수학 II - 제9장 부정적분

학습자료

1 부정적분의 정의와 계산

1.1 부정적분의 정의

기본정석: 부정적분(원시함수)의 정의

함수 $f(x)$가 주어져 있을 때, $F'(x) = f(x)$인 함수 $F(x)$를 $f(x)$의 **부정적분** 또는 **원시함수**라고 한다.
$F(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분의 하나일 때, $f(x)$의 모든 부정적분은 $F(x) + C$의 꼴로 나타내어지며, 이것을 다음과 같이 나타낸다.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (\text{단, } C\text{는 상수})$$

여기에서 C를 **적분상수**, 함수 $f(x)$를 **피적분함수**, x를 **적분변수**라 하고, $f(x)$의 부정적분을 구하는 것을 $f(x)$를 **적분한다**라고 한다.

부정적분과 도함수

부정적분과 미분은 서로 역연산의 관계에 있다.

1. $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$
2. $\int \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) dx = f(x) + C$

Advice

Advice 1°: 부정적분의 의미
이를테면 x^2의 도함수를 구하면 $2x$이다. 이것을 'x^2의 도함수는 $2x$이다'라 하고, $(x^2)' = 2x$와 같이 나타내었다.
역으로 x^2은 도함수가 $2x$인 함수이다. 이때 x^2을 $2x$의 부정적분이라고 한다. 그러나 도함수가 $2x$인 함수는 x^2뿐만 아니라 $x^2 + 1, x^2 - 5$ 등 무수히 많다. 따라서 $2x$의 부정적분은 일반적으로 $x^2 + C$ (C는 상수)로 나타낸다.

1.2 부정적분의 계산

기본정석: 부정적분의 기본 공식

1. $\int k\,dx = kx + C$ (단, k는 상수)
2. $\int x^n\,dx = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, n은 자연수)
3. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ (단, $k \neq 0$인 상수)
4. $\int \{f(x) \pm g(x)\}\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
5. $\int (ax+b)^n\,dx = \dfrac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1} + C$ (단, $a \neq 0, n$은 자연수)

2 필수 예제 및 유제

[필수 예제 9-1] 부정적분의 계산

다음 부정적분을 구하여라.

1. $\int(x+1)^3dx - \int(x-1)^3dx$
2. $\int\dfrac{x^3}{x-1}dx - \int\dfrac{1}{x-1}dx$

정석연구

각 항을 전개하거나 나누어 적분할 수도 있지만, 부정적분의 성질

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = \int\{f(x) \pm g(x)\}dx$$

를 이용하여 피적분함수를 간단히 한 후 적분하는 것이 편리하다.

모범답안

1. $\int\{(x+1)^3-(x-1)^3\}dx = \int\{(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3-3x^2+3x-1)\}dx$
$$= \int(6x^2+2)dx = 2x^3+2x+C$$

2. $\int\left(\dfrac{x^3}{x-1} - \dfrac{1}{x-1}\right)dx = \int\dfrac{x^3-1}{x-1}dx$
$$= \int\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx = \int(x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$$

유제 9-1 다음 부정적분을 구하여라.

1. $\int(3x+1)^2dx$
2. $\int\dfrac{x^2+4}{x+2}dx + \int\dfrac{4x}{x+2}dx$

[필수 예제 9-2] 함숫값과 부정적분

함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=3x^2-4x+a$이고 $f(1)=2, f(2)=8$일 때, 상수 a의 값과 $f(x)$를 구하여라.

정석연구

$f'(x)$가 주어졌으므로 적분하여 $f(x)$를 구한다. 이때 적분상수 C와 미정계수 a는 주어진 두 함숫값 조건($f(1) = 2, f(2) = 8$)을 연립하여 구한다.

모범답안

$f(x) = \int f'(x)dx = \int(3x^2 - 4x + a)dx = x^3 - 2x^2 + ax + C$

$f(1) = 1 - 2 + a + C = 2 \implies a + C = 3 \quad \cdots$ ①

$f(2) = 8 - 8 + 2a + C = 8 \implies 2a + C = 8 \quad \cdots$ ②

①, ②를 연립하여 풀면 $a = 5, C = -2$

따라서 $a = 5$이고 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 2$이다.

유제 9-2 곡선 $y = f(x)$ 위의 임의의 점 (x, y)에서의 접선의 기울기가 $2x + 1$이고, 이 곡선이 점 $(1, 3)$을 지날 때, $f(x)$를 구하여라.

[필수 예제 9-3] 연속함수의 부정적분

모든 실수 x에서 연속인 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 다음과 같다.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ 3x^2 - 1 & (x < 1) \end{cases}$$

$f(0) = 2$일 때, $f(2)$의 값을 구하여라.

정석연구

범위에 따라 함수가 다를 때는 각 범위에서 적분하되, 각각의 적분상수 C_1, C_2를 둔다. 그 후 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이라는 조건($\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1+} f(x) = f(1)$)을 이용하여 적분상수 간의 관계를 구한다.

모범답안

$x \geq 1$일 때, $f(x) = \int 2xdx = x^2 + C_1$

$x < 1$일 때, $f(x) = \int(3x^2 - 1)dx = x^3 - x + C_2$

$f(0) = 2$이므로 $x < 1$의 식에 대입하면 $0 - 0 + C_2 = 2 \implies C_2 = 2$

따라서 $x < 1$일 때 $f(x) = x^3 - x + 2$이다.

$f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $\lim_{x\to1+}(x^2+C_1)=\lim_{x\to1-}(x^3-x+2)$

$1+C_1=1-1+2 \implies C_1=1$

그러므로 $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & (x\geq 1) \\ x^3-x+2 & (x<1) \end{cases}$

구하는 값은 $f(2)=2^2+1=5$

유제 9-3 $x>0$에서 정의된 연속함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & (0<x<1) \\ 2x & (x\geq 1) \end{cases}$ 이고 $f(4)=18$일 때, $f\left(\dfrac{1}{4}\right)$의 값을 구하여라.

[필수 예제 9-4] 도함수가 주어진 경우

두 다항함수 $f(x), g(x)$가

$$\frac{d}{dx}\{f(x)+g(x)\}=2x+1, \quad \frac{d}{dx}\{f(x)g(x)\}=3x^2-2x+2$$

를 만족시킨다. $f(0)=2, g(0)=-1$일 때, $f(x), g(x)$를 구하여라.

정석연구

$\dfrac{d}{dx}F(x)=f(x) \iff F(x)=\int f(x)dx$를 이용하여 먼저 $f(x)+g(x)$와 $f(x)g(x)$를 구한다.

모범답안

$f(x)+g(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+C_1$. $x=0$을 대입하면 $C_1=2+(-1)=1$. $\therefore f(x)+g(x)=x^2+x+1$

$f(x)g(x)=\int(3x^2-2x+2)dx=x^3-x^2+2x+C_2$. $x=0$을 대입하면 $C_2=2\times(-1)=-2$. $\therefore f(x)g(x)=x^3-x^2+2x-2=(x-1)(x^2+2)$

$f(x)+g(x)=(x-1)+(x^2+2)$이고 $f(0)=2, g(0)=-1$이므로 $f(x)=x^2+2, \quad g(x)=x-1$