수학 II - 제9장 부정적분

현경서T

1 부정적분의 정의와 계산

1.1 부정적분의 정의

기본정석: 부정적분(원시함수)의 정의

함수 $f(x)$가 주어져 있을 때, $F'(x) = f(x)$인 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 **원시함수**라고 한다.
$F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분의 하나일 때, $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x) + C$의 꼴로 나타내어지며, 이것을 다음과 같이 나타낸다.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

여기에서 C를 **적분상수**, 함수 $f(x)$를 **피적분함수**, x를 **적분변수**라 하고, $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 **적분한다**라고 한다.

부정적분과 도함수

부정적분과 미분은 서로 역연산의 관계에 있다.

1. $\dfrac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
2. $\int \left(\dfrac{d}{dx}f(x)\right) dx = f(x) + C$

1.2 부정적분의 계산

기본정석: 부정적분의 기본 공식

1. $\int k\,dx = kx + C$ (단, k는 상수)
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, n은 자연수)
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (단, $k \neq 0$인 상수)
4. $\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
5. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$ (단, $a \neq 0, n$은 자연수)

적분은 미분의 역 연산 이므로 우변을 미분한 것이 좌변의 피적분 함수와 같음.

2　필수 예제 및 유제

[필수 예제 9-1] 부정적분의 계산

다음 부정적분을 구하여라.

1. $\int (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)dx$
2. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx$
3. $\int \frac{y^3}{y+1}dy + \int \frac{1}{y+1}dy$
4. $\int (x+1)^3 dx - \int (x-1)^3 dx$

정석연구

(1) 적분에서는 다음에 주의해야 한다.

$$\int f(x)g(x)dx \neq \left(\int f(x)dx\right)\left(\int g(x)dx\right)$$

따라서 피적분함수를 전개한 다음 부정적분을 구한다.
(2) 피적분함수를 약분하여 다항함수로 고칠 수 있는지 확인한다.
(3), (4) 각 함수를 바로 적분하는 것은 복잡하다.

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int \{f(x) \pm g(x)\}dx \quad (\text{복부호동순})$$

를 이용하여 먼저 피적분함수를 간단히 해 보자.

모범답안

1. (준식) $= \int \{(x^2+1)+\sqrt{2}x\}\{(x^2+1)-\sqrt{2}x\}dx = \int \{(x^2+1)^2-2x^2\}dx$

$$= \int (x^4+1)dx = \frac{1}{5}x^5 + x + C$$

2. (준식) $= \int \frac{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}{x^2-x+1}dx = \int (x^2+x+1)dx$

$$= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + C$$

3. (준식) $= \int \frac{y^3+1}{y+1}dy = \int \frac{(y+1)(y^2-y+1)}{y+1}dy = \int (y^2-y+1)dy$

$$= \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{2}y^2 + y + C$$

4. (준식) $= \int \{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx = \int (6x^2+2)dx$

$$= 2x^3 + 2x + C$$

[필수 예제 9-2] 함숫값과 부정적분

다음 물음에 답하여라.

1. $f'(x) = 2 + 4x + 3x^2$ 이고 $f(0) = 3$ 인 함수 $f(x)$ 를 구하여라.

2. 함수 $y = 3x^2 - ax$ 의 부정적분 중에서 $x = 0$ 일 때 함숫값이 1이고, $x = 2$ 일 때 함숫값이 5 인 것을 구하여라. 단, a는 상수이다.

3. 두 점 $(0, -2), (1, 0)$ 을 지나는 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 (x, y) 에서의 접선의 기울기가 $3x^2 - 6x + 4$ 에 정비례할 때, $f(x)$ 를 구하여라.

정석연구

도함수 $f'(x)$ 로부터 원시함수 $f(x)$ 를 구할 때에는 다음을 이용한다.

$$f(x) = \int f'(x)dx$$

이때 나타나는 적분상수는 주어진 조건을 써서 알맞게 정한다.

모범답안

1. $f(x) = \int(2 + 4x + 3x^2)dx = 2x + 2x^2 + x^3 + C$ $f(0) = 3$ 이므로 $C = 3$ $\therefore f(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$

2. $f(x) = \int(3x^2 - ax)dx$ 라고 하면 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{2}ax^2 + C$ $f(0) = 1, f(2) = 5$ 이므로 $C = 1, \quad 8 - 2a + C = 5 \implies a = 2 \therefore f(x) = x^3 - x^2 + 1$

3. 문제의 조건으로부터 $f'(x) = k(3x^2 - 6x + 4)(k \neq 0)$ 로 놓으면 $f(x) = \int k(3x^2 - 6x + 4)dx = k(x^3 - 3x^2 + 4x) + C$ $f(0) = -2, f(1) = 0$ 이므로 $C = -2, \quad 2k + C = 0 \implies k = 1$ $\therefore f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 2$

[필수 예제 9-3] 도함수의 그래프와 부정적분

사차함수 $f(x)$ 의 도함수 $y = f'(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림(교재 참조)과 같다. $f(x)$ 의 극댓값이 0이고, 극솟값이 -16일 때, 함수 $f(x)$ 를 구하여라. (단, 그래프는 $x = -2, 0, 2$ 에서 x축과 만나고 원점 대칭인 삼차함수 형태임)

정석연구

주어진 그래프에서 $f'(x)=0$ 의 해는 $x=-2,0,2$ 이다. 따라서 증감표를 작성해 보면 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대, $x=\pm2$ 에서 극소임을 알 수 있다. 주어진 그래프로부터 먼저 $f'(x)$ 의 꼴을 정하고 $f(x)=\int f'(x)dx$ 와 주어진 조건을 이용하여 $f(x)$ 를 구해 보아라.

모범답안 $f'(x)$ 는 삼차함수이고 $f'(x)=0$ 의 해가 $x=-2,0,2$ 이므로

$$f'(x)=ax(x-2)(x+2)=a(x^3-4x) \quad (a>0)$$

로 놓으면

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int a(x^3-4x)dx=\frac{1}{4}ax^4-2ax^2+C \quad \cdots ①$$

$f'(x)$ 의 부호를 조사하면 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 극대이고, $x=\pm2$ 에서 극소이다. 극댓값이 0이므로 $f(0)=0 \implies C=0$ 극솟값이 -16이므로 $f(-2)=-16$ 또는 $f(2)=-16$ 그런데 $f(-2)=f(2)=4a-8a+C$ 이므로 $-4a+C=-16$ ①에 대입하면 $f(x)=x^4-8x^2$

[필수 예제 9-4] 도함수가 주어진 경우

두 다항함수 $f(x),g(x)$가

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1, \quad \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+2$$

를 만족시킨다. $f(0)=2,g(0)=-1$일 때, $f(x),g(x)$를 구하여라.

정석연구

$\frac{d}{dx}F(x)=f(x) \iff F(x)=\int f(x)dx$를 이용하여 먼저 $f(x)+g(x)$와 $f(x)g(x)$를 구한다.

모범답안

$f(x)+g(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C_1$. $x=0$을 대입하면 $C_1=2+(-1)=1$. $\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$

$f(x)g(x)=\int(3x^2-2x+2)dx=x^3-x^2+2x+C_2$. $x=0$을 대입하면 $C_2=2\times(-1)=-2$. $\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$

$f(x)+g(x)=(x-1)+(x^2+2)$이고 $f(0)=2,g(0)=-1$이므로 $f(x)=x^2+2, \quad g(x)=x-1$