HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Onsdagen den 29 maj 2024
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen (*3p*)

$$\int_1^4 \frac{4}{x(x^2+4)}dx\,.$$

(b) Beräkna gränsvärdet (*2p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)-\sin(x)}{e^x+\ln(1-x)-1}.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$$

samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

3. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2xe^x, \\ y(0)=0,\ y'(0)=-2. \end{cases}$$

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av $\ln x$. (*1p*)

(b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'=\frac{yx}{x^2+1},$$

för vilken $y(0)=1$. (*4p*)

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}dx$$

konvergent? (*1p*)

(b) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx$$

är konvergent utan att beräkna den. (*2p*)

(c) Beräkna den generaliserade integralen i (b). (*2p*)

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner $f(x)$ och $g(x)$. (*1p*)

(b) Löparen Kajsa tränar för att förbättra sin prestation på en rak bana med längden l meter. Kajsa kan springa i olika hastigheter, men vill hitta den optimala konstanta hastigheten v (m/s) som minimerar totala energiförbrukningen. Kajsas energiförbrukning per meter ges av

$$E(v)=av+\frac{b}{v} \quad [\text{J/m}]$$

där a och b är positiva konstanter. Vilken är den minsta energin som krävs för att Kajsa ska kunna springa hela banans längd med konstant fart? (*4p*)

Lycka till!

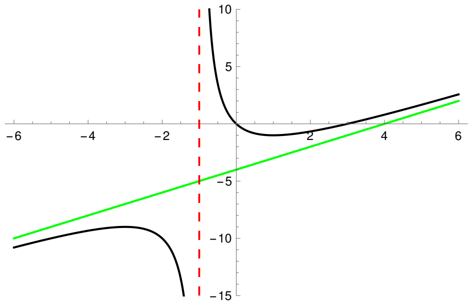
Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Partialbråksuppdela integranden:

$$\int_1^4 \frac{4x}{x(x^2+4)}dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+4}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+4|\right]_1^4 = \ln 2.$$

   (b) Maclaurinutveckla täljare och nämnare t.o.m. ordning 3. Svar: 1.

2. Lokal maximipunkt $f(-3) = -9$ och lokal minimipunkt $f(1) = -1$. Lodrät asymptot: $x = -1$. Sned asymptot: $y = x - 4$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x+1}$.

3. Allmän lösning: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - (x^2+2x)e^x$. Sökt lösning: $y(x) = -(x^2+2x)e^x$.

4. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1*, exempel 5b.

   (b) Separabel och linjär differentialekvation av 1:a ordningen.
   Allmän lösning: $y(x) = C\sqrt{1+x^2}$. Sökt lösning: $y(x) = \sqrt{1+x^2}$.

5. (a) Se föreläsningen *Generaliserade integraler*, exempel 5.

   (b) $\dfrac{e^x}{x^\alpha} \to \infty$ då $x \to \infty$ (standardgränsvärde). För tillräckligt stora x är därför $x^2 << e^x$ och

$$0 < \frac{1}{e^x + e^{-x}} < \frac{1}{e^x} < \frac{1}{x^2}.$$

   Enligt (a) är den generaliserade integralen därför konvergent.

   (c) Sätt $t = e^x$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{e^x+e^{-x}}dx = \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}.$$

6. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1*, Produktregeln på sidan 10.

   (b) Minsta energiförbrukningen ges av $E(v_0)l$ där v_0 är den hastighet för vilken $E(v)$ antar sitt minsta värde. Derivering ger

$$E'(v) = a - \frac{b}{v^2} = 0 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{b}{a}} = v_0$$

   Att v_0 verkligen motsvarar minimum kan visas genom teckenstudium eller genom att utnyttja att $E''(v_0) > 0$. Minsta energiförbrukningen ges alltså av

$$E(v_0)l = 2l\sqrt{ab}.$$