

수학 II - Chapter 10 연습문제

기본 문제

1. Exercise 10-1

$F(t) = \int_0^t (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) dx$ 일 때, $\int_0^1 F(t) dt = \frac{11}{12}$ 을 만족시키는 자연수 n 의 값을 구하여라.

2. Exercise 10-3

함수 $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + ax$ 且 $f(x) = \int_0^1 \{f(x) - f(t)\} dt$ 를 만족시킬 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

3. Exercise 10-5

$\text{Max}(a, b)$ 은 a, b 중에서 작지 않은 것을 나타낼 때, $f^+(x) = \text{Max}(x, 0)$, $f^-(x) = \text{Max}(-x, 0)$ 으로 정의하자. 이때, $\int_{-1}^2 f^+(x) dx + \int_{-1}^2 f^-(x) dx$ 의 값을 구하여라.

4. Exercise 10-7

함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 를 만족시키고, $-1 \leq x \leq 1$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

일 때, $\int_{-5}^5 f(x+1) dx$ 의 값을 구하여라.

5. Exercise 10-9

연속함수 $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x 에 대하여 $f(2+x) = f(2-x)$

(가) $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2k + 4$

(가) $\int_0^6 f(x) dx = k^2$

$\int_0^4 f(x) dx$ 의 값이 최소가 되는 상수 k 의 값을 구하여라.

6. Exercise 10-11

함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ 에 대하여 $0 \leq x \leq r$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $M(r)$ 라고 할 때, $\int_0^5 M(r) dr$ 의 값을 구하여라.

실력 문제

1. Exercise 10-15

$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & (x \leq 1) \\ x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_1^3 xf(x-1)dx$ 의 값을 구하여라.

2. Exercise 10-18

$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt| dt$ 로 정의된 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

3. Exercise 10-21

다음과 같이 정의된 다항함수 $f_n(x)$ 를 구하여라.

$$f_1(x) = 2x, \quad f_{n+1}(x) = x^3 + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(x) dx \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

4. Exercise 10-23

모든 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 g(x)f(x)dx = 0$ 을 만족시키고, $f(0) = 1$ 인 이차함수 $f(x)$ 를 구하여라.

5. Exercise 10-25

함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 아래로 볼록할 때, 실수 a, b 에 대하여 다음 두 식의 대소를 비교하여라. (단, $f(x) > 0$ 이다.)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

6. Exercise 10-27

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ 를 만족시키는 c 가 구간 $[a, b]$ 에 적어도 하나 존재함을 증명하여라.