미적분 - 제19장 속도 · 거리와 적분

수학의 정석

§1. 속도와 거리

기본 정석

속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 점 P가 $t=a$일 때부터 $t=b$일 때까지 움직이면

1. 점 P의 위치의 변화량 $\Rightarrow \int_a^b v(t)dt$

2. 점 P가 움직인 거리 $\Rightarrow \int_a^b |v(t)|dt$

Advice

속도와 거리

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=f(t)$일 때, 속도 $v(t)$는 $v(t)=\frac{dx}{dt}=f'(t)$ 이므로 $\int_{t_0}^t v(t)dt = f(t)-f(t_0)$ 이다.

이때, 시각 t_0에서의 점 P의 위치를 x_0이라고 하면 시각 t에서의 점 P의 위치 $f(t)$는

$$f(t)=f(t_0)+\int_{t_0}^t v(t)dt = x_0+\int_{t_0}^t v(t)dt$$

따라서 $t=a$일 때부터 $t=b$일 때까지 점 P의 위치의 변화량은 $f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$ 이다.

한편, 점 P가 움직인 거리는 시각 t에 대한 위치 $x=f(t)$의 그래프의 길이와는 다르며, 속도 $v(t)$의 절댓값을 적분한 것, 즉 속력 $|v(t)|$를 적분한 것이다.

§2. 평면 위를 움직인 거리

기본 정석

평면 위를 움직인 거리

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x = f(t), y = g(t)$일 때, 시각 $t = a$에서 $t = b$까지 점 P가 움직인 거리 s는

$$s = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

Advice

평면 위를 움직인 거리

시각 t에서 $t + \Delta t$까지 점 P가 움직인 거리의 변화량을 Δs라고 하면 $(\Delta s)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ 이므로 $\left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \approx \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2$ 이다.

$\Delta t \to 0$ 일 때, $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ 이므로 $s = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} dt$ 이다.

§3. 곡선의 길이

기본 정석

곡선의 길이

1. 매개변수 t로 나타내어진 곡선 $x = f(t), y = g(t) (a \leq t \leq b)$의 길이 L은

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

2. 곡선 $y = f(x) (a \leq x \leq b)$의 길이 L은

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

필수 예제

필수 예제 19-1

좌표가 2인 점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$가 $v(t) = 6t^2 - 18t + 12$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 시각 $t = 3$에서의 점 P의 위치

(2) 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P의 위치의 변화량

(3) 시각 $t = 1$에서 $t = 3$까지 점 P가 움직인 거리

정석연구

시각 t에서의 점 P의 위치를 x라고 하면 $x = x_0 + \int_0^t v(t)dt$ (단, x_0은 $t = 0$일 때의 위치)

모범답안

(1) $x = 2 + \int_0^3 (6t^2 - 18t + 12)dt = 2 + [2t^3 - 9t^2 + 12t]_0^3 = \mathbf{11}$

(2) $\int_1^3 (6t^2 - 18t + 12)dt = [2t^3 - 9t^2 + 12t]_1^3 = 9 - 5 = \mathbf{4}$

(3) $v(t) = 6(t-1)(t-2)$ 이므로 1에서 3까지의 움직인 거리는 $\int_1^2 |v(t)|dt + \int_2^3 |v(t)|dt = |[2t^3 - 9t^2 + 12t]_1^2| + |[2t^3 - 9t^2 + 12t]_2^3| = 1 + 5 = \mathbf{6}$

필수 예제 19-2

지상 10m의 높이에서 $30m/s$의 속도로 지면과 수직하게 위로 던져 올린 물체의 t초 후의 속도 $v(t)$가 $v(t) = 30 - 10t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 던져 올린 후 2초가 지났을 때, 지면으로부터의 높이

(2) 이 물체가 최고 높이에 도달했을 때, 지면으로부터의 높이

(3) 던져 올린 후 4초 동안 물체가 움직인 거리

모범답안

(1) $h = 10 + \int_0^2 (30 - 10t)dt = 10 + [30t - 5t^2]_0^2 = \mathbf{50(m)}$

(2) $v(t) = 30 - 10t = 0$ 에서 $t = 3$이므로 $h = 10 + \int_0^3 (30 - 10t)dt = \mathbf{55(m)}$

(3) $\int_0^4 |30 - 10t|dt = \int_0^3 (30 - 10t)dt + \int_3^4 -(30 - 10t)dt = 45 + 5 = \mathbf{50(m)}$

필수 예제 19-5

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 위치 (x, y)가 $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$일 때, 시각 $t = 0$에서 $t = 1$까지 점 P가 움직인 거리 s를 구하여라.

모범답안

$\frac{dx}{dt} = e^t(\cos t - \sin t)$, $\frac{dy}{dt} = e^t(\sin t + \cos t)$

$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = e^{2t}(\cos^2 t - 2\sin t\cos t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t\cos t + \cos^2 t) = 2e^{2t}$

$s = \int_0^1 \sqrt{2e^{2t}}dt = \sqrt{2}\int_0^1 e^t dt = \sqrt{2}[e^t]_0^1 = \boldsymbol{\sqrt{2}(e-1)}$