TOÁN RỜI RẠC
ÔN TẬP: TẬP HỢP VÀ ÁNH XẠ

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Tổng quan

1. **Tập hợp**
2. Ánh xạ

Khái niệm

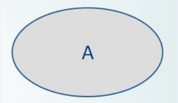
Tập hợp là một khái niệm cơ bản của Toán học, dùng để chỉ một nhóm các đối tượng nào đó mà chúng ta quan tâm.

Khi phần tử x thuộc tập hợp **A** ta ký hiệu $x \in A$, ngược lại ta ký hiệu $x \notin A$.

Ví dụ 1.1

- *Tập hợp sinh viên của một trường đại học.*
- *Tập hợp các số nguyên*
- *Tập hợp các trái táo trên một cây cụ thể.*

Để minh họa tập hợp thì chúng ta dùng sơ đồ Ven



Lực lượng của tập hợp

Số phần tử của tập hợp **A** được gọi là lực lượng của tập hợp, kí hiệu $|\mathbf{A}|$. Nếu **A** có hữu hạn phần tử, ta nói **A** hữu hạn. Ngược lại, ta nói **A** vô hạn.

Ví dụ 1.2

- $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, *là các tập vô hạn*
- $X = \{1, 3, 4, 5\}$ *là tập hữu hạn với* $|X| = 4$
- *Tập rỗng có bao nhiêu phần tử ?*

Cách xác định tập hợp

Có 2 cách phổ biến

1. Liệt kê tất cả các phần tử của tập hợp

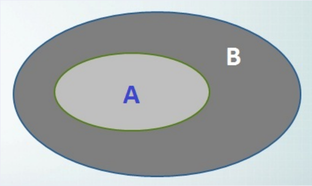
$$A = \{1, 2, 3, 4, a, b\}$$

2. Đưa ra tính chất đặc trưng

$$B = \{n \in N \mid n \text{ chia hết cho } 3\}$$

Quan hệ giữa các tập hợp

1. **Bao hàm**. Nếu mọi phần tử của tập hợp **A** đều là phần tử của tập hợp **B** thì tập hợp **A** được gọi là tập hợp con của tập hợp **B**, ký hiệu là $A \subset B$, nghĩa là



$$A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A : x \in B$$

2. **Bằng nhau**. Hai tập hợp **A** và **B** được gọi là bằng nhau nếu $A \subset B$ và $B \subset A$, ký hiệu $A = B$.

Ví dụ 1.3

Xác định quan hệ giữa các tập hợp sau $A = \{1, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ *và* $C = \{x \in Z | 0 < x < 9\}$.

Định nghĩa 1.1 (Tập các tập con của một tập hợp)

Cho $\boldsymbol{X}$ *là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của* $\boldsymbol{X}$ *được ký hiệu là* $\boldsymbol{P(X)}$*.*

Ví dụ 1.4

Cho $X = \{a, b\}$*. Khi đó* $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$*. Tương tự* $X = \{1, 2, 3\}$*. Tìm tập* $P(X)$*?*

Nhận xét

Nếu tập $\mathbf{X}$ có n phần tử thì tập $\mathbf{P(X)}$ có bao nhiêu phần tử?

Định nghĩa 1.1 (Tập các tập con của một tập hợp)

Cho $\boldsymbol{X}$ *là một tập hợp. Khi đó tập tất cả các tập con của* $\boldsymbol{X}$ *được ký hiệu là* $\boldsymbol{P(X)}$.

Ví dụ 1.4

Cho $X = \{a, b\}$. *Khi đó* $P(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. *Tương tự* $X = \{1, 2, 3\}$. *Tìm tập* $P(X)$*?*

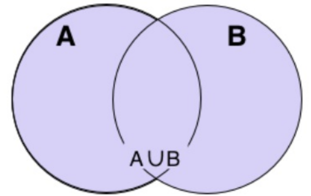
Nhận xét

Nếu tập $\mathbf{X}$ có n phần tử thì tập $\mathbf{P(X)}$ có bao nhiêu phần tử?

$$|X| = n \Rightarrow |P(X)| = 2^n$$

Hợp

Hợp của **A** và **B** là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp **A** và **B**, ký hiệu $A \cup B$, nghĩa là



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$$

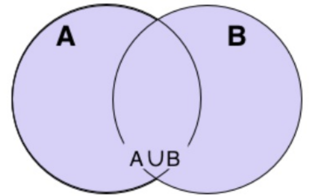
Ví dụ 1.5

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e, f\}$. *Khi đó*

$$A \cup B =$$

Hợp

Hợp của **A** và **B** là tập hợp gồm tất cả các phần tử thuộc ít nhất một trong hai tập hợp **A** và **B**, ký hiệu $A \cup B$, nghĩa là



$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

Ví dụ 1.5

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e, f\}$. *Khi đó*

$$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Hợp

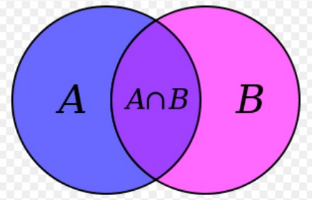
- Nhận xét

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A, \\ x \in B \end{array}\right. \quad ; \; x \notin A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \notin A, \\ x \notin B \end{cases}$$

- Tính lũy đẳng $A \cup A = A$
- Tính giao hoán $A \cup B = B \cup A$
- Tính kết hợp $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- Hợp với tập rỗng $A \cup \emptyset = A$

Giao

Giao của **A** và **B** là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc **A** và thuộc **B**, ký hiệu $A \cap B$, nghĩa là



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

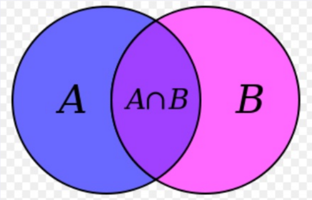
Ví dụ 1.6

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e, f\}$. *Khi đó*

$$A \cap B =$$

Giao

Giao của **A** và **B** là tập hợp gồm tất cả các phần tử vừa thuộc **A** và thuộc **B**, ký hiệu $A \cap B$, nghĩa là



$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

Ví dụ 1.6

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e, f\}$. *Khi đó*

$$A \cap B = \{c, d\}$$

Giao

- Nhận xét

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \in B \end{cases} \qquad x \notin A \cap B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A, \\ x \notin B \end{array} \right.$$

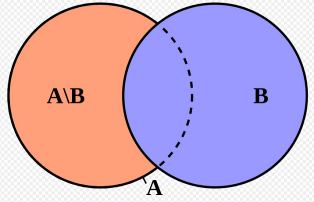
- Tính lũy đẳng $A \cap A = A$
- Tính giao hoán $A \cap B = B \cap A$
- Tính kết hợp $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Hợp với tập rỗng $A \cap \emptyset = \emptyset$

Tính phân phối của phép hợp và giao

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Hiệu

Hiệu của hai tập hợp **A** và **B** là tập hợp tạo bởi tất cả các phần tử thuộc tập **A** mà không thuộc tập **B** ký hiệu $A \setminus B$, nghĩa là



$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

Ví dụ 1.7

Cho $A = \{a, b, c, d\}$ *và* $B = \{c, d, e, f\}$. *Khi đó*

$$A \setminus B = \{a, b\}$$

Hiệu

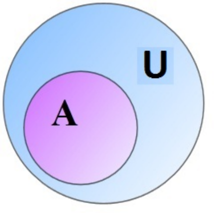
- Nhận xét

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A, \\ x \notin B \end{cases} \qquad x \notin A \setminus B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \notin A, \\ x \in B \end{array} \right.$$

- $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$
- $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Tập bù

Khi $A \subset U$ thì $U \setminus A$ gọi là tập bù của **A** trong **U**. Ký hiệu $C_U A$ hay đơn giản là $\overline{A}$



Ví dụ 1.8

Cho $A = \{1, 3, 4, 6\}$ *và* $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Khi đó*

$$\overline{A} = \{2, 5, 7, 8\}$$

Tập bù

- Luật De Morgan: $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$; $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- Triệt hiệu $A \setminus B = A \cap \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup \overline{A} = U$

Ví dụ 1.9

Cho $\boldsymbol{A}$*,* $\boldsymbol{B}$*,* $\boldsymbol{C}$ *là các tập hợp. Chứng minh rằng:*

1. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$
2. $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$
3. $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
4. $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$

Định nghĩa 1.2 (Tích Descartes)

*Tích Descartes của tập hợp **A** với tập hợp **B** là một tập hợp chứa tất cả các bộ có dạng (x, y) với x là một phần tử của **A** và y là một phần tử của **B**, ký hiệu $A \times B$, nghĩa là*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$$

Ví dụ 1.10

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ *và* $B = \{x, y\}$. *Khi đó*

$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

Nhận xét

Nếu $|A| = n$ và $|B| = m$ thì $|A \times B| =$

Định nghĩa 1.2 (Tích Descartes)

*Tích Descartes của tập hợp **A** với tập hợp **B** là một tập hợp chứa tất cả các bộ có dạng (x, y) với x là một phần tử của **A** và y là một phần tử của **B**, ký hiệu $A \times B$, nghĩa là*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \land y \in B\}$$

Ví dụ 1.10

Cho $A = \{1, 2, 3\}$ *và* $B = \{x, y\}$. *Khi đó*

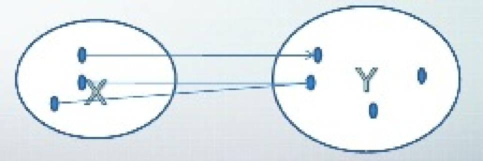
$$A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$$

Nhận xét

Nếu $|A| = n$ và $|B| = m$ thì $|A \times B| = n \times m$

Định nghĩa 2.1 (Ánh xạ)

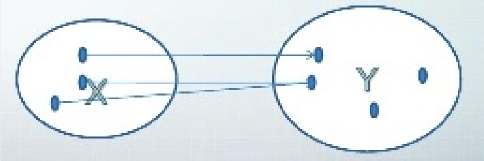
Một ánh xạ f từ tập $\boldsymbol{X}$ *vào tập* $\boldsymbol{Y}$ *là một phép liên kết từ* $\boldsymbol{X}$ *vào* $\boldsymbol{Y}$ *sao cho mỗi phần tử x của* $\boldsymbol{X}$ *được liên kết duy nhất với một phần tử y của* $\boldsymbol{Y}$*, ký hiệu:* $y = f(x)$



$$\begin{array}{rccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & x & \longmapsto & y = f(x) \end{array}$$

Khi đó $\boldsymbol{X}$ *được gọi là tập nguồn,* $\boldsymbol{Y}$ *được gọi là tập đích.*

Ví dụ 2.1



Hình 1: Không phải ánh xạ

*Ánh xạ đồng nhất trên **X**:*

$$\begin{array}{rccc} Id_X : & X & \longrightarrow & X \\ & x & \longmapsto & x \end{array}$$

Nếu **X, Y** là tập hợp các số (chẳng hạn, $\emptyset \neq X, Y \subset R$) thì $f : X \longrightarrow Y$ còn được gọi là hàm số. Như vậy, hàm số chính là một trường hợp riêng của ánh xạ.

Định nghĩa 2.2

Hai ánh xạ f, g được gọi là bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng tập nguồn, có cùng tập đích và

$$\forall x \in X,\ \ f(x) = g(x).$$

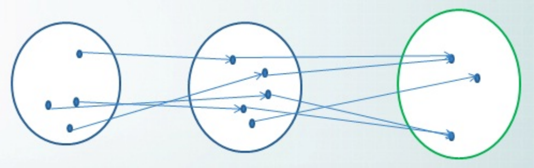
Vậy $f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in X : f(x) \neq g(x).$

Ví dụ 2.2

Cho $f,\ g : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = 3x + 4$ *và* $g(x) = 4x + 3$. *Hỏi* $f = g$ *không?*

Định nghĩa 2.3

Cho $f : X \to Y$ *và* $g : Y \to Z$, *lúc đó* $g_\circ f : X \to Z$ *là ánh xạ hợp của g và f, được xác định bởi*



$$g_\circ f(x) = g(f(x)).$$

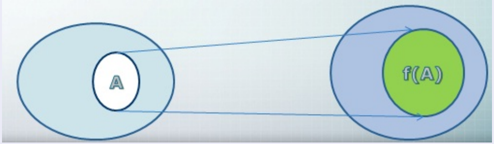
Ví dụ 2.3

1. *Cho* $f, g : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = x + 2$ *và* $g(x) = 3x - 1$. *Xác định* $g_\circ f$ *và* $f_\circ g$.
2. *Cho hai hàm số* $f, g : R \to R$ *với* $f(x) = 2x + 3$ *và* $f_\circ g(x) = 4x + 1$. *Tìm* $g(x)$?

Định nghĩa 2.4

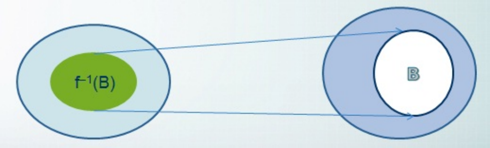
Cho $f : X \to Y$;

1. *Cho* $A \subset X$, *ảnh của* ***A*** *bởi f là tập* $f(A)$



$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \subset Y$$

2. *Cho* $B \subset Y$, *ảnh ngược của* ***B*** *bởi f là tập* $f^{-1}(B)$



$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subset X$$

3. *Ta ký hiệu* $Im(f) = f(X)$, *gọi là ảnh của f*

Ví dụ 2.4

Cho $f : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = x^2 + 1$*. Hãy tìm:*

1. $f([1,3])$; $f([-2,-1])$; $f([-1,3])$; $f((1,5))$;
2. $f^{-1}(1)$; $f^{-1}(2)$; $f^{-1}(-5)$; $f^{-1}([2,5])$

Ví dụ 2.4

Cho $f : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = x^2 + 1$. *Hãy tìm:*

1. $f([1, 3])$; $f([-2, -1])$; $f([-1, 3])$; $f((1, 5))$;
2. $f^{-1}(1)$; $f^{-1}(2)$; $f^{-1}(-5)$; $f^{-1}([2, 5])$
   $\longrightarrow f([1, 3]) = [2, 10]$

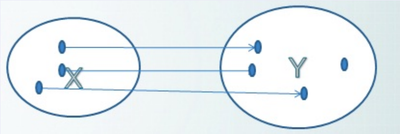
Ví dụ 2.4

Cho $f : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = x^2 + 1$. *Hãy tìm:*

1. $f([1,3])$; $f([-2,-1])$; $f([-1,3])$; $f((1,5))$;
2. $f^{-1}(1)$; $f^{-1}(2)$; $f^{-1}(-5)$; $f^{-1}([2,5])$
   $\longrightarrow f([1,3]) = [2,10]$
   $\longrightarrow f^{-1}([2,5]) = [-2,-1] \cup [1,2]$

Định nghĩa 2.5 (đơn ánh)

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Ta nói f đơn ánh nếu



$$\forall x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

*nghĩa là hai phần tử khác nhau bất kỳ trong **X** thì có ảnh khác nhau trong **Y**.*

Mệnh đề 2.1

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó:

1. *f đơn ánh* $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X,\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
2. *f không đơn ánh* $\Leftrightarrow \exists x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$

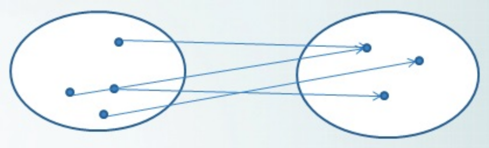
Ví dụ 2.5

Cho $f : R \rightarrow R$ *xác định bởi:*

1. $f(x) = x + 3$. *Xét tính đơn ánh của f.*
2. $f(x) = x^3 + x$. *Xét tính đơn ánh của f.*
3. $f(x) = x^2 + x$. *Xét tính đơn ánh của f.*

Định nghĩa 2.6 (Toàn ánh)

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Ta nói f toàn ánh nếu



$$\forall y \in Y,\ \exists x \in X \ \ sao\ cho\ y = f(x)$$

nghĩa là mọi phần tử thuộc $\boldsymbol{Y}$ *đều là ảnh của ít nhất một phần tử thuộc* $\boldsymbol{X}$.

Ví dụ 2.6

Cho $f : R \to R$ xác định bởi:

1. $f(x) = x^3 + 1$. *Xét tính toàn ánh của f.*
2. $f(x) = x^2 + 1$. *Xét tính toàn ánh của f.*

Mệnh đề 2.2

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. *Khi đó,*

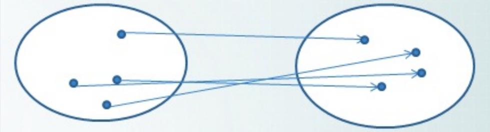
1. f *là toàn ánh* $\Leftrightarrow \forall y \in Y$, *phương trình* $y = f(x)$ *có nghiệm*
2. f ***không*** *là toàn ánh* $\Leftrightarrow \exists y_0 \in Y$ *sao cho phương trình* $y_0 = f(x)$ *vô nghiệm*

Ví dụ 2.7

Cho $f : R \to R$ *xác định bởi* $f(x) = x^2 - 3x + 5$. *Hỏi f có toàn ánh không?*

Định nghĩa 2.7 (Song ánh)

*Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Ta nói **f song ánh** nếu f **vừa là đơn ánh vừa là toàn ánh**. Nghĩa là*



$$\forall y \in Y,\ \exists!\ x \in X \ \textit{sao cho}\ y = f(x)$$

Ví dụ 2.8

Cho ánh xạ $f : X \to Y$. Khi đó,

1. $f(x) = x^3 + 1$ *là song ánh*
2. $f(x) = x^2 + 1$ *không là song ánh*

Tài liệu tham khảo

L.V. Luyen
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2018), chương 2.*

Giáo trình Toán rời rạc
Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*

N.T. Nhựt
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*