미적분 - 제14장 치환적분과 부분적분

수학의 정석

§1. 치환적분법

기본 정석

1. **치환적분에 관한 공식**

   미분가능한 함수 $g(t)$ 에 대하여 $x = g(t)$ 로 놓으면

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt$$

2. **치환적분에 관한 기본 유형**

   (1) $\int f(x)dx = F(x) + C$ 이면 $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C (a \neq 0)$

   (2) $g(x) = t$ 라고 하면 $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(t)dt$

   (3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$

Advice

1° 치환적분에 관한 공식

일반적으로 함수 $f(x)$ 의 부정적분을 $y = \int f(x)dx$ 라고 할 때, x 가 t 의 미분가능한 함수 $x = g(t)$ 로 나타내어지면 합성함수의 미분법에 의하여 $\frac{dy}{dt} = f(g(t))g'(t)$ 이다. 따라서 $y = \int f(g(t))g'(t)dt$ 가 성립한다. 이 공식을 이용하는 적분법을 치환적분법이라고 한다.

Advice

2° 치환적분에 관한 기본 유형

(1) $\int f(ax+b)dx$ 꼴은 $ax+b=t$ 로 치환하여 공식을 적용하면 편리하다.

(2) $\int f(g(x))g'(x)dx$ 꼴은 $g(x)=t$ 로 치환하면 $\int f(t)dt$ 가 된다.

(3) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ 꼴은 분모를 t 로 치환하면 $\int \frac{1}{t}dt = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C$ 가 된다.

§2. 부분적분법

기본 정석

부분적분에 관한 공식

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

$$\int u'v\ dx = uv - \int uv'dx \quad (\text{단, } u = f(x), v = g(x))$$

Advice

2° 부분적분법을 적용하는 방법

피적분함수가 두 함수의 곱으로 되어 있을 때 어느 것을 u' 이라 하고, 어느 것을 v 라고 할 것인가를 잘 판단해야 한다. 대부분의 경우 다음 순서에 따른다:

$\ln x$ **(로그),** x^n **(다항),** $\sin x$ **(삼각),** e^x **(지수)**

위 순서에서 오른쪽으로 갈수록 u' 으로, 왼쪽으로 갈수록 v 로 정한다.

필수 예제

필수 예제 14-1

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x(1-x)^{10}dx$

(2) $\int \frac{1}{2x+1}dx$

(3) $\int \frac{1}{\sqrt[4]{2x+3}}dx$

(4) $\int \sin^2 x\ dx$

(5) $\int 10^{3x+2}dx$

(6) $\int (e^x - e^{-x})^2 dx$

정석연구

함수 $f(ax+b)$ (괄호 안이 일차식) 꼴의 부정적분이다. 이와 같은 꼴의 부정적분은 $\int f(x)dx = F(x)+C$ 이면 $\Rightarrow \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C(a \neq 0)$ 를 기억해 두고서 활용하는 것이 편리하다.

모범답안

(1) $\int x(1-x)^{10}dx = \int \{1-(1-x)\}(1-x)^{10}dx = \int \{(1-x)^{10} - (1-x)^{11}\}dx$
$= -\frac{1}{11}(1-x)^{11} + \frac{1}{12}(1-x)^{12} + C$

(2) $\frac{1}{2}\ln|2x+1| + C$

(3) $\int (2x+3)^{-\frac{1}{4}}dx = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}(2x+3)^{\frac{3}{4}} + C = \frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+3)^3} + C$

(4) $\int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$

(5) $\frac{1}{3} \times \frac{10^{3x+2}}{\ln 10} + C = \frac{10^{3x+2}}{3\ln 10} + C$

(6) $\int (e^{2x} - 2 + e^{-2x})dx = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x - \frac{1}{2}e^{-2x} + C$

필수 예제 14-2

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{x^2+1}{x+1}dx$

(2) $\int \frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2}dx$

정석연구

(1) x^2+1 을 $x+1$ 로 나눈 몫은 $x-1$, 나머지는 2이므로 피적분함수를 다음과 같이 변형할 수 있다. $\frac{x^2+1}{x+1} = x-1+\frac{2}{x+1}$
(2) 피적분함수를 부분분수로 변형한다.
정석: $\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C(a \neq 0)$

모범답안

(1) $\int (x-1+\frac{2}{x+1})dx = \frac{1}{2}x^2 - x + 2\ln|x+1| + C$

(2) $\frac{2x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{(x+2)^2}$ 라 하면 $a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{3}, c = 1$
$\int (\frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2} + \frac{1}{(x+2)^2})dx = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| - \frac{1}{x+2} + C$

필수 예제 14-3

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{x}{\sqrt{x+2}}dx$

(2) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}dx$

정석연구

(1)은 분자의 x 를 $(x+2)-2$ 로 변형하고, (2)는 분모를 유리화한다. 그리고 이들을 $\int (ax+b)^r dx$ 의 꼴로 변형한 다음 $\frac{1}{a} \times \frac{1}{r+1}(ax+b)^{r+1} + C$ 를 이용한다.

모범답안

(1) $\int(\sqrt{x+2}-\frac{2}{\sqrt{x+2}})dx=\int\{(x+2)^{\frac{1}{2}}-2(x+2)^{-\frac{1}{2}}\}dx=\frac{2}{3}(x-4)\sqrt{x+2}+C$

(2) $\int\frac{1}{2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})dx=\frac{1}{3}\{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}\}+C$

필수 예제 14-4

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int(x^2+2x+2)^5(x+1)dx$

(2) $\int(x^2-1)\sqrt{x^3-3x}dx$

(3) $\int(1+\sin x)^2\cos x\ dx$

(4) $\int\sin x\cos 2x\ dx$

(5) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}dx$

정석연구

정석: $g(x)=t$ 라고 하면 $\int f(g(x))g'(x)dx=\int f(t)dt$

모범답안

(1) $x^2+2x+2=t\Rightarrow(x+1)dx=\frac{1}{2}dt.\ \int t^5\times\frac{1}{2}dt=\frac{1}{12}(x^2+2x+2)^6+C$

(2) $x^3-3x=t\Rightarrow(x^2-1)dx=\frac{1}{3}dt.\ \int\sqrt{t}\times\frac{1}{3}dt=\frac{2}{9}(x^3-3x)\sqrt{x^3-3x}+C$

(3) $1+\sin x=t\Rightarrow\cos x\ dx=dt.\ \int t^2dt=\frac{1}{3}(1+\sin x)^3+C$

(4) $\cos x=t\Rightarrow\sin x\ dx=-dt.\ \int(2t^2-1)(-dt)=-\frac{2}{3}\cos^3 x+\cos x+C$

(5) $e^x+1=t\Rightarrow e^xdx=dt.\ \int\frac{1}{\sqrt{t}}dt=2\sqrt{e^x+1}+C$

필수 예제 14-5

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$

(2) $\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$

(3) $\int \tan 2x \ dx$

(4) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

(5) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

정석연구

정석: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)|+C$

모범답안

(1) $\ln(x^2+x+1)+C$

(2) $\int (\frac{2/3}{x-1} - \frac{1/3(2x+1)}{x^2+x+1})dx = \frac{2}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln(x^2+x+1)+C$

(3) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C$

(4) $\ln|\ln x|+C$

(5) $\ln(e^x+e^{-x})+C$

필수 예제 14-6

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int (2+3x)\sqrt{1+2x}dx$

(2) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}dx$

(3) $\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$

정석연구

정석: $\sqrt{f(x)}$ 를 포함한 부정적분은 $\sqrt{f(x)}=t$ 또는 $f(x)=t$ 로 치환하여라.

모범답안

(1) $\sqrt{1+2x}=t \Rightarrow dx=tdt.\ \dfrac{1}{15}(9x+7)(2x+1)\sqrt{1+2x}+C$

(2) $\sqrt{x+1}=t \Rightarrow dx=2tdt.\ \dfrac{2}{3}(x-5)\sqrt{x+1}+C$

(3) $\sqrt{1-x^2}=t \Rightarrow xdx=-tdt.\ -\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}+C$

필수 예제 14-7

다음 물음에 답하여라.

(1) $x=a\sin\theta(-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2})$ 로 치환하여 $\int\dfrac{1}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}dx(a>0)$ 를 구하여라.

(2) $x=a\tan\theta(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2})$ 로 치환하여 $\int\dfrac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}dx(a>0)$ 를 구하여라.

정석연구

정석: $\sqrt{a^2-x^2}$ 가 있으면 $x=a\sin\theta$ 로, $\sqrt{a^2+x^2}$ 가 있으면 $x=a\tan\theta$ 로 치환한다.

모범답안

(1) $\dfrac{1}{a^2}\tan\theta+C=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C$

(2) $\dfrac{1}{a^2}\sin\theta+C=\dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}+C$

필수 예제 14-8

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int xe^{-x}dx$

(2) $\int x\cos^2 x\ dx$

(3) $\int \ln(x+2)dx$

모범답안

(1) $u'=e^{-x}, v=x \Rightarrow -(x+1)e^{-x}+C$

(2) $\frac{1}{2}\int x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}(2x^2+2x\sin 2x+\cos 2x)+C$

(3) $u'=1, v=\ln(x+2) \Rightarrow (x+2)\ln(x+2)-x+C$

필수 예제 14-9

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int x^2 e^x dx$

(2) $\int x^2 \sin x \ dx$

(3) $\int (\ln x)^2 dx$

정석연구

부분적분법을 한 번 적용해서 적분이 안 되면 다시 적용한다.

모범답안

(1) $(x^2-2x+2)e^x+C$

(2) $(2-x^2)\cos x+2x\sin x+C$

(3) $x(\ln x)^2-2x\ln x+2x+C$

필수 예제 14-10

다음 부정적분을 구하여라.

(1) $\int e^x \cos x \ dx$

(2) $\int e^x \sin^2 x \ dx$

정석연구

부분적분법을 거듭 적용하면 원래 함수가 포함된 적분 꼴이 반복하여 나타난다.

모범답안

(1) $I=\int e^x \cos x \ dx \Rightarrow I=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

(2) $e^x \sin^2 x - \dfrac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2\cos 2x) + C$

필수 예제 14-11

자연수 n 에 대하여 $I_n = \int (\ln x)^n dx$ 라고 할 때,

(1) $I_n = x(\ln x)^n - nI_{n-1}(n \geq 2)$ 이 성립함을 증명하여라.

(2) I_1, I_2, I_3 을 구하여라.

정석연구

정석: 적분의 점화식은 부분적분을 이용한다.

모범답안

(1) $u' = 1, v = (\ln x)^n$ 이라 하면 $I_n = x(\ln x)^n - n\int(\ln x)^{n-1}dx = x(\ln x)^n - nI_{n-1}$

(2) $I_1 = x\ln x - x + C$, $I_2 = x(\ln x)^2 - 2x\ln x + 2x + C$, $I_3 = x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x\ln x - 6x + C$