MA8020 Tekniska beräkningar

Något om numerisk ekvationslösning

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

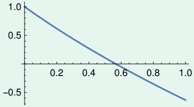
21 november 2024

Numerisk ekvationslösning

Vi vill lösa en icke-linjär ekvation $f(x) = 0$.

Exempel 1

$$f(x) = e^{-x} - x = 0 \Leftrightarrow x = ?$$



Vi kommer att behandla iterativa metoder:

Om x^* är en rot till ekvationen $f(x) = 0$ och $x_0 \approx x^*$ en startapproximation konstrueras en följd $x_0, x_1, x_2, \ldots$. Metoden är konvergent om

$$x_k \to x^* \quad \text{då} \quad k \to \infty$$

annars divergent.

- Hur många lösningar finns och vilka av dessa är intressanta?
- Reella eller komplexa lösningar?
- Hur snabbt konvergerar metoden?
- Önskad tolerans? Vanligvis anges villkor $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon$
- Har vi tillgång till $f'(x)$?

Numerisk ekvationslösning

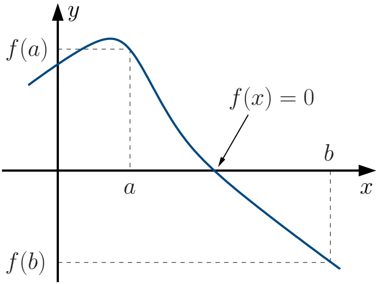
Existens

Sats 1 (Satsen om mellanliggande värden)

Om $f(x)$ är kontinuerlig på intervallet $[a, b]$ och $y \in [f(a), f(b)]$ så finns det ett $x \in [a, b]$ sådant att $f(x) = y$

Sats 2 (Följdsats)

Om $f(x)$ är kontinuerlig och $f(a)f(b) < 0$ så finns det en rot x^* till ekvationen $f(x) = 0$ i intervallet (a, b).

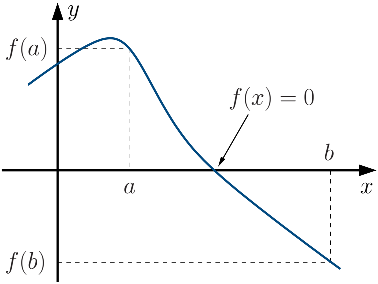


Numerisk ekvationslösning

Metoder

Vi kommer här att studera:

1. Intervallhalveringsmetoden
2. Newton-Raphsons metod
3. Sekantmetoden
4. Fixpunktsiteration



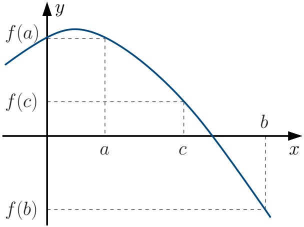
Numerisk ekvationslösning

Intervallhalveringsmetoden

Antag $f(a)f(b) < 0$. Då vet vi att det finns (minst) en rot i intervallet (a, b)

Procedur:

- Beräkna mittpunkten $c = \frac{1}{2}(a + b)$ och $f(c)$. (Om $f(c) = 0$ är vi klara.)
- Om $f(a)f(c) < 0$ finns roten i (a, c) annars i (c, b).
- Börja om i det intervall där roten finns.
- Upprepa proceduren tills $f(c) < \delta$ eller $b - a < \epsilon$
- Välj $x^* = c$.



Anm: Det kan finnas flera rötter i (a, b) och då konvergerar den till en av dem. Välj a, b så att intervallet endast innehåller den sökta roten!

Numerisk ekvationslösning

Intervallhalveringsmetoden

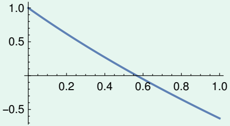
Anm:

- Metoden konvergerar alltid men är långsam. Kan användas för grovlokalisering av en rot x^* .
- Antalet iterationer beror inte på funktionen utan bara på noggrannhetskravet.

Exempel 2

Lös ekvationen $f(x) = e^{-x} - x = 0$ med intervallhalveringsmetoden.

```
Remove["Global`*"]
f[x_] := Exp[-x] - x
(* f(x) är strängt avtagande och har max ett nollställe *)
Plot[f[x], {x, 0, 1}]
```



Numerisk ekvationslösning

Intervallhalveringsmetoden

Exempel 2 (Forts)

```
Remove["Global`*"]
f[x_] := Exp[-x] - x;
{a, b} = {0.55, 0.6};
epsilon = 0.001;
While[b - a > epsilon,
 c = 0.5 * (a + b);
 Print[{a, c, b}];
 If[f[a] * f[c] < 0, b = c, a = c]
]
(* Kontroll med NSolve *)
NSolve[f[x] == 0, x]
```

```
{0.55, 0.575, 0.6}
{0.55, 0.5625, 0.575}
{0.5625, 0.56875, 0.575}
{0.5625, 0.565625, 0.56875}
{0.565625, 0.567188, 0.56875}
{0.565625, 0.566406, 0.567188}
{{x → 0.567143}}
```

Numerisk ekvationslösning

Newton-Raphsons metod

Antag att $f(x)$ har en rot x^* och x_0 är en approximation:

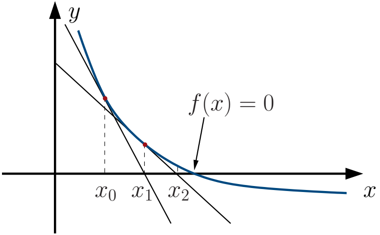
- Drag en tangent till $y = f(x)$ i punkten $x = x_0$. Tangentens ekvation:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

- Om tangenten skär x-axeln i $x = x_1$ har vi

$$0 - f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Upprepa proceduren med x_1 som approximativ rot.
- Iterera $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ tills $|f(x_{k+1})| < \delta$ eller $|x_{k+1} - x_k| < \epsilon \Rightarrow x^* \approx x_{k+1}$



Numerisk ekvationslösning

Newton-Raphsons metod

Anm:

- Newton-Raphsons metod konvergerar inte alltid!
- Mycket snabb konvergens. Konvergerar alltid mot en enkelrot om startapproximationen är bra nog.
- I varje steg behövs två funktionsanrop (både $f(x)$ och $f'(x)$).

Sats 3

Låt x_k vara den talföljd som beräknas med Newton-Raphsons metod. Om x_k konvergerar mot en enkelrot x^* är

$$|x_{k+1} - x^*| = C|x_k - x^*|^2$$

Vi säger att konvergensordningen är 2.

Kan vi beräkna $f'(x)$ är Newton-Raphsons metod nästan alltid bäst.

Numerisk ekvationslösning

Newton-Raphsons metod

Exempel 3

Lös ekvationen $f(x) = e^{-x} - x = 0$ med Newton-Raphsons metod.

```
Remove["Global`*"]
f[x_] := Exp[-x] - x;
epsilon = 0.000001;
diff = 1;
xold = 0.2;
While[diff > epsilon,
 xnew = xold - f[xold] / f'[xold];
 diff = Abs[xnew - xold];
 Print[{xnew, diff}];
 xold = xnew;
]
(* Kontroll med NSolve *)
NSolve[f[x] == 0, x]
```

{0.540199, 0.340199}

{0.567011, 0.0268116}

{0.567143, 0.000132437}

{0.567143, 3.17403×10^{-9}}

{{x → 0.567143}}

Numerisk ekvationslösning

Sekantmetoden

Newton-Raphsons metod kräver att vi kan bestämma $f'(x)$. Om vi inte kan det kan vi använda approximationen

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

Insättning i Netwon-Raphson ger :

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - f(x_k)\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Anm:

- Sekantmetoden kräver två startvärden.
- Konvergensordning ungefär 1.7 men bara en ny funktionsberäkning krävs i varje steg.
- Konvergerar mot en enkelrot om startapproximationen är bra nog.

Numerisk ekvationslösning

Sekantmetoden

Exempel 4

Lös ekvationen $f(x) = e^{-x} - x = 0$ med Sekantmetoden.

```
Remove["Global`*"]
f[x_] := Exp[-x] - x;
epsilon = 0.000001;
diff = 1;
xold = 0.2;
xolder = 0.1;
While[diff > epsilon,
 xnew = xold - f[xold] * (xold - xolder) / (f[xold] - f[xolder]);
 diff = Abs[xnew - xold];
 Print[{xnew, diff}];
 xolder = xold;
 xold = xnew;
]
(* Kontroll med NSolve *)
NSolve[f[x] == 0, x]
```

```
{0.53246, 0.33246}
{0.564701, 0.0322411}
{0.567128, 0.0024265}
{0.567143, 0.0000154048}
{0.567143, 6.81228 × 10^-9}
{{x → 0.567143}}
```

Numerisk ekvationslösning

Fixpunktsiteration

Newton-Raphsons metod kan skrivas på formen

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = g(x_k)$$

Definition 1

- Om x^* är rot till $f(x) = 0$ och $x^* = g(x^*)$ så är x^* en fixpunkt till $g(x)$.
- $x_{k+1} = g(x_k)$ kallas en fixpunktsiteration

Exempel 5

Ekvationen $x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0$ har en rot x^* i intervallet $[-0.21, -0.20]$.
Bestäm en approximation till roten med fixpunktsiteration.
Olika val av $g(x)$:

- $4x = -x^3 + 4x - 1 \Rightarrow x = g_1(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + 4x^2 - 1)$
- $x(x^2 - 4x + 4) = -1 \Rightarrow x = g_2(x) = \dfrac{1}{-x^2 + 4x - 4}$
- $4x^2 = x^3 + 4x + 1 \Rightarrow x = g_3(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x^3 + 4x + 1}$

Numerisk ekvationslösning

Fixpunktsiteration

Exempel 5 (forts)

```
Remove["Global`*"]
list = {{"k", "g1", "g2", "g3"}};
f[x_] = x^3 - 4 x^2 + 4 x + 1;
g[x_] = {(1/4) * (-x^3 + 4 x^2 - 1), -1/(x^2 - 4 x + 4), -(1/2) * Sqrt[x^3 + 4 x + 1]};
kmax = 10;
xold = Table[-0.2, {i, 1, 3}];
For[k = 1, k <= kmax, ++k,
 For[i = 1, i ≤ 3, i++,
  xnew[i] = g[xold[[i]]][[i]];
  xold[[i]] = xnew[i];
 ];
 AppendTo[list, Flatten[{k, Table[DecimalForm[g[xnew[j]][[j]],
      DefaultPrintPrecision → 10], {j, 1, 3}]}]]
]
Grid[list, Frame → All]
Print["NSolve: ", NSolve[f[x] == 0, x][[1]]]
```

k	g1	g2	g3
1	−0.204486272	−0.2053753033	−0.1681722591
2	−0.2060477348	−0.2056056223	−0.2839695103
3	−0.2053573574	−0.2055626841	0. − 0.1992341391 i
4	−0.2056632914	−0.205570688	−0.5331275146 + 0.1849998562 i
5	−0.2055278555	−0.205569196	−0.1901264342 − 0.5860656233 i
6	−0.2055878392	−0.2055694741	−0.5783899334 + 0.4768669252 i
7	−0.205561278	−0.2055694223	−0.4216500546 − 0.6752083457 i
8	−0.2055730405	−0.2055694319	−0.5672817404 + 0.6066507218 i
9	−0.2055678317	−0.2055694301	−0.5102962395 − 0.6831856158 i
10	−0.2055701383	−0.2055694305	−0.5616549245 + 0.6560032977 i

NSolve: {x → −0.205569}

Numerisk ekvationslösning

Fixpunktsiteration

Sats 4 (Konvergens för fixpunktsiteration)

Om x^* är en fixpunkt till $g(x)$ kommer fixpunktsiterationen $x_{n+1} = g(x_n)$ att konvergera mot x^* om $|g'(x)| < 1$ i en omgivning av x^* som innehåller x_0.

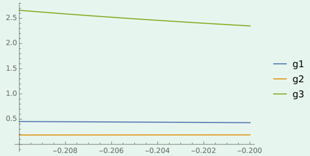
Exempel 5 (forts)

```
Remove["Global`*"]
{xmin, xmax} = {-0.21, -0.2};
g[x_] = {(1/4)*(-x^3+4x^2-1), -1/(x^2-4x+4), -(1/2)*Sqrt[x^3+4x+1]};
Do[Print["g", i, "'(x) = ", g'[x][[i]]], {i, 1, 3}];
Plot[Evaluate[Table[Abs[g'[x][[i]]], {i, 1, 3}]], {x, xmin, xmax},
 PlotLegends → {"g1", "g2", "g3"}]
Grid[Table[{
   FindMinimum[{Abs[g'[x][[i]]], xmin ≤ x ≤ xmax}, {x, xmin}],
   FindMaximum[{Abs[g'[x][[i]]], xmin ≤ x ≤ xmax}, {x, xmin}]
  }, {i, 1, 3}], Frame → All]
```

g1'(x) = $\frac{1}{4}\left(8x - 3x^2\right)$

g2'(x) = $\frac{-4+2x}{\left(4-4x+x^2\right)^2}$

g3'(x) = $-\frac{4+3x^2}{4\sqrt{1+4x+x^3}}$



{0.43, {x → −0.2}}	{0.453075, {x → −0.21}}
{0.185291, {x → −0.21}}	{0.187829, {x → −0.2}}
{2.35064, {x → −0.2}}	{2.66084, {x → −0.21}}

Numerisk ekvationslösning

Fixpunktsiteration

Exempel 5 (forts)

För $x \in [-0.21, -0.20]$ har vi alltså:

$$
\begin{aligned}
g_1(x) &= \frac{1}{4}(-x^3 + 4x^2 - 1) \Rightarrow g_1'(x) = \frac{1}{4}(-3x^2 + 8x) \\
&\Rightarrow |g_1'(x)| \leq 0.453... < 1 \quad \text{OK!} \\
g_2(x) &= -\frac{1}{x^2 - 4x + 4} \Rightarrow g_2'(x) = \frac{2x - 4}{(x^2 - 4x + 4)^2} \\
&\Rightarrow |g_2'(x)| \leq 0.187... < 1 \quad \text{OK!} \\
g_3(x) &= -\frac{1}{2}\sqrt{x^3 + 4x + 1} \Rightarrow g_3'(x) = -\frac{3x^2 + 4}{4\sqrt{x^3 + 4x + 1}} \\
&\Rightarrow |g_3'(x)| \geq 2.350... > 1 \quad \text{Ej OK!}
\end{aligned}
$$