수학 II - 제12장 넓이와 적분

현경서T

§1. 곡선과 좌표축 사이의 넓이

기본 정석

1. **곡선과 x축 사이의 넓이**
   (i) 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \geq 0$인 경우: $S = \int_a^b f(x)dx$
   (ii) 구간 $[a,b]$에서 $f(x) \leq 0$인 경우: $S = -\int_a^b f(x)dx$
   (iii) 구간 $[a,b]$에서 일반적인 경우: $S = \int_a^b |f(x)|dx$

2. **곡선과 y축 사이의 넓이**
   함수 $g(y)$가 구간 $[\alpha,\beta]$에서 연속일 때
   (i) $g(y) \geq 0$인 경우: $S = \int_\alpha^\beta g(y)dy$
   (ii) $g(y) \leq 0$인 경우: $S = -\int_\alpha^\beta g(y)dy$
   (iii) 일반적인 경우: $S = \int_\alpha^\beta |g(y)|dy$

Advice

곡선과 x축 사이의 넓이

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 부호가 일정하지 않을 때의 넓이는 $f(x)$의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어서 구해야 한다. 절댓값 기호를 써서 하나의 식으로 나타내면 $S = \int_a^b |f(x)|dx$와 같다.

Advice

곡선과 y축 사이의 넓이

곡선과 x축 사이의 넓이를 구할 때와 같은 방법으로 생각하면 된다. 곡선 $x = g(y)$가 y축의 오른쪽에 있을 때($g(y) \geq 0$)는 정적분 값이 곧 넓이이고, 왼쪽에 있을 때($g(y) \leq 0$)는 정적분 값에 '$-$'(마이너스)를 붙여야 넓이가 된다.

Advice

$x = ay^2 (a \neq 0)$ 꼴의 곡선

곡선 $x = y^2$은 곡선 $y = x^2$과 직선 $y = x$에 대하여 대칭인 포물선이다. $x = ay^2$ 꼴은 꼭짓점이 원점이고 축이 x축인 포물선이 된다. 이를 평행이동한 $x = a(y-n)^2 + m$ 꼴도 같은 방법으로 이해할 수 있다.

§2. 두 곡선 사이의 넓이

기본 정석

1. **두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 사이의 넓이**
   구간 $[a, b]$에서 $f(x) \geq g(x)$일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
   $$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$$
2. **두 곡선 $x = f(y), x = g(y)$ 사이의 넓이**
   구간 $[\alpha, \beta]$에서 $f(y) \geq g(y)$일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S는
   $$S = \int_\alpha^\beta \{f(y) - g(y)\}dy$$

Advice

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$와 두 직선 $x = a, x = b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 위에 있는 그래프의 식에서 아래에 있는 그래프의 식을 뺀 것을 적분하면 된다. 이는 두 곡선이 모두 x축 아래에 있거나 x축을 사이에 두고 있는 경우에도 성립한다. 일반적으로 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$이다.

필수 예제

필수 예제 12-1

함수 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ 가 극솟값 0을 가질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 곡선 $y = f(x)$와 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

정석연구

넓이를 구하는 기본 방법은 (i) 넓이를 구하는 도형이 어떤 것인가 그린다. (ii) dx를 쓸 것인가, dy를 쓸 것인가를 판단한다. dx를 쓸 때는 $\int_a^b |y|dx$, dy를 쓸 때는 $\int_\alpha^\beta |x|dy$를 이용한다.

모범답안

(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$. 증감표를 조사하면 $x = 1$에서 극솟값 $f(1) = a - 1$을 갖는다. 조건에서 $a - 1 = 0$이므로 $a = 1$이다.
(2) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$이므로 x축과의 교점은 $x = -1, 1$(중근)이다. 구간 $[-1, 1]$에서 $f(x) \geq 0$이므로 구하는 넓이 S는

$$S = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)dx = 2\int_0^1 (-x^2 + 1)dx = 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

필수 예제 12-2

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y = 3 - |x^2 - 1|$, $y = 0$

(2) $y = x|1 - x|$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

정석연구

절댓값 기호를 포함한 식은 기호 안의 식의 부호에 따라 구간을 나누어 그래프를 그린 후 넓이를 구한다.

모범답안

(1) $|x| < 1$이면 $y = x^2 + 2$, $|x| \geq 1$이면 $y = -x^2 + 4$이다. $y = 0$과의 교점은 $x = \pm 2$이다. 그래프의

대칭성을 이용하면

$$S = 2\left\{\int_0^1 (x^2+2)dx + \int_1^2 (-x^2+4)dx\right\} = 2\left(\left[\frac{1}{3}x^3+2x\right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_1^2\right) = 8$$

(2) $x \geq 1$이면 $y = x^2 - x$, $x < 1$이면 $y = -x^2 + x$이다.

$$S = \int_{-1}^0 (x^2-x)dx + \int_0^1 (-x^2+x)dx + \int_1^2 (x^2-x)dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

필수 예제 12-3

곡선 $y = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$ (단, $0 < a < 2$)가 있다.

(1) 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라.

(2) 이 곡선과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소일 때, 상수 a의 값을 구하여라.

정석연구

(1) 두 부분의 넓이가 같으면 전체 구간에 대한 정적분 값이 0임을 이용한다. $\int_\alpha^\gamma f(x)dx = 0$.

(2) 넓이를 a에 관한 함수 $S(a)$로 나타낸 후 미분을 통해 최솟값을 찾는다.

모범답안

교점은 $x = 0, a, 2$이다.

(1) $\int_0^2 \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\}dx = 0$ 이어야 하므로 $\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2\right]_0^2 = 0 \Rightarrow a = 1$.

(2) $S(a) = \int_0^a ydx - \int_a^2 ydx = -\frac{1}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}$이다. $S'(a) = -\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$. $0 < a < 2$에서 $a = 1$일 때 $S(a)$는 최소가 된다.

필수 예제 12-4

$x \geq 1$에서 정의된 연속함수 $y = f(x)$와 그 역함수 $y = g(x)$의 그래프에 대하여 정적분 $\int_1^5 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx$의 값을 구하여라. (단, $f(1) = 1, f(5) = 4$)

정석연구

역함수의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭임을 이용한다. 역함수의 정적분은 원래 함수의 그래프에서 y축 방향의 넓이로 해석할 수 있다.

모범답안

$\int_1^4 g(x)dx$는 $y = g(x)$와 x축 사이의 넓이이며, 이는 $y = f(x)$와 y축 사이의 넓이 $\int_1^4 g(y)dy$와 같다. 따라서 두 적분의 합은 직사각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있다.

$$\int_1^5 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx = (5 \times 4) - (1 \times 1) = 19$$

필수 예제 12-5

다음 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y = x + 1$, $y = x^2 - 1$

(2) $y = x(x-1)(x-2)$, $y = x(x-1)$

> **정석연구**
>
> 두 곡선의 교점을 구하여 적분 구간을 정하고, '위의 식 - 아래 식'을 적분한다.

모범답안

(1) 교점: $x + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x = -1, 2$. $[-1, 2]$에서 직선이 곡선보다 위에 있으므로

$$S = \int_{-1}^{2} \{(x+1) - (x^2 - 1)\}dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-1}^{2} = \frac{9}{2}$$

(2) 교점: $x(x-1)(x-2) = x(x-1) \Rightarrow x = 0, 1, 3$.

$$S = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x)dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x)dx = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

필수 예제 12-6

다음 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S를 구하여라.

(1) $y = x - 2$, $y^2 + 2y = x$

(2) $x = (y-2)^2 + 1$, $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ (단, $x \geq 1$)

> **정석연구**
>
> x에 관하여 적분하기 복잡할 때는 식을 $x = g(y)$ 꼴로 고쳐서 y에 관하여 적분한다.

모범답안

(1) 교점의 y좌표: $y^2+2y=y+2 \Rightarrow y=-2,1$. 구간 $[-2,1]$에서 직선 $x=y+2$가 포물선 $x=y^2+2y$보다 오른쪽에 있다.

$$S=\int_{-2}^{1}\{(y+2)-(y^2+2y)\}dy=\left[-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y\right]_{-2}^{1}=\frac{9}{2}$$

(2) 교점: $(y-2)^4+(y-1)^2=1 \Rightarrow y=1,2$. 평행이동을 이용하여 구하면

$$S=\frac{\pi}{4}-\int_{0}^{1}(y-1)^2dy=\frac{\pi}{4}-\left[\frac{1}{3}(y-1)^3\right]_{0}^{1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}$$

필수 예제 12-7

다음 두 곡선 $y=x(a-x)...(1)$, $y=x^2(a-x)...(2)$에 대하여 물음에 답하여라.

(1) 곡선 (1)과 x축으로 둘러싸인 넓이를 곡선 (2)가 이등분할 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $0<a\le 1$)

(2) 곡선 (1)과 (2)로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 a의 값을 구하여라. (단, $a>1$)

모범답안

교점은 $x=0,1,a$이다.

(1) $\int_0^a x(a-x)dx=2\int_0^a x^2(a-x)dx \Rightarrow \dfrac{a^3}{6}=2\dfrac{a^4}{12}=\dfrac{a^4}{6}$. $a\neq 0$이므로 $a=1$.

(2) $\int_0^a\{x(a-x)-x^2(a-x)\}dx=0$ 이어야 하므로 $\left[\dfrac{a}{2}x^2-\dfrac{1+a}{3}x^3+\dfrac{1}{4}x^4\right]_0^a=0 \Rightarrow a=2$.

필수 예제 12-8

함수 $f(x)=x^3+3x^2+4x+1$의 역함수를 g라고 할 때, 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$와 직선 $y=-x+1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

정석연구

$f(x)$가 증가함수임을 확인하고, 교점이 $y=x$ 위에 있음을 이용한다. 대칭성에 의해 한쪽 넓이를 구해 2배 한다.

모범답안

$f'(x)=3(x+1)^2+1>0$이므로 증가함수이다. $f(x)=x$의 교점은 $x=-1$이다. $y=-x+1$과

$y=x$의 교점은 $(1/2, 1/2)$이다.

$$S = 2\int_{-1}^{0}(f(x)-x)dx + 2\times(\triangle\text{넓이}) = 2\left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} = 1$$

필수 예제 12-9

점 $P(-3, 6)$을 지나고 곡선 $y = x^3 - 5x^2 + x + 9$에 접하는 직선의 접점 중 x좌표가 음수가 아닌 것을 각각 Q, R라고 하자. 이때, 곡선과 선분 PQ, PR로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

접점의 x좌표를 a라 하면 접선의 방정식은 $y - (a^3 - 5a^2 + a + 9) = (3a^2 - 10a + 1)(x - a)$이다. $P(-3, 6)$을 대입하면 $a(a-3)(a+5) = 0$. 음수가 아닌 $a = 0, 3$. 접선은 $y = x + 9, y = -2x$.

$$S = \triangle\text{넓이} + \int_{0}^{3}\{x^3 - 5x^2 + x + 9 - (-2x)\}dx = \frac{27}{2} + \frac{63}{4} = \frac{117}{4}$$

필수 예제 12-10

두 곡선 $y = ax^3$과 $y = bx^2 + c$가 점 $(2, 8)$에서 접할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a, b, c의 값을 구하여라.

(2) 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

(1) 공통 접점을 지나므로 $8a = 8 \Rightarrow a = 1$, $4b + c = 8$. 미분계수가 같으므로 $3a(2)^2 = 2b(2) \Rightarrow 12 = 4b \Rightarrow b = 3$. 따라서 $c = -4$.

(2) $x^3 = 3x^2 - 4$의 교점은 $x = -1, 2$(중근). $S = \int_{-1}^{2}\{x^3 - (3x^2 - 4)\}dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x\right]_{-1}^{2} = \frac{27}{4}$.

필수 예제 12-11

포물선 $y = -x^2 + 2x$ 위의 점 P에서 그은 접선과 포물선 $y = x^2$으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되는 점 P의 좌표를 구하여라.

정석연구

점 P의 좌표를 $(a, -a^2+2a)$로 놓고 접선을 구한 뒤, 교점 α, β와 넓이 공식 $S = \dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$을 이용한다.

모범답안

접선: $y = -2(a-1)x + a^2$. $x^2 = -2(a-1)x + a^2$의 두 근 α, β에 대하여 $\beta - \alpha = 2\sqrt{2a^2-2a+1}$이다. $S(a) = \dfrac{4}{3}(2a^2-2a+1)^{3/2}$이므로 $a = 1/2$일 때 최소가 된다. 점 $P(1/2, 3/4)$.