TOÁN RỜI RẠC
Biểu Diễn Đồ Thị Trên Máy Tính

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Tổng quan

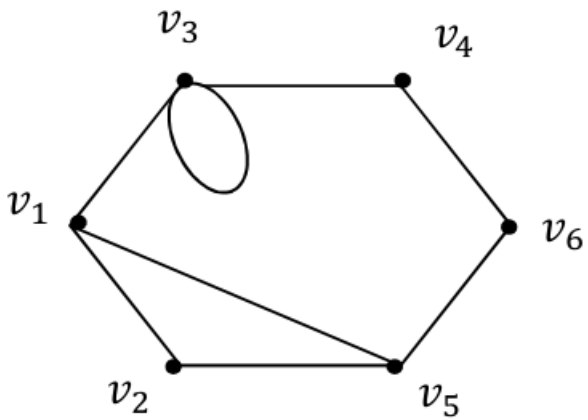
1. Biểu diễn đồ thị: Ma trận kề, ma trận trọng số
2. Các thuật toán tìm kiếm trên đồ thị

Ma trận kề

Định nghĩa 1.1

Xét đồ thị $G = (V, E)$ với tập đỉnh V và tập cạnh E. Ma trận kề của đồ thị là ma trận vuông $A_{n\times n}$ xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{nếu } v_i v_j \notin E, \\ k, & \text{nếu cặp đỉnh } (v_i, v_j) \text{ có } k \text{ cạnh/cung cùng hướng} \in E. \end{cases}$$



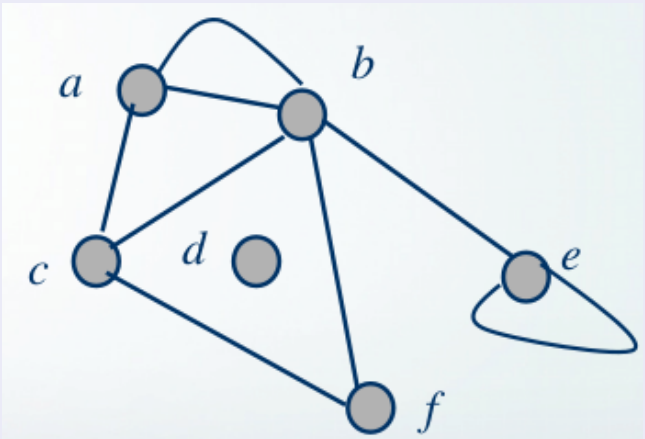
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

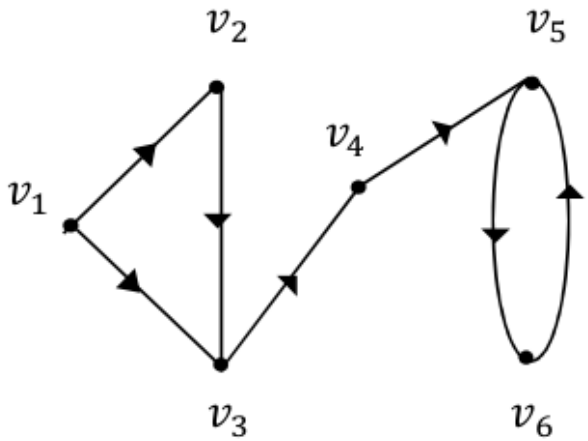
Hình 1: Ví dụ đồ thị vô hướng và ma trận kề tương ứng

Tính chất của ma trận kề của đồ thị vô hướng

- Là ma trận đối xứng (qua đường chéo chính)
- Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0 (trừ đồ thị có khuyên)
- Tổng các phần tử trên một hàng (cột) bằng bậc của đỉnh tương ứng.
- Giá trị của phần tử ở dòng i, cột j của ma trận A_m là số đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j có độ dài m.

Ví dụ 1.1 (Tìm ma trận kề cho đồ thị vô hướng sau)





$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hình 2: Ví dụ đồ thị có hướng và ma trận kề tương ứng

Tính chất của ma trận kề của đồ thị có hướng

- Không phải là ma trận đối xứng
- Các phần tử trên đường chéo chính bằng 0
- Tổng các phần tử trên một hàng (cột) bằng bán bậc ra/vào của các đỉnh tương ứng.
- Giá trị của phần tử ở dòng i, cột j của ma tận A_m là số đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j có độ dài m.

Định lý 1.1 (Đếm số hành trình khác nhau có độ dài k giữa các đỉnh)

Số các hành trình khác nhau độ dài k từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j trong đồ thị $G = (V, E)$ bằng giá trị phần tử m_{ij} của ma trận vuông M_G^k

$$M_G^k = \underbrace{A_{n\times n} \cdot A_{n\times n} \cdot \ldots \cdot A_{n\times n}}_{k \text{ times}}$$

Hệ quả 1.1

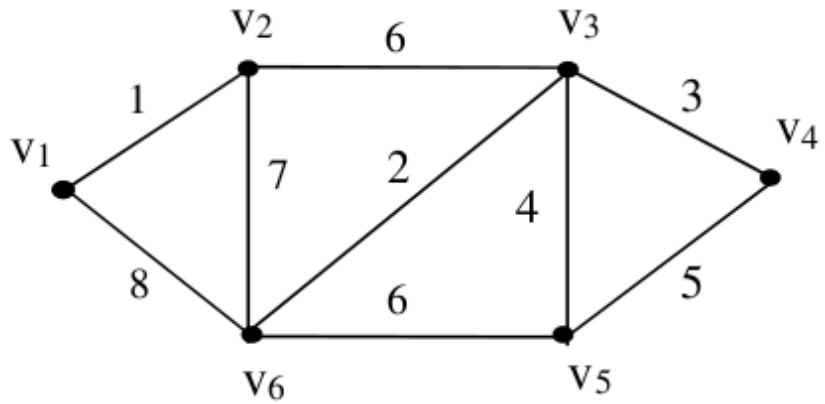
1. *Nếu phần tử m_{ij} của ma trận M_G^k khác 0, trong khi a_{ij} trong các ma trận M_G^1, M_G^{k-1} đều bằng 0, thì từ đỉnh v_i đến đỉnh v_j trong đồ thị $G = (V, E)$ có đường đi ngắn nhất độ dài bằng k*
2. *Đồ thị $G = (V, E)$ có n đỉnh là liên thông khi và chỉ khi mọi phần tử không nằm trên đường chéo chính của ma trận tổng M_G^+ đều khác 0: $M_G^+ = M_G^1 + M_G^2 + \ldots + M_G^{n-1}$*

Ma trận trọng số

Ma trận trọng số

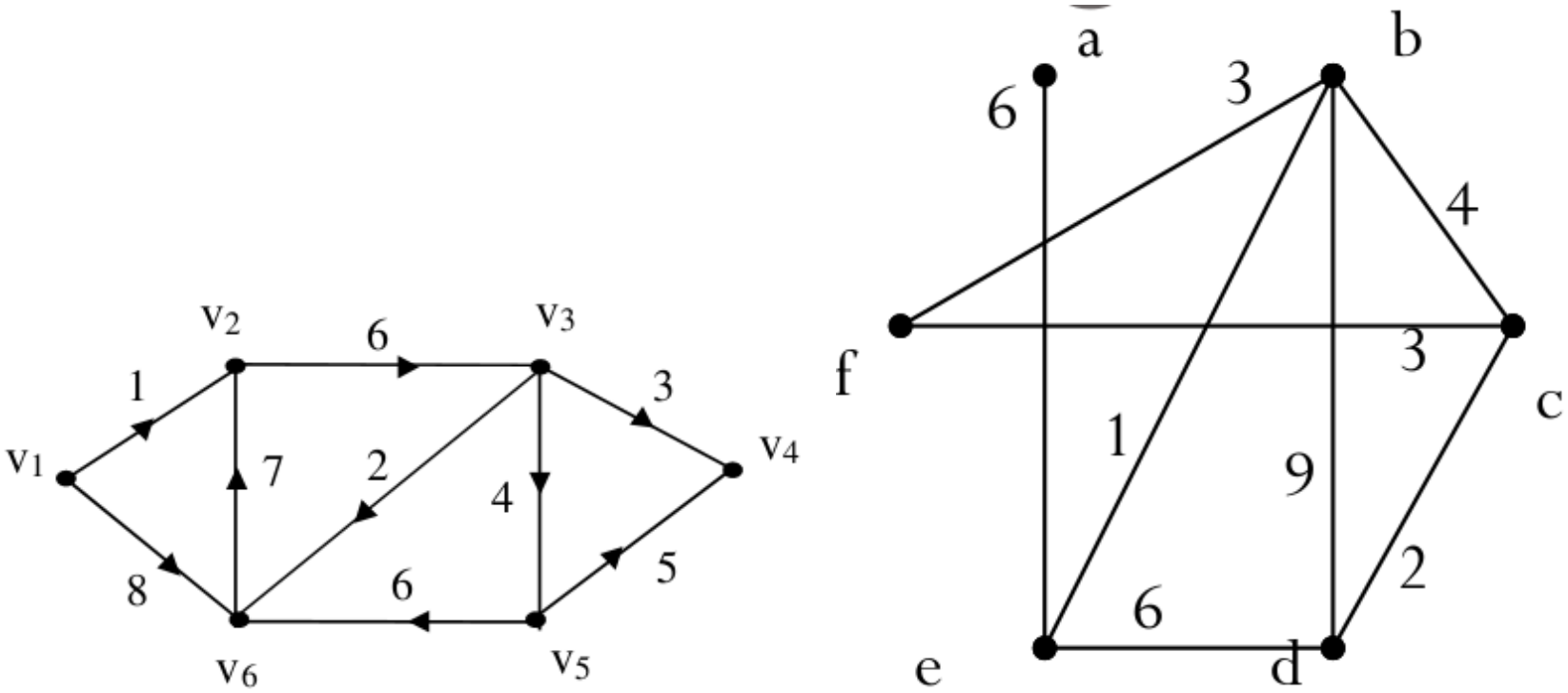
Ma trận của đồ thị có trọng số được xây dựng bằng cách thay giá trị 1 bằng trọng số của cạnh tương ứng. Ký hiệu $c(u, v)$ là trọng số của cạnh/cung (u, v), trong đó:

- $c = \{0, +\infty, -\infty\}$ nếu 2 đỉnh u, v không kề nhau
- $c =$ giá trị trọng số của cạnh/cung (u, v) nếu có



$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 6 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Hình 3: Đồ thị vô hướng và ma trận trọng số tương ứng

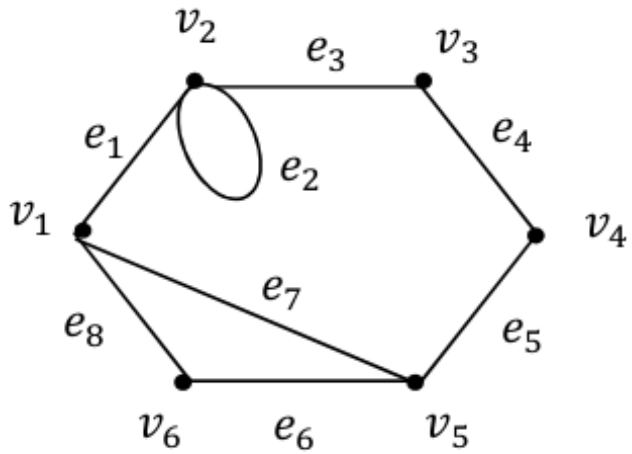


Hình 4: Tìm ma trận trọng số cho các đồ thị có hướng trên?

Ma trận liên thuộc đỉnh-cạnh

Định nghĩa 1.2

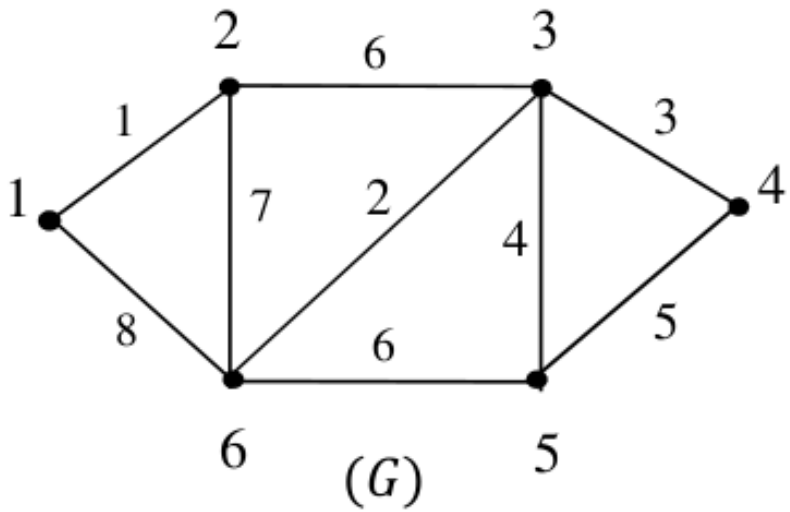
Xét đồ thị $G = (V, E)$ *với tập đỉnh* $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *và tập cạnh* $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$. *Gọi* $M = m_{ij}$ *là ma trận liên thuộc của* G, *trong đó* $m_{ij} = 1$ *nếu đỉnh* v_i *thuộc cạnh* e_j, $m_{ij} = 0$ *nếu đỉnh* v_i *không thuộc cạnh* e_j.



$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{matrix}$$

Hình 5: Giả đồ thị G và ma trận liên thuộc M tương ứng

Đồ thị thưa–đồ thị có số cạnh nhỏ hơn $n(n-1)/4$ thường được lưu trữ dưới dạng danh sách cạnh. Các cạnh của đồ thị được lưu thành 2 dãy, 1 dãy chứa đỉnh đầu, 1 dãy chứa đỉnh cuối của cạnh e tương ứng: $Dau[e]$ và $Cuoi[e]$. Bổ sung thêm một dãy nữa nếu cạnh có trọng số.



(G)

Đỉnh đầu	*Đỉnh cuối*	*Trọng số*
1	2	1
1	6	8
2	3	6
2	6	7
3	4	3
3	5	4
3	6	2
4	5	5
5	6	6

Bài tập ôn tập

Ví dụ 1.2

Tự vẽ ra 2 đồ thị, 1 có hướng, 1 vô hướng, mỗi đồ thị có $n > 5$ đỉnh, có lớn $\geq n$ cạnh. Biểu diễn các đồ thị vừa vẽ bằng tất cả các cách có thể.

Ví dụ 1.3

Vẽ một đồ thị liên thông ≤ 10 đỉnh có ít nhất 1 chu trình đơn ứng với mỗi độ dài từ 5 đến 9 nhưng không chứa chu trình đơn có độ dài khác.

Các thuật toán tìm kiếm trên đồ thị

- Tìm kiếm trên đồ thị là các bài toán xác định các yếu tố cơ bản của đồ thị như xác định đỉnh, đường đi, chu trình, cây khung, tính liên thông.
- Một số ứng dụng điển hình của bài toán này trong cuộc sống thường nhật như tìm kiếm tập tin trong máy tính hay điện thoại, tìm kiếm các website trong mạng máy tính theo các từ khóa, ...
- Hai thuật toán cơ bản về tìm kiếm trên đồ thị, đó là *thuật toán tìm kiếm ưu tiên theo chiều sâu – DFS (Depth First Search)* và *tìm kiếm ưu tiên theo chiều rộng – BFS (Breadth First Search)*

Tìm kiếm ưu tiên theo chiều sâu

```
1        DFS(G,v)   ( v is the vertex where the search starts )
2           Stack S := {};   ( start with an empty stack )
3           for each vertex u, set visited[u] := false;
4           push S, v;
5           while (S is not empty) do
6              u := pop S;
7              if (not visited[u]) then
8                 visited[u] := true;
9                 for each unvisited neighbour w of u
10                   push S, w;
11             end if
12          end while
13       END DFS()
```

SV tham khảo chi tiết thuật toán tại đây!

Tìm kiếm ưu tiên theo chiều sâu

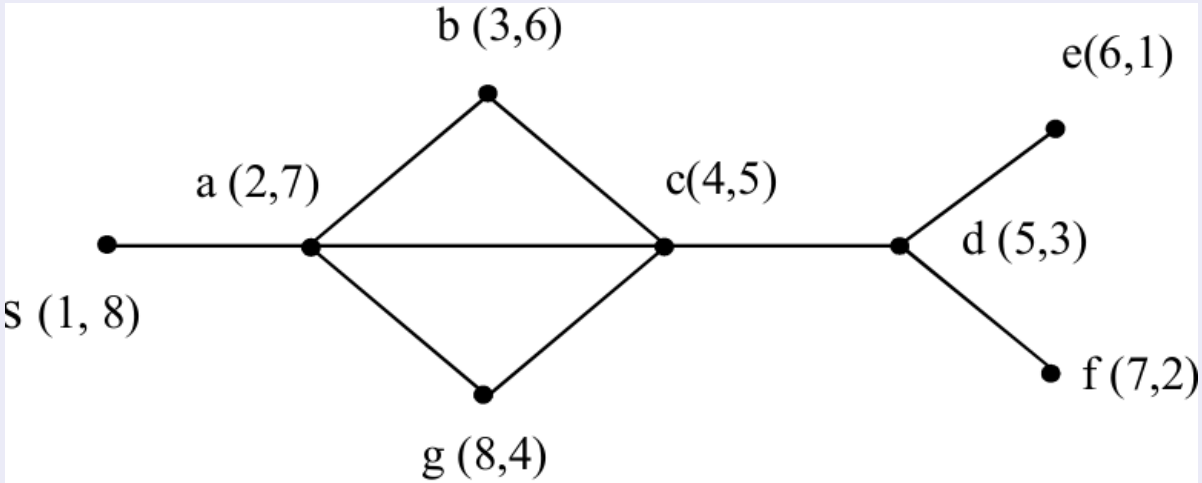
Giải thích thuật toán DFS

- Giả sử thuật toán DFS bắt đầu từ đỉnh v_1 (đỉnh xuất phát), hiển nhiên v_1 là đỉnh đã được thăm (tìm thấy).
- chọn v_2 là một trong những đỉnh kề với $v_1 => v_2$ đã được thăm. Tổng quát cho đỉnh v_k và v_{k+1}
- nếu không còn đỉnh nào kề với v_k (v_k là đỉnh treo hoặc các đỉnh kề với nó đã được thăm) thì ta nói rằng đỉnh v_k đã **được duyệt**
- quay lui về đỉnh v_{k-1} để tiếp tục tìm kiếm từ đỉnh này.
- *thuật toán kết thúc khi mọi đỉnh đã được thăm-duyệt*
- DFS có độ phức tạp thời gian đa thức $O(n^2)$

Tìm kiếm ưu tiên theo chiều sâu

Ví dụ 2.1

Minh họa một thứ tự thăm-duyệt các đỉnh của đồ thị G bởi thuật toán DFS xuất phát từ đỉnh s.



...	...	...
8	g	s
7	f	a
6	e	b
5	d	c
4	c	g
3	b	d
2	a	f
1	s	e
TT	Thăm	Duyệt

Đỉnh được thăm càng muộn sẽ càng sớm trở thành đã duyệt xong-Last Out First In (LOFI), là hệ quả tất yếu với các đỉnh được thăm sẽ được kết nạp vào ngăn xếp Stack.

Tìm kiếm ưu tiên theo chiều rộng

```
1  BFS (G, s)#Where G is the graph and s is the source node
2        let Q be queue. Inserting s in queue until all its
             neighbour vertices are marked.
3        Q.enqueue(s)
4        mark s as visited.
5        while ( Q is not empty)
6              #Removing that vertex from queue, whose neighbour will
                    be visited now
7              v   =   Q.dequeue( )
8              #processing all the neighbours of v
9              for all neighbours w of v in Graph G
10                 if w is not visited
11                           #Stores w in Q to further visit its
                                 neighbour
12                           Q.enqueue( w )
13                           mark w as visited.
```

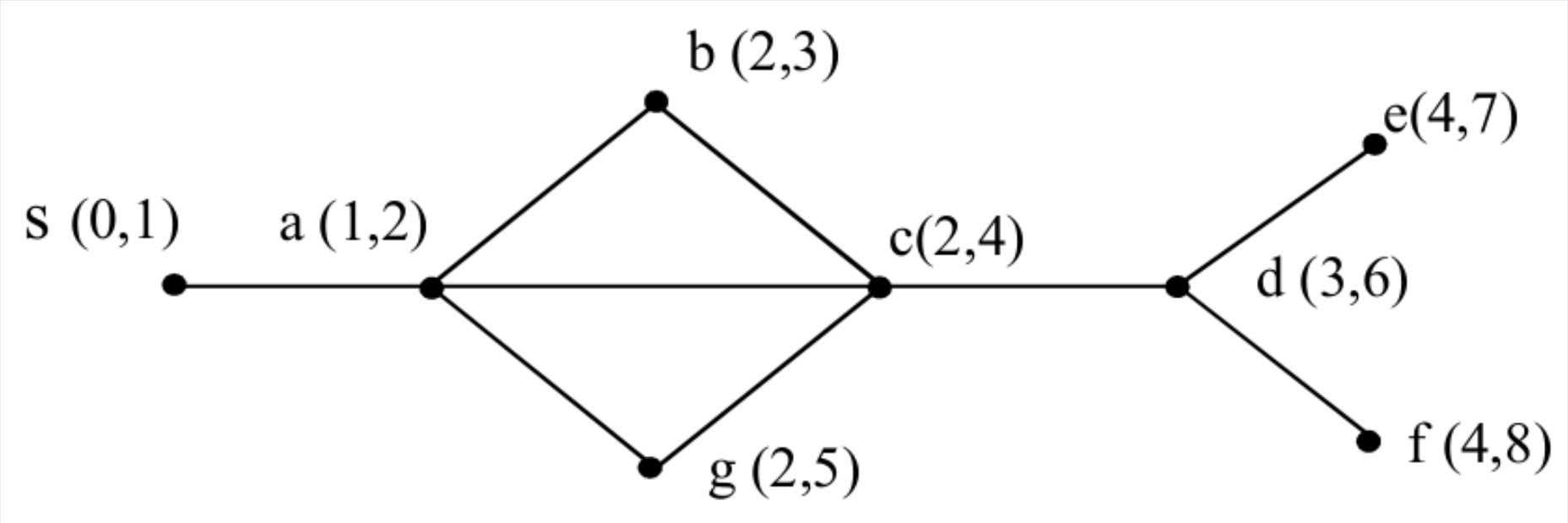
SV tham khảo chi tiết thuật toán tại đây!

Giải thích thuật toán BFS

- BFS được xây dựng trên cơ sở hàng đợi (Queue) - vào trước ra trước=> đỉnh được thăm càng sớm sẽ càng sớm trở thành đã duyệt xong và rời khỏi hàng đợi.
- Giả sử bắt đầu từ đỉnh s. Đỉnh này xem như đã được thăm-duyệt và gọi là **đỉnh mức 0**
- Xét tất cả các đỉnh kề với nó và được gọi là các **đỉnh mức 1**. Các đỉnh này xem như đã được thăm–duyệt, sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó (tương ứng với một hàng đợi)
- Tập các đỉnh kề với các đỉnh mức 1 được gọi là đỉnh mức 2, các đỉnh này xem như đã được thăm-duyệt
- Tiếp tục tương tự như vậy cho đến khi tất cả các đỉnh đã được thăm-duyệt
- Mức của một đỉnh v cho biết độ dài của đường đi ngắn nhất (theo số cạnh) từ s đến v trong đồ thị G.

Ví dụ 2.2

Minh họa một thứ tự thăm-duyệt các đỉnh của đồ thị bởi thuật toán BFS xuất phát từ đỉnh s và một hàng đợi
$Queue = (s, a, b, c, g, d, e, f)$ *tương ứng.*



Mỗi đỉnh được gán số mức và thứ tự thăm-duyệt. Chẳng hạn, đỉnh c có mức 2 và thứ tự thăm-duyệt là 4.

Ứng dụng cụ thể của DFS và BFS

Ví dụ 2.3 (Tìm đường đi từ đỉnh s đến đỉnh t của một đồ thị G cho trước.)

1. *Xuất phát từ đỉnh s của G, lần lượt thăm-duyệt đỉnh bằng thuật toán $DFS(s)$ hoặc $BFS(s)$ cho đến khi gặp đỉnh t.*
2. *không có đường đi từ s đến t => Đồ thị không liên thông*
3. *Vết của đường đi từ đỉnh s đến đỉnh t: bắt đầu từ đỉnh t, đi theo hướng ngược lại, chọn đỉnh w kề với t mà từ đó dẫn đến đỉnh t. Thuật toán BFS luôn cho kết quả là đường đi ngắn nhất theo số cạnh của G.*

Tài liệu tham khảo

Đ.N. An

Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*

Giáo trình Toán rời rạc

Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*

N.T. Nhựt

Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*