Matematik

Definition 1 MÄNGDBETECKNINGAR

$\varnothing$	*Tomma mängden*	Ω	*Hela utfallsrummet*	$A \subseteq B$	*A är delmängd av B*
$\cup$	*Unionen*	$\cap$	*Snittet*	$a \in A$	*Elementet a tillhör mängden A*
^{C}	*Komplementet*	$\lvert A \rvert$	*Antalet element i A*	$\setminus$	*Mängdminus*

Sats 1 ADDITIONSSATSEN
För alla mängder A och B gäller att $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Sats 2 DE MORGANS LAGAR
För alla mängder A och B gäller att $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$ *och* $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Sats 3 EXPONENTLAGARNA
$a^{b+c} = a^b a^c$, $a^{bc} = (a^b)^c = (a^c)^b$, $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ *och* $a^{1/2} = \sqrt{a}$.

Sats 4 LOGARITMLAGARNA *För alla $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ gäller*
$\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$, $\log_a(b^c) = c \log_a b$, $\log_a a = 1$, $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$.

Sats 5 KVADRERINGSREGLERNA
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ *och* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

Sats 6 ANDRAGRADSEKVATIONER
Om $x^2 + px + q = 0$ *så är* $x = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})$.

Sats 7 SAMBANDET MELLAN KOEFFICIENTER OCH RATIONELLA RÖTTER
Om ekvationen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = 0 \quad \text{där } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$$

har en rationell rot $x = p/q$ så måste a_0 vara mulitpel av p och a_n vara mulitipel av q.

Sats 8 KONJUGATMETODEN
Om fjärdegradsekvationen $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, *där* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, *uppfyller villkoret*

- $8c = a(4b - a^2)$ *så är de fyra rötterna*
  $x = \frac{1}{2}\Big(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4(\beta \pm \delta)}\Big)$ *där* $\alpha = \frac{a}{2}$, $\beta = \frac{b}{2} - \frac{a^2}{8}$ *och* $\delta = \sqrt{\beta^2 - d}$.
- $c^2 = a^2 d$ *så är de fyra rötterna*
  $x = \frac{1}{2}(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})$ *där* $\alpha = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 + 2\beta - b}$, $\beta = \frac{c}{a}$ *och* $\gamma = \frac{a}{2}$.

Definition 2 Absolutbeloppet *av x definieras*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{om } x > 0 \\ -x & \text{om } x \leq 0 \end{cases}$$

för alla $x \in \mathbb{R}$.

Sats 9 Faktorsatsen
Varje polynom $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ *av grad* n *har* n *nollställen* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *och kan faktoriseras mha dessa enligt* $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

Definition 3
Ett **primtal** *är ett heltal som inte är jämnt delbart med något annat heltal andra än 1 och sig självt.*

Algoritm 1 Divisionsalgoritmen
För alla heltal a *och* $b \neq 0$ *finns det heltal* k *och* r *sådana att* $0 \leq r \leq |b| - 1$ *och*

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b}$$

där talet k *kallas* **kvot** *och talet* r *kallas* **(principal) rest**.

Algoritm 2 Eratosthenes såll
Antag att man vill generera alla primtal $\leq n$.

1. *Gör en lista över alla heltal fr o m* 2 *t o m* n.
2. *Ringa in det första icke strukna eller inringade talet.*
3. *Stryk alla multipler av det senast inringade talet från resten av listan.*
4. *Om inte alla tal* $\leq \sqrt{n}$ *är inringade eller strukna, gå tillbaks till steg 2.*
5. *Då alla tal som är* $\leq \sqrt{n}$ *behandlats är de icke strukna talen primtalen.*

Definition 4
Den **största gemensamma delaren**, $\gcd(a, b)$, *för två heltal,* a *och* b, *är produkten av alla primtalsfaktorer som är gemensamma i* a *och* b.

Algoritm 3 Euklides algoritm
För att bestämma $\gcd(a, b)$, *där* $a > b$, *bestäm* $r_1, r_2, r_3, \ldots$ *så att*

$$\begin{cases} a &= c_1b + r_1 \quad \text{där } 0 < r_1 \leq |b| - 1 \\ b &= c_2r_1 + r_2 \quad \text{där } 0 < r_2 \leq r_1 - 1 \end{cases}$$

och fortsättningsvis

$$\begin{cases} r_1 &= c_3r_2 + r_3 \quad \text{där } 0 < r_3 \leq r_2 - 1 \\ r_2 &= c_4r_3 + r_4 \quad \text{där } 0 < r_4 \leq r_3 - 1 \\ \vdots & \quad \vdots \\ r_{n-2} &= c_nr_{n-1} + r_n \quad \text{där } 0 < r_n \leq r_{n-1} - 1 \\ r_{n-1} &= c_nr_n + 0 \quad (\text{där alltså } r_{n+1} = 0) \end{cases}$$

Då är $\gcd(a, b) = r_n$, *den sista positiva resten.*

Definition 5
Låt a *och* b *vara heltal. Det minsta tal,* c, *sådant att* $c = am = bn$ *för några positiva heltal* m *och* n *kallas* **minsta gemensamma multipel** *för* a *och* b *och betecknas* $\operatorname{lcm}(a, b)$.

Sats 10 $\operatorname{lcm}(a, b) = \dfrac{ab}{\gcd(a, b)}$ *för alla heltal* a *och* b.

Definition 6
Heltalen a *och* b *kallas* **relativt prima** *om* $\gcd(a, b) = 1$.

Algoritm 4 Lösning av diofantisk ekvation
För att lösa den diofantiska ekvationen $ax + by = c$

1. *beräkna* $d = \gcd(a, b)$ *mha Euklides algoritm.*
2. *Om inte* c *är en multipel av* d *så saknar ekvationen heltalslösningar.*
3. *Om* c *är en multipel av* d*, låt* $k = \frac{c}{d}$.
4. *Lös* **hjälpekvationen** $ax + by = d$ *mha Euklides algoritm baklänges* $\Rightarrow \quad (x_0, y_0)$.
5. *Allmän lösning till den fullständiga* $ax + by = c$ *är då* $\{(kx_0 + \frac{b}{m}n, ky_0 - \frac{a}{m}n), n \in \mathbb{Z}\}$ *där* $m = \gcd(a, b, d)$.

Sats 11 Resträkning
Om $a \equiv r$ *och* $b \equiv s \pmod{c}$, *så är* $a + b \equiv r + s \pmod{c}$.
Om $a \equiv r$ *och* $b \equiv s \pmod{c}$, *så är* $ab \equiv rs \pmod{c}$.
Om $a \equiv r \pmod{c}$, *så är* $a^b \equiv r^b \pmod{c}$.

Definition 7 *Den* **diskreta (multiplikativa) inversen** *till* a *mod* n *är det minsta positiva tal* x*, betecknat* $a^{-1} \bmod n$*, som satisfierar* $ax \equiv 1 \pmod{n}$.

Definition 8 *Den* **diskreta** $\boldsymbol{a}$**-logaritmen** *av* b *mod* n *är det minsta positiva tal* x*, betecknat* $\log a \bmod n$*, som satisfierar* $a^x \equiv b \pmod{n}$.

Sats 12 Kinesiska restsatsen
Om $n_1, n_2, \ldots, n_m$ *är parvis relativt prima så har kongruenskevationssystemet*

$$\begin{cases} x \equiv h_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv h_2 \pmod{n_2} \\ \quad\vdots \\ x \equiv h_m \pmod{n_m} \end{cases}$$

lösningen $x = \sum_{i=1}^{m} h_i b_i \frac{n}{n_i} \bmod n$ *i* $\mathbb{Z}_n^*$ *där* $n = n_1 n_2 \cdots n_m$ *och* $b_i = (\frac{n}{n_i})^{-1} \bmod n_i$.

Algoritm 5 Fermats faktoriseringsmetod
Antag att man vill faktorisera det udda *talet* N*, dvs man vill hitta heltal,* p *och* q*, sådana att* $N = pq$*. Då kan man göra enligt följande procedur. Om talet man vill faktorisera är ett jämnt tal, bryt ut faktorn 2 och fortsätt tills ett udda tal,* N*, erhålls.*

1. *Låt (initialt)* $x = 1 + [\sqrt{N}]$
2. *Beräkna* $x^2 - N$.
3. *Om* $x^2 - N$ *är en jämn kvadrat (dvs om* $\sqrt{x^2 - N}$ *är ett heltal), låt* $p = x + \sqrt{x^2 - N}$ *och* $q = x - \sqrt{x^2 - N}$ *och gå till 6.*
4. *Om* $x - \sqrt{x^2 - N} < 2$*, låt* $p = N$ *och* $q = 1$ *och gå till 6.*
5. *Addera 1 till* x *och gå till 2.*
6. *Klart!*

Om faktoriseringen blir $p = N$ *och* $q = 1$ *(såsom det kan i steg 4. ovan) så är talet* N *ett primtal.*

Definition 9
Eulers ϕ-funktion, $\phi(n)$, är antalet positiva heltal $< n$ som är relativt prima med n.

Sats 13 Eulers sats
Om a och n är relativt prima så är $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Sats 14 Eulers produktregel
$\phi(n) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{k_i-1}(p_i - 1)$ *där* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ *är primtalsfaktoriseringen av n.*

Sats 15
Om g är en generator av det ändliga fältet $\mathbb{F}_n$ så är samtliga generatorer $\{g^k \bmod n : k \in \mathbb{F}_n, \gcd(k, n-1) = 1\}$.

Sats 16
Om p primtal, $2p+1$ primtal, $g \in \{1, 2, \ldots, 2p\}$, $g^2 \not\equiv 1 \pmod{2p+1}$ och $g^p \not\equiv 1 \pmod{2p+1}$ så är g en generator av fältet $\mathbb{F}_{2p+1}$.

Sats 17
Om $\mathbb{F}_p$ är ett ändligt fält av primtalsordning p så är antalet generatorer av fältet $\phi(p-1)$.

Definition 10 lfsr
Givet sekvensen $a_1\, a_2\, \ldots\, a_n\, b_1\, b_2\, \ldots\, b_n$ där $a_i, b_i \in \{0, 1\}$ för alla $1 \le i \le n$ bildas sekvensen $x_1, x_2, \ldots, x_{2^n-1}$ genom att $x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_n = b_n$ och sedan $x_k = a_1 x_{k-1} + a_2 x_{k-2} + \ldots + a_n x_{k-n} \bmod 2$ för alla $n+1 \le k \le 2^n - 1$.

Definition 11
Låt $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{N-1} x^{N-1}$ och $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_{N-1} x^{N-1}$. Då betecknas **modulofaltningen** *av f och g med $f * g$ och den är definierad som polynomet $f * g\,(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{N-1} x^{N-1} \bmod (p,\, x^N - 1)$ dvs där $c_k = \sum_{i+j \equiv k \pmod{N}} a_i b_j \bmod p$.*

Sats 18 Summeringsregler

$$\sum_{k=1}^{n} a\, b_k = a \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=m}^{n} a = (n-m+1)a \qquad \sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m-1} a_k$$

Sats 19 Speciella regler

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \quad \textit{om } a \neq 1 \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$$

Definition 12
En funktion kallas **inversen** *till funktionen* f *och betecknas* f^{-1} *om* $f^{-1}(f(x)) = x$ *för alla* x *som* f *är definierad för.*

Definition 13 TRIGONOMETRI
Låt a, b *vara kateter,* c *hypotenusan i en rätvinklig triangel och* α *vinkeln mellan* b *och* c *(dvs motstående* a*). Då är* $\sin\alpha = \frac{a}{c}$, $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ *och* $\tan\alpha = \frac{a}{b}$ *och* $a^2 + b^2 = c^2$ (**Pythagoras**).

Låt nu a, b, c *vara sidorna i en godtycklig triangel och* α, β, γ *respektive motstående sidor. Då är* $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$ (**sinussatsen**) *och* $a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = c^2$ (**cosinussatsen**).

För alla vinklar α *och* β *gäller* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ (**trigonmetriska ettan**) *och* $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ *och* $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ (**additionssatserna**).

Definition 14 LINJÄR ALGEBRA
En **vektor** $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *är ett matematiskt objekt med riktning och storlek.*
Längden *är* $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2}$.
Skalärprodukten $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$. $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ *är en* $m{\times}n$-**matris**. *Addition, subtraktion mellan matriser och multiplikation med skalär är definierat elementvis medan matrismultiplikation är definierat av att* $AB = C$ *om* A *är en* $m{\times}n$*-matris med rader* $\boldsymbol{a}_i$, $i = 1, \ldots, m$, B *en* $n{\times}k$*-matris med kolonner* $\boldsymbol{b}_j$, $j = 1, \ldots, k$, C *en* $m \times k$*-matris med element* $c_{ij} = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{b}_j$ *– skalärprodukten mellan* a_i *och* b_j*. Matrisen* A^T *med elementen* a_{ji} *kallas* **transponatet** *av* A*. Om* A *är en kvadratisk matris är* **inversen** A^{-1} *den matris för vilken* $AA^{-1} = I$ *där* I *är* **enhetsmatrisen**.

Definition 15 KOMPLEXA TAL
Mängden av komplexa tal, $z = a + bi$ *där* $a, b \in \mathbb{R}$ *och* $i^2 = -1$*, betecknas* $\mathbb{C}$. **Realdelen** *är* $\operatorname{Re} z = a$ *och* **imaginärdelen** $\operatorname{Im} z = b$. **Konjugatet** $\bar{z} = a - bi$. **Absolutbeloppet** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. **Polär form** $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *där* $r = |z|$ *och* $\alpha = \arg z$.

Sats 20 DE MOIVRES FORMEL
Om $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ *så är* $z^n = r^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Sats 21 BINOMIALKOEFFICIENTER
Antalet sätt att välja k *element bland* n *möjliga (utan återläggning och utan hänsyn till ordningen) är*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \text{där} \quad n! = \prod_{j=1}^{n} j \qquad \text{och} \quad 0! = 1$$

Sats 22 BINOMIALSATSEN
För alla reella tal a *och* b *och positiva heltal* n *är*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Matematisk statistik

Definition 16 Sannolikhet
Sannolikheten *för en händelse A är ett tal, betecknat $P(A)$, som uppfyller villkoren:*
1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Om A, B disjunkta, så är $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sats 23 Komplementsatsen
$P(A^C) = 1 - P(A)$

Sats 24 Additionssatsen
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Defintion 12 Betingad sannolikhet
Den **betingade sannolikheten** *av A givet B är* $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *där* $P(B) > 0$.

Definition 13
En **slumpvariabel**, *X, är en (vanligtvis numerisk) generalisering av ett experiment. Mha slumpvariabeln kan olika händelser formuleras som att X har vissa värden. En slumpvariabels* **utfallsrum**, *Ω_X, är mängden av de värden som slumpvariabeln kan anta.*

Definition 14
A och B är **oberoende** *händelser om $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*
Två slumpvariabler, X och Y med utfallsrum Ω_X resp. Ω_Y, är **oberoende** *om $P(X \in M_X, Y \in M_Y) = P(X \in M_X)P(Y \in M_Y)$ för alla $M_X \subseteq \Omega_X$ och $M_Y \subseteq \Omega_Y$.*

Sats 25 Binomialfördelning
Om $X = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$ där $P(Y_k = 1) = p$ och $P(Y_k = 0) = 1 - p$ för alla $k = 1, 2, \ldots n$ och variablerna $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ är oberoende av varandra, så är $\boldsymbol{X \in Bin(n, p)}$ *(dvs X är* **binomialfördelad** *med n och p) vilket innebär att dess sannolikhetsfunktion är $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ där $k \in \{0, 1, \ldots, n\} = \Omega_X$, $E(X) = np$ och $V(X) = np(1-p)$.*

Sats 26 Poissonfördelning
Om X är Poissonfördelad med intensitet λ betecknas detta $X \in Poi(\lambda)$ och innebär att $P(X = x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}$ där $x \in \{0, 1, 2, \ldots\} = \Omega_X$, $E(X) = \lambda$ och $V(X) = \lambda$. Dessutom gäller att $X \in Poi(\lambda_X) \perp Y \in Poi(\lambda_Y) \Rightarrow X + Y \in Poi(\lambda_X + \lambda_Y)$.

Sats 27 Normalfördelning
Denna betecknas $N(\mu, \sigma)$ där μ är väntevärde och σ är standardavvikelse. Om $X \in N(0, 1)$ kallas X **standard normalfördelad**, *och dess fördelningsfunktion är $\Phi(x) = P(X \leq x)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$. Om $X \in N(\mu, \sigma)$ så är $P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$ för alla $x \in \mathbb{R} = \Omega_X$.*
Symmetri*: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$.*
Sannolikheter*: $P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$ för all $a < b \in \mathbb{R}$.*
Dessutom, om $X \in N(\mu_X, \sigma_X) \perp Y \in N(\mu_Y, \sigma_Y)$ så är $X + Y \in N(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$.

Definition 15 Väntevärdet *av en slumpvariabel X betecknas $E(X)$ och är tyngdpunkten i sannolikhetsfunktionen respektive täthetsfunktionen för x. Linjaritet: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$.* **Variansen** *av en slumpvariablel X betecknas $V(X)$ och definieras $V(X) =$*

$E((X-E(X))^2)$. *Räkneregler:* $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$ *och* $V(aX+bY)=a^2V(X)+b^2V(Y)$ *om* $X \perp Y$. *Om* X *diskret variabel är* $E(g(X))=\sum_{x\in\Omega_X} g(x)P(X=x)$.

Sats 28 CENTRALA GRÄNSVÄRDESSATSEN (CGS)
Om $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *är oberoende och lika fördelade med* $E(X_i)=\mu$ *och* $V(X_i)=\sigma^2$ *så är approximativt* $\bar{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \in N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ *och* $\sum_{i=1}^{n} X_i \in N(n\mu, \sigma\sqrt{n})$ *då* n *är stort.*

Definition 16 BESKRIVANDE STATISTIK
Proportionen: $p=\hat{\pi}=\widehat{P(X\in A)}=\frac{\#\{i:x_i\in A\}}{n}$
Medelvärdet: $\bar{x}=\hat{\mu}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$
Stickprovsvariansen: $s^2=\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-1}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - n\,\bar{x}^2\right)$
Medianen: $\mathrm{md}(X_1,\ldots,X_n) = \begin{cases} X_{(\frac{n+1}{2})} & \textit{om } n \textit{ är udda} \\ \frac{1}{2}(X_{(\frac{n}{2})}+X_{(\frac{n}{2}+1)}) & \textit{om } n \textit{ jämnt} \end{cases}$
Första kvartilen: $Q_1 = \begin{cases} \mathrm{md}(X_{(1)},\ldots,X_{(\frac{n-1}{2})}) & \textit{om } n \textit{ är udda} \\ \mathrm{md}(X_{(1)},\ldots,X_{(\frac{n}{2})}) & \textit{om } n \textit{ jämnt} \end{cases}$
Kvartilavståndet: $Q=Q_3-Q_1$
Tredje kvartilen: $Q_3 = \begin{cases} \mathrm{md}(X_{(\frac{n+3}{2})},\ldots,X_{(n)}) & \textit{om } n \textit{ är udda} \\ \mathrm{md}(X_{(\frac{n}{2}+1)},\ldots,X_{(n)}) & \textit{om } n \textit{ jämnt} \end{cases}$
Variationsbredden: $R = X_{(n)} - X_{(1)}$

Definition 17 KONFIDENSINTERVALL
Antag $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *är stickprov på* X *och* $E(X)=\mu_X$, *att* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ *är stickprov på* Y *och* $E(Y)=\mu_Y$ *och att* $V(X)=V(Y)=\sigma^2$. *Då gäller att ett* $100(1-\alpha)\%$ **konfidensintervall** *för*

$$\mu_X \textit{ är } \begin{cases} \bar{x}\pm\lambda_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ \quad \textit{om } \sigma^2 \textit{ är känd} \\ \bar{x}\pm t_{\alpha/2,\,n-1}\frac{s}{\sqrt{n}} \\ \quad \textit{om } \sigma^2 \textit{ är okänd} \end{cases}$$

$$\mu_X-\mu_Y \textit{ är } \bar{x}-\bar{y} \pm t_{\alpha/2,\,n+m-2}\,s_P$$

$$\textit{där } s_P^2 = \begin{cases} \frac{(n-1)s_X^2+(m-1)s_Y^2}{n+m-2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right) \\ \quad \textit{om } \min(n,m)\le 30 \\ \frac{s_X^2}{n}+\frac{s_Y^2}{m} \\ \quad \textit{om } \min(n,m)>30 \end{cases}$$

π *är* $p\pm\lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$

$\pi_1-\pi_2$ *är* $p_1-p_2\pm\lambda_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)n_1n_2}{n_1+n_2}}$ *där* $p=\frac{n_1p_1+n_2p_2}{n_1+n_2}$

Definition 18 HYPOTESTEST

Antag $x_1, \ldots, x_n$ är ett stickprov på X fördelad med parametern θ respektive $x_1, \ldots, x_{n_1}$ och $y_1, \ldots, y_{n_2}$ på X och Y fördelade med parametern θ. För att testa

$$\begin{cases} H_0: \ \theta = \theta_0 & \textit{(nollhypotesen)} \\ H_1: \ \theta \in \Theta & \textit{(alternativhypotesen)} \end{cases}$$

används teststatistikan $U = U(X_1, \ldots, X_n)$ och beslutsregeln A_α som svarar mot Θ enligt fördelningen av F_U under H_0 vid signifikansnivån α.

$$\textit{Testregeln är} \begin{cases} \textit{Förkasta } H_0 \textit{ om } A_\alpha \\ \textit{Förkasta inte } H_0 \textit{ om inte } A_\alpha \end{cases}$$

θ	H_0	H_1	u	A_α	*p-värde*
π	$\pi = \pi_0$	$\pi < \pi_0$	$\dfrac{\sqrt{n}(p-\pi_0)}{\sqrt{\pi_0(1-\pi_0)}}$ *där* $\pi = P(B(X))$, $p = \frac{\#\{x_i : B(x_i)\}}{n}$, *Villkor:* $n\pi_0(1-\pi_0) > 5$	$u < -\lambda_\alpha$	$\Phi(u)$
		$\pi > \pi_0$		$u > \lambda_\alpha$	$1 - \Phi(u)$
		$\pi \neq \pi_0$		$\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}$	$2(1 - \Phi(\lvert u\rvert))$
π_1, π_2	$\pi_1 = \pi_2$	$\pi_1 < \pi_2$	$\dfrac{p_1 - p_2}{\sqrt{p(1-p)(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$ *där* $p = \frac{n_1 p_1 + n_2 p_2}{n_1 + n_2}$ *Villkor:* $n_1\pi_1(1-\pi_1) > 5$ $n_2\pi_2(1-\pi_2) > 5$	$u < -\lambda_\alpha$	$\Phi(u)$
		$\pi_1 > \pi_2$		$u > \lambda_\alpha$	$1 - \Phi(u)$
		$\pi_1 \neq \pi_2$		$\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}$	$2(1 - \Phi(\lvert u\rvert))$
μ *(σ^2 känd)*	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma}$	$u < -\lambda_\alpha$	$\Phi(u)$
		$\mu > \mu_0$		$u > \lambda_\alpha$	$1 - \Phi(u)$
		$\mu \neq \mu_0$		$\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}$	$2(1 - \Phi(\lvert u\rvert))$
μ *(σ^2 okänd)*	$\mu = \mu_0$	$\mu < \mu_0$	$\dfrac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{s}$	$u < -t_{\alpha, n-1}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < -u < t_{\alpha_1}$
		$\mu > \mu_0$		$u > t_{\alpha, n-1}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < u < t_{\alpha_1}$
		$\mu \neq \mu_0$		$\lvert u\rvert > t_{\alpha/2, n-1}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2/2} < \lvert u\rvert < t_{\alpha_1/2}$
μ_1, μ_2	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1)s_1^2 + (n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})}}$ *då* $\sigma_1 = \sigma_2$ *men okända, och* $\min(n_1, n_2) \leq 30$	$u < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < -u < t_{\alpha_1}$
		$\mu_1 > \mu_2$		$u > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < u < t_{\alpha_1}$
		$\mu_1 \neq \mu_2$		$\lvert u\rvert > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2/2} < \lvert u\rvert < t_{\alpha_1/2}$
μ_1, μ_2	$\mu_1 = \mu_2$	$\mu_1 < \mu_2$	$\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ *då* $\sigma_1 = \sigma_2$ *men okända, och* $\min(n_1, n_2) > 30$	$u < -t_{\alpha, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < -u < t_{\alpha_1}$
		$\mu_1 > \mu_2$		$u > t_{\alpha, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2} < u < t_{\alpha_1}$
		$\mu_1 \neq \mu_2$		$\lvert u\rvert > t_{\alpha/2, n_1+n_2-2}$	(α_1, α_2) : $t_{\alpha_2/2} < \lvert u\rvert < t_{\alpha_1/2}$
A, B	$A \perp B$	$A \not\perp B$	$\dfrac{(n_{11}c_2 - n_{12}c_1)\sqrt{n}}{\sqrt{c_1 c_2 r_1 r_2}}$ $\begin{array}{r\|c\|c\|c} & A: & A^C: & \\ \hline B: & n_{11} & n_{12} & r_1 \\ \hline B^C: & n_{21} & n_{22} & r_2 \\ \hline & c_1 & c_2 & n \end{array}$	$\lvert u\rvert > \lambda_{\alpha/2}$	$2(1 - \Phi(\lvert u\rvert))$
F_X	$F_X = F_0$	$F_X \neq F_0$	$\displaystyle\sum_{k=1}^{K} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k}$ *där* $E_k = NP(X \in I_k \mid H_0)$ *och* $E_k > 2$ *för alla klasser* k	$u > \chi^2_{\alpha, K-1}$	(α_1, α_2) : $\chi^2_{\alpha_2} < u < \chi^2_{\alpha_1}$

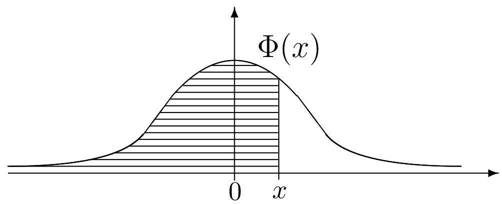
Enkel linjär regression En linjär modell, $Y = a + bX + \epsilon$, som beskriver sambandet mellan slumpvariablerna X och Y med residualen ϵ baserad på det parade stickprovet $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ fås med regressionskoefficienten

$$\hat{b} = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad \text{och interceptet} \quad \hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}.$$

Den har då förklaringsgraden R^2 där R är korrelationen

$$R = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{\sqrt{\Big(n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2\Big)\Big(n\sum_{i=1}^n y_i^2 - (\sum_{i=1}^n y_i)^2\Big)}}$$

Normalfördelningsvärden



Tabell över värden på $\Phi(x) = P(X \leq x)$ där
$X \in N(0,1)$. För $x < 0$ utnyttja relationen $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.

x	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	+0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

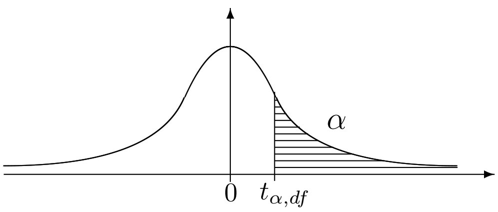
x	+0.0	+0.1	+0.2	+0.3	+0.4	+0.5	+0.6	+0.7	+0.8	+0.9
3	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

Normal-percentiler:

Några värden på λ_α sådana att $P(X > \lambda_\alpha) = \alpha$ där $X \in N(0,1)$

α	λ_α	α	λ_α
0.25	0.674490	0.005	2.575829
0.1	1.281552	0.001	3.090232
0.05	1.644854	0.0005	3.290527
0.025	1.959964	0.0001	3.719016
0.01	2.326348	0.00001	4.264891

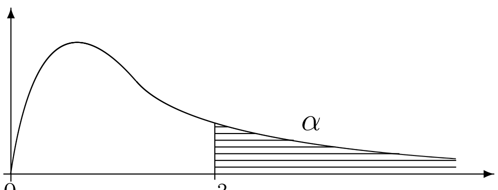
t-percentiler



Tabell över värden på $t_{\alpha,df}$.

df \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.0000	3.0777	6.3138	12.7062	15.8945	31.8205	63.6567	318.3088
2	0.8165	1.8856	2.9200	4.3027	4.8487	6.9646	9.9248	22.3271
3	0.7649	1.6377	2.3534	3.1824	3.4819	4.5407	5.8409	10.2145
4	0.7407	1.5332	2.1318	2.7764	2.9986	3.7470	4.6041	7.1732
5	0.7267	1.4759	2.0150	2.5706	2.7565	3.3649	4.0322	5.8934
6	0.7176	1.4398	1.9432	2.4469	2.6122	3.1427	3.7074	5.2076
7	0.7111	1.4149	1.8946	2.3646	2.5168	2.9980	3.4995	4.7853
8	0.7064	1.3968	1.8595	2.3060	2.4490	2.8965	3.3554	4.5008
9	0.7027	1.3830	1.8331	2.2622	2.3984	2.8214	3.2498	4.2968
10	0.6998	1.3722	1.8125	2.2281	2.3593	2.7638	3.1693	4.1437
11	0.6974	1.3634	1.7959	2.2010	2.3281	2.7181	3.1058	4.0247
12	0.6955	1.3562	1.7823	2.1788	2.3027	2.6810	3.0545	3.9296
14	0.6924	1.3450	1.7613	2.1448	2.2638	2.6245	2.9768	3.7874
17	0.6892	1.3334	1.7396	2.1098	2.2238	2.5669	2.8982	3.6458
20	0.6870	1.3253	1.7247	2.0860	2.1967	2.5280	2.8453	3.5518
25	0.6844	1.3163	1.7081	2.0595	2.1666	2.4851	2.7874	3.4502
30	0.6828	1.3104	1.6973	2.0423	2.1470	2.4573	2.7500	3.3852
50	0.6794	1.2987	1.6759	2.0086	2.1087	2.4033	2.6778	3.2614
100	0.6770	1.2901	1.6602	1.9840	2.0809	2.3642	2.6259	3.1737

χ^2-percentiler



Tabell över värden på $\chi^2_{\alpha,df}$.

df \ α	0.25	0.10	0.05	0.025	0.02	0.01	0.005	0.001
1	1.3233	2.7055	3.8415	5.0239	5.4119	6.6349	7.8794	10.8276
2	2.7726	4.6052	5.9915	7.3778	7.8240	9.2103	10.5966	13.8155
3	4.1083	6.2514	7.8147	9.3484	9.8374	11.3449	12.8382	16.2662
4	5.3853	7.7794	9.4877	11.1433	11.6678	13.2767	14.8603	18.4668
5	6.6257	9.2364	11.0705	12.8325	13.3882	15.0863	16.7496	20.5150
6	7.8408	10.6446	12.5916	14.4494	15.0332	16.8119	18.5476	22.4577
7	9.0371	12.0170	14.0671	16.0128	16.6224	18.4753	20.2777	24.3219
8	10.2189	13.3616	15.5073	17.5345	18.1682	20.0902	21.9550	26.1245
9	11.3888	14.6837	16.9190	19.0228	19.6790	21.6660	23.5894	27.8772
10	12.5489	15.9872	18.3070	20.4832	21.1608	23.2093	25.1882	29.5883
11	13.7007	17.2750	19.6751	21.9200	22.6179	24.7250	26.7568	31.2641
12	14.8454	18.5493	21.0261	23.3367	24.0540	26.2170	28.2995	32.9095
14	17.1169	21.0641	23.6848	26.1189	26.8728	29.1412	31.3193	36.1233
17	20.4887	24.7690	27.5871	30.1910	30.9950	33.4087	35.7185	40.7902
20	23.8277	28.4120	31.4104	34.1696	35.0196	37.5662	39.9968	45.3147
25	29.3389	34.3816	37.6525	40.6465	41.5661	44.3141	46.9279	52.6197
30	34.7997	40.2560	43.7730	46.9792	47.9618	50.8922	53.6720	59.7031
50	56.3336	63.1671	67.5048	71.4202	72.6133	76.1539	79.4900	86.6608
100	109.1412	118.4980	124.3421	129.5612	131.1417	135.8067	140.1695	149.4493