HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 9 januari 2026
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2^x = \sqrt{2^x + 56}$$

   (b) Lös olikheten (*3p*)

$$\frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x + 1} \geq x - 1\,.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A:\ |x| + |x+1| < 3, \qquad B:\ |x| \leq 2, \qquad C:\ x < 1.$$

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+2}, \\ y_0 = -3,\ y_1 = 1. \end{cases}$$

3. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTETENTA”

   om varje bokstav ska användas en gång och om:
   1) Alla ord ska inledas med “MAT” ?
   2) De båda A:na ska stå intill varandra men inte de båda E:na ? (*2p*)

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

   för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

4. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^5 + 4z^3 - 8z^2 - 32 = 0$$

   har roten $-2i$. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. (*3p*)

5. (a) Finns det en sammanhängande graf där noderna har följande gradtal: $4, 4, 3, 2, 2, n$ om $n = 2$ respektive $n = 3$? Rita i så fall en sådan graf och avgör om det är en Eulergraf. (*2p*)

   (b) Den lilla filmklubben Finfilm i Småstad hade filmvisning en kväll. Föreställningen var öppen för alla men klubbens medlemmar fick 20 kr i rabatt på biljettpriset som var 70 kr. Av de som såg filmen var mer än 75% inte medlemmar och filmklubben fick totalt in 2470 kr i biljettintäkter under kvällen. Hur många medlemmar såg den? (*3p*)

6. (a) Bestäm alla värden på heltalet m för vilka $7m \equiv 1 \pmod{\phi(33)}$. (*2p*)

   (b) Beräkna

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2}.$$

(*3p*)

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Sätt $t = 2^x$ och kvadrera vilket ger en andragradsekvation i t där en rot är falsk. Svar: $x = 3$.

   (b) Flytta över allt till ena sida, gör liknämnigt och faktorisera vilket ger $\frac{x(x^2+1)}{x+1} \geq 0$. Gör sedan teckenstudium. Svar: $x < -1$ eller $x \geq 0$.

2. (a) Vi har $A : -2 < x < 1$, $B : -2 \leq x \leq 2$ och $C : x < 1$ dvs $A \Rightarrow B$ och $A \Rightarrow C$.

   (b) Ansats: $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger $A = 2$. Allmän lösning $y_n = C_1 + C_2 2^n + 2n2^n$ och sökt lösning: $y_n = n2^{n+1} - 3$.

3. (a) 1) Om alla ord ska börja med 'MAT" kan vi ta bort dessa bokstäver och har då kvar "TETENTA" dvs 7 bokstäver varav 3 T:n och 2 E:n. Vi får därför $\frac{7!}{3!2!} = 420$ olika ord.

   2) Betraktar vi AA som en bokstav har vi totalt 9 bokstäver och betraktar vi även EE som en bokstav har vi totalt 8 bokstäver. Svaret ges av

$$\begin{aligned}&\# \text{ ord där A:na står intill varandra} - \# \text{ ord där A:na och E:na står intill varandra}\\ &= \frac{9!}{4!2!} - \frac{8!}{4!} = 5880 \, \text{olika ord.}\end{aligned}$$

   (b) Visas t.ex. med induktion.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Polynom).

   (b) Polynomet i vänsterledet har reella koefficienter och därför är även $2i$ en rot och polynomet har alltså faktorn $(z-2i)(z+2i) = z^2+4$. Polynomdivision ger $z^5+4z^3-8z^2-32 = (z^2+4)(z^3-8)$. Den binomiska ekvationen $z^3 = 8$ löser vi enklast genom att gå över till polär form. Rötterna till den ursprungliga ekvationen är sammanfattningsvis $z = \pm 2i$, $z = 2$ och $z = -1 \pm i\sqrt{3}$.

5. (a) Vi har totalt 6 noder. "Handskakningslemmat" säger att summan av graderna på noderna är lika med 2 gånger antalet bågar:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4 + 4 + 3 + 2 + 2 + n = 15 + n = 2|E|$$

   som är sant om $n = 3$ men inte om $n = 2$ eftersom 17 är ett udda tal. Det finns alltså en graf som uppfyller villkoren endast om $n = 3$. Enligt Euler-Hierholzers sats innehåller G en Eulercykel omm den är sammanhängande och samtliga noder har jämn grad. Eftersom 2 av noderna har grad 3 är detta villkor inte uppfyllt och grafen är alltså inte en Eulergraf.

   (b) Med $m =$ antal medlemmar och $i =$ antal icke-medlemmar söker vi de icke-negativa lösningarna till den diofantiska ekvationen

$$50m + 70i = 2470 \Leftrightarrow 5m + 7i = 247.$$

   Den allmänna lösningen ges av

$$(m, i) = (247 \cdot 3 - 7n, 247 \cdot (-2) + 5n)$$

   där lösningen är icke-negativ omm $99 \leq n \leq 105$. $n = 105$ ger $(m, i) = (6, 31)$ som uppfyller villkoret att mer än 75% av dem som såg filmen var icke-medlemmar ($\frac{31}{6+31} > \frac{30}{40} = 0.75$). $n = 104$ ger $(m, i) = (13, 26)$ vilket inte uppfyller villkoret. Mindre värden på n ger mindre värden på i så för resterande n-värden är villkoret inte heller uppfyllt. Svar: 6 medlemmar såg filmen.

6. (a) Eftersom $33 = 11 \cdot 3$ (dvs en produkt av två olika primtal) är $\phi(33) = (3-1)(11-1) = 20$. Vi har nu

$$7m \equiv 1 \pmod{\phi(33)} \Leftrightarrow 7m = 20k + 1$$

   dvs en diofantisk ekvation som har en lösning $(m, k) = (3, 1)$. Eftersom vi räknar modulo 20 ges samtliga tal m som uppfyller kongruensen av $m = 3 + 20n$ där n är ett godtyckligt heltal.

   (b) Vi har

$$\begin{aligned}2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2} &= 2^{\frac{1}{2}} 2^{\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{8}} \cdots 2^{\frac{1}{2^n}} = 2^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}}\\ &= 2^{\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k} = 2^{\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{2} - 1}} = 2^{1-2^{-n}}\end{aligned}$$

   där vi utnyttjade formeln för en geometrisk summa.