HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Måndagen den 2 juni 2025
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$\ln x + \ln(x+1) = \ln(x+2).$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*3p*)

$$A: |x-1| + |x+1| > x+2, \qquad B: e^{x-1} \leq 1, \qquad C: \ln x < 0.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTETENTA”

om varje bokstav ska användas en gång och om:

1) orden ska inledas med bokstaven “M” ?
2) “MATTE” får inte ingå som en del i orden dvs ord av typen ”ET{MATTE}TAN” ska inte räknas med?

(*2p*)

(b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+2}, \\ y_0 = -1,\ y_1 = 3. \end{cases}$$

3. (a) Skriv talet

$$\frac{i(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^6}$$

på rektangulär form ($a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$). (*2p*)

(b) Ekvationen

$$z^6 + z^4 - 4z^2 - 4 = 0$$

har roten i. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

4. (a) Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. (*2p*)

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} (2k + 2^k) = 1 + 4 + 8 + \cdots + 2n + 2^n = 2^{n+1} + n^2 + n - 1$$

för alla heltal $n \geq 0$. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 10 bågar. Två av noderna har grad 2 och två har grad 4. De resterande noderna är färre än fem och har alla samma grad. Är G en Eulergraf? (*2p*)

(b) En dag var Kajsa tillsammans med 8 studentkompisar i den lokala fruktaffären och köpte äpplen och päron. Alla i gruppen köpte minst en frukt. En äpple kostade 14 kr och ett päron 10 kr. Totalt köpte de frukter för 192 kr. Hur många äpplen kan Kajsa högst köpt? (*3p*)

6. Pelle tjuvlyssnar på Kajsas och Kalles krypterade internetkommunikation och han snappar upp det krypterade meddelandet $K = 2$ från Kajsa, som hon krypterat med RSA genom

$$K = M^e \bmod n,$$

där heltalet M är det hemliga meddelandet hon vill skydda ($1 \leq M \leq n-1$), $e = 5$ och $n = 69$.

(a) Bestäm $\phi(n)$. (*1p*)

(b) Vilket var Kajsas hemliga meddelande M? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Måndagen den 2 juni 2025
Skrivtid: 9.00-14.00

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Ekvationen är bara definierad för $x > 0$. För dessa x ger logaritmlagarna:

$$\ln x + \ln(1+x) = \ln(x+2) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x(x+1)}{x+2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+1)}{x+2} = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}.$$

   (b) Vi har $A : x < 0 \vee x > 2$, $B : x \leq 1$, $C : 0 < x < 1$ dvs $C \Rightarrow B$.

2. (a) i. Antalet ord som inleds med M är $\frac{9!}{4!2!2!} = 3780$.
   ii. Betrakta MATTE som en bokstav $\mathcal{M}$. Vi har då bokstäverna $\mathcal{M}$APPARAT och kan bilda $\frac{9!}{4!2!2!} = 3360$ olika ord. Antalet ord där "MATTE" inte ingår som en del av ordet är därför $= \frac{10!}{4!2!2!} - \frac{6!}{2!} = 37440$.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger $A = 2$.
   Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n + 2n2^n$. Sökt lösning: $y_n = n2^{n+1} - 1$.

3. (a) Går vi över till polär form får vi

$$\arg z = \arg\left(\frac{i(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^6}\right) = \arg(i) + 3\arg(\sqrt{3}-i) - 6\arg(1+i) = \frac{\pi}{2} + 3\left(-\frac{\pi}{6}\right) - 6\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{3\pi}{2}$$

$$|z| = \left|\frac{i(\sqrt{3}-i)^3}{(1+i)^6}\right| = \frac{|i||\sqrt{3}-i|^3}{|1+i|^6} = \frac{1\cdot 2^3}{\sqrt{2}^6} = 1$$

   dvs $z = 1 \cdot e^{-i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

   (b) Eftersom polynomet i vänsterledet har reella koefficienter är även $-i$ en rot och polynomet har därför faktorn $(z-i)(z+i) = z^2+1$. Polynomdivision och konjugatregeln ger $z^6 + z^4 - 4z^2 - 4 = (z^2+1)(z^4-4) = (z^2+1)(z^2+2)(z^2-2) \Leftrightarrow x = \pm i$, $x = \pm\sqrt{2}$ och $x = \pm i\sqrt{2}$.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Polynom).

   (b) Visas med induktion eller genom att utnyttja formlerna för aritmetisk och geometrisk summa:

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+2^k) = 2\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=0}^{n}2^k = 2\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1} + n^2 + n - 1.$$

5. (a) ”Handskakningslemmat" säger att summan av nodernas grader är lika med 2 gånger antalet bågar vilket ger:

$$\sum_{v\in V}\deg(v) = 2\cdot 4 + 2\cdot 4 + ng = 2|E| = 2\cdot 10 \Leftrightarrow ng = 8$$

   där n är det resterande antalet noder och g deras grad. Eftersom de resterande noderna är färre än 5 är $(n,g) = (1,8)$, $(2,4)$ eller $(4,2)$. I alla tre fallen har samtliga G:s noder jämnt gradtal. Enligt Euler-Hierholzers sats är G därför en Eulergraf.

   (b) Med $a =$ antal äpplen och $p =$ antal päron söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$14a + 10p = 192.$$

   Vi får $(a,p) = (3,15)$, $(8,8)$ eller $(13,1)$. Eftersom alla 9 i gruppen köpte minst en frukt ger lösningen $(8,8)$ att det maximala antalet äpplen som Kajsa kan ha köpt är 7.

6. (a) Eftersom $n = 69 = 3\cdot 23$, dvs en produkt av två olika primtal, är $\phi(n) = (3-1)(23-1) = 44$.

   (b) Se föreläsningen "Restklassaritmetik". Hemliga nyckeln $d = 9$ och $M = 29$.