

수학 II - 제12장 넓이와 적분

현경서T

§1. 곡선과 좌표축 사이의 넓이

기본 정석

1. 곡선과 x 축 사이의 넓이

- (i) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 인 경우: $S = \int_a^b f(x)dx$
- (ii) 구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \leq 0$ 인 경우: $S = -\int_a^b f(x)dx$
- (iii) 구간 $[a, b]$ 에서 일반적인 경우: $S = \int_a^b |f(x)|dx$

2. 곡선과 y 축 사이의 넓이

함수 $g(y)$ 가 구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속일 때

- (i) $g(y) \geq 0$ 인 경우: $S = \int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy$
- (ii) $g(y) \leq 0$ 인 경우: $S = -\int_{\alpha}^{\beta} g(y)dy$
- (iii) 일반적인 경우: $S = \int_{\alpha}^{\beta} |g(y)|dy$

Advice

곡선과 x 축 사이의 넓이

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 부호가 일정하지 않을 때의 넓이는 $f(x)$ 의 값이 양수인 구간과 음수인 구간으로 나누어서 구해야 한다. 절댓값 기호를 써서 하나의 식으로 나타내면 $S = \int_a^b |f(x)|dx$ 와 같다.

Advice

곡선과 y 축 사이의 넓이

곡선과 x 축 사이의 넓이를 구할 때와 같은 방법으로 생각하면 된다. 곡선 $x = g(y)$ 가 y 축의 오른쪽에 있을 때($g(y) \geq 0$)는 정적분 값이 곧 넓이이고, 왼쪽에 있을 때($g(y) \leq 0$)는 정적분 값에 '-'(마이너스)를 붙여야 넓이가 된다.

Advice

$x = ay^2 (a \neq 0)$ 꼴의 곡선

곡선 $x = y^2$ 은 곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭인 포물선이다. $x = ay^2$ 꼴은 꼭짓점이 원점이고 축이 x 축인 포물선이 된다. 이를 평행이동한 $x = a(y - n)^2 + m$ 꼴도 같은 방법으로 이해할 수 있다.

§2. 두 곡선 사이의 넓이

기본 정석

1. 두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 사이의 넓이

구간 $[a, b]$ 에서 $f(x) \geq g(x)$ 일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_a^b \{f(x) - g(x)\} dx$$

2. 두 곡선 $x = f(y), x = g(y)$ 사이의 넓이

구간 $[\alpha, \beta]$ 에서 $f(y) \geq g(y)$ 일 때, 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \{f(y) - g(y)\} dy$$

Advice

두 곡선 $y = f(x), y = g(x)$ 과 두 직선 $x = a, x = b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S 는 위에 있는 그 그래프의 식에서 아래에 있는 그래프의 식을 뺀 것을 적분하면 된다. 이는 두 곡선이 모두 x 축 아래에 있거나 x 축을 사이에 두고 있는 경우에도 성립한다. 일반적으로 $S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ 이다.

필수 예제

필수 예제 12-1

함수 $f(x) = x^3 - x^2 - x + a$ 가 극솟값 0을 가질 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 상수 a 의 값을 구하여라.
- (2) 곡선 $y = f(x)$ 와 x -축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

정석연구

넓이를 구하는 기본 방법은 (i) 넓이를 구하는 도형이 어떤 것인가 그린다. (ii) dx 를 쓸 것인가, dy 를 쓸 것인가를 판단한다. dx 를 쓸 때는 $\int_a^b |y| dx$, dy 를 쓸 때는 $\int_{\alpha}^{\beta} |x| dy$ 를 이용한다.

모범답안

- (1) $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = (3x + 1)(x - 1)$. 증감표를 조사하면 $x = 1$ 에서 극솟값 $f(1) = a - 1$ 을 갖는다. 조건에서 $a - 1 = 0$ 으로 $a = 1$ 이다.
- (2) $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 = (x - 1)^2(x + 1)$ 으로 x -축과의 교점은 $x = -1, 1$ (중근)이다. 구간 $[-1, 1]$ 에서 $f(x) \geq 0$ 으로 구하는 넓이 S 는

$$S = \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 1) dx = 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

필수 예제 12-2

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

- (1) $y = 3 - |x^2 - 1|$, $y = 0$
- (2) $y = x|1 - x|$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$

정석연구

절댓값 기호를 포함한 식은 기호 안의 식의 부호에 따라 구간을 나누어 그래프를 그린 후 넓이를 구한다.

모범답안

- (1) $|x| < 1$ 면 $y = x^2 + 2$, $|x| \geq 1$ 면 $y = -x^2 + 4$ 이다. $y = 0$ 과의 교점은 $x = \pm 2$ 이다. 그래프의

대칭성을 이용하면

$$S = 2 \left\{ \int_0^1 (x^2 + 2)dx + \int_1^2 (-x^2 + 4)dx \right\} = 2 \left(\left[\frac{1}{3}x^3 + 2x \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3}x^3 + 4x \right]_1^2 \right) = 8$$

(2) $x \geq 1$ 인 경우 $y = x^2 - x$, $x < 1$ 인 경우 $y = -x^2 + x$ 이다.

$$S = \int_{-1}^0 (x^2 - x)dx + \int_0^1 (-x^2 + x)dx + \int_1^2 (x^2 - x)dx = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

필수 예제 12-3

곡선 $y = x^3 - (a+2)x^2 + 2ax$ (단, $0 < a < 2$)가 있다.

- (1) 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라.
- (2) 이 곡선과 x 축으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

정석연구

- (1) 두 부분의 넓이가 같으면 전체 구간에 대한 정적분 값이 0임을 이용한다. $\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)dx = 0$.
- (2) 넓이를 a 에 관한 함수 $S(a)$ 로 나타낸 후 미분을 통해 최솟값을 찾는다.

모범답안

교점은 $x = 0, a, 2$ 이다.

- (1) $\int_0^2 \{x^3 - (a+2)x^2 + 2ax\}dx = 0$ 이어야 하므로 $\left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 \right]_0^2 = 0 \Rightarrow a = 1$.
 - (2) $S(a) = \int_0^a ydx - \int_a^2 ydx = -\frac{1}{6}a^4 + \frac{2}{3}a^3 - \frac{4}{3}a + \frac{4}{3}$ 이다. $S'(a) = -\frac{2}{3}(a-1)(a^2-2a-2)$. $0 < a < 2$ 에서 $a = 1$ 일 때 $S(a)$ 는 최소가 된다.
-

필수 예제 12-4

$x \geq 1$ 에서 정의된 연속함수 $y = f(x)$ 와 그 역함수 $y = g(x)$ 의 그래프에 대하여 정적분 $\int_1^5 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx$ 의 값을 구하여라. (단, $f(1) = 1, f(5) = 4$)

정석연구

역함수의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭임을 이용한다. 역함수의 정적분은 원래 함수의 그래프에서 y 축 방향의 넓이로 해석할 수 있다.

모범답안

$\int_1^4 g(x)dx$ 는 $y = g(x)$ 와 x 축 사이의 넓이이며, 이는 $y = f(x)$ 와 y 축 사이의 넓이 $\int_1^4 g(y)dy$ 와 같다. 따라서 두 적분의 합은 직사각형의 넓이의 차로 나타낼 수 있다.

$$\int_1^5 f(x)dx + \int_1^4 g(x)dx = (5 \times 4) - (1 \times 1) = 19$$

필수 예제 12-5

다음 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

(1) $y = x + 1, y = x^2 - 1$

(2) $y = x(x - 1)(x - 2), y = x(x - 1)$

정석연구

두 곡선의 교점을 구하여 적분 구간을 정하고, '위의 식 - 아래 식'을 적분한다.

모범답안

(1) 교점: $x + 1 = x^2 - 1 \Rightarrow x = -1, 2$. $[-1, 2]$ 에서 직선이 곡선보다 위에 있으므로

$$S = \int_{-1}^2 \{(x + 1) - (x^2 - 1)\} dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_{-1}^2 = \frac{9}{2}$$

(2) 교점: $x(x - 1)(x - 2) = x(x - 1) \Rightarrow x = 0, 1, 3$.

$$S = \int_0^1 (x^3 - 4x^2 + 3x) dx + \int_1^3 (-x^3 + 4x^2 - 3x) dx = \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12}$$

필수 예제 12-6

다음 직선과 곡선 또는 곡선과 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이 S 를 구하여라.

(1) $y = x - 2, y^2 + 2y = x$

(2) $x = (y - 2)^2 + 1, (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ (단, $x \geq 1$)

정석연구

x 에 관하여 적분하기 복잡할 때는 식을 $x = g(y)$ 꼴로 고쳐서 y 에 관하여 적분한다.

모범답안

(1) 교점의 y 좌표: $y^2 + 2y = y + 2 \Rightarrow y = -2, 1$. 구간 $[-2, 1]$ 에서 직선 $x = y + 2$ 가 포물선 $x = y^2 + 2y$ 보다 오른쪽에 있다.

$$S = \int_{-2}^1 \{(y+2) - (y^2 + 2y)\} dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + 2y \right]_{-2}^1 = \frac{9}{2}$$

(2) 교점: $(y-2)^4 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow y = 1, 2$. 평행이동을 이용하여 구하면

$$S = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 (y-1)^2 dy = \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{3}(y-1)^3 \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$$

필수 예제 12-7

다음 두 곡선 $y = x(a-x)$...(1), $y = x^2(a-x)$...(2)에 대하여 물음에 답하여라.

(1) 곡선 (1)과 x 축으로 둘러싸인 넓이를 곡선 (2)가 이등분할 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $0 < a \leq 1$)

(2) 곡선 (1)과 (2)로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 같을 때, 상수 a 의 값을 구하여라. (단, $a > 1$)

모범답안

교점은 $x = 0, 1, a$ 이다.

(1) $\int_0^a x(a-x) dx = 2 \int_0^a x^2(a-x) dx \Rightarrow \frac{a^3}{6} = 2 \frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{6} \cdot a \neq 0$ 므로 $a = 1$.

(2) $\int_0^a \{x(a-x) - x^2(a-x)\} dx = 0$ 이어야 하므로 $\left[\frac{a}{2}x^2 - \frac{1+a}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^a = 0 \Rightarrow a = 2$.

필수 예제 12-8

함수 $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ 의 역함수를 g 라고 할 때, 두 곡선 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 와 직선 $y = -x + 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

정석연구

$f(x)$ 가 증가함수임을 확인하고, 교점이 $y = x$ 위에 있음을 이용한다. 대칭성에 의해 한쪽 넓이를 구해 2배 한다.

모범답안

$f'(x) = 3(x+1)^2 + 1 > 0$ 므로 증가함수이다. $f(x) = x$ 의 교점은 $x = -1$ 이다. $y = -x + 1$ 과

$y = x$ 의 교점은 $(1/2, 1/2)$ 이다.

$$S = 2 \int_{-1}^0 (f(x) - x) dx + 2 \times (\Delta \text{넓이}) = 2 \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-1}^0 + \frac{1}{2} = 1$$

필수 예제 12-9

점 $P(-3, 6)$ 을 지나고 곡선 $y = x^3 - 5x^2 + x + 9$ 에 접하는 직선의 접점 중 x 좌표가 음수가 아닌 것을 각각 Q, R 라고 하자. 이때, 곡선과 선분 PQ, PR 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

접점의 x 좌표를 a 라 하면 접선의 방정식은 $y - (a^3 - 5a^2 + a + 9) = (3a^2 - 10a + 1)(x - a)$ 이다. $P(-3, 6)$ 을 대입하면 $a(a - 3)(a + 5) = 0$. 음수가 아닌 $a = 0, 3$. 접선은 $y = x + 9, y = -2x$.

$$S = \Delta \text{넓이} + \int_0^3 \{x^3 - 5x^2 + x + 9 - (-2x)\} dx = \frac{27}{2} + \frac{63}{4} = \frac{117}{4}$$

필수 예제 12-10

두 곡선 $y = ax^3$ 과 $y = bx^2 + c$ 가 점 $(2, 8)$ 에서 접할 때, 다음 물음에 답하여라.

- (1) 상수 a, b, c 의 값을 구하여라.
- (2) 두 곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하여라.

모범답안

(1) 공통 접점을 지나므로 $8a = 8 \Rightarrow a = 1, 4b + c = 8$. 미분계수가 같으므로 $3a(2)^2 = 2b(2) \Rightarrow 12 = 4b \Rightarrow b = 3$. 따라서 $c = -4$.

(2) $x^3 = 3x^2 - 4$ 의 교점은 $x = -1, 2(\sqrt[3]{\text{중근}})$. $S = \int_{-1}^2 \{x^3 - (3x^2 - 4)\} dx = [\frac{1}{4}x^4 - x^3 + 4x]_{-1}^2 = \frac{27}{4}$.

필수 예제 12-11

포물선 $y = -x^2 + 2x$ 위의 점 P 에서 그은 접선과 포물선 $y = x^2$ 으로 둘러싸인 도형의 넓이가 최소가 되는 점 P 의 좌표를 구하여라.

정석연구

점 P 의 좌표를 $(a, -a^2 + 2a)$ 로 놓고 접선을 구한 뒤, 교점 α, β 와 넓이 공식 $S = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$ 을 이용한다.

모범답안

접선: $y = -2(a-1)x + a^2$. $x^2 = -2(a-1)x + a^2$ 의 두 근 α, β 에 대하여 $\beta - \alpha = 2\sqrt{2a^2 - 2a + 1}$ 이다. $S(a) = \frac{4}{3}(2a^2 - 2a + 1)^{3/2}$ 므로 $a = 1/2$ 일 때 최소가 된다. 점 $P(1/2, 3/4)$.