미적분 - 제16장 여러 가지 정적분에 관한 문제

수학의 정석

§1. 구분구적법

기본 정석

다음과 같은 방법으로 평면도형의 넓이나 입체도형의 부피를 구하는 것을 **구분구적법**이라고 한다.

(i) 주어진 도형을 충분히 작은 n 개의 기본 도형으로 나눈다.

(ii) 기본 도형들의 넓이의 합 S_n 또는 부피의 합 V_n 을 구한다.

(iii) $\lim_{n\to\infty} S_n$ 또는 $\lim_{n\to\infty} V_n$ 을 구한다.

Advice

곡선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구할 때에는 주어진 도형을 다각형으로 근사시키는 방법을 생각해야 한다. 반지름의 길이가 r 인 원의 넓이 S 는 원에 내접하는 정n각형의 넓이 S_n 에 대하여 $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \pi r^2$ 임을 알 수 있다.

§2. 정적분과 급수

기본 정석

함수 $f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 이 구간을 n 등분하여 양 끝점과 각 분점의 x 좌표를 차례로 $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ 라 하고, 각 소구간의 길이를 $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ 라고 하면

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{b-a}{n}k\right) \frac{b-a}{n}$$

Advice

급수를 정적분으로 고치는 방법 일반적으로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{p}{n}k\right)\frac{p}{n}$ 꼴의 급수는 다음과 같이 고칠 수 있다.

1° $a+\frac{p}{n}k=x$ 로 놓으면 $\frac{p}{n}=dx$, 구간은 $[a,a+p]$ $\Longrightarrow$ $\int_a^{a+p} f(x)dx$

2° $\frac{p}{n}k=x$ 로 놓으면 $\frac{p}{n}=dx$, 구간은 $[0,p]$ $\Longrightarrow$ $\int_0^{p} f(a+x)dx$

3° $\frac{k}{n}=x$ 로 놓으면 $\frac{1}{n}=dx$, 구간은 $[0,1]$ $\Longrightarrow$ $p\int_0^{1} f(a+px)dx$

§3. 정적분으로 정의된 함수

기본 정석

함수 $f(x)$ 가 연속함수일 때

1. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, a 는 상수)
2. $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt=f(g(x))g'(x)-f(h(x))h'(x)$
3. $\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt=f(a)$

§4. 정적분과 부등식

기본 정석

1. 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x)\ge 0$ 일 때, 이 구간에 속하는 α 에 대하여 $f(\alpha)>0$ 이면 $\int_a^b f(x)dx>0$
2. 두 함수 $f(x),g(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(x)\ge g(x)$ 일 때, 이 구간에 속하는 α 에 대하여 $f(\alpha)>g(\alpha)$ 이면 $\int_a^b f(x)dx>\int_a^b g(x)dx$
3. **적분의 평균값 정리**: 함수 $f(x)$ 가 구간 $[a,b]$ 에서 연속이면 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=f(c)$ 를 만족시키는 c 가 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.

필수 예제

필수 예제 16-1

곡선 $y = x^3$ 과 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구분구적법으로 구하여라.

정석연구

구간 $[0, 1]$ 을 n 등분하여 각 소구간의 오른쪽 끝 점의 함숫값을 세로의 길이로 하는 직사각형들의 넓이의 합 T_n 의 극한값을 구한다.

모범답안

$T_n = (\frac{1}{n})^3 \frac{1}{n} + (\frac{2}{n})^3 \frac{1}{n} + \cdots + (\frac{n}{n})^3 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4}(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = \frac{1}{n^4}\{\frac{n(n+1)}{2}\}^2 = \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{n})^2$

$\therefore S = \lim_{n\to\infty} T_n = \mathbf{\frac{1}{4}}$

필수 예제 16-2

밑면의 반지름의 길이가 r 이고 높이가 h 인 원뿔의 부피 V 를 구분구적법으로 구하여라.

모범답안

원뿔을 밑면에 평행한 평면으로 n 등분하여 $n - 1$ 개의 원기둥을 만들면 부피의 합 V_n 은

$V_n = \pi \times \frac{r^2 h}{n^3}\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\} = \frac{\pi r^2 h}{n^3} \times \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$

$\therefore V = \lim_{n\to\infty} V_n = \mathbf{\frac{1}{3}\pi r^2 h}$

필수 예제 16-3

정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3 + \cdots + (2n)^3}{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \cos\frac{\pi k^2}{2n^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 e^{k/n}$

모범답안

(1) $\displaystyle\frac{\int_0^1 (1+x)^3 dx}{\int_0^1 x^3 dx} = \mathbf{15}$ (2) $\displaystyle\int_0^1 x\cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx = \mathbf{\frac{1}{\pi}}$ (3) $\displaystyle\int_0^1 x^2 e^x dx = \mathbf{e - 2}$

필수 예제 16-4

정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n^2}(\cos\frac{\pi}{n}+2\cos\frac{2\pi}{n}+\cdots+n\cos\frac{n\pi}{n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\ln\sqrt[n]{\frac{n+1}{n}}+\ln\sqrt[n]{\frac{n+2}{n}}+\cdots+\ln\sqrt[n]{\frac{n+n}{n}})$

모범답안

(1) $\pi\int_0^1 x\cos\pi x dx=-\frac{\mathbf{2}}{\pi}$ (2) $\int_0^1 \ln(1+x)dx=\mathbf{2}\ln\mathbf{2}-\mathbf{1}$

필수 예제 16-5

정적분을 이용하여 다음 급수의 합을 구하여라.

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\{\sqrt{n^2-1^2}+2\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+(n-1)\sqrt{n^2-(n-1)^2}\}$

(2) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n+2}{n^2+1}+\frac{n+4}{n^2+4}+\cdots+\frac{n+2n}{n^2+k^2})$

모범답안

(1) $\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$ (2) $\int_0^1\frac{1+2x}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{\mathbf{4}}+\ln\mathbf{2}$

필수 예제 16-6

n 이 2 이상의 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\ln n$$

모범답안

$y=1/x$ 의 그래프에서 $S=1+\cdots+1/n$ 이라 하면, 영역의 넓이 비교에 의해 $S>\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx=\ln(n+1)$ 이고, $S-1<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\ln n$ 이므로 성립한다.

필수 예제 16-7

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x(t^5+3t^3+2t)dt$

(2) $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^3-1}\int_1^{x^2}t^3e^tdt$

모범답안

(1) $F'(1) = \mathbf{6}$ (2) $F'(1) \times \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1} = e \times \frac{2}{3} = \mathbf{\frac{2}{3}e}$

필수 예제 16-8

다음 극한값을 구하여라.

(1) $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{1-h}^{1+h} \frac{\cos^3 \pi x}{1+\sin \pi x} dx$

(2) $\lim_{t\to\infty} t \int_0^{\frac{2}{t}} \frac{|x-1|}{x^2+2} dx$

모범답안

(1) $2F'(1) = \mathbf{-2}$ (2) $\lim_{h\to 0+} \frac{1}{h} \int_0^{2h} f(x)dx = 2f(0) = \mathbf{1}$

필수 예제 16-9

연속함수 $f(x)$ 가 다음 등식을 만족시킬 때, 상수 a 의 값과 $f(x)$ 를 구하여라.

(1) $\int_{\ln 3}^{x} e^t f(t)dt = e^{2x} - ae^x + 3$

(2) $\int_a^{\ln x} f(t)dt = x^2 - x$

모범답안

(1) $a = 4, f(x) = \mathbf{2e^x - 4}$ (2) $a = 0, f(x) = \mathbf{2e^{2x} - e^x}$

필수 예제 16-10

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ 에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 $f'(x)$ 가 연속함수이고 $f(x) = \tan x - x - \int_0^x f'(u)\tan^2 u du$ 일 때, $f'(x)$ 와 $f(x)$ 를 구하여라.

모범답안

양변을 미분하면 $f'(x) = \sec^2 x - 1 - f'(x)\tan^2 x \implies f'(x) = \sin^{\mathbf{2}} \mathbf{x}$, 이를 적분하고 $f(0) = 0$ 을 대입하면 $f(x) = \mathbf{\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x}$

필수 예제 16-11

함수 $f(x) = e^x(ax+b)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = \int_0^x (x-t)f'(t)dt + e^x + x$ 를 만족시킬 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라.

모범답안

양변을 두 번 미분하여 정리하면 $f''(x) = f'(x) + e^x$. 대입하여 계수를 비교하면 $\mathbf{a = 1, b = 1}$

필수 예제 16-12

다음 물음에 답하여라.

(1) $f(x) = \int_0^x (1 + \cos t) \sin t dt \ (-2\pi < x < 2\pi)$ 의 극값을 구하여라.

(2) $f(x) = \int_x^{x+1} e^{t^3 - 7t} dt$ 가 극대가 되는 x 의 값을 구하여라.

모범답안

(1) 극댓값 $f(-\pi) = f(\pi) = \mathbf{2}$, 극솟값 $f(0) = \mathbf{0}$ (2) $f'(x) = 0$ 에서 $\mathbf{x = -2}$

필수 예제 16-13

n 이 자연수일 때, 다음 부등식을 증명하여라.

(1) $\dfrac{1}{2(n+1)} < \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x^2} dx < \dfrac{1}{n+1}$

(2) $\dfrac{1}{3} < \int_0^1 x^{(\sin x + \cos x)^2} dx < \dfrac{1}{2}$

모범답안

(1) $0 \leq x \leq 1$ 에서 $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$ 이므로 성립. (2) $1 \leq (\sin x + \cos x)^2 \leq 2$ 이므로 성립.

필수 예제 16-14

함수 $f(x)$ 가 구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 $\dfrac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c)$ 를 만족시키는 c 가 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재함을 증명하여라.

모범답안

최대 · 최소 정리에 의해 $m \leq f(x) \leq M$ 이므로 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ 가 성립하며, 사잇값의 정리에 의해 만족하는 c 가 존재한다.