미적분 - 제15장 정적분의 계산

수학의 정석

§1. 정적분의 정의와 계산

기본 정석

1. **정적분의 정의**

   함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

2. $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

3. $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. **정적분의 기본 공식**

   (1) $\displaystyle\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (단, k는 상수)

   (2) $\displaystyle\int_a^b \{f(x) \pm g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

   (3) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Advice

정적분의 값과 변수

부정적분 $\int f(x)dx$는 x의 함수이지만, 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 그 결과가 상수이다. 따라서 적분 변수를 다른 문자로 바꾸어도 그 값은 변하지 않는다.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$$

§2. 치환적분법과 부분적분법

기본 정석

1. **정적분의 치환적분법**

   함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고, $f(x)$가 $g(x)$의 함숫값을 포함하는 구간에서 연속일 때, $g(a) = \alpha, g(b) = \beta$이면

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_\alpha^\beta f(t)dt \quad (\text{단, } g(x) = t)$$

2. **정적분의 부분적분법**

   두 함수 $f(x), g(x)$가 미분가능하고, $f'(x), g'(x)$가 연속일 때

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Advice

삼각치환법

정적분에서 다음과 같은 꼴이 포함된 경우 삼각함수를 이용하여 치환한다.

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 꼴 : $x = a\sin\theta$ $(-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2})$로 치환

(2) $a^2 + x^2$ 꼴 : $x = a\tan\theta$ $(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2})$로 치환

필수 예제

필수 예제 15-1

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{\sqrt{x}}dx$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x}{x^2-x-6}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^\pi (e^{4x}-\sin^2 x)dx$

정석연구

부정적분을 구한 다음 정적분의 정의를 이용한다. (2)는 분모를 인수분해하여 부분분수로 변형하고, (3)은 반각의 공식을 이용하여 차수를 낮춘다.

모범답안

(1) $\sqrt{x}=t$로 놓으면 $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt$이다. $x=1\to t=1, x=4\to t=2$
준식 $=2\int_1^2(t+1)^3dt=2\left[\frac{1}{4}(t+1)^4\right]_1^2=\frac{1}{2}(81-16)=\mathbf{\frac{65}{2}}$

(2) $\frac{x}{(x-3)(x+2)}=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x+2}\right)$ 이므로
준식 $=\frac{1}{5}[3\ln|x-3|+2\ln|x+2|]_{-1}^2=\frac{1}{5}\{(3\ln 1+2\ln 4)-(3\ln 4+2\ln 1)\}=-\mathbf{\frac{2}{5}}\ln\mathbf{2}$

(3) $\int_0^\pi(e^{4x}-\frac{1-\cos 2x}{2})dx=\left[\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^\pi=\mathbf{\frac{1}{4}(e^{4\pi}-1)-\frac{\pi}{2}}$

필수 예제 15-2

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{x+1}dx+\int_0^1\frac{1}{t+1}dt$

(2) $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\frac{e^{3x}}{e^x+1}dx-\int_{\ln 3}^0\frac{1}{e^t+1}dt$

정석연구

정적분의 성질 $\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx=\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx$와 적분 변수의 임의성을 이용한다.

모범답안

(1) 준식 $= \int_0^1 \frac{x^3+1}{x+1}dx = \int_0^1 (x^2-x+1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 = \mathbf{\frac{5}{6}}$

(2) 준식 $= \int_0^{\ln 3} \frac{e^{3x}}{e^x+1}dx + \int_0^{\ln 3} \frac{1}{e^x+1}dx = \int_0^{\ln 3}(e^{2x} - e^x + 1)dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - e^x + x\right]_0^{\ln 3} = \mathbf{2} + \ln \mathbf{3}$

필수 예제 15-3

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^1 |e^x - 2|dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi (|\sin x| + |\cos 2x|)dx$

> **정석연구**
>
> 절댓값 기호 안의 식의 부호가 바뀌는 점을 경계로 적분 구간을 나누어 계산한다.

모범답안

(1) $e^x - 2 = 0 \rightarrow x = \ln 2$. 구간 $[0, \ln 2]$에서 $e^x - 2 \leq 0$, $[\ln 2, 1]$에서 $e^x - 2 \geq 0$
준식 $= \int_0^{\ln 2}(2 - e^x)dx + \int_{\ln 2}^1 (e^x - 2)dx = [2x - e^x]_0^{\ln 2} + [e^x - 2x]_{\ln 2}^1 = \mathbf{4} \ln \mathbf{2} + \mathbf{e} - \mathbf{5}$

(2) $\int_0^\pi \sin x dx + \int_0^\pi |\cos 2x|dx = [-\cos x]_0^\pi + 4\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx = 2 + 4[\frac{1}{2}\sin 2x]_0^{\pi/4} = \mathbf{4}$

필수 예제 15-4

a가 실수일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) 정적분 $I = \displaystyle\int_0^1 |e^x - a|dx$ 의 값을 a로 나타내어라.

(2) I의 값이 최소가 되는 a의 값을 구하여라.

> **정석연구**
>
> a의 값의 범위에 따라 구간을 나누어 정적분한다. I가 a에 대한 함수이므로 미분을 통해 최솟값을 찾는다.

모범답안

(1) (i) $a \le 1$ 일 때 : $I = \int_0^1 (e^x - a)dx = e - a - 1$
(ii) $1 < a < e$ 일 때 : $I = \int_0^{\ln a} (a - e^x)dx + \int_{\ln a}^1 (e^x - a)dx = 2a\ln a - 3a + e + 1$
(iii) $a \ge e$ 일 때 : $I = \int_0^1 (a - e^x)dx = a - e + 1$

(2) $f(a) = 2a\ln a - 3a + e + 1$이라 하면 $f'(a) = 2\ln a - 1 = 0 \to a = \sqrt{e}$.
증감표를 그리면 $a = \sqrt{\mathbf{e}}$에서 최소이다.

필수 예제 15-5

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} (1 - \cos^3 x)\cos x \sin x dx$

(2) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + \sin^3 x} dx$

(3) $\displaystyle\int_1^e \ln x^{\frac{1}{x}} dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^{2x} + e^{-x}} dx$

정석연구

치환적분법을 이용한다. (1) $\cos x = t$, (2) $\sin x = t$, (3) $\ln x = t$, (4) $e^x = t$로 치환한다.

모범답안

(1) $\cos x = t \to -\sin x dx = dt$. $x : 0 \to \pi \Rightarrow t : 1 \to -1$
$\int_1^{-1} (1 - t^3)t(-dt) = \int_{-1}^1 (t - t^4)dt = 2\int_0^1 (-t^4)dt = -\mathbf{\frac{2}{5}}$

(2) $\sin x = t \to \cos x dx = dt$. $x : \pi/6 \to \pi/2 \Rightarrow t : 1/2 \to 1$
$\int_{1/2}^1 \frac{1}{t+t^3}dt = \int_{1/2}^1 (\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2})dt = [\ln|t| - \frac{1}{2}\ln(1+t^2)]_{1/2}^1 = \mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}}$

(3) $\ln x = t \to \frac{1}{x}dx = dt$. $x : 1 \to e \Rightarrow t : 0 \to 1$
$\int_0^1 tdt = [\frac{1}{2}t^2]_0^1 = \mathbf{\frac{1}{2}}$

(4) $e^x = t \to e^x dx = dt$. $\int_1^e \frac{t-1}{t^2+1/t} \cdot \frac{1}{t}dt = \int_1^e \frac{t-1}{t^3+1}dt = \int_1^e (\frac{-1}{t+1} + \frac{t}{t^2-t+1})dt$
계산하면 $\mathbf{\frac{1}{2}\ln\frac{e^2-e+1}{(e+1)^2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{18}}$ (생략 가능)

필수 예제 15-6

다음 정적분의 값을 구하여라. $(a > 0)$

(1) $\displaystyle\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{x^2 + a^2}dx$

정석연구

삼각치환법을 이용한다. (1) $x = a\sin\theta$, (2) $x = a\tan\theta$로 치환한다.

모범답안

(1) $x = a\sin\theta, dx = a\cos\theta d\theta.\ x : 0 \to a \Rightarrow \theta : 0 \to \pi/2$
$\int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta} \cdot a\cos\theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta d\theta = a^2 \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \mathbf{\frac{\pi a^2}{4}}$

(2) $x = a\tan\theta, dx = a\sec^2\theta d\theta.\ x : 0 \to a \Rightarrow \theta : 0 \to \pi/4$
$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{a^2\sec^2\theta} \cdot a\sec^2\theta d\theta = \frac{1}{a}\int_0^{\pi/4} 1 d\theta = \mathbf{\frac{\pi}{4a}}$

필수 예제 15-7

다음을 증명하여라.

(1) $f(x)$가 우함수($f(-x) = f(x)$)이면 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) $f(x)$가 기함수($f(-x) = -f(x)$)이면 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

정석연구

$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$로 나누고, 앞의 적분에서 $x = -t$로 치환한다.

모범답안

(1) $\int_{-a}^0 f(x)dx$에서 $x = -t$로 치환하면 $dx = -dt.\ x : -a \to 0 \Rightarrow t : a \to 0$
$\int_a^0 f(-t)(-dt) = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(t)dt = \int_0^a f(x)dx$
따라서 $\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(2) 우함수의 증명과 동일하게 $\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(-x)dx$이다.
기함수는 $f(-x) = -f(x)$이므로 $\int_0^a -f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \mathbf{0}$

필수 예제 15-8

다음 정적분의 값을 구하여라.

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x|\cos x|dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(\sqrt{x^2+1}-x)dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{1} x^2e^{2x}dx$

정석연구

정적분의 부분적분법을 이용한다. (1)은 절댓값 때문에 구간을 나누어 부분적분을 적용한다.

모범답안

(1) $\int_0^{\pi/2} x\cos x dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\cos x dx = [x\sin x+\cos x]_0^{\pi/2} - [x\sin x+\cos x]_{\pi/2}^{\pi} = (\frac{\pi}{2}-1)-(-1-\frac{\pi}{2}) = \pi$

(2) $u=\ln(\sqrt{x^2+1}-x), v'=1$이라 하면 $u'=\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}}, v=x$
$[x\ln(\sqrt{x^2+1}-x)]_0^1 + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \ln(\sqrt{2}-1)+[\sqrt{x^2+1}]_0^1 = \ln(\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1})+\sqrt{\mathbf{2}}-\mathbf{1}$

(3) $[x^2\cdot\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - ([x\cdot\frac{1}{2}e^{2x}]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}dx) = \frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{2}+[\frac{1}{4}e^{2x}]_0^1 = \mathbf{\frac{e^2-1}{4}}$

필수 예제 15-9

다음을 만족시키는 연속함수 $f(x), g(x)$를 구하여라.

$$f(x)=x^2+\int_0^1 tg(t)dt, \quad g(x)=e^{-x}+x\int_0^1 f(t)dt$$

정석연구

정적분의 결과는 상수임을 이용한다. $\int_0^1 tg(t)dt = a, \int_0^1 f(t)dt = b$로 놓고 연립방정식을 푼다.

모범답안

$f(x)=x^2+a, g(x)=e^{-x}+bx$를 적분식에 대입

$a = \int_0^1 t(e^{-t} + bt)dt = [-te^{-t} - e^{-t} + \frac{b}{3}t^3]_0^1 = 1 - \frac{2}{e} + \frac{b}{3}$
$b = \int_0^1 (t^2 + a)dt = [\frac{1}{3}t^3 + at]_0^1 = \frac{1}{3} + a$
연립하면 $a = \frac{5}{3} - \frac{3}{e}, b = 2 - \frac{3}{e}$
$\therefore \mathbf{f(x) = x^2 + \frac{5}{3} - \frac{3}{e}}, \quad \mathbf{g(x) = e^{-x} + (2 - \frac{3}{e})x}$

필수 예제 15-10

$f(y) = \displaystyle\int_0^y e^{ax}\cos x dx$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $f(y)$를 구하여라.

(2) $\displaystyle\lim_{y\to\infty} f(y)$의 값이 존재하기 위한 a의 범위와 극한값을 구하여라.

정석연구

부분적분을 두 번 사용하여 정적분을 구한다. (2)는 지수함수의 극한 성질을 이용한다.

모범답안

(1) $\int e^{ax}\cos x dx = \frac{e^{ax}(a\cos x + \sin x)}{a^2+1} + C$ 이므로
$f(y) = \mathbf{\frac{e^{ay}(a\cos y + \sin y) - a}{a^2+1}}$

(2) $y \to \infty$ 일 때 e^{ay}가 수렴해야 하므로 $\mathbf{a < 0}$이다. 이때 극한값은 $-\mathbf{\frac{a}{a^2+1}}$

필수 예제 15-11

자연수 n에 대하여 $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ 라 할 때, 다음을 구하여라.

(1) $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ $(n \geq 2)$가 성립함을 증명하여라.

(2) I_5, I_{10}의 값을 구하여라.

정석연구

부분적분을 통해 점화식을 유도한다. $\sin^n x = \sin^{n-1} x \sin x$로 생각한다.

모범답안

(1) $u = \sin^{n-1} x, v' = \sin x$로 부분적분하면

$I_n = [-\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\pi/2} + (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx$
$= (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$
정리하면 $nI_n = (n-1)I_{n-2} \rightarrow \mathbf{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

(2) $I_5 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{8}{15} \cdot [-\cos x]_0^{\pi/2} = \mathbf{\frac{8}{15}}$
$I_{10} = \frac{9}{10} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0 = \frac{63}{512} \cdot \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{63\pi}{1024}}$