수학2: 제10장 정적분의 계산 연습문제

학번: ____________________ 이름: ____________________

문제 1. $F(t) = \int_0^t (1+x+x^2+\cdots+x^n)dx$ 일 때, $\int_0^1 F(t)dt = \frac{11}{12}$ 을 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

문제 2. 함수 $f(x) = x^3-(a+1)x^2+ax$ 가 $f(x) = \int_0^1 \{f(x)-f(t)\}dt$ 를 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하여라.

문제 3. $\mathrm{Max}(a,b)$는 a,b 중에서 작지 않은 것을 나타낼 때, $f^+(x) = \mathrm{Max}(x,0)$, $f^-(x) = \mathrm{Max}(-x,0)$ 으로 정의하자. 이때, $\int_{-1}^2 f^+(x)dx + \int_{-1}^2 f^-(x)dx$ 의 값을 구하여라.

문제 4. 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$ 를 만족시키고, $-1 \le x \le 1$ 에서

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & (-1 \le x \le 0) \\ -x+1 & (0 \le x \le 1) \end{cases}$$

일 때, $\int_{-5}^5 f(x+1)dx$ 의 값을 구하여라.

문제 5. 연속함수 $f(x)$가 다음 세 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(2+x) = f(2-x)$

(가) $\int_{-2}^{2} f(x)dx = 2k+4$

(가) $\int_0^6 f(x)dx = k^2$

$\int_0^4 f(x)dx$ 의 값이 최소가 되는 상수 k의 값을 구하여라.

문제 6. 함수 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8$ 에 대하여 $0 \le x \le r$ 에서 $|f(x)|$ 의 최댓값을 $M(r)$ 라고 할 때, $\int_0^5 M(r)dr$ 의 값을 구하여라.

문제 7. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & (x \le 1) \\ x^2 & (x \ge 1) \end{cases}$ 으로 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $\int_1^3 xf(x-1)dx$ 의 값을 구하여라.

문제 8. $f(x) = \int_0^1 |t^2 - xt|dt$ 로 정의된 함수 $f(x)$ 의 최솟값을 구하여라.

문제 9. 다음과 같이 정의된 다항함수 $f_n(x)$ 를 구하여라.

$$f_1(x) = 2x, \quad f_{n+1}(x) = x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 f_n(x)dx \quad (\text{단, } n = 1, 2, 3, \ldots)$$

문제 10. 모든 일차함수 $g(x)$ 에 대하여 $\int_0^1 g(x)f(x)dx = 0$ 을 만족시키고, $f(0) = 1$인 이차함수 $f(x)$ 를 구하여라.

문제 11. 함수 $y = f(x)$ 의 그래프의 개형이 아래로 볼록할 때, 실수 a, b에 대하여 다음 두 식의 대소를 비교하여라. (단, $f(x) > 0$ 이다.)

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx, \quad \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

문제 12. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ 를 만족시키는 c가 구간 $[a, b]$ 에 적어도 하나 존재함을 증명하여라.