**HÖGSKOLAN I HALMSTAD**
**Akademin för informationsteknologi**
Mikael Hindgren
035-167220

**Tentamensskrivning**
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Torsdagen den 5 juni 2025
Skrivtid: 15.00-20.00

***Inga hjälpmedel.*** *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. *(2p)*

   (b) Beräkna integralen $\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)} dx$ . *(3p)*

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y = f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = 6xe^x, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

4. (a) Härled formeln för partiell integration. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y' = xe^{x-y}$$

   för vilken $y(0) = 0$. *(4p)*

5. (a) Härled derivatan av $\ln x$. *(1p)*

   (b) Beräkna volymen av den kropp som uppkommer då kurvan

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}, \quad x \geq 1,$$

   roterar kring $x$-axeln. *(4p)*

6. (a) Antag att funktionen $f$ är kontinuerlig på $[a, b]$ och att $F$ är en primitiv funktion till $f$. Visa att

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

   Integralkalkylens huvudsats får utnyttjas utan bevis. *(2p)*

   (b) Sjöingenjören Pelle har fått i uppdrag att transportera en fartygslast 1000 km. Pelles lön är 119 kr/timme och bränslet till hans fartyg kostar 10 kr/liter. Fartygets bränsleförbrukning är $v^2/10 + 5$ liter/timme då det färdas med hastigheten $v$ km/timme. Pelle gör en snabb överslagsräkning och hävdar att han kan ordna transporten för 25000 kr. Stämmer det om vi antar att han ska ha betalt enligt ovan? *(3p)*

*Lycka till!*

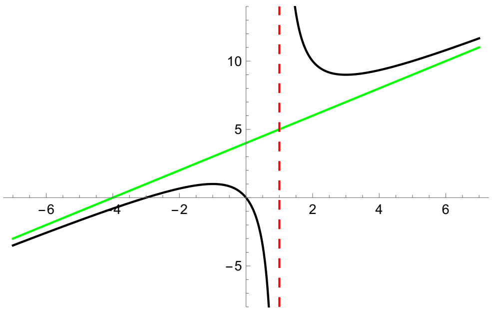
## Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Maclaurinutveckla täljare och nämnare t.o.m. ordning 3. Svar: 2.

   (b) Substitutionen $t = \sqrt{x}$ följt av partialbråksuppdelning ger

$$\int_1^4 \frac{1}{x(\sqrt{x}+1)}dx = 2\int_1^2 \frac{1}{t^2+t}dt = 2\int_1^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt = \ln\left(\frac{16}{9}\right).$$

2. Lokal maximipunkt $f(-1) = 1$ och lokal minimipunkt $f(3) = 9$. Lodrät asymptot: $x = 1$. Sned asymptot: $y = x + 4$ då $x \to \pm\infty$.




Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

3. Allmän lösning: $y(x) = (C_1x + C_2)e^x + x^3e^x$. Sökt lösning: $y(x) = (x^3 + 1)e^x$.

4. (a) Se föreläsningen *Primitiva funktioner.*

   (b) Separabel differentialekvation av 1:a ordningen. Allmän lösning: $y(x) = \ln(e^x(x-1)+C)$. Sökt lösning: $y(x) = \ln(e^x(x-1)+2)$.

5. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1.*

   (b) Volymen ges av

$$\pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{x}(x+1)}\right)^2 dx = \pi\int_1^\infty \frac{1}{x(x+1)^2}dx = \pi\int_1^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x-1)^2}\right)dx = \pi\left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right).$$

6. (a) Se föreläsningen *Integraler.*

   (b) Kostnaden per km ges av

$$k(v) = \frac{119 + 10\left(\frac{v^2}{10} + 5\right)}{v} = \frac{169}{v} + v \quad (\text{kr/km})$$

   som har minimum vid $v = 13$ km/h. Eftersom $k(13) = 26$ blir minsta totalkostnaden för 1000 km 26000 kr dvs Pelle räknade fel.