TOÁN RỜI RẠC
Đại số Boole và ứng dụng

NGUYỄN HẢI TRIỀU[1]

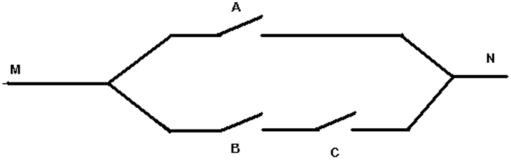
[1]Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,

Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

Giới thiệu

- Đại số Boole là một cấu trúc đại số được thực hiện trên các mệnh đề toán học bởi các phép toán logic.
- Đại số Boole có nhiều ứng dụng trong cuộc sống, đặc biệt trong lĩnh vực tin học - điện tử và viễn thông.
- Trong phần này giới thiệu các khái niệm và tính chất của một đại số Boole, cách xây dựng một hàm Boole, các phương pháp tối thiểu hóa một hàm Boole và ứng dụng của nó trong việc thiết kế các mạch logic điều khiển thiết bị điện tử.



Hình 1: Xét sơ đồ mạch điện như hình vẽ. Khi mạch điện gồm nhiều cầu dao, làm sao ta có thể kiểm soát được. **Giải pháp là đưa ra công thức, với mỗi cầu dao ta xem như là một biến. Như vậy ta sẽ có bảng giá trị sau:**

A	B	C	MN
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Tổng quan

1. **Đại số Boole**
   - Định nghĩa đại số Boole
   - Hàm Boole
   - Dạng nối rời chính tắc
2. Mạng logic
   - Mạng logic
   - Cổng NAND và cổng NOR
   - Biểu đồ Karnaugh
   - Tếbào
   - Đa thức tối tiểu

Định nghĩa đại số Boole

Mệnh đề toán học

Một mệnh đề toán học hay mệnh đề logic là một phát biểu có giá trị đúng (**1**) hoặc sai (**0**).

Trên tập hợp $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, người ta định nghĩa các phép toán cơ bản: cộng $\vee$, nhân $\wedge$, phủ định $^-$

+	0	1
0	0	1
1	1	1

.	0	1
0	0	0
1	0	1

x	$\overline{x}$
0	1
1	0

Định nghĩa 1.1

Trên tập hợp $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, *các phép toán* $\vee$, $\wedge$, $^{-}$ *thỏa mãn các tính chất sau*

1. *Tính kết hợp*
   $\forall a, b, c \in B : (a + b) + c = a + (b + c); (a.b).c = a.(b.c)$
2. *Tính giao hoán*
   $\forall a, b \in B : a + b = b + a; a.b = b.a$
3. *Tính phân phối*
   $\forall a, b, c \in B : (a + b).c = a.c + b.c; a.(b + c) = a.b + a.c$
4. *Phần tử trung hòa*
   $\forall a \in \{0, 1\} : a + 0 = a;\ a.1 = a$
5. *Phần tử bù*
   $\forall a \in \{0, 1\}$, *tồn tại* $\overline{a} \in \{0, 1\}$ *sao cho:* $a + \overline{a} = 1;\ a.\overline{a} = 0$

Khi đó, bộ sáu $(B = \{0, 1\},\ \vee,\ \wedge,\ ^{-},\ 0,\ 1)$ *được gọi là một đại số Boole.*

Ví dụ

Xét tập hợp $\mathbb{B} = \{0, 1\}$. Với mọi $x,\ y \in \mathbb{B}$, ta định nghĩa:

- $x \wedge y = xy$,
- $x \vee y = x + y - xy$,
- $\bar{x} = 1 - x$.

Khi đó, tập hợp $\mathbb{B}$ với các phép toán trên là một đại số Boole.

- $\wedge$ được gọi là **tích Boole**;
- $\vee$ là **tổng Boole**;
- $\bar{x}$ là **phần bù** của x.

Nhận xét

Cho x và y là các phần tử thuộc $\mathbb{B}$:

- Do $x \wedge y = xy$ nên ta dùng ký hiệu xy thay cho $x \wedge y$.
- $xy = yx$; $x \vee y = y \vee x$
- $xx = x$; $x \vee x = x$
- $x\bar{x} = 0$; $x \vee \bar{x} = 1$
- $x\left(y \vee z\right) = xy \vee xz$
- $\bar{\bar{x}} = x$
- De Morgan: $\overline{x \vee y} = \overline{x}\ \overline{y}$; $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, tổng quát:

$$\overline{x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n} = \overline{x_1}\ \overline{x_2} \ldots \overline{x_n};\ \overline{x_1 x_2 \ldots x_n} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee \cdots \vee \overline{x_n}.$$

Định nghĩa 1.2

Một ***hàm Boole*** *n biến là ánh xạ*

$$f : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B},$$

trong đó $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Như vậy hàm Boole n biến là một hàm số có dạng :

$$f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

trong đó mỗi biến trong x_1, x_2,. . . , x_n chỉ nhận hai giá trị 0, 1 và f nhận giá trị trong $\mathbb{B} = \{0,\ 1\}$ và $\mathbb{B}^n = \{(x_1,\ x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{B}\}$. Ký hiệu $\mathbb{F}_n$ để chỉ tập các hàm Boole n biến.

Ví dụ: $f(x, y, z, t) = (\bar{x} \vee \bar{z})t \vee (\bar{x}y \vee \bar{y}t)z \vee (\bar{y}z \vee xy\bar{z})\bar{t}$ là một hàm Boole 4 biến.

Định nghĩa 1.3

Xét hàm Boole n biến $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Vì mỗi biến x_i chỉ nhận một trong hai giá trị 0, 1 nên chỉ có 2^n trường hợp của bộ biến $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Ta có thể lập bảng gồm 2^n hàng ghi tất cả các giá trị của $f \Rightarrow$ bảng chân trị của f.

Một hàm Boole thường được xác định bằng bảng chân trị (truth table) trong đó liệt kê tất cả các giá trị tương ứng với các giá trị của các đối số.

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Hình 2: $f(x, y, z) = xy + xyz$

Ví dụ

Xét kết quả f trong việc thông qua một quyết định dựa vào 3 phiếu bầu x, y, z. Mỗi phiếu chỉ lấy một trong hai giá trị: 1 (tán thành) hoặc 0 (bác bỏ). Kết qủa f là 1 (thông qua quyết định) nếu được đa số phiếu tán thành, là 0 (không thông qua quyết định) nếu đa số phiếu bác bỏ. Hãy lập bảng chân trị của f.

x	y	z	f
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Ví dụ

Bài tập tự luyện

Trong cuộc thi bắn cung, mỗi người phải bắn 4 lần (x, y, z, t), số điểm trúng đích cho mỗi lần lần lượt là 2, 4, 6, 8. Kết quả là đạt nếu tổng điểm là 10 trở lên. Gọi f là boole tương ứng, là 1 nếu đạt và 0 nếu không đạt. Hãy lập bảng chân trị của f.

Từ đơn, từ tối tiểu

Xét tập hợp các hàm Boole $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

1. Mỗi hàm Boole x_i hay $\overline{x_i}$ được gọi là **từ đơn**.
2. Từ tối tiểu là tích khác không của đúng n từ đơn.

Ví dụ 1.1

Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- *Các từ đơn là x, y, z, $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$.*
- *Các từ tối tiểu là xyz, $\bar{x}yz$, $x\bar{y}z$, $xy\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}z$, $\bar{x}y\bar{z}$, $x\bar{y}\bar{z}$, $\bar{x}\bar{y}\bar{z}$*

Nhận xét

Tập hợp các hàm Boole n biến chứa đúng $2n$ từ đơn và 2^n từ tối tiểu.

Định lý 1.1

Cho f là hàm Boole n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

1. *Nếu f là từ tối tiểu thì bảng chân trị của f có đúng một vị trí bằng 1.*
2. *Ngược lại, nếu f chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $u = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ thì f có từ tối tiểu có dạng $f = b_1 b_2 \ldots b_n$, trong đó* $b_i = \begin{cases} x_i & \text{nếu } a_i = 1, \\ \overline{x_i} & \text{nếu } a_i = 0. \end{cases}$

Ví dụ 1.2

1. *Nếu $f(x, y, z)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $(1, 0, 1)$ thì $f = x\bar{y}z$.*
2. *Nếu $f(x, y, z, t)$ chỉ nhận giá trị 1 tại vị trí $(0, 1, 1, 0)$ thì $f = \bar{x}yz\bar{t}$.*

Định nghĩa 1.4

Xét tập hợp các hàm Boole của $\mathbb{F}_n$ theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Khi đó:

1. ***Đơn thức*** *là tích khác không của một số hữu hạn từ đơn.*
2. ***Công thức đa thức*** *là công thức biểu diễn hàm Boole thành tổng của các đơn thức.*

Ví dụ 1.3

Xét tập hợp các hàm Boole theo 3 biến x, y, z. Ta có

- *Các hàm Boole y, xz, yz, $x\bar{y}z$, $\bar{y}\bar{z}$, $\bar{z}$ là một vài đơn thức.*
- *Công thức $f = xy \vee \bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$ là một công thức đa thức.*

Xét hàm Boole $f(x, y, z) = x(y \vee z) \vee \bar{x}z$ ***không phải là công thức đa thức****. Tuy nhiên, ta có thể biến đổi $f = xy \vee xz \vee \bar{x}z$ trở thành công thức đa thức.*

Nhận xét. Mọi hàm Boole đều có thể biểu diễn dưới dạng đa thức.

Định nghĩa 1.5

*Dạng nối rời chính tắc là công thức biểu diễn hàm Boole thành **tổng của các từ tối tiểu**.*

Ví dụ 1.4

Xét hàm Boole $f(x,y,z) = x(y \vee z) \vee \bar{x}z$ *sẽ được biến đổi thành công thức đa thức* $f = xy \vee xz \vee \bar{x}z$. *Khi đó*

$$\begin{aligned} f = &\ xy(z \vee \bar{z}) \vee xz(y \vee \bar{y}) \vee \bar{x}z(y \vee \bar{y}) \\ = &\ xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z, \end{aligned}$$

là dạng nối rời chính tắc của f.

Định nghĩa 1.6

Xét hàm Boole f theo n biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Đặt

- $f^{-1}(1) = \{u \in \mathbb{B}^n | f(u) = 1\}$
- $f^{-1}(0) = \{u \in \mathbb{B}^n | f(u) = 0\}$

với $\mathbb{B}^n = \{u = (x_1,\ x_2, \ldots, x_n) | x_i \in \mathbb{B}\}$

$f = f(x, y, z)$ có bảng chân trị

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ta có

- $f^{-1}(1) = \{001, 011, 101, 111\}$
- $f^{-1}(0) = \{000, 010, 100, 110\}$

Trong đó, ta dùng ký hiệu 001 thay cho (0, 0, 1); 011 thay cho (0,1,1); …

Định lý 1.2

Cho f là hàm Boole n biến. Khi đó, nếu $f^{-1}(1) = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ thì dạng nối rời chính tắc của f là

$$f = m_1 \vee m_2 \vee \cdots \vee m_k,$$

trong đó m_i là từ tối tiểu nhận giá trị 1 tại vị trí u_i.

Ví dụ 1.5

Nếu f là hàm Boole theo 3 biến x, y, z sao cho
$f^{-1}(1) = \{101, 001, 100, 010\}$ *thì dạng nối rời chính tắc của f là:*
$f = x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z}$

Từ một bảng chân trị chúng ta có thể xác định được biểu thức của hàm Boole tương ứng của nó ở dạng *nối rời chính tắc* (chỉ quan tâm đến giá trị 1 trong bảng).

x	y	z	f
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Hình 3:

$$f(x, y, z) = x\overline{y}z + xy\overline{z} + xyz$$

Ví dụ 1.6

Một môn thi trắc nghiệm gồm 4 câu hỏi với số điểm lần lượt 2, 3, 5, 4. Nếu trả lời đúng mỗi câu sinh viên sẽ được điểm tối đa, trả lời sai chỉ được không điểm. Sinh viên thi đạt nếu kết quả từ 10 điểm trở lên. Xác định hàm Boole cho biết sinh viên thi đạt (=1) hay không đạt (=0).

Hướng dẫn

Gọi x, y, z, t là các biến Boole tương ứng với 4 câu hỏi, các biến này nhận giá trị 0 nếu câu trả lời tương ứng là sai và nhận giá trị 1 nếu câu trả lời là đúng. Cần xác định hàm Boole $f(x, y, z, t)$ nhận giá trị 1 hoặc 0 cho biết sinh viên thi đạt hoặc không đạt tương ứng. Để xác định hàm f, trước hết cần liệt kê tất cả các giá trị của nó theo giá trị của các biến x, y, z, t gồm $2^4 = 16$ trạng thái.

x	y	z	t	f
0	0	0	0	0
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	1

Hình 4: $f(x, y, z, t) =?$ ở dạng tổng chuẩn tắc đầy đủ

Ví dụ 1.7

Cho hàm Boole 3 biến x, y, z,

$$f^{-1}(0) = \{100, 010, 110, 011, 101.\}$$

Tìm dạng nối rời chính tắc của f.

Giải. Bằng cách lập bảng chân trị cho f ta được

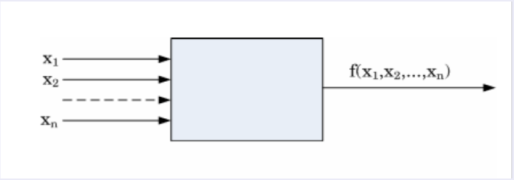
$$f^{-1}(1) = \{000, 001, 111\}$$

nên dạng nối rời chính tắc của f là

$$f = \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz$$

Định nghĩa 2.1

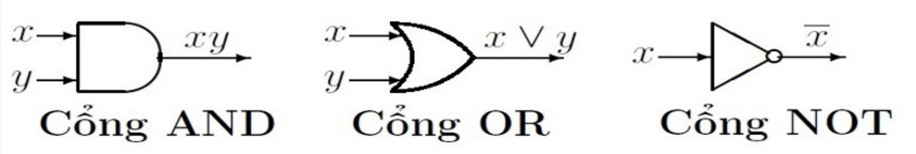
Một mạng logic (hay mạng các cổng) biểu diễn một hàm boole f là một hệ thống có dạng



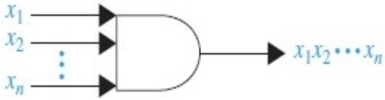
Trong đó:

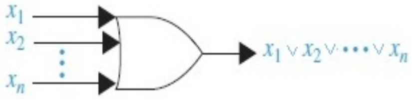
- *Input:* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *là các biến Boole*
- *Output* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *là một hàm Boole*

Một mạng các cổng luôn được cấu tạo từ một số mạng sơ cấp mà ta gọi là các cổng. Ta có các cổng cơ bản sau:



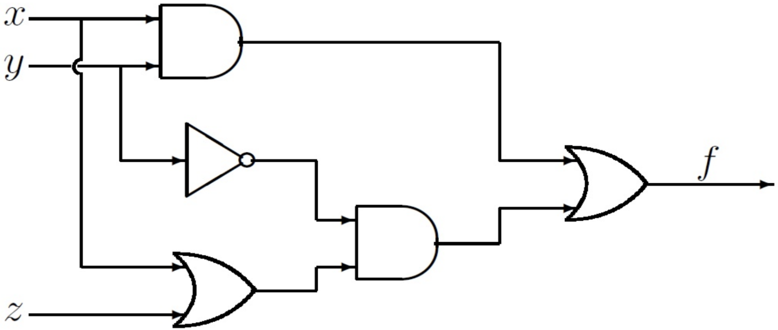
Ta có sự mở rộng cổng **AND** và **OR** cho nhiều đầu vào





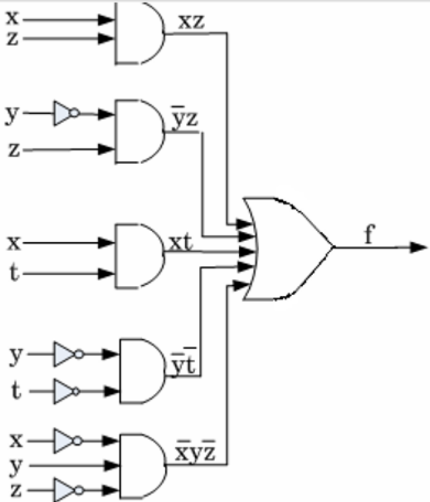
Ví dụ 2.1

Cho hàm boole $f = xy \vee \bar{y}(x \vee z)$. *Vẽ sơ đồ mạng logic của* f.



Ví dụ 2.2

Cho hàm boole $f = xz \vee \bar{y}z \vee xt \vee \bar{y}\bar{t} \vee \bar{x}y\bar{z}$. *Vẽ sơ đồ mạng logic của* f.

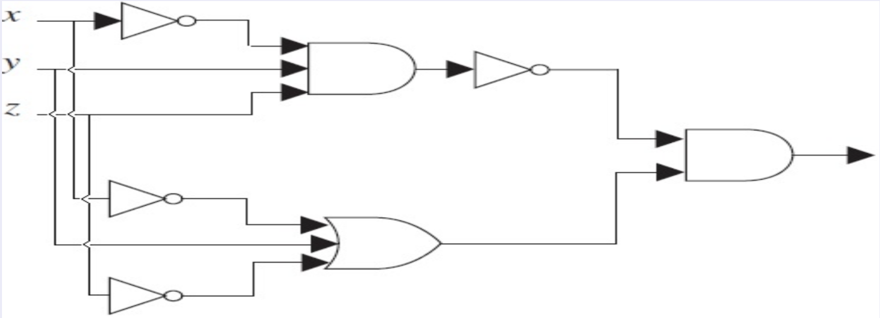


Ví dụ 2.3

Cho hàm boole $f = (x \vee z)(\bar{x}y) \vee y(\bar{x}z)$. *Vẽ sơ đồ mạng logic của* f.

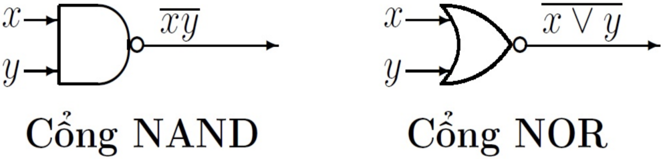
Ví dụ 2.4

Tìm công thức của mạng logic sau:



Định nghĩa 2.2

Ta ký hiệu cổng ***NAND*** *là NOT của AND và cổng* ***NOR*** *là NOT của OR.*



Định lý 2.1

Chỉ cần sử dụng một loại cổng ***NAND*** *hoặc* ***NOR*** *là đủ để tổng hợp một hàm boole.*

Chứng minh. Ta có

1. $\bar{x} = \overline{xx} = \overline{x \vee x}$
2. $xy = \overline{\overline{xy}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$
3. $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}} = \overline{\overline{x \vee y}}$

Biểu đồ Karnaugh là công cụ trực quan giúp:

1. Hiểu rõ hơn về hàm logic: mô tả trực quan mối quan hệ giữa các biến đầu vào và giá trị đầu ra của hàm logic
2. Tối ưu hóa mạch logic: cho phép ta tối giản hóa biểu thức đại số Boolean của hàm logic, dẫn đến việc giảm thiểu số lượng cổng logic cần thiết để xây dựng mạch logic tương ứng.
3. Rút gọn biểu thức logic: nhận diện các nhóm biến có thể được biểu diễn bằng các đơn thức đơn giản hơn.

Định nghĩa 2.3

Cho f là một hàm boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó bảng chân trị của f gồm 16 dòng. Thay cho bảng chân trị của f ta ***vẽ một bảng chữ nhật gồm 16 ô, được đánh dấu như sau:***

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Khi một ô nằm trong dãy được đánh dấu bởi x thì tại đó $x = 1$, bởi $\bar{x}$ thì tại đó $x = 0$, tương tự cho y, z, t.

Gạch chéo (hoặc tô đen) những ô mà f nhận giá trị 1. Khi đó ta được một biểu đồ, gọi là **biểu đồ Karnaugh** của f, ký hiệu bởi *kar(f)*.

Ví dụ 2.5

Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t *với* $f^{-1}(1) = \{1110, 0110, 1111, 1101, 0101, 1000, 0100\}$ *Tìm biểu đồ Karnaugh của* f*?*

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$	
z	1010	1110	0110	0010	$\bar{t}$
z	1011	1111	0111	0011	t
$\bar{z}$	1001	1101	0101	0001	t
$\bar{z}$	1000	1100	0100	0000	$\bar{t}$
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$	

Ví dụ 2.6 (BTVN)

Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t *với*

1. $f^{-1}(1) = \{1100, 1101, 1110, 1111, 1000, 1001, 0111, 0011, 0001\}$
2. $f^{-1}(0) = \{1011, 1001, 1100, 0100, 0011, 0001\}$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f*?*

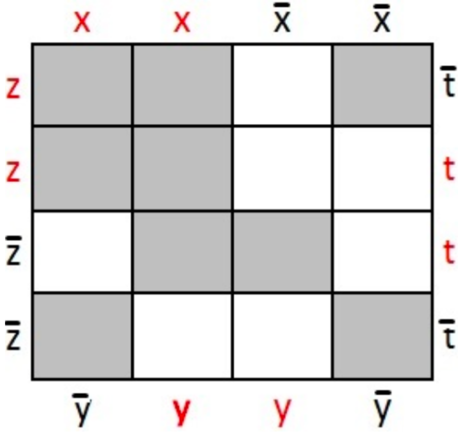
Mệnh đề 2.1

Cho f *và* g *là các hàm boole theo 4 biến* x, y, z, t*. Khi đó*

1. $f = g \Leftrightarrow kar(f) = kar(g)$.
2. $kar(fg) = kar(f) \cap kar(g)$.
3. $kar(f \vee g) = kar(f) \cup kar(g)$.

Ví dụ 2.7

Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t *với* $f = xz \vee y\bar{z}t \vee \bar{y}\bar{t}$. *Tìm biểu đồ Karnaugh của* f*?*



Ví dụ 2.8 (BTVN)

Cho hàm boole theo 4 biến x, y, z, t với

1. $f = x\bar{y}z \vee yz \vee xyt.$
2. $f = \bar{x}\bar{y}t \vee xyz \vee xz \vee yz\bar{t}$

Tìm biểu đồ Karnaugh của f?

Định nghĩa 2.4

Tương tự đối với trường hợp hàm Boole 3 biến ta có bảng chân trị là

	x	x	$\bar{x}$	$\bar{x}$
z	101	111	011	001
$\bar{z}$	100	110	010	000
	$\bar{y}$	y	y	$\bar{y}$

Ví dụ 2.9 (BTVN)

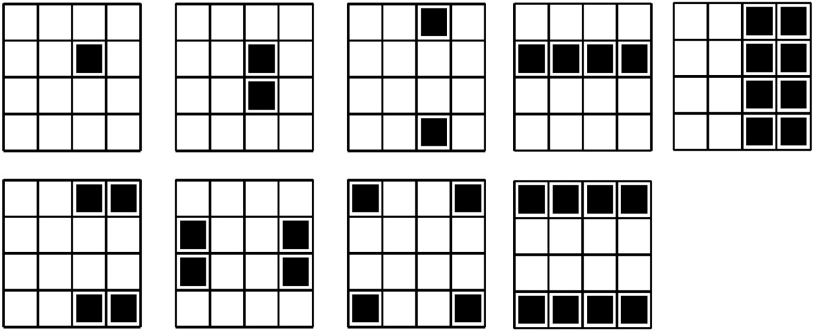
Tìm biểu đồ Karnaugh của hàm Boole 3 biến x, y, z biết:

- $f = \bar{x}\bar{y} \vee xyz \vee x\bar{z}$.
- $f^{-1}(1) = \{111, 010, 110, 001, 100\}$

Định nghĩa 2.5

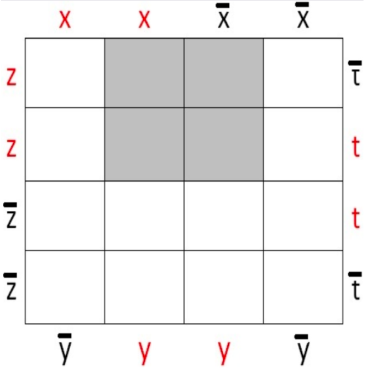
Kar(f) *được gọi* ***là hình chữ nhật*** *(theo nghĩa rộng) nếu khi ta* ***cuốn hình vuông lớn theo chiều dọc hay chiều ngang*** *để thành hình trụ thì* ***kar(f) trở thành hình chữ nhật trên hình trụ đó****. Hình chữ nhật có số ô là lũy thừa của 2 được gọi là một tế bào.*

Ví dụ. Các biểu đồ sau là các tế bào

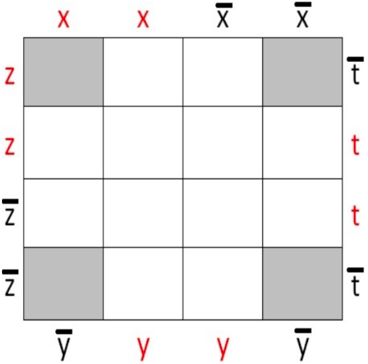


Nếu T **là một tế bào** thì T **là biểu đồ Karnaugh của một đơn thức duy nhất** m, cách xác định m như sau:
*Lần lượt chiếu T lên các cạnh, nếu **toàn bộ hình chiếu nằm trọn trong một từ đơn** nào thì từ đơn đó mới xuất hiện trong m.*

Tế bào có công thức là: yz



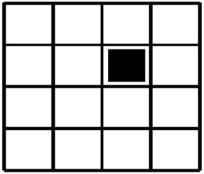
Tế bào có công thức là: $\bar{y}\bar{t}$



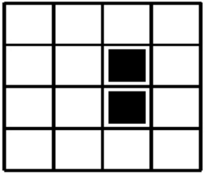
Mệnh đề 2.2

Cho f là hàm boole theo 4 biến x, y, z, t. Khi đó $kar(f)$ là tế bào gồm 2^k ô khi và chỉ khi f là một đơn thức gồm $4 - k$ từ đơn.

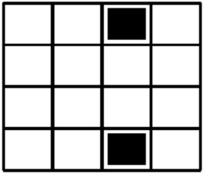
Ví dụ: ta có các tế bào và các đơn thức tương ứng là



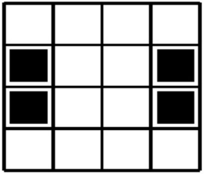
$\overline{x}\,y\,z\,t$



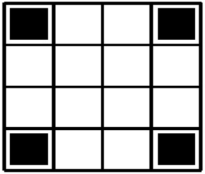
$\overline{x}\,y\,t$



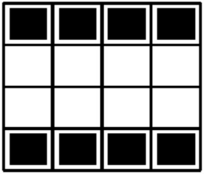
$\overline{x}\,y\,\overline{t}$



$\overline{y}\,t$



$\overline{y}\,\overline{t}$

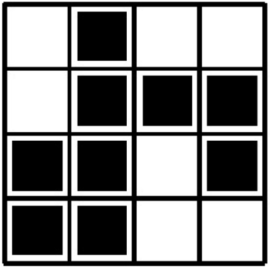


$\overline{t}$

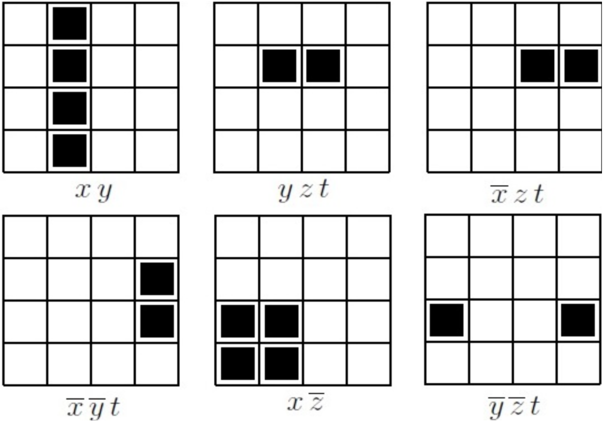
Định nghĩa 2.6

Một tế bào nằm trong $kar(f)$ được gọi là ***tế bào lớn*** *nếu nó* ***không nằm trong tế bào nào khác*** *của $kar(f)$.*

Biểu đồ Karnaugh của hàm boole f. Hãy tìm tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$?

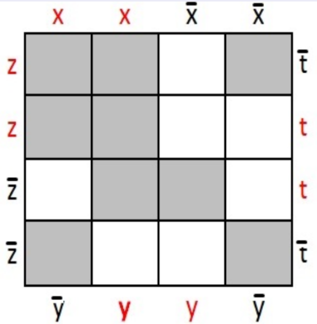


Các tế bào lớn của $kar(f)$ là:

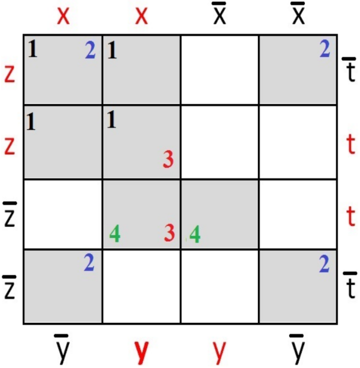


Ví dụ 2.10

Cho biểu đồ Karnaugh, tìm tất cả các tế bào lớn của f?



Đánh số các tế bào lớn ta có



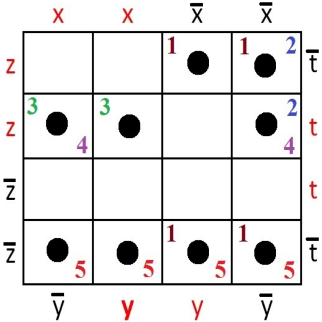
$kar(f)$ có 4 tế bào lớn là:

1. Tế bào 1: xz
2. Tế bào 2: $\bar{y}\bar{t}$
3. Tế bào 3: xyt
4. Tế bào 4: $y\bar{z}t$

Ví dụ 2.11

Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với
$f(x,y,z,t) = \bar{y}zt \vee \bar{y}z\bar{t} \vee yz\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}$

Đánh số các tế bào lớn ta có



$kar(f)$ có 4 tế bào lớn là:

1. Tế bào 1: $\bar{x}\bar{t}$
2. Tế bào 2: $\bar{x}\bar{y}z$
3. Tế bào 3: xzt
4. Tế bào 4: $\bar{y}zt$
5. Tế bào 5: $\bar{z}\bar{t}$

Ví dụ.(tự làm) Tìm các tế bào lớn của biểu đồ Karnaugh của f với

$$f(x,y,z,t) = x\bar{y}z \vee \bar{y}\bar{z}t \vee x\bar{z}\bar{t} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}yz\bar{t}$$

Định nghĩa 2.7

Cho hai công thức đa thức của một hàm boole:

$$\begin{aligned} f = &\quad m_1 \vee m_2 \vee \dots m_k \ (F) \\ f = &\ M_1 \vee M_2 \vee \cdots \vee M_l \ (G) \end{aligned}$$

Ta nói rằng công thức F ***đơn giản*** *hơn công thức G nếu tồn tại đơn ánh $h : \{1, 2, \dots, k\} \to \{1, 2, \dots, l\}$ sao cho với mọi $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ thì số từ đơn của m_i không nhiều hơn số từ đơn của $M_{h(i)}$*

Ví dụ 2.12

Giả sử f có hai công thức đa thức là $f = \bar{y}\bar{t} \vee x\bar{y}t \vee x\bar{t} \vee xzt \vee \bar{x}\bar{y}z \ (F)$; $f = \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \ (G)$. Hỏi công thức nào đơn giản hơn?

Định nghĩa 2.8

*Công thức F của hàm boole f được gọi là **đa thức tối tiểu** nếu không có công thức nào của f đơn giản hơn nó.*

Thuật toán Karnaugh

1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$.
2. Xác định tất cả các tế bào lớn của $kar(f)$ và các công thức đơn thức tương ứng với từng tế bào lớn.
3. Tìm trong $kar(f)$ những ô chỉ nằm trong duy nhất một tế bào lớn và chọn tế bào này để phủ $kar(f)$.

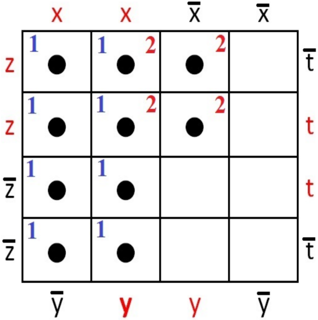
4. Xác định các phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn.
   - Nếu các tế bào lớn chọn được ở **Bước 3** đã phủ được $kar(f)$ thì $kar(f)$ chỉ có duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$.
   - Ngược lại, ta xét một ô bất kỳ chưa bị phủ. Sẽ có **ít nhất hai tế bào lớn chứa ô này**. Ta chọn một trong các tế bào lớn đó để phủ. Cứ tiếp tục quá trình trên đến khi nào $kar(f)$ được phủ kín. Khi đó, ứng với mỗi phép phủ ta có một công thức đa thức. Công thức đơn giản nhất trong các công thức trên chính là công thức đa thức tối tiểu của f.

Ví dụ 2.13

Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole sau:
$f(x, y, z, t) = xyzt \vee x(\bar{y} \vee \bar{z}) \vee yz \vee xy(\bar{z} \vee \bar{t})$

Giải. Ta có $f = xyzt \vee x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee yz \vee xy\bar{z} \vee xy\bar{t}$.

Bước 1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $kar(f)$. Bằng cách đánh số các tế bào lớn, ta có $kar(f)$ có 2 tế bào lớn là:

1. Tế bào 1: x
2. Tế bào 2: yz

Bước 3.

1. Ô (1,1) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô (1,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 2. Ta phải chọn tế bào 2.

Bước 4. Ta được duy nhất một phủ tối tiểu gồm các tế bào lớn của $kar(f)$ là $x \vee yz$. Vậy công thức đa thức tối tiểu của f là

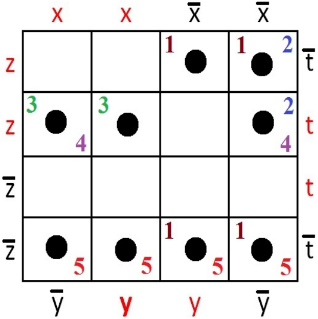
$$f = x \vee yz$$

Ví dụ 2.14

Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole sau:

$$f(x, y, z, t) = \bar{y}zt \vee \bar{y}\bar{z}\bar{t} \vee y\bar{z}\bar{t} \vee xyzt \vee \bar{x}z\bar{t}.$$

Bước 1. Vẽ biểu đồ $kar(f)$



Bước 2. Xác định các tế bào lớn của $kar(f)$. $kar(f)$ có 5 tế bào lớn là:

1. Tế bào 1: $\bar{x}\bar{t}$
2. Tế bào 2: $\bar{x}\bar{y}z$
3. Tế bào 3: xzt
4. Tế bào 4: $\bar{y}zt$
5. Tế bào 5: $\bar{z}\bar{t}$

Bước 3.

- Ô (1,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
- Ô (2,2) chỉ nằm trong tế bào lớn 3. Ta phải chọn tế bào 3.
- Ô (4,1) chỉ nằm trong tế bào lớn 5. Ta phải chọn tế bào 5.

Bước 4. Như vậy chỉ còn ô (2,4) là chưa được phủ, để phủ ô (2,4) ta có 2 cách chọn

1. Cách 1. Chọn tế bào 2. Khi đó tế bào 1, 2, 3, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xzt \vee \bar{z}\bar{t} \ (1)$$

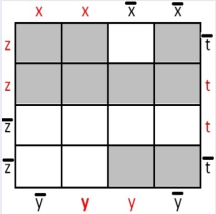
2. Cách 2. Chọn tế bào 4. Khi đó tế bào 1, 3, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có

$$f = \bar{x}\bar{t} \vee xzt \vee \bar{y}zt \vee \bar{z}\bar{t} \ (2)$$

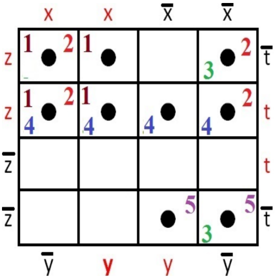
Do công thức (1) và (2) **đơn giản như nhau** nên f có hai công thức đa thức tối tiểu như (1)-(2).

Ví dụ 2.15

Tìm đa thức tối tiểu của hàm boole f biết rằng biểu đồ $kar(f)$ là



Bước 1. tế bào lớn của $kar(f)$



Bước 2. $kar(f)$ có 5 tế bào lớn:

1. Tế bào 1: xz
2. Tế bào 2: $\bar{y}z$
3. Tế bào 3: $\bar{x}\bar{y}\bar{t}$
4. Tế bào 4: zt
5. Tế bào 5: $\bar{x}\bar{z}\bar{t}$

Bước 3.

1. Ô (1,2) chỉ nằm trong tế bào lớn 1. Ta phải chọn tế bào 1.
2. Ô (2,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 4. Ta phải chọn tế bào 4.
3. Ô (4,3) chỉ nằm trong tế bào lớn 5. Ta phải chọn tế bào 5.

Bước 4. Như vậy chỉ còn ô (1,4) là chưa được phủ, để phủ ô (1,4) ta có 2 cách chọn

1. Cách 1. Chọn tế bào 2. Khi đó tế bào 1, 2, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có
$$f = xz \vee \bar{y}z \vee zt \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t}\ (1)$$
2. Cách 2. Chọn tế bào 3. Khi đó tế bào 1, 3, 4, 5 sẽ phủ hết các ô. Do đó, ta có
$$f = xz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{t} \vee zt \vee \bar{x}\bar{z}\bar{t}\ (2)$$

Ta có **công thức (1) đơn giản hơn công thức (2)**. Do đó công thức đa thức tối tiểu của f là (1).

Tài liệu tham khảo

Đ.N. An
Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*

Giáo trình Toán rời rạc
Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐHSP Huế. (2003), 22-35.*

N.T. Nhựt
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*

L.V. Luyện
Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2018).*