

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Beräkna gränsvärdena

(a)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - \sqrt{x^2 + 2x})$

(b)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{2x - \sqrt{4x^2 - 2x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{2/x} - 1}{\ln\left(\frac{2x+1}{2x}\right)}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin 3x}{\arctan x^2}$

2. (a) Beräkna gränsvärdena

(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\sin 3x \ln(1 + \sin 4x)}$

- (b) Är följande funktioner kontinuerliga?

(1)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 2, & x = 3 \end{cases}$

(2)  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$

- (c) Visa att ekvationen  $4x^3 - 20x^2 + 27x - 9 = 0$  har minst en rot i vardera av intervallen  $]0, 1[$  och  $]1, 2[$ .

- (d) Bestäm ekvationen för tangenten till kurvan  $y = f(x) = xe^{\frac{x^2}{2}}$  i de punkter på kurvan där  $x = 0$  respektive  $x = 1$ .

3. (a) Bestäm eventuella asymptoter till kurvan  $y = f(x)$  och skissera kurvan nära asymptoterna då

(1)  $f(x) = \frac{3x^3 - 4}{x^2 - 2}$

(2)  $f(x) = \frac{x^3(e^{-x^2} - 1)}{x^2 - 1}$

- (b) Bestäm alla tangenter till kurvan  $y = \tan 2x$ ,  $-\pi/4 < x < \pi/4$ , som är parallella med linjen  $y = 2x + 1$ .

- (c) Skär kurvorna  $y = x^2$  och  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  varandra under rät vinkel?

- (d) Bestäm alla räta linjer som är tangenter till kurvan  $y = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$  och som går genom punkten  $(2, 0)$ .

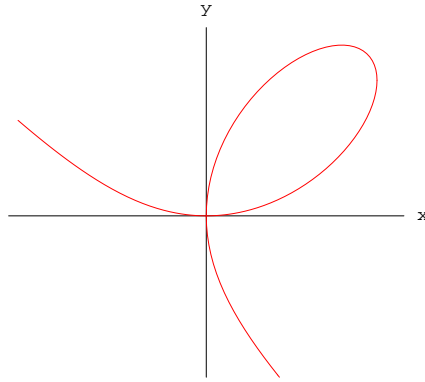
4. (a) Finns det några reella tal  $a$  och  $b$  så att funktionen

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \leq 0 \\ (x+1)e^x, & x > 0 \end{cases}$$

blir deriverbar i  $x = 0$  ?

- (b) När en perfekt sfärisk snöboll smälter är smältningshastigheten i varje tidpunkt proportionell mot begränsningsarean och snöbollen behåller under hela smältprocessen sin sfäriska form. Visa att snöbollens radie avtar med konstant hastighet.
- (c) Raketingenjören Pelle avfyrar en raket rakt uppåt från en starttramp på marknivå. Raketen spåras av en radarstation på marknivå som befinner sig på avståndet 3 km från raketens starttramp. Vid en viss tidpunkt efter start registrerar radarstationen att avståndet till raketten är 5 km och att detta ökar med 5000 km/h. Hur stor är raketens hastighet vid denna tidpunkt?

- (d) Kurvan som definieras av  $x^3 + y^3 = 6xy$  brukar kallas *Descartes blad* (Se figur 1).



Figur 1: Descartes blad.

- (1) Bestäm tangenten till kurvan i punkten  $(3, 3)$ .
- (2) Bestäm de punkter på kurvan där tangenten är horisontell respektive vertikal.