HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren, 035-167220

Tentamensskrivning
MA8020 Tekniska beräkningar 6 hp
Torsdagen den 15 januari 2026
Skrivtid: 9.00-14.00

Hjälpmedel: Miniräknare som lånas ut vid skrivningstillfället. Egen miniräknare är inte tillåten! *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt angivet svar. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. Utnyttja mätserien

x	0	1	2
y	1	0	3

för att

   (a) bestämma Newtons interpolationspolynom av grad 2 som interpolerar mätvärdena. *(2p)*

   (b) anpassa en rät linje till punkterna med minstakvadratmetoden. *(2p)*

2. (a) Visa att ekvationen $\sin x = 3x - 1$ har exakt en rot x^* i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (b) Bestäm en funktion $g(x)$ sådan att fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ konvergerar mot roten x^* i (a) om x_0 väljs i intervallet $[0, 1]$. *(1p)*

   (c) Skriv ett program som utnyttjar intervallhalveringsmetoden för att bestämma ett närmevärde till roten x^* i (a) med ett fel som är mindre än 10^{-6}. *(1p)*

3. Beräkna integralen

$$\int_0^2 (x^3 - x)dx$$

med optimal gausskvadratur. Kvadraturtabellen nedan kan vara användbar. *(3p)*

n	p	i	ξ_i	ω_i
1	1	1	0	2
2	3	1	−0.57735027	1
		2	+0.57735027	1
3	5	1	−0.77459667	0.55555556
		2	0	0.88888889
		3	+0.77459667	0.55555556

4. Bestäm approximativt det egenvärde som har minst absolutbelopp samt en motsvarande normerad egenvektor till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

med hjälp potensmetoden med en iteration och startvektorn $\boldsymbol{x}_0 = (1, -1)$. *(2p)*

5. Använd Jacobis iterationsmetod med startvärdet $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0, 1)$ för att bestämma den approximativa lösningen $\boldsymbol{x}^{(2)}$ till ekvationssystemet

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 - 2x_2 = -1. \end{cases}$$

Motivera även varför $\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den exakta lösningen till ekvationssystemet då $k \to \infty$. *(3p)*

6. Funktionen $f(x) = x^4 - 4x^2$ har en global minimipunkt i intervallet $[1, \infty)$. Använd Newtons metod för att bestämma en approximation till denna punkt. Starta i $x_0 = 1$ och gör två iterationer. Utnyttja sedan resultatet för att beräkna en approximation till det globala minimivärdet $f_{\min}$. *(2p)*

7. Lös följande problem med straffmetod:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^2, \\ \text{s.t.} & x_2 = 2. \end{array}$$

Motivera även varför den valda stationära punkten är ett globalt minimum. *(3p)*

Vänd!

8. Bestäm en approximativ lösning till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 2xy(x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

genom att taylorutveckla $y(x)$ till och med ordning 3 kring $x = 0$ och utnyttja sedan taylorpolynomet för att beräkna ett approximativt värde på $y(0.2)$. *(3p)*

9. Studera återigen begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} y'(x) = 1 - 2xy(x), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Bestäm ett approximativt värde på $y(0.2)$ genom att använda:

(a) den explicita eulermetoden med två steg och steglängden $h = 0.1$. *(2p)*

(b) den implicita mittpunktsmetoden med ett steg och steglängden $h = 0.2$. *(2p)*

10. Approximera lösningen till randvärdesproblemet

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 8x, \\ y(0) = 0,\ y(1.5) = 2, \end{cases}$$

i intervallet $[0, 1.5]$ med finita differensmetoden genom att dela in intervallet i tre lika stora delar. *(3p)*

Lycka till!

Lösningsförslag

1. (a) Vi bestämmer Newtons interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av mätserien:

$$\text{Ansats:}\quad p_2(x) = c_0 + c_1(x - x_1) + c_2(x - x_1)(x - x_2) = c_0 + c_1(x - 0) + c_2(x - 0)(x - 1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_2(0) = c_0 = 1 \\ p_2(1) = c_0 + c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = -1 \\ p_2(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 = 3 \Leftrightarrow c_2 = 2 \end{cases}$$

$$\therefore\quad p_2(x) = 1 + (-1)(x - 0) + 2(x - 0)(x - 1) = 2x^2 - 3x + 1.$$

(b) Parametrarna $\boldsymbol{p} = \left(\begin{smallmatrix} k \\ m \end{smallmatrix}\right)$ ges av lösningen till normalekvationerna $A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y}$ där

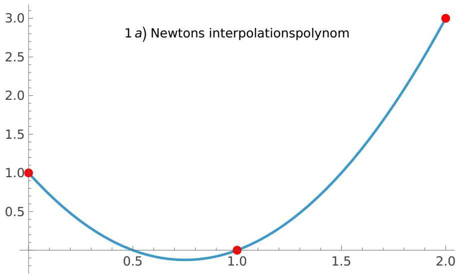
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

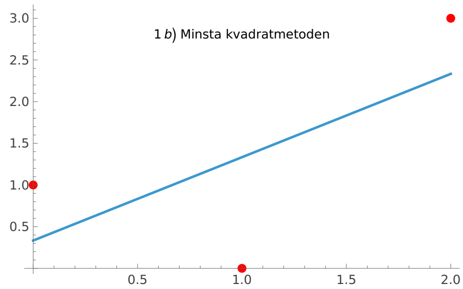
Vi får

$$A^T A\boldsymbol{p} = A^T\boldsymbol{y} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

dvs $y = x + \dfrac{1}{3}$.





2. (a) Sätter vi $f(x) = \sin x - 3x + 1$, $0 \leq x \leq 1$, kan ekvationen skrivas som $f(x) = 0$. För $x \in I = [0, 1]$ har vi:

$$f'(x) = \cos x - 3 \leq 1 - 3 = -2 < 0 \tag{1}$$

dvs $f(x)$ är strängt avtagande i I. Eftersom $f(x)$ dessutom är kontinuerlig, $f(0) = 1 > 0$ och $f(1) = \sin 1 - 3 + 1 < 1 - 3 + 1 = -1 < 0$ har $f(x)$ exakt ett nollställe x^* i I.

(b) Med $g(x) = \dfrac{\sin x + 1}{3}$ kan ekvationen skrivas som $x = g(x)$. Fixpunktsiterationen $x_{k+1} = g(x_k)$ konvergerar mot den sökta roten x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0. För $x \in [0, 1]$ har vi:

$$|g'(x)| = \left|\frac{\cos x}{3}\right| \leq \frac{1}{3} < 1. \tag{2}$$

Väljer vi t.ex. $x_0 = 0.5$ kommer därför fixpunktsiterationen att konvergera mot x^*.
Anm: I själva verket gäller olikheterna (1) och (2) för alla $x \in \mathbb{R}$ dvs $f(x)$ har endast ett nollställe och vi kan välja ett godtyckligt värde på x_0.

(c) Följande kod utnyttjar intervallhalveringsmetoden och ger en approximation till roten med ett fel som är mindre än $\epsilon = 10^{-6}$:

```
f[x_] = Sin[x] - 3 x + 1;
{a, b} = {0, 1};
eps = 10^(-6);
diff = 1;
While[diff > eps,
  c = 0.5*(a + b);
  If[f[a]*f[c] < 0, b = c, a = c];
  diff = b - a;
]
Print["Roten x = ", 0.5*(a + b)]
```

3. Integranden $f(x) = x^3 - x$ är ett polynom med grad 3 dvs optimal ordning ges av $2n-1 = 3 \Leftrightarrow n = 2$. Variabelsubstitution: $\int_a^b f(x)dx \to \int_{-1}^1 g(\xi)d\xi$: $x = \frac{a+b}{2} + \xi\frac{b-a}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2}d\xi$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^1 \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2} + \xi\frac{b-a}{2}\right)\frac{b-a}{2}}_{g(\xi)} d\xi$$
$$= \int_{-1}^1 f\left(\frac{0+2}{2} + \xi\frac{2-0}{2}\right)\frac{2-0}{2}d\xi = \int_{-1}^1 ((1+\xi)^3 - (1+\xi))d\xi$$
$$\approx \sum_{i=1}^2 \omega_i g(\xi_i) = \omega_1 g(\xi_1) + \omega_2 g(\xi_2)$$
$$= 1\cdot((1-0.57735027)^3 - (1-0.57735027)) + 1\cdot((1+0.57735027)^3 - (1+0.57735027))$$
$$= 2.00...$$

Anm: Eftersom integranden är ett polynom av grad 3 och vi använder optimal ordning ger metoden formellt det exakta värdet 2.

4. Om A är inverterbar har vi
$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \Leftrightarrow A^{-1}\boldsymbol{x} = \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{x}.$$
Detta betyder att A och A^{-1} har samma egenvektorer och söker vi det egenvärde λ till A som har minst absolutbelopp kan vi istället beräkna det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp. Vi har:
$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$
Om nu λ_1 är det egenvärde till A^{-1} som har störst absolutbelopp ger en iteration med potensmetoden:
$$\boldsymbol{y}_1 = A^{-1}\boldsymbol{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_1 = \frac{\boldsymbol{y}_1}{|\boldsymbol{y}_1|} = \tfrac{1}{\sqrt{13}}(2,3)$$
$$\lambda_1^{(1)} = \boldsymbol{x}_0^T\boldsymbol{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -1$$
$\lambda \approx 1/\lambda_1^{(1)} = \frac{1}{-1} = -1$ är alltså det egenvärde till A som har minst absolutbelopp och den motsvarande normerade egenvektorn $\boldsymbol{x} \approx \boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{13}}(2,3) \approx (0.55, 0.83)$.

5. Jacobis iterationsmetod:
$$\boldsymbol{x}^{(k+1)} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - (L+U)\boldsymbol{x}^{(k)})$$
där koefficientmatrisen A är uppdelad enligt $A = L + D + U$ med L strikt undertriangulär, D diagonal och U strikt övertriangulär. Vi har alltså
$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad L+U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Med startvektorn $\boldsymbol{x}^{(0)} = (0,1)$ får vi
$$\boldsymbol{x}^{(1)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$
$$\boldsymbol{x}^{(2)} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3/8 \\ 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 0.75 \end{pmatrix}$$

dvs $(x_1, x_2) \approx (0.38, 0.75)$.
Mathematicas `Solve`: $(x_1, x_2) = (\frac{3}{7}, \frac{5}{7}) \approx (0.43, 0.71)$.

$\boldsymbol{x}^{(k)}$ konvergerar mot den sökta lösningen eftersom A är diagonaldominant dvs. diagonalelementen uppfyller:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \text{ för alla } i.$$

6. Newtons metod: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f'(x_k)}{f''(x_k)}$. Vi bestämmer först derivatorna till funktionen:

$$f(x) = x^4 - 4x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 8x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 8.$$

Vi får nu

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 1 - \frac{-4}{4} = 2, \\ x_2 &= x_1 - \frac{f'(x_1)}{f''(x_1)} = 2 - \frac{16}{40} = \frac{8}{5} = 1.6. \end{aligned}$$

Vi har alltså

$$f_{\min} \approx f(x_2) = f(1.6) = -3.6864.$$

7. Vi har likhetsvillkoret $g(x_1, x_2) = x_2 - 2 = 0$ och bildar straffunktionen

$$P(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \frac{1}{r} g(x_1, x_2)^2 = 2x_1^2 - x_2^2 + \frac{1}{r}(x_2 - 2)^2 \text{ där straffparametern } r > 0.$$

Stationära punkter:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x_1} = 4x_1 = 0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial x_2} = -2x_2 + \dfrac{2(x_2 - 2)}{r} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^*(r) = \left(0, \frac{2}{1 - r}\right)$$

Låter vi $r \to 0^+$ får vi den stationära punkten $\boldsymbol{x}^* = (0, 2)$. Hessianen:

$$H(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 + \frac{2}{r} \end{pmatrix}$$

är konstant, diagonal och diagonalelementen (egenvärdena) är positiva för $r < 1$ vilket innebär att den är positivt definit i alla punkter i planet. Detta innebär i sin tur att P är strikt konvex och $\boldsymbol{x}^*$ är ett globalt minimum. Vi har alltså

$$f_{\min} = f(0, 2) = -4.$$

Resultatet är lätt att verifiera. Eftersom $x_2 = 2$ är $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4 \geq -4$ med likhet endast för $x_1 = 0$.

8. Taylorutveckling t.o.m. ordning 3 kring $x = 0$:

$$y(x) \approx y(0) + y'(0)x + y''(0)\frac{x^2}{2} + y^{(3)}(0)\frac{x^3}{3!}.$$

Vi bestämmer de tre första derivatorna av $y(x)$ och deras värde för $x = 0$:

$$\begin{aligned} &y'(x) = 1 - 2xy(x) && y'(0) = 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = 1 \\ &y''(x) = -2y(x) - 2xy'(x) && y''(0) = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 1 = -2 \\ &y^{(3)}(x) = -2y'(x) - 2y'(x) - 2xy''(x) && y^{(3)}(0) = -2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot (-2) = -4 \end{aligned}$$

och får till sist

$$\begin{aligned} y(x) &\approx 1 + 1 \cdot x + (-2)\frac{x^2}{2} + (-4)\frac{x^3}{3!} = 1 + x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 \\ \Rightarrow y(0.2) &\approx 1 + 0.2 - 0.2^2 - \frac{2}{3}0.2^3 \approx 1.155. \end{aligned}$$

9. Vi har $f(x,y) = 1 - 2xy$, $x_0 = 0$ och $y_0 = 1$.

   (a) Explicit eulermetod:

   $$x_{i+1} = x_i + h, \qquad y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(1 - 2x_i y_i).$$

   Två iterationer med $h = 0.1$ ger

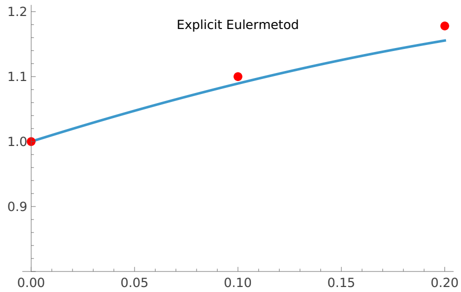
   $$\begin{aligned} x_1 &= 0 + 0.1 = 0.1 & y_1 &= 0 + 0.1(1 - 2 \cdot 0 \cdot 1) = 1.1 \\ x_2 &= 0.1 + 0.1 = 0.2 & y_2 &= 1.1 + 0.1(1 - 2 \cdot 0.1 \cdot 1.1)) = 1.178. \end{aligned}$$

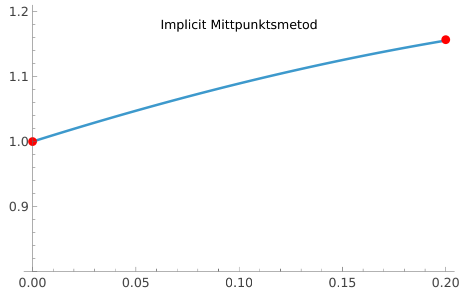
   (b) Implicit mittpunktsmetod:

   $$x_{i+1} = x_i + h, \qquad y_{i+1} = y_i + hf\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}, \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right) = y_i + h\left(1 - 2 \cdot \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \cdot \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\right)$$

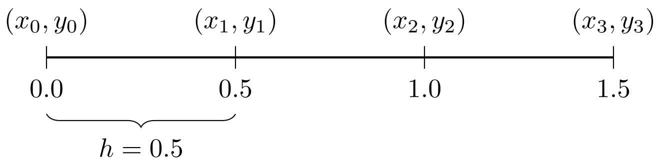
   En iteration med $h = 0.2$ ger

   $$x_1 = 0 + 0.2 = 0.2, \qquad y_1 = 1 + 0.2\left(1 - 2 \cdot \frac{0 + 0.2}{2} \cdot \frac{1 + y_1}{2}\right) \Leftrightarrow y_1 \approx 1.157.$$





10. Intervallet $I = [0, 1.5]$ ska delas in i tre lika stora delar:



där $y_i \approx y(x_i)$, $i = 1, 2$, är finita differenslösningen. Med de givna randvillkoren och centraldifferensapproximation för derivatorna får vi följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} \dfrac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 2\dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + 2y_i = 8x_i, \ i = 1, 2, \\ y_0 = 0, \ y_3 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y_1 - 3y_2 = -2, \\ y_1 - 3y_2 = -2. \end{cases}$$

Finita differenslösningen blir:

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = \frac{2}{3} \approx 0.67. \end{cases}$$