Tentamen i matematisk statistik för Civilingenjörer i Datateknik och Intelligenta System

7.5 hp

januari, 2025

Maxpoäng: 108 poäng på tentan + 108 bonuspoäng = 216 poäng totalt. **Hjälpmedel**: Miniräknare TI-30Xa samt formelsamling som delas ut av vakterna. **Betygsgränser**: 56–79 poäng ger betyg 3, 80–103 poäng ger betyg 4, 104–216 poäng ger betyg 5. **Kursansvarig**: Eric Järpe, telefon 0729-77 36 26.

1. Antag att man ska göra 20 oberoende observationer av $X \in N(1, \sigma)$. Vad är då
   (a) $P(2X + |X| \leq 3)$ om $\sigma = 2$? (5p)
   (b) σ om $P(-1 \leq \bar{X} \leq 3) = 0.98$? (4p)
   (c) täthetsfunktionen för $\min\limits_{1 \leq i \leq 20} X_i$ om $\sigma = 3$? (5p)

   För de 20 observationerna befinns $\sum_{i=1}^{20} x_i = 22.6$ och $\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 1\,223.6$.
   (d) Beräkna ett uppåt begränsat 99% konfidensintervall för σ^2. (4p)

2. Gunnar tränar på att trixa med sin fotboll. Han räknar antalet kickar han får per gång han försöker hålla bollen i luften på en fot. Av 20 gånger noterar han 6, 0, 41, 1, 12, 0, 4, 4, 17, 57, 7, 15, 29, 1, 3, 40, 3, 4, 31, 22 kickar.
   (a) Gör ett histogram för de relativa frekvenserna med klassindelningen $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$ och $[50, 60)$. (5p)
   (b) Antag att antalet kickar per gång är genometriskt fördelat med parameterna p. Beräkna ML-skattningen av p baserat på observationerna. (8p)
   (c) Kan man (med klassindelningen från (a)) bevisa att antalet kickar per gång inte är geometriskt fördelat på 5% signifikansnivå? (8p)

3. Ofelia är på julgransplundring där det serveras kokostoppar och havreflarn. Emellertid blir det strömavbrott och alldeles mörkt just när hon ska förse sig från skålen där kakorna kokostopp och havreflarn ligger blandade så Ofelia rafsa några kakor på måfå.
   (a) Antag att det finns ett mycket stort antal kakor i skålen men 10 gånger så många havreflarn som kokostoppar. Hur många kakor behöver Ofelia ta totalt för att sannolikheten att hon ska få åtminstone en kokostopp ska bli minst 999‰? (5p)
   (b) Antag nu istället att det finns 15 kokostoppar och 25 havreflarn i skålen. Om hon tar totalt 6 kakor, vad är då sannolikheten att hon får lika många kokostoppar som havreflarn? (4p)

4. Man observerar lönen för olika anställda då de anställs och efter 10 års anställning och räknar om siffrorna så att de har samma penningvärde.

   (a) Antag att man observerar följande löner för 10 anställda:

Ingångslön	12 700	42 200	15 300	27 400	39 850	135 150	22 300	245 850	7 650	20 800
Lön efter 10 år	19 600	90 400	24 550	37 750	38 550	284 450	22 250	433 900	11 600	28 000

   Kan man på 5% signifikansnivå bevisa att sannolikheten att man ökar sin lön är större än sannolikheten att den minskar (efter omräkning till samma penningvärde) om man antar att lönen är en normalfördelad variabel? Vad blir styrkan av testet? (7p)

   (b) Antag nu istället att man observerar löner för 100 anställda varav reallönen minskat för 37. Kan man då på 5% signifikansnivå bevisa att medianen för ingångslön är skild från medianlönen efter 10 års anställning om man tar hänsyn till att lön är en typiskt tungsvansad icke-normalfördelad variabel? Vad blir p-värdet? (7p)

5. Då det brinner vill man att brandsläckaren ska funka. Vid ett test ska man mäta trycket i ett stort antal tryckladdade brandsläckare. En undre gräns för att den ska fungera väl är att trycket är mer än 7 bar. Under antagandet att standardavvikelsen är 3 bar ska man därför göra ett hypotestest av om det förväntade trycket kan bevisas mer än 7 bar på 1‰ signifikansnivå. Om man dessutom antar att det förväntade trycket i själva verket är 8 bar, beräkna

   (a) styrkan av testet om stickprovsstorleken är 35. (7p)

   (b) hur många observationer man behöver ha i stickprovet om styrkan av testet ska bli 999‰. (8p)

6. Låt X och Y vara kontinuerliga variabler med sammansatt täthetsfunktion $f(x, y) = C\ln(x + 2y)$ definierad på $[1, e]^2$ och beräkna

   (a) normeringskonstanten C. (8p)

   (b) $P(X > 2Y)$. (5p)

   (c) $P(X \leq 2 \,|\, Y \leq \frac{3}{2})$. (6p)

7. Låt $X \in Bin(7, p)$ där $p \in U(0, 1)$ och beräkna

   (a) $E(X^2 \,|\, p = \frac{1}{3})$ (5p)

   (b) $E(X)$. (7p)