미적분 - 제13장 부정적분

현경서T

§1. 부정적분의 정의와 계산

기본 정석

1. **부정적분(원시함수)의 정의**

   함수 $f(x)$ 가 주어져 있을 때, $F'(x) = f(x)$ 인 함수 $F(x)$ 를 $f(x)$ 의 **부정적분** 또는 **원시함수**라고 한다. $F(x)$ 가 함수 $f(x)$ 의 부정적분의 하나일 때, $f(x)$ 의 모든 부정적분은 $F(x) + C$ 의 꼴로 나타내어지며, 이것을

   $$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

   로 나타낸다. 여기에서 C를 적분상수, 함수 $f(x)$ 를 피적분함수, x를 적분변수라 하고, $f(x)$ 의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$ 를 적분한다라고 한다.

2. **부정적분과 도함수**

   $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x), \quad \int\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)dx = f(x) + C$

3. **부정적분의 기본 공식**

   (1) $\int k\ dx = kx + C$ (단, k는 상수, C는 적분상수)

   (2) $\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$ (단, $r \neq -1$, C는 적분상수)

   $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ (단, C는 적분상수)

   (3) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (단, k는 0이 아닌 상수)

   (4) $\int\{f(x) \pm g(x)\}dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ (복부호동순)

Advice

1° 부정적분의 정의

이를테면 x^2 의 도함수를 구하면 $2x$이다. 역으로 x^2 은 도함수가 $2x$인 함수라는 것을 x^2은 $2x$의 부정적분(원시함수)이라고 한다. 그런데 $2x$의 부정적분은 x^2 하나만 있는 것이 아니다. $x^2 - 1, x^2 + 1, x^2 + 2$ 등의 도함수도 모두 $2x$이므로, C가 상수일 때 $(x^2 + C)' = 2x$ 이므로

$2x$의 부정적분은 x^2+C이다.

Advice

2° 부정적분과 도함수

(i) $f(x)$ 의 부정적분의 하나를 $F(x)$ 라고 하면 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 이고, $F'(x)=f(x)$ 이므로 양변을 x에 관하여 미분하면 $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$ 가 되어 적분상수 C가 없다.

(ii) $\int(\frac{d}{dx}f(x))dx = f(x)+C$ 로 적분상수 C가 붙는다.

Advice

3° 부정적분의 기본 공식

적분은 미분의 역연산이므로 미분법의 역을 생각하면 기본정석의 공식을 얻을 수 있다. 특히 x^r의 적분에서 $r=-1$ 인 경우는 분모가 0 이 되므로 공식을 쓸 수 없고, 대신 $\ln|x|+C$ 를 이용한다.

§2. 여러 가지 함수의 부정적분

기본 정석

1. **삼각함수의 부정적분**

(1) $\displaystyle\int \sin x\ dx = -\cos x + C$ (2) $\displaystyle\int \cos x\ dx = \sin x + C$

(3) $\displaystyle\int \sec^2 x\ dx = \tan x + C$ (4) $\displaystyle\int \csc^2 x\ dx = -\cot x + C$

(5) $\displaystyle\int \sec x \tan x\ dx = \sec x + C$ (6) $\displaystyle\int \csc x \cot x\ dx = -\csc x + C$

2. **지수함수의 부정적분**

(1) $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$ (2) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Advice

이 공식들은 모두 우변을 미분하면 좌변의 피적분함수가 된다는 것을 보임으로써 증명할 수 있다. 삼각함수와 지수함수의 미분법과 연관지어 기억해 두는 것이 좋다.

필수 예제

필수 예제 13-1

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)dx$

(2) $\displaystyle\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx$

(3) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+\tan^2\theta}+\frac{1}{1+\cot^2\theta}\right)d\theta$

(4) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x+1}dx+\int \frac{1}{x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int (\sin\theta+\cos\theta)^2 d\theta+\int (\sin\theta-\cos\theta)^2 d\theta$

정석연구

(1), (2), (3) 피적분함수를 간단히 한 다음 구한다.

(4), (5) 아래 정석을 이용하여 피적분함수를 하나로 묶어 간단히 한 다음 구한다.

정석: $\displaystyle\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int \{f(x)\pm g(x)\}dx$ (복부호동순)

모범답안

(1) (준식) $\displaystyle= \int (x^4+1)dx = \mathbf{\frac{1}{5}x^5+x+C}$

(2) (준식) $\displaystyle= \int \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx = \int (x^2+x+1)dx = \mathbf{\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C}$

(3) (준식) $\displaystyle= \int (\frac{1}{\sec^2\theta}+\frac{1}{\csc^2\theta})d\theta = \int (\cos^2\theta+\sin^2\theta)d\theta = \int 1d\theta = \theta+\mathbf{C}$

(4) (준식) $\displaystyle= \int \frac{x^3+1}{x+1}dx = \int \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x+1}dx = \int (x^2-x+1)dx = \mathbf{\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+x+C}$

(5) (준식) $\displaystyle= \int \{(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta-\cos\theta)^2\}d\theta = \int 2d\theta = \mathbf{2}\theta+\mathbf{C}$

필수 예제 13-2

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}-1}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx$

정석연구

x^r 의 꼴로 변형한 다음 $\displaystyle\int x^r dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1}+C(r\neq -1)$, $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$ 를 이용한다.

모범답안

(1) (준식) $\displaystyle = \int (x^{-1/2}+x^{-2/3}-\frac{1}{x})dx = 2x^{1/2}+3x^{1/3}-\ln|x|+C = \mathbf{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-\ln|x|+C}$

(2) (준식) $\displaystyle = \int (x^2+\frac{2}{x}+x^{-4})dx = \mathbf{\frac{1}{3}x^3+2\ln|x|-\frac{1}{3x^3}+C}$

(3) (준식) $\displaystyle = \int \frac{x\sqrt{x}+3x+3\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx = \int (x+3x^{1/2}+3+x^{-1/2})dx = \mathbf{\frac{1}{2}x^2+2x\sqrt{x}+3x+2\sqrt{x}+C}$

필수 예제 13-3

두 다항함수 $f(x), g(x)$ 가

$$f'(x)+g'(x) = 2x+1, \quad f'(x)g(x)+f(x)g'(x) = 3x^2-2x+2$$

를 만족시킨다. $f(0)=2, g(0)=-1$ 일 때, $f(x), g(x)$ 를 구하여라.

정석연구

두 조건식의 좌변은 각각 $\{f(x)+g(x)\}'$ 과 $\{f(x)g(x)\}'$ 이다. 따라서 부정적분을 통해 $f(x)+g(x)$ 와 $f(x)g(x)$ 를 구할 수 있다.
정석: $\displaystyle\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \iff F(x)=\int f(x)dx$

모범답안

첫 번째 조건에서 $f(x)+g(x) = \int(2x+1)dx = x^2+x+C_1$
$x=0$ 대입 시 $f(0)+g(0)=2-1=1$ 이므로 $C_1=1$. 즉, $f(x)+g(x)=x^2+x+1\cdots$ ①
두 번째 조건에서 $f(x)g(x) = \int(3x^2-2x+2)dx = x^3-x^2+2x+C_2$
$x=0$ 대입 시 $f(0)g(0)=2\times(-1)=-2$ 이므로 $C_2=-2$. 즉, $f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)\cdots$ ②

①, ②를 만족시키고 $f(0)=2, g(0)=-1$ 인 다항함수는
$\mathbf{f(x)=x^2+2}, \quad \mathbf{g(x)=x-1}$

필수 예제 13-4

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

(2) $\int \frac{x-\cos^2 x}{x \cos^2 x} dx$

(3) $\int \frac{8^x - 2^x}{2^x + 1} dx$

정석연구

피적분함수를 공식을 적용할 수 있는 꼴로 변형한다. 삼각함수의 경우 $\sin x, \cos x, \sec^2 x, \csc^2 x$ 등을 포함한 식으로, 지수함수의 경우 e^x, a^x 꼴로 변형한다.

모범답안

(1) $\sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$ 이므로 (준식) $= \int \frac{1}{2}(1-\cos x)dx = \mathbf{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C}$

(2) (준식) $= \int (\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{x})dx = \int (\sec^2 x - \frac{1}{x})dx = \tan \mathbf{x} - \ln |\mathbf{x}| + \mathbf{C}$

(3) $\frac{8^x - 2^x}{2^x+1} = \frac{2^x(2^{2x}-1)}{2^x+1} = \frac{2^x(2^x+1)(2^x-1)}{2^x+1} = 2^x(2^x-1) = 4^x - 2^x$ 이므로
(준식) $= \int (4^x - 2^x)dx = \frac{4^x}{\ln 4} - \frac{2^x}{\ln 2} + C = \mathbf{\frac{2^{2x-1}}{\ln 2} - \frac{2^x}{\ln 2} + C}$

필수 예제 13-5

다음 물음에 답하여라.

(1) 함수 $y = (\tan x + \cot x)^2$ 의 부정적분 중에서 $x = \frac{\pi}{4}$ 일 때 함숫값이 2인 것을 구하여라.

(2) 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기는 $e^x + 6x + 2$ 에 정비례하고, 이 곡선 위의 x좌표가 0인 점에서의 접선의 방정식은 $y = 3x + 4$ 이다. 이때, $f(x)$ 를 구하여라.

정석연구

$f'(x)$ 를 알고 $f(x)$ 를 구하는 문제이다. $\mathbf{f(x)} = \int \mathbf{f'(x)dx}$ 를 이용한다.

모범답안

(1) $(\tan x + \cot x)^2 = \tan^2 x + 2 + \cot^2 x = (\sec^2 x - 1) + 2 + (\csc^2 x - 1) = \sec^2 x + \csc^2 x$

$f(x) = \int (\sec^2 x + \csc^2 x) dx = \tan x - \cot x + C$.

$f(\frac{\pi}{4}) = 1 - 1 + C = 2$ 이므로 $C = 2$. $\therefore \mathbf{f(x)} = \tan \mathbf{x} - \cot \mathbf{x} + \mathbf{2}$

(2) $f'(x) = k(e^x + 6x + 2)$ 라 놓자. $x = 0$ 에서 접선의 기울기가 3이므로 $f'(0) = k(1+2) = 3k = 3 \therefore k = 1$

$f(x) = \int (e^x + 6x + 2) dx = e^x + 3x^2 + 2x + C$.

점 $(0, 4)$ 를 지나므로 $f(0) = 1 + C = 4 \therefore C = 3$. $\therefore \mathbf{f(x)} = \mathbf{e^x} + \mathbf{3x^2} + \mathbf{2x} + \mathbf{3}$