수학 II - 제13장 속도 · 거리와 적분

현경서T

§1. 속도와 거리

기본 정석

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도가 $v(t)$일 때, 점 P가 시각 $t = a$에서 $t = b$까지 움직이면

1. **점 P의 위치의 변화량**
   $\displaystyle\int_a^b v(t)dt$
2. **점 P가 움직인 거리**
   $\displaystyle\int_a^b |v(t)|dt$

Advice

위치와 위치의 변화량

시각 $t = t_0$에서의 점 P의 위치를 x_0라고 하면, 시각 t에서의 점 P의 위치 x는

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$

이다. 즉, (현재 위치) = (처음 위치) + (위치의 변화량)임을 이해해야 한다.

Advice

정적분과 넓이의 관계

속도 $v(t)$의 정적분 값은 '위치의 변화량'을 의미하고, 속력 $|v(t)|$의 정적분 값은 '실제로 움직인 거리'를 의미한다. 그래프에서 $v(t) > 0$인 부분의 넓이는 양의 방향으로 이동한 거리를, $v(t) < 0$인 부분의 넓이는 음의 방향으로 이동한 거리를 나타낸다.

필수 예제

필수 예제 13-1

지상 20m의 높이에서 처음 속도 30m/s로 똑바로 위로 발사한 물체의 t초 후의 속도 $v(t)$m/s가 $v(t) = 30 - 10t$일 때, 다음을 구하여라.

(1) 발사 후 5초가 지났을 때의 지면으로부터의 높이

(2) 최고 지점에 도달했을 때의 지면으로부터의 높이

(3) 발사 후 5초 동안 물체가 움직인 거리

정석연구

처음 위치 $x_0 = 20$을 잊지 않아야 한다. 최고 지점에서는 속도 $v(t) = 0$이다. 움직인 거리는 속력 $|v(t)|$를 적분한다.

모범답안

(1) $x = 20 + \int_0^5 (30 - 10t)dt = 20 + [30t - 5t^2]_0^5 = 20 + (150 - 125) = 45\text{m}$
(2) $v(t) = 30 - 10t = 0$에서 $t = 3$일 때 최고점이다.
$x = 20 + \int_0^3 (30 - 10t)dt = 20 + [30t - 5t^2]_0^3 = 20 + (90 - 45) = 65\text{m}$
(3) $s = \int_0^5 |30 - 10t|dt = \int_0^3 (30 - 10t)dt + \int_3^5 -(30 - 10t)dt = 45 + 20 = 65\text{m}$

필수 예제 13-2

좌표평면 위의 두 점 A, B가 각각 x축, y축 위를 움직인다. 점 A, B의 시각 $t = 0$일 때의 처음 위치는 각각 $(-3, 0), (0, -4)$이고, 시각 t에서의 속도는 각각 $v_A = 2t - 2, v_B = 4$이다. 출발한 지 t초 후 두 점 사이의 거리가 최소가 될 때의 t의 값과 그때의 거리를 구하여라.

정석연구

각 점의 t초 후 좌표를 구한 뒤 두 점 사이의 거리 공식 $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$을 이용한다.

모범답안

점 A의 위치: $x = -3 + \int_0^t (2t - 2)dt = t^2 - 2t - 3$
점 B의 위치: $y = -4 + \int_0^t 4dt = 4t - 4$
두 점 사이의 거리의 제곱을 $f(t)$라 하면:

$f(t) = (t^2-2t-3)^2 + (4t-4)^2 = (t-1)^2(t+1)^2 + 16(t-1)^2 = (t-1)^2\{(t+1)^2+16\}$
$f(t) = (t-1)^2(t^2+2t+17)$. 미분하여 조사하면 $t=1$일 때 최소이다.
최솟값은 $f(1)=0$, 하지만 여기서는 위치가 (x,y)이므로 $t=1$ 대입 시 $x=-4, y=0$.
따라서 거리는 $\sqrt{(-4)^2+0^2} = 4$이다.

필수 예제 13-3

수직선 위를 움직이는 두 점 A, B의 시각 t에서의 속도가 각각 $v_A = 6t^2-8t+14, v_B = 3t^2+4t+5$이다. 점 B가 점 A보다 양의 방향으로 3만큼 떨어진 지점에서 동시에 출발할 때, 다음 물음에 답하여라.

(1) $0 < t \le 4$에서 두 점 A, B는 몇 번 만나는가?

(2) $0 < t \le 4$에서 두 점 A, B 사이의 거리가 최대가 될 때의 t의 값과 그때의 거리를 구하여라.

정석연구

두 점의 위치 $x_A(t), x_B(t)$를 구하여 그 차이인 $f(t) = x_A(t) - x_B(t)$의 그래프를 분석한다.

모범답안

$x_A(t) = \int_0^t (6t^2-8t+14)dt = 2t^3-4t^2+14t$
$x_B(t) = 3 + \int_0^t (3t^2+4t+5)dt = t^3+2t^2+5t+3$
$f(t) = x_A(t) - x_B(t) = t^3-6t^2+9t-3$
$f'(t) = 3t^2-12t+9 = 3(t-1)(t-3)$.
(1) $f(0)=-3, f(1)=1, f(3)=-3, f(4)=1$. 사이값 정리에 의해 $f(t)=0$인 근이 3개 존재하므로 3번 만난다.
(2) $|f(t)|$의 최댓값은 $t=3$ 또는 $t=1$ 부근에서 발생한다. 계산하면 $t=3$일 때 거리 3으로 최대이다.

필수 예제 13-4

원점을 동시에 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P_1, P_2의 시각 t에서의 속도가 각각 $v_1 = -5t^2+4t+40, v_2 = 2t^2+14t+8$이다. 선분 P_1P_2의 중점을 Q라 할 때, 다음을 구하여라.

(1) 점 Q의 시각 t에서의 속도 $v(t)$

(2) 점 Q가 다시 원점을 지나는 시각 t

(3) $t=0$에서 $t=10$까지 점 Q가 움직인 거리

모범답안

(1) 중점의 위치 $x=\frac{x_1+x_2}{2}$이므로 속도는 $v(t)=\frac{v_1+v_2}{2}=\frac{-3t^2+18t+48}{2}=-\frac{3}{2}t^2+9t+24$.

(2) $x_Q(t)=\int_0^t(-\frac{3}{2}t^2+9t+24)dt=-\frac{1}{2}t^3+\frac{9}{2}t^2+24t$.

$x_Q(t)=-\frac{1}{2}t(t^2-9t-48)=0$에서 $t>0$인 실근을 구한다.

(3) $v(t)=-\frac{3}{2}(t^2-6t-16)=-\frac{3}{2}(t-8)(t+2)$. $t=8$에서 속도의 부호가 바뀐다.

거리 $s=\int_0^8 v(t)dt+\int_8^{10}|v(t)|dt=208+50=258$.