미적분 - 제17장 넓이와 적분

수학의 정석

§1. 곡선과 좌표축 사이의 넓이

기본 정석

① **곡선과 x 축 사이의 넓이**

(i) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 경우 $S = \int_a^b f(x)dx$

(ii) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 인 경우 $S = -\int_a^b f(x)dx$

(iii) 일반적인 경우 $S = \int_a^b |f(x)|dx$

② **곡선과 y 축 사이의 넓이**

(i) 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $g(y) \geq 0$ 인 경우 $S = \int_\alpha^\beta g(y)dy$

(ii) 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $g(y) \leq 0$ 인 경우 $S = -\int_\alpha^\beta g(y)dy$

(iii) 일반적인 경우 $S = \int_\alpha^\beta |g(y)|dy$

Advice

1° 곡선과 x 축 사이의 넓이

이미 수학 II에서 정적분과 넓이 사이의 관계를 공부했지만 이에 대하여 다시 정리해 보자. 함수 $f(t)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(t) \geq 0$ 일 때, $a \leq x \leq b$ 인 x 에 대하여 곡선 $y = f(t)$ 와 t 축 및 두 직선 $t = a, t = x$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면 $S'(x) = f(x)$ 이므로 $S(x)$ 는 $f(x)$ 의 부정적분 중 하나이다. 이때 $f(x)$ 의 다른 한 부정적분을 $F(x)$ 라고 하면 $S(x) = F(x)+C$ (단, C 는 상수) 이고, $S(a) = 0$ 에서 $C = -F(a)$ 이므로 $S(b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$ 이다. 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 일 때에는 곡선 $y = f(x)$ 가 곡선 $y = -f(x)$ 와 x 축에 대하여 대칭이고 $-f(x) \geq 0$ 이므로 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축 및 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S 라고 하면 $S = \int_a^b \{-f(x)\}dx = -\int_a^b f(x)dx$ 이다.

2° 곡선과 y 축 사이의 넓이

곡선과 x 축 사이의 넓이를 구할 때와 같은 방법으로 생각하면 된다. 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $g(y) \geq 0$ 일 때, 곧 곡선 $x = g(y)$ 가 y 축의 오른쪽에 있을 때 넓이는 $S = \int_\alpha^\beta g(y)dy$ 이다. 한편 구간

$[\alpha, \beta]$ 에서 $g(y) \le 0$ 일 때, 곧 곡선 $x = g(y)$ 가 y 축의 왼쪽에 있을 때에는 $S = -\int_\alpha^\beta g(y)dy$ 라고 해야 한다.

§2. 두 곡선 사이의 넓이

기본 정석

두 곡선 사이의 넓이

(1) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \ge g(x)$ 일 때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx$

(2) 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $f(y) \ge g(y)$ 일 때, $x = f(y)$ 와 $x = g(y)$ 의 그래프로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 $S = \int_\alpha^\beta \{f(y) - g(y)\}dy$

Advice

두 곡선 사이의 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \ge g(x)$ 일 때, 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 와 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 위에 있는 그래프의 식 $f(x)$ 에서 아래에 있는 그래프의 식 $g(x)$ 를 뺀 $f(x) - g(x)$ 를 $x = a$ 에서 $x = b$ 까지 적분한 값이 된다. 이것은 두 곡선이 모두 x 축 아래에 있거나 x 축을 사이에 두고 있는 경우에도 성립하며, 일반적인 경우 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$ 로 나타낼 수 있다.

§3. 매개변수로 나타낸 곡선과 넓이

기본 정석

매개변수로 나타낸 함수 $x = f(\theta), y = g(\theta)$ 에서 $f(\theta)$ 가 미분가능하면 치환적분법을 이용하여 정적분 $\int_a^b ydx$ 를 계산할 수 있다. 곧, $f(\alpha) = a, f(\beta) = b$ 라고 하면 $dx = f'(\theta)d\theta$ 이므로 $\int_a^b ydx = \int_\alpha^\beta g(\theta)f'(\theta)d\theta$ 이다.

Advice

매개변수로 나타낸 함수의 정적분은 치환적분을 생각한다. 그리고 y 의 부호와 적분구간은 함수의 그래프를 그려 확인하면 된다.

필수 예제

필수 예제 17-1

함수 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ 가 극솟값 0을 가질 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 상수 a 의 값을 구하여라.

(2) 곡선 $y = f(x)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

> **정석연구**
>
> 넓이를 구하는 기본 방법은 (i) 넓이를 구하는 도형을 그린다. (ii) dx 를 쓸 것인가, dy 를 쓸 것인가를 판단한다.

모범답안

(1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x+1)(x-1)$. $x = 1$ 에서 극소이므로 $f(1) = 1-1-1+a = 0$ $\therefore a = 1$.
(2) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x-1)^2(x+1)$. 곡선과 x 축의 교점은 $x = 1, -1$. 구간 $[-1, 1]$에서 $f(x) \geq 0$ 이므로
$S = \int_{-1}^{1}(x^3 - x^2 - x + 1)dx = 2\int_0^1(-x^2+1)dx = 2[-\frac{1}{3}x^3 + x]_0^1 = \mathbf{\frac{4}{3}}$

필수 예제 17-2

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구하여라.

(1) $y = x\sin x$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$, $y = 0$

(2) $y^2 = \dfrac{1-x}{x}$, $y = 1, y = -1, x = 0$

> **정석연구**
>
> 넓이를 구할 때에는 극값보다는 곡선의 교점, x절편, y절편에 주의하여 곡선의 개형을 그린다.

모범답안

(1) $y = x\sin x = 0$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$에서 $x = 0, \pi, 2\pi$. $0 \leq x \leq \pi$ 에서 $y \geq 0$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ 에서 $y \leq 0$ 이므로
$S = \int_0^{\pi} x\sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} x\sin x dx = \pi + 1 - (-3\pi - 1) = \mathbf{4}\pi$
(2) $y^2 = \dfrac{1-x}{x}$ 에서 $x = \dfrac{1}{1+y^2}$. $S = 2\int_0^1 x dy = 2\int_0^1 \dfrac{1}{1+y^2}dy$. $y = \tan\theta$ 로 치환하면
$S = 2\int_0^{\pi/4} 1 d\theta = 2[\theta]_0^{\pi/4} = \dfrac{\pi}{\mathbf{2}}$

필수 예제 17-3

함수 $f(x) = e^x + 1$ 의 역함수를 $g(x)$ 라고 하자. a 가 양의 상수일 때, 다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_0^a f(x)dx + \int_2^{f(a)} g(x)dx$$

모범답안

역함수의 정적분 성질 $\int_0^a f(x)dx + \int_{f(0)}^{f(a)} g(y)dy = af(a) - 0 \cdot f(0)$ 을 이용한다.
$f(0) = 2$ 이므로 $\int_0^a f(x)dx + \int_2^{f(a)} g(x)dx = af(a) = \mathbf{a(e^a + 1)}$

필수 예제 17-4

다음 곡선과 직선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구하여라.

(1) $y = xe^{1-x}$, $y = x$

(2) $y = \sin x, y = \cos 2x$ $(0 < x < 2\pi)$

정석연구

정석: 넓이 문제 그래프의 절편, 교점을 정확히 나타낸다.

모범답안

(1) 교점 $xe^{1-x} = x$ 에서 $x = 0, 1$. 구간 $[0, 1]$ 에서 $xe^{1-x} \geq x$ 이므로
$S = \int_0^1 (xe^{1-x} - x)dx = [-xe^{1-x} - e^{1-x} - \frac{1}{2}x^2]_0^1 = (-1 - 1 - \frac{1}{2}) - (0 - e - 0) = \mathbf{e - \frac{5}{2}}$
(2) $\sin x = \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ 에서 $\sin x = 1/2, -1$. 교점 $x = \pi/6, 5\pi/6, 3\pi/2$.
$S = \int_{\pi/6}^{5\pi/6} (\sin x - \cos 2x)dx + \int_{5\pi/6}^{3\pi/2} (\cos 2x - \sin x)dx = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2} + 1}$

필수 예제 17-5

다음 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구하여라.

(1) $y = x - 2, y^2 + 2y = x$

(2) $x = (y - 2)^2 + 1$, $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ $(x \geq 1)$

정석연구

x 에 관하여 적분하기 복잡하거나 어려울 때는 x 를 y 의 식으로 나타낸 다음 y 에 관하여 적분한다.

모범답안

(1) 교점 $y^2+2y=y+2$ 에서 $y=-2,1$. 구간 $[-2,1]$ 에서 $y+2\geq y^2+2y$ 이므로
$S=\int_{-2}^{1}\{(y+2)-(y^2+2y)\}dy=\int_{-2}^{1}(-y^2-y+2)dy=[-\frac{1}{3}y^3-\frac{1}{2}y^2+2y]_{-2}^{1}=\mathbf{\frac{9}{2}}$
(2) 교점 $y=1,2$. 포물선 $x=(y-2)^2+1$ 과 반원 $x=1+\sqrt{1-(y-1)^2}$ 이므로
$S=\int_1^2\{1+\sqrt{1-(y-1)^2}-((y-2)^2+1)\}dy=\int_1^2\sqrt{1-(y-1)^2}dy-\int_1^2(y-2)^2dy=\mathbf{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{3}}$

필수 예제 17-6

다음 물음에 답하여라.

(1) 곡선 $y=\ln x$ 위의 점 $(e,1)$ 에서의 접선의 방정식을 구하여라.

(2) 곡선 $y=(\ln x)^2$ 의 변곡점을 구하고 개형을 그려라.

(3) 곡선 $y=(\ln x)^2$ 과 y 축 및 두 직선 $y=0, y=4$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

(1) $y'=1/x$, $x=e$ 에서 $y'=1/e$. 접선은 $y-1=\frac{1}{e}(x-e)$ $\therefore y=\frac{1}{e}x$.
(2) $y'=\frac{2\ln x}{x}, y''=\frac{2(1-\ln x)}{x^2}$. 변곡점 $(e,1)$. 개형은 $x=1$ 에서 극소(0)를 갖는다.
(3) $y=(\ln x)^2 \implies x=e^{\sqrt{y}}, x=e^{-\sqrt{y}}$. $S=\int_0^4(e^{\sqrt{y}}-e^{-\sqrt{y}})dy$. $\sqrt{y}=t$ 치환 시
$S=\int_0^2(e^t-e^{-t})2tdt=2[t(e^t+e^{-t})-(e^t-e^{-t})]_0^2=\mathbf{2(e^2+3e^{-2})}$ (오류 수정: 원문 계산 참조 요망) → 원문 결과: **2**.

필수 예제 17-7

곡선 $y=\sin 2x$ $(0\leq x\leq \pi/2)$와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 곡선 $y=k\cos x$ 가 이등분하도록 실수 k 의 값을 정하여라.

모범답안

교점 $\sin 2x=k\cos x \implies 2\sin x\cos x=k\cos x \implies \sin\alpha=k/2$.
$\int_\alpha^{\pi/2}(\sin 2x-k\cos x)dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\sin 2xdx=1/2$.
$[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x]_\alpha^{\pi/2}=1/2$. 정리하면 $k^2-4k+2=0$. $0<k<2$ 이므로 $\mathbf{k=2-\sqrt{2}}$.

필수 예제 17-8

방정식 $2x^2+2xy+y^2=1$ 이 나타내는 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

정석연구

정석연구: 준 방정식에서 $y = -x \pm \sqrt{1-x^2}$ $(-1 \le x \le 1)$. 직선 $y = -x$ 와 반원 $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ 을 합친 것으로 생각한다.

모범답안

$S = \int_{-1}^{1}\{(-x+\sqrt{1-x^2}) - (-x-\sqrt{1-x^2})\}dx = \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-x^2}dx.$
이는 반지름 1인 원의 넓이와 같으므로 $S = \pi$.

필수 예제 17-9

매개변수로 나타낸 곡선 $x = 2t, y = t^2 - 1$ 과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

$y = 0 \implies t = \pm 1$. $t = 1$ 일 때 $x = 2, t = -1$ 일 때 $x = -2$.
$S = -\int_{-2}^{2} y dx = -\int_{-1}^{1}(t^2-1)\cdot 2dt = -4[\frac{1}{3}t^3 - t]_0^1 = \mathbf{\frac{8}{3}}$

필수 예제 17-10

매개변수로 나타낸 함수 $x = a(\theta - \sin\theta), y = a(1-\cos\theta)$ $(a > 0, 0 \le \theta \le 2\pi)$의 그래프와 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

$dx = a(1-\cos\theta)d\theta$. $\theta : 0 \to 2\pi \implies x : 0 \to 2\pi a$.
$S = \int_0^{2\pi a} y dx = \int_0^{2\pi} a(1-\cos\theta)\cdot a(1-\cos\theta)d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta)d\theta$
$= a^2[\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta]_0^{2\pi} = \mathbf{3\pi a^2}$