

수학 II - 제10장 정적분

현경서T

§1. 정적분의 정의

기본 정석

1. 정적분의 정의

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $f(x)$ 의 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

○ 때 a 를 아래끝, b 를 위끝이라 한다.

$$2. \int_a^a f(x)dx = 0$$

$$3. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx \quad (a > b)$$

4. 정적분과 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 일 때, $\int_a^b f(x)dx$ 는 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축, 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 와 같다.

Advice

1. 정적분의 값은 변수와 무관하다.

부정적분 $\int f(x)dx$ 는 x 의 함수이지만, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 상수이다. 따라서 적분변수를 x 대신 다른 문자 t, u 등을 사용하여도 그 값은 변하지 않는다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

2. 적분상수 C

정적분을 계산할 때 부정적분 $F(x) + C$ 를 사용하여도

$$[F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a)$$

○ 므로 적분상수 C 는 생략한다.

Advice

정적분과 넓이 사이의 관계

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라고 하면

$$(1) \text{ 구간 } [a, b] \text{에서 } f(x) \geq 0 \text{일 때, } S = \int_a^b f(x)dx$$

$$(2) \text{ 구간 } [a, b] \text{에서 } f(x) \leq 0 \text{일 때, } S = \int_a^b \{-f(x)\}dx = -\int_a^b f(x)dx$$

일반적으로 $S = \int_a^b |f(x)|dx$ 이다. 즉, 정적분의 값은 x 축 위쪽의 넓이에서 x 축 아래쪽의 넓이를 뺀 값과 같다.

Advice

구분구적법을 이용한 정적분의 정의

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 구간을 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를 차례로

$$a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$$

라 하고, 각 소구간의 길이를 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n}$$

가 성립한다. 이것은 정적분을 급수의 합의 극한으로 정의한 것으로, 현대 해석학의 기초가 된다.

§2. 정적분의 계산

기본 정석

1. $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ (단, k 는 상수)
2. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$ (복부호 동순)
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ (임의의 실수 a, b, c)

Advice

정적분의 기본 공식의 증명

정적분의 기본 공식은 부정적분의 성질로부터 유도된다. $f(x), g(x)$ 의 한 부정적분을 각각 $F(x), G(x)$ 라고 하면

$$(1) \int \{k f(x)\} dx = k F(x) + C \text{ } \circ\text{므로}$$

$$[k F(x)]_a^b = k F(b) - k F(a) = k \{F(b) - F(a)\} = k \int_a^b f(x) dx$$

$$(2) \int \{f(x) \pm g(x)\} dx = F(x) \pm G(x) + C \text{ } \circ\text{므로}$$

$$\begin{aligned} [F(x) \pm G(x)]_a^b &= \{F(b) \pm G(b)\} - \{F(a) \pm G(a)\} = \{F(b) - F(a)\} \pm \{G(b) - G(a)\} \\ &= \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

위와 같이 부정적분의 선형성을 이용하여 정적분의 공식이 성립함을 증명할 수 있다.

Advice

정적분의 성질 (3)에 대하여

위의 성질 3은 a, b, c 의 대소 관계에 상관없이 성립한다. 구간을 나누거나 합칠 때 유용하게 사용된다. 예를 들어 $\int_1^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx$ 와 같이 연결할 수 있다.

필수 예제

필수 예제 10-1

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$(1) \int_1^2 (x^2 - 3x + 2)dx$$

$$(2) \int_2^3 (t-2)(t^2+2t+4)dt$$

정석연구

(1)은 $\int(x^2 - 3x + 2)dx$, (2)는 $\int(t-2)(t^2+2t+4)dt$ 를 구하고 다음 정적분의 정의를 이용 한다.

정의: $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $\int f(x)dx = F(x) + C$ 면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

모범답안

$$(1) \int(x^2 - 3x + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x + C$$

$$\text{준식} = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x \right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$(2) \text{준식} = \int_2^3 (t^3 - 8)dt = \left[\frac{1}{4}t^4 - 8t \right]_2^3 = \left(\frac{81}{4} - 24 \right) - (4 - 16) = -\frac{15}{4} + 12 = \frac{33}{4}$$

필수 예제 10-2

다음 물음에 답하여라.

$$(1) \int_{\alpha}^{\beta} a(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$$
 (단, a 는 상수)임을 증명하여라.

$$(2) \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx - \int_1^0 \frac{1}{t+1} dt$$
의 값을 구하여라.

정석연구

(1) 피적분함수를 전개하여 적분한다.

(2) 정적분의 성질 $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx$, $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$ 와 $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx$ 를 이용한다.

모범답안

$$(1) \text{ 좌변} = a \int_{\alpha}^{\beta} \{x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta\} dx = a \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x^2 + \alpha\beta x \right]_{\alpha}^{\beta} = a \left\{ \frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)(\beta^2 - \alpha^2) + \alpha\beta(\beta - \alpha) \right\} = a(\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{3}(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - \frac{1}{2}(\beta + \alpha)^2 + \alpha\beta \right\} = \frac{a}{6}(\beta - \alpha) \{2(\beta^2 + \beta\alpha + \alpha^2) - 3(\beta^2 + 2\beta\alpha + \alpha^2) + 6\alpha\beta\} = \frac{a}{6}(\beta - \alpha)(-\beta^2 + 2\alpha\beta - \alpha^2) = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)(\beta - \alpha)^2 = -\frac{a}{6}(\beta - \alpha)^3$$

$$(2) \text{ 준식} = \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x+1} dx = \int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

필수 예제 10-3

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$(1) \int_{-2}^2 (6x^7 + 5x^5 - 4x^3 + 3x^2 - 7x + 2) dx$$

$$(2) \int_{-1}^0 (x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 1) dx - \int_1^0 (x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 1) dx$$

정석연구

적분 구간의 위끝과 아래끝의 절댓값이 같고 부호가 반대인 경우($[-a, a]$), 우함수와 기함수의 성질을 이용한다.

(1) $n \in \mathbb{N}$ 이면 $\int_{-a}^a x^n dx = 0$, $n \in \mathbb{Z}$ 짝수이면 $\int_{-a}^a x^n dx = 2 \int_0^a x^n dx$ 이다.

(2) 정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx - \int_c^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$ 을 이용한다.

모범답안

$$(1) \text{ 준식} = \int_{-2}^2 3x^2 dx + \int_{-2}^2 2 dx = 2 \int_0^2 (3x^2 + 2) dx = 2[x^3 + 2x]_0^2 = 2(8 + 4) = 24$$

$$(2) \text{ 준식} = \int_{-1}^0 (x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 1) dx + \int_0^1 (x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 1) dx = \int_{-1}^1 (x^5 + 4x^3 + 6x^2 - 1) dx = 2 \int_0^1 (6x^2 - 1) dx = 2[2x^3 - x]_0^1 = 2(2 - 1) = 2$$

필수 예제 10-4

함수 $f(x) = \begin{cases} x^2 & (x \leq 1) \\ 2x - x^2 & (x > 1) \end{cases}$ 에 대하여 다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_0^1 f(x)dx$

(2) $\int_0^3 f(x)dx$

(3) $\int_0^3 xf(x)dx$

정석연구

적분구간 안에서 함수가 다를 때에는 정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 를 이용하여 적분구간을 나누어 적분한다.

모범답안

(1) $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

(2) $\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^3 (2x - x^2)dx = \frac{1}{3} + \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^3 = \frac{1}{3} + \left\{ (9 - 9) - (1 - \frac{1}{3}) \right\} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$

(3) $\int_0^3 xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot x^2 dx + \int_1^3 x(2x - x^2)dx = \int_0^1 x^3 dx + \int_1^3 (2x^2 - x^3)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_1^3 = \frac{1}{4} + \left\{ (18 - \frac{81}{4}) - (\frac{2}{3} - \frac{1}{4}) \right\} = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} - \frac{5}{12} = -\frac{29}{12}$

필수 예제 10-5

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\int_0^2 (|x - 1| + 3x)dx$

(2) $\int_{-1}^1 |x(x - 2)|dx$

정석연구

절댓값 기호를 포함한 함수의 정적분은 절댓값 기호 안의 식의 값이 0이 되는 x 의 값을 경계로 구간을 나누어 절댓값 기호를 없앤 다음 적분한다.

모범답안

$$(1) |x-1| = \begin{cases} -(x-1) & (0 \leq x \leq 1) \\ x-1 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases} \text{ 이므로}$$

$$\text{준식} = \int_0^1 (-x+1+3x)dx + \int_1^2 (x-1+3x)dx = \int_0^1 (2x+1)dx + \int_1^2 (4x-1)dx = [x^2+x]_0^1 + [2x^2-x]_1^2 = 2 + (6-1) = 7$$

- (2) 구간 $[-1, 1]$ 에서 $x(x-2)$ 의 부호를 조사하면 $x \leq 0$ 일 때 $x(x-2) \geq 0$, $x \geq 0$ 일 때 $x(x-2) \leq 0$ 이다.

$$\text{준식} = \int_{-1}^0 x(x-2)dx + \int_0^1 \{-x(x-2)\}dx = \int_{-1}^0 (x^2 - 2x)dx + \int_0^1 (-x^2 + 2x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_{-1}^0 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \{0 - (-\frac{1}{3} - 1)\} + (-\frac{1}{3} + 1 - 0) = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$$

필수 예제 10-6

$a \geq 0$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 정적분 $I = \int_{-1}^1 |x^2 - a^2| dx$ 의 값을 a 에 관한 식으로 나타내어라.

- (2) I 의 값이 최소가 되는 실수 a 의 값을 구하여라.

정석연구

$|x^2 - a^2|$ 의 정적분에서 적분구간이 $[-1, 1]$ 이므로 a 의 값의 범위에 따라 구간을 나누어야 한다. 즉, a 가 적분구간 안에 있을 때($0 \leq a < 1$)와 밖에 있을 때($a \geq 1$)로 나눈다.

모범답안

- (1) (i) $0 \leq a < 1$ 일 때, $x^2 - a^2$ 은 구간 $[0, a]$ 에서 0 이하, $[a, 1]$ 에서 0 이상이다.

$$I = 2 \int_0^1 |x^2 - a^2| dx = 2 \int_0^a (a^2 - x^2) dx + 2 \int_a^1 (x^2 - a^2) dx = 2[a^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^a + 2[\frac{1}{3}x^3 - a^2x]_a^1 = 2(a^3 - \frac{1}{3}a^3) + 2\{(\frac{1}{3} - a^2) - (\frac{1}{3}a^3 - a^3)\} = \frac{4}{3}a^3 + \frac{2}{3} - 2a^2 + \frac{4}{3}a^3 = \frac{8}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3}$$

- (ii) $a \geq 1$ 일 때, 구간 $[0, 1]$ 에서 $x^2 - a^2 \leq 0$ 이다.

$$I = 2 \int_0^1 (a^2 - x^2) dx = 2[a^2x - \frac{1}{3}x^3]_0^1 = 2a^2 - \frac{2}{3}$$

- (2) (i) $0 \leq a < 1$ 에서 $f(a) = \frac{8}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{2}{3}$ 라 하면 $f'(a) = 8a^2 - 4a = 4a(2a - 1)$.
 $a = \frac{1}{2}$ 에서 극소이자 최소이다. $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{8} - 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$.
(ii) $a \geq 1$ 에서 $I = 2a^2 - \frac{2}{3}$ 는 $a = 1$ 일 때 최소값 $\frac{4}{3}$ 을 가진다.
따라서 I 가 최소가 되는 a 의 값은 $\frac{1}{2}$ 이다.
-

필수 예제 10-7

다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x \int_0^1 f(t)dt + \int_0^2 f(t)dt$$

정석연구

정적분 $\int_a^b f(t)dt$ 에서 위끝과 아래끝이 모두 상수이면 이 정적분의 값은 상수이다. 따라서 정적분 부분을 상수로 치환하여 문제를 해결한다.

모범답안

$\int_0^1 f(t)dt = p, \int_0^2 f(t)dt = q$ (p, q 는 상수)라고 놓으면

$f(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2px + q$ 이다. 이를 치환한 식에 대입하면

$$p = \int_0^1 (4t^3 + 3t^2 + 2pt + q)dt = [t^4 + t^3 + pt^2 + qt]_0^1 = 1 + 1 + p + q = p + q + 2 \quad \therefore q = -2$$

$$q = \int_0^2 (4t^3 + 3t^2 + 2pt + q)dt = [t^4 + t^3 + pt^2 + qt]_0^2 = 16 + 8 + 4p + 2q = 4p + 2q + 24$$

$$q = -2 \text{를 대입하면 } -2 = 4p - 4 + 24 \Rightarrow 4p = -22 \Rightarrow p = -\frac{11}{2}$$

따라서 $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 11x - 2$

필수 예제 10-8

다음 등식을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

$$f(x) = x^2 + \int_{-1}^1 (x^2 - t)f(t)dt$$

정석연구

적분 기호 안의 변수가 무엇인지 확인한다. 여기서는 t 에 관해 적분하므로 x 는 상수 취급한다.

따라서 x^2 을 적분 기호 밖으로 꺼내어 상수로 치환할 수 있는 형태로 변형한다.

모범답안

준식의 우변을 전개하면 $f(x) = x^2 + x^2 \int_{-1}^1 f(t)dt - \int_{-1}^1 t f(t)dt = (1 + \int_{-1}^1 f(t)dt)x^2 - \int_{-1}^1 t f(t)dt$ 이다.

$\int_{-1}^1 f(t)dt = p, \int_{-1}^1 t f(t)dt = q$ (p, q 는 상수)라고 놓으면 $f(x) = (1 + p)x^2 - q$ 이다.

$$p = \int_{-1}^1 \{(1+p)t^2 - q\}dt = 2 \int_0^1 \{(1+p)t^2 - q\}dt = 2\left[\frac{1+p}{3}t^3 - qt\right]_0^1 = \frac{2(1+p)}{3} - 2q \quad \dots \textcircled{1}$$

$$q = \int_{-1}^1 t\{(1+p)t^2 - q\}dt = \int_{-1}^1 \{(1+p)t^3 - qt\}dt = 0 \text{ (기함수의 적분)} \quad \therefore q = 0$$

$$q = 0 \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } p = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}p \Rightarrow \frac{1}{3}p = \frac{2}{3} \Rightarrow p = 2$$

$$\text{따라서 } f(x) = (1+2)x^2 - 0 = 3x^2$$

필수 예제 10-9

다항함수 $f(x)$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, $f(x)$ 를 구하여라.

(i) $f(x) = -f(-x)$

(ii) $\{f'(x)\}^2 = \int_0^x f(t)dt$

정석연구

다항함수를 구하는 문제에서는 먼저 차수를 결정하는 것이 일반적이다. $f(x)$ 의 최고차항을 ax^n ($a \neq 0, n \geq 1$)이라 하고 양변의 최고차항의 차수와 계수를 비교한다. 또한 조건 (i)을 통해 $f(x)$ 가 기함수임을 알 수 있으므로 홀수 차수항만 존재함을 이용한다.

모범답안

$f(x)$ 가 n 차 다항함수이면 $f'(x)$ 는 $n-1$ 차이고, $\{f'(x)\}^2$ 은 $2(n-1)$ 차이다.

우변 $\int_0^x f(t)dt$ 는 $n+1$ 차이므로 $2(n-1) = n+1$ 에서 $n=3$ 이다.

조건 (i)에서 $f(x)$ 는 기함수이므로 $f(x) = ax^3 + bx$ ($a \neq 0$)로 놓을 수 있다.

$$\text{이를 (ii)에 대입하면 } (3ax^2 + b)^2 = \int_0^x (at^3 + bt)dt = \left[\frac{1}{4}at^4 + \frac{1}{2}bt^2\right]_0^x$$

$$9a^2x^4 + 6abx^2 + b^2 = \frac{1}{4}ax^4 + \frac{1}{2}bx^2$$

$$\text{계수를 비교하면 } 9a^2 = \frac{1}{4}a, 6ab = \frac{1}{2}b, b^2 = 0 \text{이다.}$$

$$b^2 = 0 \text{에서 } b = 0 \text{이고, 이를 } 6ab = \frac{1}{2}b \text{에 대입하면 성립한다.}$$

$$9a^2 = \frac{1}{4}a \text{에서 } a \neq 0 \text{이므로 } 9a = \frac{1}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{36}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{36}x^3$$