Lösningar till tenta i Matematisk statistik
MA4025 2025-03-26

1.(a) $P(2 \le X \le 5) = P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5) =$

$$= \frac{3^2}{2!}e^{-3} + \frac{3^3}{3!}e^{-3} + \frac{3^4}{4!}e^{-3} + \frac{3^5}{5!}e^{-3} = \frac{3^2}{2}e^{-3}\left(1+1+\frac{3}{4}+\frac{9}{20}\right) =$$

$$= \underline{0.7169}$$

(b) $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ och eftersom $X \in Poi(3)$ är $E(X) = V(X) = 3$ varmed

$E(X^2) = 3 + 3^2 = \underline{12}$

(Man kan även lösa uppgiften genom att beräkna $\sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{3^k}{k!} e^{-3}$ mha derivering under summatecknet men detta är en betydligt mödosammare väg.)

(c) Enligt CGS är $\sum_{i=1}^{100} X_i \overset{appr.}{\in} N(100 \cdot 3, \sqrt{100 \cdot 3})$ (eftersom $E(X_i)=3$ och $V(X_i)=3$). Därmed är

(appr.) $P(\sum_{i=1}^{100} X_i \le 303) = \Phi\left(\frac{303-300}{\sqrt{300}}\right) =$

$$= \Phi(0.17) = \underline{0.5675}$$

---

2 (a) $V(X^3) = E(X^6) - E(X^3)^2$

$$E(X^3) = \int_0^\infty x^3 \lambda e^{-\lambda x} dx \overset{PI}{=} \left[x^3(-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty - \int 3x^2(-e^{-\lambda x})dx$$

$$= 0 + 3\int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x} dx \overset{PI}{=} 3\left(\left[x^2\left(-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2x\left(-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right)$$

$$= 3\left(0 + \frac{2}{\lambda}\int_0^\infty x e^{-\lambda x}dx\right) = \frac{6}{\lambda}\left(\left[x\left(-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)\right]_0^\infty - \int_0^\infty 1\left(-\tfrac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right)$$

$$= \frac{6}{\lambda}\left(0 + \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\lambda x}dx\right) = \frac{6}{\lambda^2}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{6}{\lambda^2}\left(0 - \left(-\frac{1}{\lambda}e^0\right)\right) = \frac{6}{\lambda^3}$$

På liknande sätt blir

$$E(X^6) = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot6}{\lambda^5}\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{\infty} = \frac{720}{\lambda^6}$$

varmed slutligen $V(X^3) = \frac{720}{\lambda^6} - \left(\frac{6}{\lambda^3}\right)^2 = \underline{\underline{\frac{684}{\lambda^6}}}$

(b) $P(|X-3| \le 2) \overset{\lambda=3}{=} P(-2 \le X-3 \le 2) =$

$= P(1 \le X \le 5) = \int_1^5 3e^{-3x}\,dx = \left[-e^{-3x}\right]_1^5 =$

$= -e^{-15} + e^{-3} = \underline{\underline{0.0498}}$

(c) $0.55 = P(X \le 5) = 1 - e^{-\lambda\cdot 5}$ så $e^{-5\lambda} = 0.45$

dvs $-5\lambda = \ln 0.45$ dvs $\lambda = -\frac{\ln 0.55}{5} = \underline{\underline{0.1196}}$

(d) $P(2^X \le y) = P(X\ln 2 \le \ln y) = P\left(X \le \frac{\ln y}{\ln 2}\right) =$

$= 1 - e^{-\lambda \ln y/\ln 2} = 1 - (e^{\ln y})^{-\lambda/\ln 2} = 1 - y^{-\lambda/\ln 2}$

$f_Y(y) = \frac{d}{dy}\left(1 - y^{-\lambda/\ln 2}\right) = \frac{\lambda}{\ln 2} y^{\lambda/\ln 2 - 1}$

så m: $\int_1^m f(y)\,dy = \int_1^m \frac{\lambda}{\ln 2} y^{\lambda/\ln 2 - 1}\,dy =$

$= \left[y^{\lambda/\ln 2}\right]_1^m = m^{\lambda/\ln 2} - 1 = 0.5$

dvs $m^{\lambda/\ln 2} = 1.5$ dvs $m = \underline{\underline{1.5^{\ln 2/\lambda}}}$

3 (a) Tot 58 obs. så $m = \frac{X_{(28)} + X_{(29)}}{2} =$

$\{$sorterade $11111\underbrace{22..2}_{15 \text{ st}}3333\underbrace{44..4}_{24 \text{ st}}\underbrace{55..5}_{10 \text{st}}\}$

$= \frac{4+4}{2} = \underline{\underline{4}}$

(b) $\begin{cases} H_0: \text{jämn fördelning} \\ H_1: \text{ojämn fördelning} \end{cases}$

k	1	2	3	4	5	
O_k	5	15	4	24	10	$\Rightarrow N = 58$
E_k	11.6	11.6	11.6	11.6	11.6	

$$T = \sum_{k=1}^{5} \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} = \frac{(5-11.6)^2}{11.6} + \frac{(15-11.6)^2}{11.6} + \frac{(4-11.6)^2}{11.6} + \frac{(24-11.6)^2}{11.6} + \frac{(10-11.6)^2}{11.6}$$

$$= 3.75 + 0.99 + 4.98 + 13.26 + 0.22$$

$$= 23.20 > 9.4877 = \chi^2_{0.05,\, 5-1}$$

så $\underline{H_0 \text{ förkastas på 5\% sign.nivå}}$ dvs det är bevisat att X är ojämnt fördelad. Eftersom $u = 23.20 > 18.4668 = \chi^2_{0.001,4}$ är $\underline{p\text{-värdet} < 0.001}$

(c) $\begin{cases} H_0: m_1 = m_2 \\ H_1: m_1 \neq m_2 \end{cases}$ inte parat stickprov, inte kvotdata

Ranking:

Före	7.1	9.1	9.3	7.4	5.0			$n_1 = 5$
	7	10	12	8	5			
Efter	2.1	1.9	9.2	7.7	4.3	5.6	2.8	
	2	1	11	9	4	6	3	$n_2 = 7$

så $r = \sum_{i=1}^{n_1} r_i = 7 + 10 + 12 + 8 + 5 = 42$

varmed $T = \frac{2r - n_1(n_1+n_2+1)}{\sqrt{n_1 n_2 (n_1+n_2+1)/3}} = \frac{2\cdot 42 - 5\cdot 13}{\sqrt{35\cdot 13/3}} = 1.54$

men $|1.54| \not> 1.96 = \lambda_{0.05/2}$ dvs <u>Dr Frisk kan inte bevisa att medianen av X förändrats vid bytet av behandling.</u> p-värdet $= 2(1-\Phi(1.54)) =$
$= 2(1-0.9382) = \underline{\underline{0.1236}}$

4. $\begin{cases} H_0: \mu = 0.9 \\ H_1: \mu < 0.9 \quad (\mu = 0.88) \end{cases}$ $\sigma = 0.38$, $\lambda_{0.01} = 2.326348$

$$\text{Styrkan} = P(\text{förkasta } H_0 \mid H_1) = P(T < -\lambda_\alpha \mid \mu = 0.88) =$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} < -\lambda_\alpha \mid \mu = 0.88\right)$$

$$= P\left(\bar{X} < \frac{-\lambda_\alpha\, 0.38}{\sqrt{n}} + 0.9 \mid \mu = 0.88\right)$$

$$= P\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 0.88)}{\sqrt{n}} < \frac{\sqrt{n}\left(-\frac{\lambda_\alpha 0.38}{\sqrt{n}} + 0.9 - 0.88\right)}{0.38} \mid \mu = 0.88\right)$$

$$= \Phi\left(-2.326348 + \frac{0.01\sqrt{n}}{0.38}\right) = 0.9$$

$$\text{dvs } -2.326348 + \frac{0.01\sqrt{n}}{0.38} = 1.281552$$

↑ Från percentil-tabellen

$$\text{dvs } n = \left(\frac{0.38}{0.01}\left(1.281552 + 2.326348\right)\right)^2$$

$$= 18796.46\ldots$$

Svar: Man behöver minst 18797 obs.

---

5. $\begin{cases} H_0: \pi_1 = \pi_2 \\ H_1: \pi_1 < \pi_2 \end{cases}$ $\pi_1 = P(\text{5G-mobil före})$ $\pi_2 = P(\text{5G-mobil efter})$ $\lambda_{0.05} = 1.644854$

$$p_1 = \frac{29093}{32822} = 0.8863\ldots (1) \quad p_2 = \frac{13102}{14667} = 0.8932\ldots (2)$$

$$p = \frac{29093 + 13102}{32822 + 14667} = 0.8885\ldots (3)$$

$$T = \frac{0.8863\ldots - 0.8932\ldots}{\sqrt{0.8885\ldots(1 - 0.8885\ldots)\left(\frac{1}{32822} + \frac{1}{14667}\right)}} = \frac{-0.0069\ldots}{\sqrt{0.0000097\ldots}}$$

$$= -2.2108 < -1.644854 = -\lambda_\alpha$$

så H_0 förkastas på 5% sign.nivå dvs sannolikheten att köpa 5G-mobil har ökat.

(Totalt 45 låtar)

20 poplåtar 25 icke-poplåtar

6. (a) $P(\text{minst 1 poplåt}) = 1 - P(\text{ingen poplåt}) =$

$= 1 - \frac{25}{45}\cdot\frac{24}{44}\cdot\frac{23}{43}\cdot\frac{22}{42}\cdot\frac{21}{41} = \underline{\underline{0.9565}}$

(b) $P(\text{högst 2 hårdrockslåtar men ingen glamrock}) =$

$= P(\text{0 hårdrock, ingen glam}) + P(\text{1 hårdrock, ingen glam}) +$
$+ P(\text{2 hårdrock, ingen glam})$

$= \frac{20}{45}\cdot\frac{19}{44}\cdot\frac{18}{43}\cdot\frac{17}{42}\cdot\frac{16}{41} + \binom{5}{1}\frac{15}{45}\cdot\frac{20}{44}\cdot\frac{19}{43}\cdot\frac{18}{42}\cdot\frac{17}{41} +$

$+ \binom{5}{2}\frac{15}{45}\cdot\frac{14}{44}\cdot\frac{20}{43}\cdot\frac{19}{42}\cdot\frac{18}{41} =$

$= 0.0126\ldots + 0.0594\ldots + 0.0979\ldots$

$= \underline{\underline{0.1701}}$

---

7. $\sum_{i=1}^{29} x_i = 227.3 \qquad \sum_{i=1}^{29} x_i^2 = 1811.2$

$\sum_{i=1}^{42} y_i = 344.1 \qquad \sum_{i=1}^{42} y_i^2 = 2865.2$

$\bar{x} = 7.8379\ldots_{(1)} \quad \bar{y} = 8.1928\ldots_{(2)} \qquad \bar{\Delta} = \bar{x} - \bar{y} = -0.3549\ldots_{(1)}$

$s_x^2 = \frac{1}{28}(1811.2 - 29\bar{x}^2) \qquad s_y^2 = \frac{1}{41}(2865.2 - 42\bar{y}^2)$

$= 1.0585\ldots_{(3)} \qquad = 1.1228\ldots_{(2)}$

$s_\Delta^2 = \frac{(29-1)1.0585\ldots + (42-1)1.1228\ldots}{29+42-2} = 1.0967\ldots_{(2)}$

$\underbrace{t_{0.025,\,29+42-2}}_{\approx t_{0.025,50} = 2.0086} \sqrt{1.0967\ldots}\sqrt{\frac{1}{29}+\frac{1}{42}} = 0.1226\ldots_{(3)}$

Konf. int. $(\underbrace{-0.3549\ldots - 0.1226\ldots}_{\text{avrundas nedåt}},\ \underbrace{-0.3549 + 0.1226\ldots}_{\text{avrundas uppåt}})$

$\underline{\underline{(-0.4775,\ -0.2324)}}$

8. (a) $X \in U(a, 2a)$ så $V(X) = \frac{1}{12}(a-b)^2 = \frac{a^2}{12} = 0.8$

så $a = \pm\sqrt{\frac{0.8}{12}} = \underset{(-)}{+} 0.2582$

varmed $X \in U(a, 2a)$ bara med $\underline{\underline{a = 0.2582}}$

(b) $x_1 = 7.5, \; x_2 = 12.1, \; x_3 = 8.0 \quad E(X) = \frac{a+2a}{2} = \frac{3}{2}a$

$Q(a) = \sum_{i=1}^{3} (x_i - E(X))^2 = (7.5 - \frac{3}{2}a)^2 + (12.1 - \frac{3}{2}a)^2 + (8 - \frac{3}{2}a)^2$

ska minimeras

$\frac{dQ}{da} = 2(-\frac{3}{2})(7.5 - \frac{3}{2}a + 12.1 - \frac{3}{2}a + 8 - \frac{3}{2}a) = 0$

dvs $27.6 - \frac{9}{2}a = 0$ dvs $a = 27.6 \frac{2}{9}$

$= \underline{\underline{6.1333}}$

(c) $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x)\, dx$

$X \in U(a, 2a), \; Y \in U(a, 2a)$ så $X + Y \in (2a, 4a)$

$f(z) = \int f(x) f(z-x)\, dx$

$a < x < 2a \quad a < z - x < 2a$

$x < z - a, \; x > z - 2a$

$= \int_{\max(a, z-2a)}^{\min(2a, z-a)} \left(\frac{1}{2a}\right)^2 dx$

$= \frac{\min(2a, z-a) - \max(a, z-2a)}{4a^2}$