

# TOÁN RỜI RẠC LÝ THUYẾT ĐỒ THỊ

NGUYỄN HẢI TRIỀU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Bộ môn Kỹ thuật phần mềm,  
Khoa Công nghệ thông tin, Trường ĐH Nha Trang

NhaTrang, February 2022

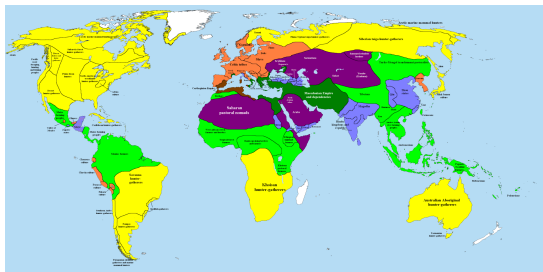
# Tổng quan

- 1 Các khái niệm và tính chất cơ bản của đồ thị
- 2 Các đồ thị đặc biệt
- 3 Tô màu đồ thị

# Tô màu đồ thị

Bài toán tô màu đồ thị (graph coloring) có nhiều ứng dụng:

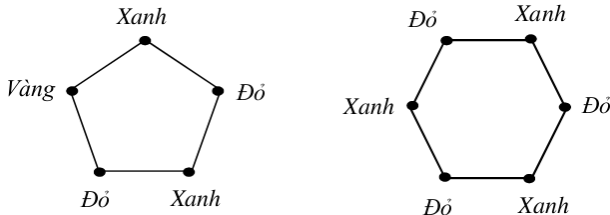
- tô màu bản đồ, bài toán lập lịch
- bài toán phân chia kênh phát sóng các đài truyền hình
- bài toán phân bổ tần số cho các mạng điện thoại di động



**Hình 1:** Xác định số màu tối thiểu cần dùng để tô màu một bản đồ sao cho hai miền kề nhau có màu khác nhau

## Định nghĩa 3.1

Tô màu đồ thị là việc gán mỗi đỉnh của đồ thị một màu sao cho hai đỉnh kề nhau có màu khác nhau. Vấn đề đặt ra của bài toán tô màu đồ thị là *tìm cách tô màu đồ thị sao cho số màu sử dụng là bé nhất có thể.*



**Hình 2:** Các đồ thị vòng  $C_5$  và  $C_6$  được tô màu tối ưu.

Số màu tối thiểu cần thiết để tô màu đồ thị  $G$  được gọi là **sắc số** của  $G$  và ký hiệu là  $\chi(G)$ . Một đồ thị được gọi là  $k$ -sắc nếu có sắc số là  $k$ .

## Ví dụ 3.1

*Dễ thấy rằng,*

- đồ thị đầy đủ  $K_n$  là  $n$ -sắc.
- đồ thị vòng  $C_n$  là 3 sắc nếu  $n$  là số lẻ, 2-sắc nếu  $n$  là số chẵn.

*Việc xác định sắc số của một đồ thị là bài toán **NP-Hard***

## Định lý 3.1 (Konig)

*Một đồ thị (với ít nhất một cạnh) là đồ thị 2-sắc khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.*

## Định lý 3.2 (Brook)

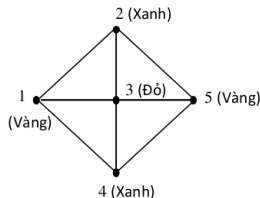
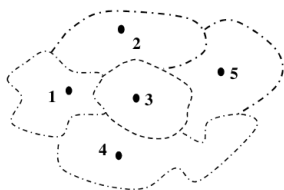
*Mọi đơn đồ thị liên thông  $G$ , ngoại trừ đồ thị đầy đủ và đồ thị vòng độ dài lẻ, đều có sắc số không quá bậc lớn nhất của các đỉnh trong  $G$ .*

## Định lý 3.3 (Định lý bốn màu)

*Mọi đồ thị phẳng có sắc số không quá bốn.*

### Ví dụ 3.2

*Giả thuyết “Mọi bản đồ có thể tô với số màu không quá 4”: với một bản đồ cho trước có thể được biểu diễn bằng một đồ thị phẳng  $G$  tương ứng bằng cách xem thủ đô của các nước là đỉnh, một cạnh nối hai đỉnh tương ứng với hai thủ đô của hai nước kề nhau (có chung đường biên giới)*



**Hình 3:** Một bản đồ và đồ thị phẳng tương ứng

# Thuật toán Welch-Powell

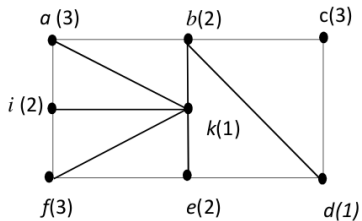
## Thuật toán W-P dùng để tô màu một đồ thị $G$

Thực hiện theo các bước sau:

- ❶ Sắp xếp các đỉnh  $G$  theo bậc giảm dần.
- ❷ Dùng một màu chưa tô để tô đỉnh đầu tiên trong danh sách và tất cả các đỉnh không kề nhau, không kề với đỉnh đầu tiên.
- ❸ Loại bỏ các đỉnh đã tô màu
- ❹
  - ▶ Nếu đã tô màu xong: kết thúc
  - ▶ Nếu chưa xong: quay lại bước 2

## Chú ý

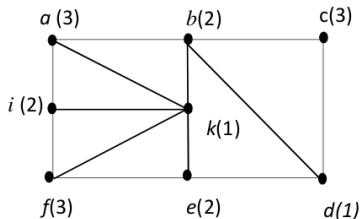
Thuật toán Welsh-Powell chưa cho ta sắc số của  $G$ . Kết quả chỉ thu được một cách tô màu tốt hơn cách tô màu ngẫu nhiên.



**Hình 4:** Ví dụ đồ thị được tô bởi 3 màu  $\{1,2,3\}$  theo thuật toán Welsh-Powell.

vertex <sup>degree</sup>	$k^5$	$b^4$	$a^3$	$d^3$	$e^3$	$f^3$	$i^3$	$c^2$
Color N <sup>o</sup> 1	1			1				
Color N <sup>o</sup> 2		2			2		2	
Color N <sup>o</sup> 3			3			3		3





**Hình 4:** Ví dụ đồ thị được tô bởi 3 màu  $\{1,2,3\}$  theo thuật toán Welsh-Powell.

vertex <sup>degree</sup>	$k^5$	$b^4$	$a^3$	$d^3$	$e^3$	$f^3$	$i^3$	$c^2$
Color N <sup>o</sup> 1	1			1				
Color N <sup>o</sup> 2		2			2		2	
Color N <sup>o</sup> 3			3			3		3

Trong đồ thị  $G$  đã cho chứa đồ thị đầy đủ  $K$  gồm các đỉnh  $b, c, d$  vì vậy phép tô màu như trên của thuật toán Welch-Powell là tối ưu và  $\chi(G) = 3$ .

## Nhận xét

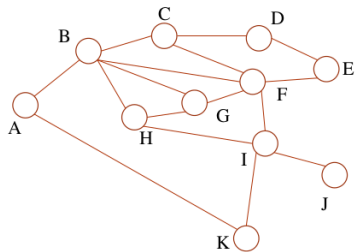
Thuật toán Welch-Powell yêu cầu sắp xếp các đỉnh theo thứ tự bậc giảm dần trước khi tô màu, cách sắp xếp này là không duy nhất vì trong một đồ thị luôn tồn tại một số đỉnh cùng bậc, đây cũng là yếu tố sinh ra độ khó của bài toán tô màu đồ thị.

Cũng với đồ thị  $G$  như trên, nếu danh sách các đỉnh được chọn là  $\{k, b, a, d, f, e, i, c\}$  thì thuật toán Welch-Powell tô màu cho đồ thị  $G$  không tối ưu.

Độ phức tạp thời gian tính toán là  $O(n^2)$  với  $n$  là số đỉnh của  $G$ .

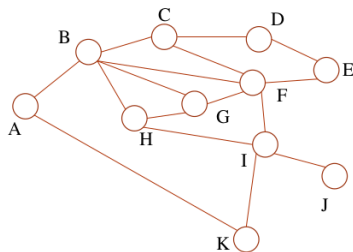
# Bài tập tô màu đồ thị

Tô màu đồ thị sau sử dụng thuật toán Welch-Powell



# Bài tập tô màu đồ thị

Tô màu đồ thị sau sử dụng thuật toán Welch-Powell



Kết quả: dùng 3 màu 1 (B, D, I); 2 (F, H, A, J); 3 (C, G, E, K).  
 Các đỉnh được sắp xếp theo thứ tự:  $B^5, F^5, I^4, C^3, G^3, H^3, A^2, D^2, E^2, K^2, J^1$

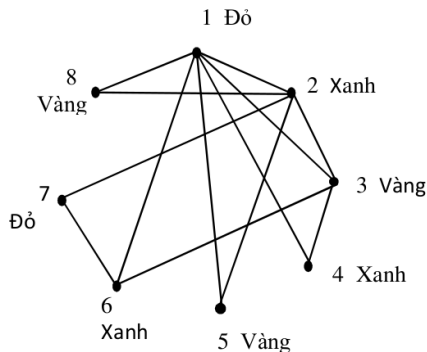
# Ứng dụng của bài toán tô màu đồ thị

## Lập lịch thi

Mỗi sinh viên phải thi một số môn học. Hãy lập lịch thi sao cho không có sinh viên nào phải thi hai môn cùng một lúc và hoàn thành kỳ thi sớm nhất có thể.

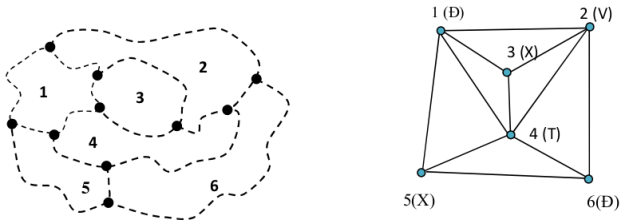
- Mỗi môn học tương ứng với một đỉnh
- Nếu 2 môn học cùng được dự thi bởi 1 sinh viên thì 2 đỉnh tương ứng là kề nhau
- Thời điểm thi của các môn được biểu thị bằng các màu
- Số ca thi trường phải tổ chức chính là sắc số của đồ thị đối ngẫu thu được

# Lập lịch thi



**Hình 5:** Đồ thị biểu diễn lịch thi cho 8 môn thi với ba ca thi tương ứng với ba màu

# Bài toán phân bổ tần số của mạng điện thoại di động



**Hình 6:** Bản đồ khu vực của mạng GSM và đồ thị phẳng  $G$  tương ứng

- Mỗi khu vực trong mạng sẽ được cung cấp một tần số
- Các khu vực có các màu khác nhau sử dụng hai tần số khác nhau, hai khu vực cùng màu có thể sử dụng chung một tần số.
- Một hệ thống GSM nào chỉ cần hoạt động trong tối đa bao nhiêu dải tần số khác nhau?

## Ví dụ thực tế

Có 7 bảy bộ phát sóng vô tuyến điện là A, B,..., G cần được phân bổ tần số. Khoảng cách giữa các bộ phát sóng vô tuyến được cho bởi ma trận.

	A	B	C	D	E	F	G
A	-	30	150	23	200	70	88
B		-	43	140	76	99	110
C			-	50	110	70	98
D				-	76	120	200
E					-	112	87
F						-	10
G							-

Giả thiết rằng nếu hai bộ phát sóng có khoảng cách bé hơn 100 km, chúng phải được phát sóng ở các tần số khác nhau. Cần cung cấp tối thiểu bao nhiêu tần số phát sóng khác nhau cho 7 bộ phát sóng đã cho?

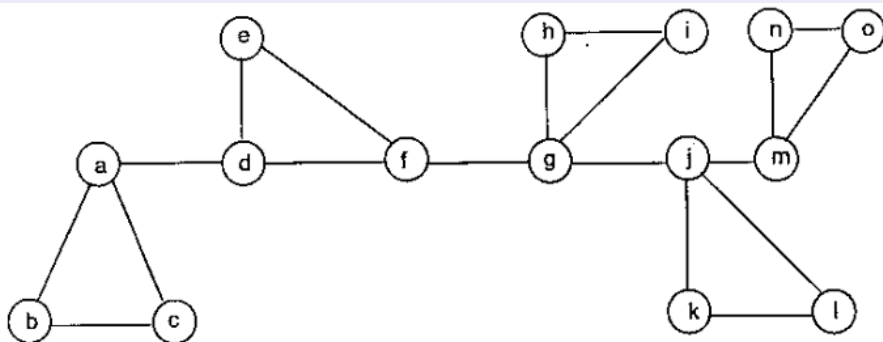


### Ví dụ 3.3

*What is the smallest number of colors that can be used to color the vertices of a cube so that no two adjacent vertices are colored identically?*

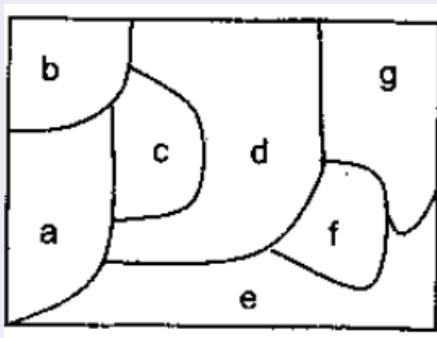
### Ví dụ 3.4

*Tìm số sắc của đồ thị sau:*



## Ví dụ 3.5

*Tô màu cho bản đồ sau*



# Tài liệu tham khảo



Đ.N. An

Giáo Trình Toán Rời Rạc. *Trường ĐH Nha Trang, (2021).*



Giáo trình Toán rời rạc

Giáo trình Toán Rời Rạc. *Trường DHSP Huế. (2003), 22-35.*



N.T. Nhật

Bài giảng Toán Rời Rạc. *Trường ĐH KHTN Tp.HCM. (2011).*