수학 II - 제10장 정적분

학습자료

1 정적분의 정의와 성질

1.1 정적분의 정의

기본정석: 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 두 실수 a, b를 포함하는 구간에서 연속일 때, $f(x)$의 부정적분 중 하나를 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

이 값을 $f(x)$의 a에서 b까지의 **정적분**이라고 한다. 이때 a를 **아래끝**, b를 **위끝**이라 한다.

Advice

Advice 1°: 정적분과 부정적분 부정적분 $\int f(x)dx$는 x의 **함수**이고, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 **실수값(상수)**이다. 또한, 정적분의 값은 적분변수에 무관하게 결정되므로 다음이 성립한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

1.2 정적분의 기본 성질

기본정석: 정적분의 성질

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)
4. $\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
5. $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$ (구간의 연결)

2 필수 예제 및 유제

[필수 예제 10-1] 정적분의 계산

다음 정적분의 값을 구하여라.

1. $\int_1^2 (x+1)(x^2-x+1)dx$
2. $\int_0^1 \dfrac{x^2}{x+1}dx - \int_0^1 \dfrac{1}{x+1}dx$

정석연구

(1) 피적분함수가 곱의 꼴로 되어 있으면 전개하여 적분한다. (2) 적분 구간이 같으므로 $\int f(x)dx - \int g(x)dx = \int \{f(x)-g(x)\}dx$를 이용하여 식을 간단히 한다.

모범답안

1. $\int_1^2 (x^3+1)dx = \left[\dfrac{1}{4}x^4 + x\right]_1^2 = \left(\dfrac{16}{4}+2\right) - \left(\dfrac{1}{4}+1\right) = 6 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{19}{4}$
2. $\int_0^1 \left(\dfrac{x^2}{x+1} - \dfrac{1}{x+1}\right)dx = \int_0^1 \dfrac{x^2-1}{x+1}dx = \int_0^1 (x-1)dx$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2}-1\right) - 0 = -\frac{1}{2}$$

유제 10-1 다음 정적분의 값을 구하여라.

1. $\int_{-1}^1 (2x+1)^2 dx$
2. $\int_1^2 \dfrac{x^3}{x-1}dx - \int_2^1 \dfrac{1}{1-x}dx$

[필수 예제 10-2] 절댓값 기호를 포함한 함수의 적분

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_0^3 |x^2-2x|dx$$

정석연구

피적분함수에 절댓값 기호가 있으면 절댓값 안의 식의 부호가 바뀌는 점을 경계로 적분 구간을 나눈다. $x^2-2x = x(x-2)$이므로 $0 \le x \le 2$에서는 음수, $2 \le x \le 3$에서는 양수이다.

모범답안

$$\begin{aligned}\int_0^3 |x^2-2x|dx &= \int_0^2 -(x^2-2x)dx + \int_2^3 (x^2-2x)dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2 + \left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3 \\ &= \left(-\frac{8}{3}+4\right) + \left\{(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right\} = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

유제 10-2 정적분 $\int_0^2 |x(x-1)|dx$ 의 값을 구하여라.

[필수 예제 10-3] 우함수와 기함수의 정적분

다음 정적분의 값을 구하여라.

$$\int_{-2}^{2}(x^7+5x^5-4x^3+3x^2+2x-1)dx$$

정석연구

적분 구간이 $[-a, a]$ 꼴이고 피적분함수가 다항함수일 때:

- $f(-x) = -f(x)$ (기함수, 홀수 차수): $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$
- $f(-x) = f(x)$ (우함수, 짝수 차수): $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

모범답안 홀수 차수 항($x^7, 5x^5, -4x^3, 2x$)은 기함수이므로 정적분 값이 0이다. 따라서 짝수 차수 항과 상수항만 남겨서 계산한다.

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{2}(3x^2-1)dx &= 2\int_0^2(3x^2-1)dx \\ &= 2\left[x^3-x\right]_0^2 = 2(8-2) = 12\end{aligned}$$

유제 10-3 함수 $f(x)=x^3-3x$와 $g(x)=x^2+1$에 대하여 $\int_{-1}^{1}\{f(x)+g(x)\}dx$ 의 값을 구하여라.

[필수 예제 10-4] 정적분으로 정의된 함수

다음 등식을 만족시키는 다항함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.

$$\int_a^x f(t)dt = x^3-2x^2+x$$

정석연구

정적분으로 표시된 함수의 미분: $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$ 1. 양변을 x에 대하여 미분한다. 2. 아래끝과 위끝이 같아지는 x값(여기서는 a)을 대입한다.

모범답안 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 1$$

양변에 $x = a$를 대입하면 좌변은 $\int_a^a f(t)dt = 0$이므로

$$0 = a^3 - 2a^2 + a \implies a(a-1)^2 = 0$$

$\therefore a = 0$ 또는 $a = 1$

유제 10-4 $\int_1^x f(t)dt = x^2 - ax + 3$ 을 만족시키는 함수 $f(x)$와 상수 a의 값을 구하여라.