

미적분 - 제18장 부피와 적분

수학의 정석

§1. 일반 입체의 부피

기본 정석

일반 입체의 부피

x 축에 수직인 평면으로 어떤 입체를 자를 때, 자른 단면의 넓이가 $S(x)$ 이면 이 입체의 $x = a$ 와 $x = b$ (단, $a < b$) 사이에 있는 부분의 부피 V 는

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Advice

일반 입체의 부피

주어진 입체에 대하여 한 직선을 x 축으로 정하여 x 좌표가 x (단, $a \leq x \leq b$)인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체를 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 할 때, 이 입체의 $x = a$ 와 $x = b$ 사이에 있는 부분의 부피 V 를 구하는 방법을 알아보자.

닫힌구간 $[a, b]$ 를 n 등분하여 양 끝 점과 각 분점의 x 좌표를 왼쪽부터 $x_0 (= a), x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n (= b)$ 이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx 라고 하면

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k\Delta x$$

이때, x 좌표가 x_k ($k = 1, 2, \dots, n$) 인 점을 지나고 x 축에 수직인 평면으로 입체를 자른 단면 을 밑면으로 하고 높이가 Δx 인 기둥의 부피는 $S(x_k)\Delta x$ 이므로 이들 n 개의 기둥의 부피의 합을 V_n 이라고 하면

$$V_n = \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x$$

이고, 여기에서 $n \rightarrow \infty$ 일 때 $V_n \rightarrow V$ 이다. 따라서 정적분과 급수의 관계에 의하여 구하는 부피 V 는

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx$$

곧, 단면의 넓이를 x 의 함수 $S(x)$ 로 나타낼 수 있는 입체는 그 부피를 정적분으로 나타내어 구할 수 있다.

Advice

이와 같은 입체의 부피와 정적분의 관계를 다음과 같이 생각할 수도 있다.

$$\begin{array}{c} \text{부피 요소} \xrightarrow{\text{합}} \text{부피 요소의 합} \xrightarrow{\text{한없이 세분한 극한}} \text{부피} \\ S(x_k)\Delta x \implies \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n S(x_k)\Delta x = \int_a^b S(x)dx \end{array}$$

§2. 회전체의 부피

기본 정석

① x 축을 회전축으로 하는 회전체

곡선 $y = f(x)$ (단, $a \leq x \leq b$)를 x 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 V 라고 하면

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

② y 축을 회전축으로 하는 회전체

곡선 $x = g(y)$ (단, $\alpha \leq y \leq \beta$)를 y 축 둘레로 회전시킨 회전체의 부피를 V 라고 하면

$$V = \int_\alpha^\beta \pi x^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta \{g(y)\}^2 dy$$

Advice

회전체의 부피

회전체는 일반 입체의 특수한 경우로서 단면이 원이다. 따라서 단면인 원의 넓이를 x 에 관한 식으로 나타낸 다음, 이를 일반 입체의 부피 공식 $\int_a^b S(x)dx$ 에 대입하면 된다.

곧, 회전체의 부피를 V 라고 하면

(i) 곡선 $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$)를 x 축 둘레로 회전시킨 입체일 때에는 $S(x) = \pi y^2 = \pi \{f(x)\}^2$ 이므로

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

(ii) 곡선 $x = g(y)$ ($\alpha \leq y \leq \beta$)를 y 축 둘레로 회전시킨 입체일 때에는 $S(y) = \pi x^2 = \pi \{g(y)\}^2$ 이므로

$$V = \int_\alpha^\beta \pi x^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta x^2 dy = \pi \int_\alpha^\beta \{g(y)\}^2 dy$$

Advice

회전축을 포함하는 경우

회전하는 도형이 회전축을 포함하고 있으면 어떤 부분은 회전체의 모양에 영향을 주지 않는

다. 이 경우 회전축의 한쪽으로 모아서 생각하면 된다.

필수 예제

필수 예제 18-1

어떤 그릇에 수면의 높이가 x cm가 되도록 물을 넣을 때, 물의 부피 V cm³ 는 다음과 같다고 한다.

$$V = x^3 - 3x^2 + 4x$$

- (1) 수면의 높이가 5cm일 때, 수면의 넓이를 구하여라.
- (2) 수면의 넓이가 13 cm² 일 때, 수면의 높이를 구하여라.

정석연구

수면의 높이가 t 일 때 수면의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면, 높이가 x 일 때 물의 부피 V 는

$$V = \int_0^x S(t)dt$$

이다. 그런데 문제의 조건에서 $V = x^3 - 3x^2 + 4x$ 이므로

$$\int_0^x S(t)dt = x^3 - 3x^2 + 4x$$

여기에서 $S(x)$ 를 구할 때에는 다음 정적분과 미분의 관계를 이용한다. 정석 $\frac{d}{dx} \int_a^x S(t)dt = S(x)$ (a 는 상수)

모범답안

수면의 높이가 t 일 때 수면의 넓이를 $S(t)$ 라고 하면, 높이가 x 일 때 물의 부피는 $\int_0^x S(t)dt$ 이다. 따라서 문제의 조건으로부터

$$\int_0^x S(t)dt = x^3 - 3x^2 + 4x$$

양변을 x 에 관하여 미분하면 $S(x) = 3x^2 - 6x + 4$

- (1) $x = 5$ 일 때이므로 $S(5) = 3 \times 5^2 - 6 \times 5 + 4 = 49(\text{cm}^2)$
- (2) $S(x) = 13$ 일 때이므로 $3x^2 - 6x + 4 = 13 \implies 3(x-3)(x+1) = 0$
 $x > 0$ 이므로 $x = 3(\text{cm})$

필수 예제 18-2

xy 평면에 곡선 $y = \frac{1}{x} \ln x$ 와 x 축 및 직선 $x = e^2$ 으로 둘러싸인 도형이 있다. 이 도형을 밑면으로 하는 입체를 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 반원일 때, 이 입체의 부피를 구하여라.

정석연구

단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 할 때, 입체의 부피 V 는 다음과 같이 정적분으로 나타내어 구할 수 있다.

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

모범답안

$y = \frac{\ln x}{x}$ 에서 $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ 이므로 $y' = 0$ 에서 $x = e$. 점 $(x, 0)$ 을 지나고 x -축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면

$$S(x) = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{y}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8} \times \frac{(\ln x)^2}{x^2}$$

따라서 구하는 부피를 V 라고 하면

$$\begin{aligned} V &= \int_1^{e^2} S(x)dx = \int_1^{e^2} \frac{\pi}{8} \frac{(\ln x)^2}{x^2} dx = \frac{\pi}{8} \left\{ \left[-\frac{1}{x} (\ln x)^2 \right]_1^{e^2} + 2 \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x^2} dx \right\} \\ &= \frac{\pi}{8} \left(-\frac{4}{e^2} + 2 \left[-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right]_1^{e^2} \right) = \frac{\pi}{8} \left\{ -\frac{4}{e^2} + 2 \left(-\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} \right) + 2 \right\} = \frac{\pi}{4e^2} (e^2 - 5) \end{aligned}$$

필수 예제 18-3

밑면의 반지름의 길이가 a 이고 높이가 $2a$ 인 원기둥이 있다. 밑면의 한 지름을 포함하고 밑면과 이루는 각의 크기가 60° 인 평면으로 이 원기둥을 두 개의 부분으로 나눌 때, 작은 쪽의 부피 V 를 구하여라.

정석연구

입체의 부피는 다음 순서로 구한다.

첫째- x -축과 원점을 정한다.

둘째- x -좌표가 x 인 점을 지나고 x -축에 수직인 평면으로 자른 입체의 단면의 넓이 $S(x)$ 를 구한다.

셋째-필요한 구간에서 단면의 넓이 $S(x)$ 를 적분한다.

모범답안

밑면의 지름 AB 를 x -축, 밑면의 중심 O 를 원점으로 하자. x -축 위에 점 $P(x, 0)$ ($-a \leq x \leq a$) 을 잡고, 점 P 를 지나고 x -축에 수직인 평면으로 자른 입체의 단면의 넓이를 $S(x)$ 라고 하면 $\overline{PQ} = \sqrt{a^2 - x^2}$ 이고 $\overline{QR} = \overline{PQ} \tan 60^\circ = \sqrt{3}\sqrt{a^2 - x^2}$ 이다.

$$S(x) = \Delta PQR = \frac{1}{2} \times \overline{PQ} \times \overline{QR} = \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - x^2)$$

$$V = \int_{-a}^a S(x)dx = 2 \int_0^a \frac{\sqrt{3}}{2} (a^2 - x^2) dx = \sqrt{3} \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a = \frac{2\sqrt{3}}{3} a^3$$

필수 예제 18-4

- (1) 반원 $x^2 + y^2 = 4(x \geq 0)$ 와 포물선 $y^2 = 3x$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.
- (2) 곡선 $y = \sqrt{x} \sin x(0 \leq x \leq \pi)$ 와 x 축으로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.

정석연구

정석 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피는 $\pi \int_a^b y^2 dx$

모범답안

- (1) 교점의 x 좌표는 $x^2 + 3x - 4 = 0$ 에서 $x = 1, -4$. $x \geq 0$ 이므로 $x = 1$.

$$V = \pi \int_0^1 3x dx + \pi \int_1^2 (4 - x^2) dx = 3\pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^1 + \pi \left[4x - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 = \frac{19}{6}\pi$$

$$\begin{aligned} (2) V &= \pi \int_0^\pi y^2 dx = \pi \int_0^\pi x \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi x(1 - \cos 2x) dx \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left[\frac{1}{2}x^2 \right]_0^\pi - \left[\frac{x \sin 2x}{2} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} dx \right) = \frac{\pi^3}{4} + \frac{\pi}{2} \left[-\frac{\cos 2x}{4} \right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{4} \end{aligned}$$

필수 예제 18-5

다음 곡선과 직선으로 둘러싸인 도형을 y 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.

- (1) $y = e^x, y = e, x = 0$ (2) $y = \sin x(0 \leq x \leq \pi/2), y = 1, x = 0$

정석연구

정석 y 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피는 $\pi \int_\alpha^\beta x^2 dy$

(2)에서와 같이 x 를 y 로 나타내기 힘든 경우 다음 정석을 이용한다.

$$\int_\alpha^\beta x^2 dy = \int_a^b x^2 g'(x) dx \quad (\text{단, } y = g(x), g(a) = \alpha, g(b) = \beta)$$

모범답안

- (1) $y = e^x \implies x = \ln y$.

$$V = \pi \int_1^e (\ln y)^2 dy = \pi \left([y(\ln y)^2]_1^e - 2 \int_1^e \ln y dy \right) = \pi(e - 2[y \ln y - y]_1^e) = \pi(e - 2)$$

- (2) $V = \pi \int_0^1 x^2 dy$. $y = \sin x$ 에서 $dy = \cos x dx$.

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx = \pi([x^2 \sin x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 2x \sin x dx) = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi[\sin x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^3}{4} - 2\pi$$

필수 예제 18-6

- (1) 포물선 $y = 4 - x^2$ 과 직선 $y = x + 2$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.
- (2) 곡선 $y = x^2 (x \geq 0)$ 과 두 직선 $x = 0, y = x + 2$ 로 둘러싸인 도형을 y 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.

정석연구

도형 $ABCD$ 를 회전시킨 입체의 부피는 바깥쪽 곡선을 회전시킨 부피에서 안쪽 곡선을 회전시킨 부피를 뺀 것과 같다.

모범답안

(1) 교점은 $x = -2, 1$. $V = \pi \int_{-2}^1 (4 - x^2)^2 dx - \pi \int_{-2}^1 (x + 2)^2 dx = \pi \int_{-2}^1 (x^4 - 9x^2 - 4x + 12) dx = \frac{108}{5}\pi$

(2) 교점은 $y = 4$. $V = \pi \int_0^4 y dy - \pi \int_2^4 (y - 2)^2 dy = \pi[\frac{1}{2}y^2]_0^4 - \pi[\frac{1}{3}(y - 2)^3]_2^4 = \frac{16}{3}\pi$

필수 예제 18-7

곡선 $y = x^2$ 과 직선 $y = mx (m > 0)$ 로 둘러싸인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 V_x , y 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피를 V_y 라고 하자.

- (1) $V_x = V_y$ 일 때, 상수 m 의 값을 구하여라.
(2) $V_y - V_x$ 의 최댓값과 이때 상수 m 의 값을 구하여라.

모범답안

교점은 $(0, 0), (m, m^2)$ 이다. $V_x = \pi \int_0^m (mx)^2 dx - \pi \int_0^m (x^2)^2 dx = \frac{2}{15}\pi m^5$, $V_y = \pi \int_0^{m^2} y dy - \pi \int_0^{m^2} (\frac{1}{m}y)^2 dy = \frac{\pi}{6}m^4$

(1) $V_x = V_y \implies 12m^5 = 15m^4 \implies m = 5/4$

(2) $f(m) = V_y - V_x = \frac{\pi}{6}m^4 - \frac{2}{15}\pi m^5 \implies f'(m) = -\frac{2}{3}\pi m^3(m - 1)$. 증감표에 의해 $m = 1$ 일 때 최댓값 $\pi/30$ 이다.

필수 예제 18-8

두 곡선 $y = \sin x, y = \cos x$ 로 둘러싸인 $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}\pi$ 인 도형을 x 축 둘레로 회전시킨 입체의 부피 V 를 구하여라.

정석연구

정석 회전축을 포함하는 경우 회전축의 한쪽으로 모은다.

모범답안

$$\begin{aligned} \text{점 찍은 두 부분에 의하여 생기는 입체의 부피가 같으므로 } V &= 2\pi \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sin^2 x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos^2 x dx \right) = \\ &2\pi \left(\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2x}{2} dx \right) \\ &= 2\pi \left(\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\pi/4}^{3\pi/4} - \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_{\pi/4}^{\pi/2} \right) = \frac{\pi}{4}(\pi + 6) \end{aligned}$$

필수 예제 18-9

곡선 $y = \ln x$ 와 원점에서 이 곡선에 그은 접선 및 x -축으로 둘러싸인 도형을 F 라고 할 때, x -축 및 y -축 회전체의 부피 V_x, V_y 를 구하여라.

모범답안

접선의 방정식은 $y = \frac{1}{e}x$ 이다.

$$(1) V_x = \pi \int_0^e \left(\frac{1}{e}x \right)^2 dx - \pi \int_1^e (\ln x)^2 dx = \frac{1}{3}\pi e - \pi(e-2) = \frac{2}{3}\pi(3-e)$$

$$(2) V_y = \pi \int_0^1 (ey)^2 dy - \pi \int_0^1 (ey)^2 dy = \pi \left[\frac{1}{2}e^{2y} \right]_0^1 - \pi [e^2 \times \frac{1}{3}y^3]_0^1 = \frac{\pi}{6}(e^2 - 3)$$

필수 예제 18-10

원 $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$ 을

(1) x -축 둘레로 회전시킨 부피를 구하여라.

(2) 직선 $3x - 4y + 8 = 0$ 둘레로 회전시킨 부피를 구하여라.

모범답안

원의 방정식은 $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 이다.

$$(1) V_1 = \pi \int_{-3}^{-1} [\{3 + \sqrt{1 - (x+2)^2}\}^2 - \{3 - \sqrt{1 - (x+2)^2}\}^2] dx = 12\pi \int_{-3}^{-1} \sqrt{1 - (x+2)^2} dx$$

$x+2 = \sin \theta$ 로 치환하여 계산하면 $V_1 = 6\pi^2$

(2) 원의 중심 $(-2, 3)$ 과 직선 사이의 거리는 2이다. 중심이 $(0, 2)$ 이고 반지름이 1인 원의 회전체 부피와 같으므로 $V_2 = \pi \int_{-1}^1 \{(2 + \sqrt{1 - X^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - X^2})^2\} dX = 16\pi \int_0^1 \sqrt{1 - X^2} dX = 4\pi^2$