28} \cdot m^{-0{,}66}$

3. Soit une fonction de demande de viande de boeuf :

$$\underset{1000}{} \quad \underset{150}{} \quad \underset{1000}{}$$

$$Q_b = 4850 - 5P_b + 1,5P_p + 0,1Y = 5000$$

où P_b, P_p et Y désignent respectivement le prix du boeuf, du porc et le revenu. Calculez ϵ_Y et ϵ_{P_p} quand

$$Y = 10000, \qquad P_b = 200, \qquad P_p = 100$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \epsilon_x = \dfrac{x}{f}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \epsilon_x(x,y) = \dfrac{x}{f(x,y)}\cdot\dfrac{\partial f}{\partial x} \end{array}}$$

$$\frac{\partial Q_b}{\partial y} = 0 - 0 + 0 + 0,1 = \underline{0,1}$$

$$\epsilon_y = \frac{1000}{Q_b}\cdot\boxed{\frac{\partial Q_b}{\partial y}} = \frac{10\cancel{000}}{5\cancel{000}}\cdot 0,1 = \underline{0,2}$$

épisulon

$$\epsilon_{P_p} = \frac{P_p}{Q_b}\,\frac{\partial Q_b}{\partial P_p} = \frac{10\cancel{0}}{50\cancel{0}\cancel{0}}\cdot 1,5 = \frac{15}{50} = \frac{0,3}{10} = \underline{0,03}$$

$$5\cdot 10^{-3}\cdot(10^2)^3 = 5000$$

4. Soit la fonction de demande du bien A

$$Q = 1000 - 5P_A + P_B^2 + 0.005Y^3$$

$$1000 - 75 + 400 + 5000 = 6325$$

où P_A, P_B et Y désignent respectivement le prix unitaire du bien A, le prix unitaire d'un bien B de substitution, et le revenu. Déterminez les élasticités partielles de cette fonction lorsque $P_A = 15$, $P_B = 20$ et $Y = 100$. Commentez leur signe.

$$\frac{\partial Q}{\partial P_a} = -5 \ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial P_B} = 2P_B \ ; \quad \frac{\partial Q}{\partial P_B} = 15\cdot 10^{-3}\cdot y^2$$

$$\epsilon_y = \frac{100}{6325}\cdot 15\cdot 10^{-3}(10^2)^2$$

$$= 10^2\cdot 10^{-3}\cdot 10^4\cdot\frac{\cancel{15}}{\cancel{6325}} = 10^3\cdot\frac{3}{1265} = 2,371$$

$$\epsilon_{P_A} : \frac{\cancel{15}}{6325}\cdot -5 = \frac{3}{1265}\cdot 5 = 0,011$$

Question 4

Considérons la fonction de deux variables $f(x, y) = 2x^3y + e^{y^2}$. Calculez :

1. La dérivée partielle première de f par rapport à y au point $(x, y) = (-2, 3)$;
2. La dérivée partielle seconde mixte $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

Précisez toutes les formules et propriétés utilisées.

$f_x = 6x^2y \rightarrow f_x(-2,3) = 6\cdot(-2)^2\cdot 3 = 72$

$f_y = 2x^3 + e^{y^2}2y \rightarrow f_y(-2,3) = 2(-2)^3 + e^{3^2}\cdot 2\cdot 3$

$= 6\cdot e^9 - 16$

2) $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

$= 6x^2$

Question 6

Considérons la fonction de demande de viande de poulet :

$$Q_a = 3720 - 4.5P_a + 2P_b + 0.2Y$$

$3720 - 1125 + 64 + 1600$

où P_a, P_b et Y désignent respectivement le prix du poulet, de la dinde et le revenu. Déterminez l'élasticité partielle ϵ_{P_b} quand $Y = 8000$, $P_a = 250$ et $P_b = 32$.

Que peut-on déduire de cette élasticité partielle :

- au sujet de la viande de poulet et de la viande de dinde ? Justifiez.
- au sujet de la variation de la demande Q_A ?

∂

$$\epsilon_{P_B} = \frac{32}{4259} \cdot \frac{\partial Q_a}{\partial P_B}$$

$$= \frac{32}{4259} \cdot 2 = \boxed{0{,}015}$$