수학 II - 제11장 정적분으로 정의된 함수

현경서T

§1. 정적분으로 정의된 함수

기본 정석

1. **정적분과 미분의 관계**
   함수 $f(x)$가 연속함수일 때, 상수 a와 임의의 실수 x에 대하여
   $$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

2. **정적분으로 정의된 함수의 미분**
   $f(x)$가 연속함수일 때 (단, a는 상수)
   (a) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$
   (b) $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$

Advice

정적분과 미분의 관계

위끝이 변수 x이고 아래끝이 상수 a인 정적분 $\int_a^x f(t)dt$를 계산하면, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 할 때

$$\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$$

이므로 이는 x의 함수이다. 이를 x에 관하여 미분하면

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx}\{F(x) - F(a)\} = F'(x) = f(x)$$

가 된다. [cite: 213, 214]

Advice

피적분함수에 변수 x가 포함된 경우

피적분함수에 변수 x가 포함된 경우에는 위의 관계가 성립하지 않음에 주의해야 한다. 예를

들어, $\frac{d}{dx}\int_a^x xf(t)dt \neq xf(x)$ 이다. 이때는 x가 적분변수 t에 대해서는 상수이므로 $x\int_a^x f(t)dt$로 변형한 후 곱의 미분법을 적용해야 한다. [cite: 215]

Advice

정적분으로 정의된 함수의 미분(일반화)

위끝과 아래끝에 모두 변수 x가 있는 경우:

$$\frac{d}{dx}\int_x^{x+a} f(t)dt = f(x+a) - f(x)$$

또한, 위끝이나 아래끝이 $x+a$ 꼴이 아닌 경우에는 먼저 정적분을 계산한 후 미분해야 한다. [cite: 219, 220]

Advice

정적분으로 정의된 함수의 극한 공식

$f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라 하면 다음이 성립한다.

1. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt = f(a)$
2. $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^{a+h} f(t)dt = f(a)$

필수 예제

필수 예제 11-1

다음 극한값을 구하여라.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}\int_1^{x^2}(t^3+2t^2-3t+1)dt$$

정석연구

정적분을 직접 계산한 후 극한값을 생각하거나, $\int(t^3+2t^2-3t+1)dt = F(t)+C$라 하고 미분계수의 정의 $\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a} = F'(a)$를 이용한다.

모범답안

$f(t) = t^3+2t^2-3t+1$이라 하고 그 한 부정적분을 $F(t)$라 하면,

$$\text{준식} = \lim_{x\to 1}\frac{F(x^2)-F(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\left\{\frac{F(x^2)-F(1)}{x^2-1}\times(x+1)\right\} = 2F'(1)$$

$F'(1) = f(1) = 1^3+2(1)^2-3(1)+1 = 1$이므로, 구하는 값은 $2\times 1 = 2$이다.

필수 예제 11-2

다음 극한값을 구하여라.

1. $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{2-h}^{2+h}(x^4-x^2+1)dx$
2. $\lim_{t\to\infty} t\int_0^{\frac{2}{t}}(x^2+3)|x-2|dx$

정석연구

(1) $\int(x^4-x^2+1)dx = F(x)+C$로 놓고 미분계수의 정의를 이용한다. (2) $\frac{1}{t} = h$로 치환하여 (1)과 같은 방법으로 해결한다.

모범답안

(1) $F'(x) = x^4-x^2+1$이라 하면,

$$\text{준식} = \lim_{h\to 0}\frac{F(2+h)-F(2-h)}{h} = 2F'(2) = 2(2^4-2^2+1) = 26$$

(2) $\frac{1}{t} = h$로 치환하면 $t\to\infty$일 때 $h\to 0+$이다. $F'(x) = (x^2+3)|x-2|$라 하면,

$$\text{준식} = \lim_{h\to 0+}\frac{F(2h)-F(0)}{h} = 2F'(0) = 2(3\times|-2|) = 12$$

필수 예제 11-3

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 등식을 만족시킬 때, 상수 a의 값과 $f(x)$를 구하여라.

1. $\displaystyle\int_1^x (t^2-2)f(t)dt = \frac{1}{5}x^5 - ax + \frac{19}{5}$
2. $\displaystyle\int_a^{2x-1} f(t)dt = x^2 - 2x$

정석연구

$\int_k^k f(x)dx = 0$과 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$를 이용한다.

모범답안

(1) $x=1$ 대입: $0 = \frac{1}{5} - a + \frac{19}{5} \Rightarrow a = 4$. 양변 미분: $(x^2-2)f(x) = x^4 - 4 = (x^2-2)(x^2+2)$. $\therefore f(x) = x^2+2$. (2) $2x-1 = z$라 하면 $x = \frac{z+1}{2}$. $\int_a^z f(t)dt = \frac{1}{4}(z^2-2z-3)$. $z=a$ 대입하면 $a^2-2a-3=0 \Rightarrow a=-1, 3$. 양변 미분: $f(z) = \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}$. $\therefore f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

필수 예제 11-4

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 등식을 만족시킬 때, $f(x)$를 구하여라.

$$x^2 f(x) = 2x^6 - 3x^4 + 2\int_1^x tf(t)dt$$

정석연구

양변을 미분하여 $f(x)$에 관한 조건을 찾고, $x=1$을 대입하여 초기 조건을 구한다.

모범답안

양변 미분: $2xf(x) + x^2f'(x) = 12x^5 - 12x^3 + 2xf(x) \Rightarrow x^2f'(x) = 12x^5 - 12x^3$. $\therefore f'(x) = 12x^3 - 12x \Rightarrow f(x) = 3x^4 - 6x^2 + C$. $x=1$ 대입: $f(1) = 2-3+0 = -1$. $f(1) = 3-6+C = -1$에서 $C=2$. 따라서 $f(x) = 3x^4 - 6x^2 + 2$이다.

필수 예제 11-5

다항함수 $f(x)$에 대하여 $F(x) = \int_a^x (x-t)f(t)dt$라 할 때, 다음 물음에 답하여라.

1. $f(x) = x^2$일 때, $F(x)$의 극값을 구하여라.
2. $F(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$이 되도록 $f(x)$를 정하여라.

정석연구

피적분함수에 x가 포함된 경우 $F(x) = x\int_a^x f(t)dt - \int_a^x tf(t)dt$로 변형하여 미분한다. 이 경우 $F'(x) = \int_a^x f(t)dt$가 된다.

모범답안

(1) $F'(x) = \int_a^x t^2 dt = \frac{1}{3}(x^3 - a^3)$. $x = a$에서 극솟값 $F(a) = 0$을 갖고 극댓값은 없다. (2) $F'(x) = \int_a^x f(t)dt = 6x^2 - 6x - 12$. 양변을 다시 미분하면 $f(x) = 12x - 6$이다.

필수 예제 11-6

다음 $F(x)$를 계산하고, $y = F(x)$의 그래프를 그려라.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} (1 - |t|)dt$$

정석연구

$f(t) = 1 - |t|$의 그래프는 $t = 0$을 기준으로 식이 달라지므로, $x \leq 0$일 때와 $x > 0$일 때로 나누어 계산한다.

모범답안

(i) $x \leq 0$일 때: $F(x) = \int_{-1}^x (1+t)dt = [t + \frac{1}{2}t^2]_{-1}^x = \frac{1}{2}(x+1)^2$. (ii) $x > 0$일 때: $F(x) = \int_{-1}^0 (1+t)dt + \int_0^x (1-t)dt = \frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2}x^2) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$. 그래프는 $x = -1$에서 시작하여 $x = 0$까지 아래로 볼록한 포물선, $x > 0$에서 위로 볼록한 포물선 형태가 연결된다.