

## 수학 II - Chapter 10 연습문제

### 기본 문제

1. **Exercise 10-1**

$F(t) = \int_0^t (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) dx$  일 때,  $\int_0^1 F(t) dt = \frac{11}{12}$  을 만족시키는 자연수  $n$ 의 값을 구하여라.

2. **Exercise 10-3**

함수  $f(x) = x^3 - (a+1)x^2 + ax$  가  $f(x) = \int_0^1 \{f(x) - f(t)\} dt$  를 만족시킬 때, 상수  $a$ 의 값을 구하여라.

3. **Exercise 10-5**

$\text{Max}(a, b)$ 는  $a, b$  중에서 작지 않은 것을 나타낼 때,  $f^+(x) = \text{Max}(x, 0)$ ,  $f^-(x) = \text{Max}(-x, 0)$  으로 정의하자. 이때,  $\int_{-1}^2 f^+(x) dx + \int_{-1}^2 f^-(x) dx$  의 값을 구하여라.

4. **Exercise 10-7**

함수  $f(x)$ 가 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(x+2) = f(x)$  를 만족시키고,  $-1 \leq x \leq 1$  에서

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \leq x \leq 0) \\ -x+1 & (0 \leq x \leq 1) \end{cases}$$

일 때,  $\int_{-5}^5 f(x+1) dx$  의 값을 구하여라.

5. **Exercise 10-9**

연속함수  $f(x)$ 가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수  $x$ 에 대하여  $f(2+x) = f(2-x)$

(가)  $\int_{-2}^2 f(x) dx = 2k + 4$

(가)  $\int_0^6 f(x) dx = k^2$

$\int_0^4 f(x) dx$  의 값이 최소가 되는 상수  $k$ 의 값을 구하여라.

6. **Exercise 10-11**

함수  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$  에 대하여  $0 \leq x \leq r$  에서  $|f(x)|$  의 최댓값을  $M(r)$  라고 할 때,  $\int_0^5 M(r) dr$  의 값을 구하여라.

## 실력 문제

1. **Exercise 10-15**

$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \leq 1) \\ x^2 & (x \geq 1) \end{cases}$  으로 정의된 함수  $f(x)$  에 대하여  $\int_1^3 xf(x-1)dx$  의 값을 구하여라.

2. **Exercise 10-18**

$f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|dt$  로 정의된 함수  $f(x)$  의 최솟값을 구하여라.

3. **Exercise 10-21**

다음과 같이 정의된 다항함수  $f_n(x)$  를 구하여라.

$$f_1(x) = 2x, \quad f_{n+1}(x) = x^3 + \frac{1}{2} \int_0^1 f_n(x)dx \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \dots)$$

4. **Exercise 10-23**

모든 일차함수  $g(x)$  에 대하여  $\int_0^1 g(x)f(x)dx = 0$  을 만족시키고,  $f(0) = 1$ 인 이차함수  $f(x)$  를 구하여라.

5. **Exercise 10-25**

함수  $y = f(x)$  의 그래프의 개형이 아래로 볼록할 때, 실수  $a, b$ 에 대하여 다음 두 식의 대소를 비교하여라. (단,  $f(x) > 0$  이다.)

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx, \quad \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

6. **Exercise 10-27**

함수  $f(x)$  가 구간  $[a, b]$  에서 연속일 때,  $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$  를 만족시키는  $c$ 가 구간  $[a, b]$  에 적어도 하나 존재함을 증명하여라.