문제 1. 정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n+k}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n+k}$

문제 2. $f(x)=\int_{-x}^{x}\frac{\cos t}{1+e^t}dt$ 라고 할 때, $f'(x)$ 와 $f(x)$ 를 구하여라.

문제 3. 모든 실수 x 에 대하여 다음 등식을 만족시키고 $f(0)=3$ 인 연속함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$(1-x)\int_0^x f(t)dt = x\int_x^1 f(t)dt$$

문제 4. 모든 실수 x 에 대하여 다음 등식을 만족시키는 연속함수 $f(x)$ 와 상수 a 의 값을 구하여라.

$$\int_0^x f(t)dt = e^x - ae^{2x}\int_0^1 f(t)e^{-t}dt$$

문제 5. 다음 방정식을 풀어라.

$$\sin\left\{\frac{1}{2}\pi\log_x\left(\frac{d}{dx}\int_1^x t^2dt\right)\right\} = x^2 - 2x$$

문제 6. 함수 $f(x) = \int_0^x e^t(t-1)(t-2)dt$ 가 극댓값을 갖는 x 와 극솟값을 갖는 x 를 구하여라.

문제 7. 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 이고, $\int_{-1}^1 f(x)dx = 4$ 일 때, $\int_0^{10} f(x)dx$ 의 값을 구하여라.

문제 8. 정적분을 이용하여 다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sum_{k=n+1}^{2n}\ln k - n\ln n\right)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(2n)!}{n!n^n}\right\}^{1/n}$

문제 9. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\displaystyle\int_0^x f(t)dt = \sin^2 x$ 일 때, $\displaystyle\int_0^{\pi/2} t^2 f(t)dt$ 의 값을 구하여라.

문제 10. 연속함수 $f(x)$ 에 대하여 $\displaystyle\int_0^\pi f(\sin x)dx = K$ 일 때, 정적분

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

의 값을 K 로 나타내어라.

문제 11. 정적분

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x}dx$$

의 값을 구하여라. (단, n 은 자연수)

문제 12. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $I_n + I_{n-1} = \dfrac{1}{n}$ 임을 증명하여라.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ 임을 보여라.

문제 13. 함수 $f(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$ 일 때, 모든 양수 x 에 대하여

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

이 성립함을 증명하여라.