미적분 - 제19장 속도 · 거리와 적분

수학의 정석

§1. 속도와 거리

기본 정석 - 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때, 점 P가 $t=a$ 일 때부터 $t=b$ 일 때까지 움직이면

- 점 P의 위치의 변화량 $\Rightarrow \int_a^b v(t)dt$
- 점 P가 움직인 거리 $\Rightarrow \int_a^b |v(t)|dt$ (점 찍은 부분의 넓이의 합)

Advice

1. 속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 x 가 $x=f(t)$ 일 때, 속도 $v(t)$ 는

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$$

이므로

$$\int_{t_0}^{t} v(t)dt=f(t)-f(t_0)$$

이다. 이때, 시각 t_0 에서의 점 P의 위치를 x_0 이라고 하면 시각 t 에서의 점 P의 위치 $f(t)$ 는

$$f(t)=f(t_0)+\int_{t_0}^{t} v(t)dt=x_0+\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

이다. 따라서 $t=a$ 일 때부터 $t=b$ 일 때까지 점 P의 위치의 변화량은

$$f(b)-f(a)=\{x_0+\int_{t_0}^{b} v(t)dt\}-\{x_0+\int_{t_0}^{a} v(t)dt\}=\int_a^b v(t)dt$$

이다.

Advice

2. 구분구적법을 이용한 속도와 거리의 관계

속도와 거리의 관계를 앞에서 공부한 구분구적법을 이용하여 다음과 같이 생각할 수도 있다.

속도가 일정할 때

$$(\text{속도}) \times (\text{시간}) = (\text{거리})$$

이다. 따라서 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도가 $v(t)$ 일 때, $v(t)$ 가 연속이고 $v(t) \geq 0$ 이면 점 P가 움직인 거리는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(t_k)\Delta t \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t \Rightarrow \int_a^b v(t)dt$$

(거리 요소 $\Rightarrow$ 거리 요소의 합 $\Rightarrow$ 한없이 세분한 극한 $=$ 거리)

§2. 평면 위의 운동

기본 정석 - 곡선의 길이

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 미분가능하고 도함수 $f'(x)$ 가 연속이면 구간 $[a,b]$ 에서 곡선 $y=f(x)$ 의 길이 l 은 다음과 같다.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}dx$$

*Note: $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 를 포함하는 어떤 열린구간에서 미분가능하면 구간 $[a,b]$ 에서 미분가능하다고 한다.

기본 정석 - 평면 위의 운동

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치 (x,y) 가 $x=f(t)$, $y=g(t)$ 이고 구간 $[a,b]$ 에서 $f(t), g(t)$ 가 연속인 도함수를 가지면 이 구간에서 점 P가 움직인 거리 l 은 다음과 같다.

$$l = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}dt$$

Advice

1° 곡선의 길이

구간 $[a,b]$ 를 n 등분한 점과 양 끝 점을 $x_0(=a), x_1, x_2, \ldots, x_n(=b)$ 이라 하고, 이에 대응하는 곡선 위의 점을 각각 $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$ 이라고 하자. 이때,

$$\overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{n-1}P_n}$$

은 $n \to \infty$ 일 때 곡선의 길이에 수렴한다. 평균값 정리에 의하여

$$\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = f'(t_k) \text{ 곧, } f(x_k) - f(x_{k-1}) = f'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

을 만족시키는 t_k 가 구간 (x_{k-1}, x_k) 에 존재한다.

$$\overline{P_kP_{k-1}}^2 = (x_k - x_{k-1})^2 + \{f(x_k) - f(x_{k-1})\}^2 = [1 + \{f'(t_k)\}^2](x_k - x_{k-1})^2$$

$$\therefore \overline{P_kP_{k-1}} = \sqrt{1 + \{f'(t_k)\}^2}(x_k - x_{k-1})$$

$n \to \infty$ 일 때 이 합의 극한값은 $\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}dx$ 이고, 이 값이 곡선의 길이이다.

Advice

2° 평면 위의 운동

$x = f(t), y = g(t)$ 와 같이 매개변수로 나타낸 곡선의 길이 l 은

$$l = \int_{f(a)}^{f(b)} \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}dx = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx})^2}\frac{dx}{dt}dt = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2}dt$$

이고, 이것은 좌표평면 위를 움직이는 점 P가 $t = a$ 일 때부터 $t = b$ 일 때까지 움직인 거리와 같다.

필수 예제

필수 예제 19-1

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 속도 $v(t)$ 는 $v(t) = (t^2 - 1)e^{-t}$ 이고, $t = 0$ 일 때 점 P는 원점에 있다.
(1) $v(t)$ 가 최소가 되는 시각 t 를 구하여라.
(2) $t = 1$ 일 때의 점 P의 위치를 구하여라.
(3) $t = -2$ 일 때부터 $t = 2$ 일 때까지 점 P가 움직인 거리를 구하여라.

정석연구

점 P의 위치의 변화량과 점 P가 움직인 거리를 구분할 수 있어야 한다. 점 P의 위치의 변화량 $\Rightarrow \int_a^b v(t)dt$, 움직인 거리 $\Rightarrow \int_a^b |v(t)|dt$

모범답안

(1) $v'(t) = 2te^{-t} + (t^2 - 1)(-e^{-t}) = -(t^2 - 2t - 1)e^{-t}$
$v'(t) = 0$ 에서 $t = 1 \pm \sqrt{2}$. 증감을 조사하면 $t = 1 - \sqrt{2}$ 일 때 최소이다. **답:** $t = 1 - \sqrt{2}$
(2) 시각 t 에서의 점 P의 위치를 $x(t)$ 라고 하자. $t = 0$ 일 때 원점에 있으므로 $x(-1) = 0 + \int_0^{-1} v(t)dt = \int_0^{-1}(t^2 - 1)e^{-t}dt = [-(t+1)^2e^{-t}]_0^{-1} = \mathbf{1}$
(3) $l = \int_{-2}^{2} |t^2 - 1|e^{-t}dt = \int_{-2}^{-1}(t^2 - 1)e^{-t}dt + \int_{-1}^{1}(1 - t^2)e^{-t}dt + \int_1^2(t^2 - 1)e^{-t}dt$
$= [-(t+1)^2e^{-t}]_{-2}^{-1} + [(t+1)^2e^{-t}]_{-1}^{1} + [-(t+1)^2e^{-t}]_1^2 = \mathbf{e^2 + 8e^{-1} - 9e^{-2}}$

필수 예제 19-2

수직선 위를 움직이는 두 점 P_1, P_2 의 시각 t 에서의 속도 v_1, v_2 는 $v_1 = \sin t, v_2 = 1 - \cos t$ 라고 한다. 또, $t = 0$ 일 때 두 점은 모두 원점에 있다. 선분 P_1P_2 의 중점을 Q라고 할 때, 다음 물음에 답하여라.
(1) 시각 t 에서의 점 Q의 속도 $v(t)$ 를 v_1, v_2 로 나타내어라.
(2) 시각 t 에서의 점 Q의 위치를 t 로 나타내어라.
(3) $t = 0$ 일 때부터 $t = 2\pi$ 일 때까지 점 Q가 움직인 거리 l 을 구하여라.

모범답안

(1) 위치 $x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ 이므로 $v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(\frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt}) = \mathbf{\frac{1}{2}(v_1 + v_2)}$
(2) $v(t) = \frac{1}{2}(\sin t + 1 - \cos t)$ 이므로 $x = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin t - \cos t + 1)dt = \mathbf{\frac{1}{2}(-\cos t - \sin t + t + 1)}$
(3) $l = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sqrt{2}\sin(t - \frac{\pi}{4}) + 1|dt = \cdots = \mathbf{\frac{\pi + 4}{2}}$

필수 예제 19-3

수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t 에서의 속도가 각각 $\sin t, \cos 2t$ 이고, $t=0$ 일 때 점 A는 원점에서, 점 B는 좌표가 1인 점에서 동시에 출발한다.

(1) $0 < t \leq 2\pi$ 에서 점 A와 B가 만나는 횟수를 구하여라.

(2) $0 < t \leq 2\pi$ 에서 점 A와 B가 가장 멀어질 때의 시각 t 를 구하여라. 또, 이때 두 점 사이의 거리를 구하여라.

정석연구

두 점의 위치 x_A, x_B 는 각각 $x_A = x_1 + \int_0^t v_A dt$, $x_B = x_2 + \int_0^t v_B dt$ 이다.

모범답안

(1) $x_A = 1-\cos t, x_B = 1 + \dfrac{1}{2}\sin 2t$. $x_A = x_B \Rightarrow \cos t(\sin t + 1) = 0$. $t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ 이므로 **2회**

(2) $f(t) = x_B - x_A = \dfrac{1}{2}\sin 2t + \cos t$. $f'(t) = -(2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0$ 에서 $t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{3}{2}\pi$.

$|f(t)|$ 의 최대는 $t = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi$ 일 때 **거리** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$

필수 예제 19-4

다음 주어진 구간에서 곡선의 길이 l 을 구하여라.

(1) $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})(-1 \leq x \leq 1)$

(2) $y = \ln x(1 \leq x \leq 2)$

모범답안

(1) $l = 2\int_0^1 \sqrt{1 + \dfrac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2}dx = \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx = \mathbf{e} - \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{e}}$

(2) $l = \int_1^2 \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}dx = [t + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{t-1}{t+1}]_{\sqrt{2}}^{\sqrt{5}} = \sqrt{\mathbf{5}} - \sqrt{\mathbf{2}} + \ln\dfrac{(\sqrt{\mathbf{5}}-\mathbf{1})(\sqrt{\mathbf{2}}+\mathbf{1})}{\mathbf{2}}$

필수 예제 19-5

$a > 0, 0 \leq t \leq 2\pi$ 일 때, 매개변수로 나타낸 곡선 $x = a(t - \sin t), y = a(1-\cos t)$ 의 길이를 구하여라.

모범답안

$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt = a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt = 2a\int_0^{2\pi}\sin\dfrac{t}{2}dt = \mathbf{8a}$

필수 예제 19-6

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t 에서의 위치가 $(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 시각 t 에서의 점 P의 속력을 구하여라.

(2) $t=0$ 일 때부터 $t=a(a>0)$ 일 때까지 점 P가 움직인 거리 l 을 구하여라.

(3) (2)에서 $a\to\infty$ 일 때, l 의 극한값을 구하여라.

모범답안

(1) $\dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}(\sin t+\cos t), \dfrac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin t-\cos t)$. 속력은 $\sqrt{2}e^{-t}$

(2) $l=\int_0^a \sqrt{2}e^{-t}dt=\boldsymbol{\sqrt{2}(1-e^{-a})}$

(3) $\lim_{a\to\infty} l=\boldsymbol{\sqrt{2}}$