

MA8020 Tekniska beräkningar

Något om numerisk derivering

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

14 november 2024

Numerisk derivering

Exempel 1

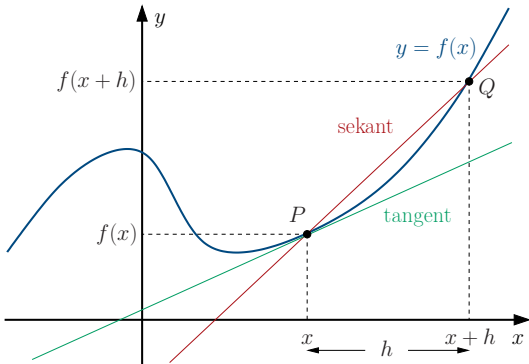
En bil färdas mellan två platser och vi har information om hur långt den kört vid ett antal tidpunkter t_0, t_1, \dots, t_n . Hur ska vi uppskatta bilens fart vid t ex $t = t_3$?

Allmänt: Antag att vi kan känna ett antal funktionsvärden för en funktion $f(x)$ vid $x = x_0, x_1, \dots, x_n$ men vi har ingen information om derivatan $f'(x)$.

Hur ska vi uppskatta $f'(x)$?

Definition 1

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Numerisk derivering

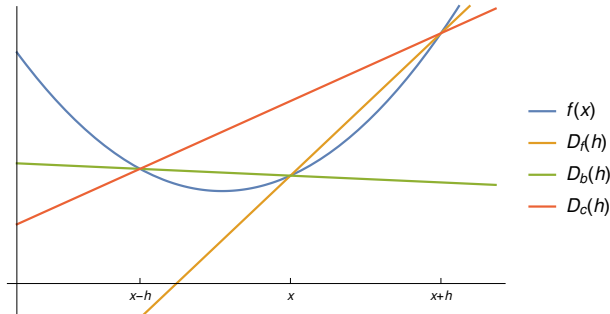
Differensapproximationer

Om $h = x_{i+1} - x_i$ är ett (litet) positivt tal kan vi göra följande approximationer:

$$f'(x) \approx D_f(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad \leftarrow \text{Framåtdifferens}$$

$$f'(x) \approx D_b(h) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} \quad \leftarrow \text{Bakåtdifferens}$$

$$f'(x) \approx D_c(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad \leftarrow \text{Centralsdifferens}$$



Numerisk derivering

Differensapproximationer

Sats 1 (Taylors formel)

Om f har kontinuerliga derivator av ordning $\leq n + 1$ kring x så är

$$f(x_1) = f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \frac{f''(x)}{2}(x_1 - x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(x_1 - x)^3 + \dots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_1 - x)^{n+1} \quad \text{där } \xi \text{ ligger mellan } x \text{ och } x_1.$$

Med $x_1 = x \pm h \Leftrightarrow h = \pm(x_1 - x)$ är ξ mellan x och $x \pm h$ och vi får

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \dots$$

$$f(x - h) = f(x) - f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \dots$$

Addition av dessa uttryck ger direkt en approximation för $f''(x)$:

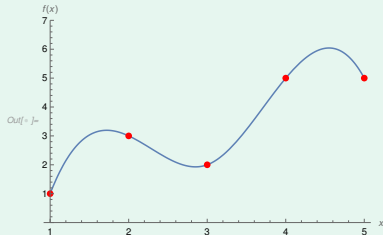
$$f''(x) \approx \frac{f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)}{h^2}$$

Numerisk derivering

Exempel 2

Bestäm approximationer för $f'(3)$ och $f''(3)$ med framåt-, bakåt- och centraldifferenser och följande funktionsvärden:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	2	5	5



Resultat:

$$f'(3) \approx \begin{cases} D_f(1) = \frac{f(3+1)-f(3)}{1} = \frac{5-2}{1} = 3 \\ D_b(1) = \frac{f(3)-f(3-1)}{1} = \frac{2-3}{1} = -1 \\ D_c(1) = \frac{f(3+1)-f(3-1)}{2 \cdot 1} = \frac{5-3}{2 \cdot 1} = 1 \end{cases}$$

$$f''(3) \approx \frac{f(3+1) - 2f(3) + f(3-1)}{1^2} = \frac{5 - 2 \cdot 2 + 3}{1^2} = 4$$

Numerisk derivering

Felet vid differensapproximationer

Med Taylorutveckling kan vi uppskatta felet vid framåt-, bakåt och centraldifferens:

$$f(x \pm h) = f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \dots$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \leftarrow \text{Framåtdifferens}$$

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \mathcal{O}(h) \quad \leftarrow \text{Bakåtdifferens}$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^2) \quad \leftarrow \text{Centraldifferens}$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^2) \quad \leftarrow \text{Centraldifferens}$$

Vi kan alltså normalt förvänta oss betydligt högre noggrannhet om vi använder centraldifferens.

Numerisk derivering

Derivering via interpolation

Man kan förstås också gå vägen via polynominterpolation:

Ansatsen $p_n(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n$ och villkoren $p(x_i) = f(x_i)$ ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ & & & \ddots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{f}$$

För att bestämma approximationer till f 's derivator behöver vi bara derivera $p_n(x)$.

Anm:

- Ofta används $p_2(x)$ vilket ger fel av $\mathcal{O}(h^2)$ i derivatan.
- Derivering med lokal polynominterpolation är inte känslig för om vi har ekvidistanta x -värden (dvs konstant h) vilket differensapproximationerna är.

Numerisk derivering

Derivering via interpolation

Exempel 3

Uppskatta $f'(3)$ och $f''(3)$ genom att först bestämma ett interpolationspolynom av grad 2 med hjälp av tabellen:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1	3	2	5	5

Ansats $p_2(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$ och centrering kring $x = 3$:

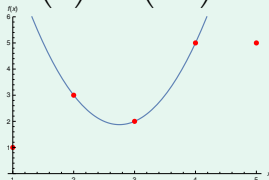
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2^2 \\ 1 & 3 & 3^2 \\ 1 & 4 & 4^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(2) \\ f(3) \\ f(4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 17 - 11x + 2x^2$$

$$\Rightarrow p_2'(x) = -11 + 4x \Rightarrow p_2'(3) = 1$$

$$\Rightarrow p_2''(x) = 4$$

OBS! Samma resultat som centraldiff.approx.



Numerisk derivering

Richardsonextrapolation

Taylor's formel igen:

$$\begin{aligned} f(x \pm h) &= f(x) \pm f'(x)h + \frac{f''(x)}{2}h^2 \pm \frac{f^{(3)}(x)}{3!}h^3 + \frac{f^{(4)}(x)}{4!}h^4 + \dots \\ &= f(x) \pm f'(x)h + a_2h^2 \pm a_3h^3 + a_4h^4 + \dots \end{aligned}$$

där a_2, a_3, a_4, \dots beror på x men inte på h .

Centraldifferensapproximationen kan nu skriva som:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \underbrace{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}}_{=F_2(h)} + \underbrace{2a_3}_{=b}h^2 + \mathcal{O}(h^4) = F_2(h) + bh^2 + \mathcal{O}(h^4) \\ &= F_2(h) + \mathcal{O}(h^2) \end{aligned}$$

Genom att beräkna $F_2(h)$ för h och $2h$ och sedan kombinera resultaten kan vi bestämma en approximation till $f'(x)$ med mindre trunkeringsfel än $F_2(h)$.

Anm: $\mathcal{O}(h^n) \pm \mathcal{O}(h^n) = \mathcal{O}(h^n)$ och om k är ett fixt tal så är $\mathcal{O}((kh)^n) = \mathcal{O}(h^n)$

Numerisk derivering

Richardsonextrapolation

Vi får:

$$F_2(h) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x) - bh^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$F_2(2h) = \frac{f(x+2h) - f(x-2h)}{4h} = f'(x) - b(2h)^2 + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Rightarrow \frac{F_2(2h) - F_2(h)}{3} = -bh^2 + \mathcal{O}(h^4) = F_2(h) - f'(x) + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{4F_2(h) - F_2(2h)}{3} + \mathcal{O}(h^4) = F_4(h) + \mathcal{O}(h^4)$$

Processen kan upprepas och $F_k(h)$ och $f'(x)$ kan bestämmas rekursivt genom

$$F_k(h) = \frac{2^{k-2}F_{k-2}(h) - F_{k-2}(2h)}{2^{k-2} - 1} \Rightarrow f'(x) = F_k(h) + \mathcal{O}(h^k), \quad k = 2, 4, 6, \dots$$

Anm: Lewis Richardson (1881-1953) var en engelsk matematiker.

Numerisk derivering

Richardsonextrapolation

Exempel 4

Uppskatta $f'(0.5)$ med hjälp av $F_2(h)$ och $F_4(h)$, $h = 0.1$, och funktionsvärdena:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
$f(x)$	0.99500	0.98007	0.95534	0.92106	0.87758	0.82534	0.76484	0.69671	0.62161

$$F_2(0.1) = \frac{f(0.5 + 0.1) - f(0.5 - 0.1)}{2 \cdot 0.1} = \frac{0.82534 - 0.92106}{0.2} = -0.47860$$

$$\begin{aligned}
 F_4(0.1) &= \frac{4F_2(0.1) - F_2(2 \cdot 0.1)}{3} \\
 &= \frac{1}{3} \left(4 \frac{f(0.5 + 0.1) - f(0.5 - 0.1)}{2 \cdot 0.1} - \frac{f(0.5 + 0.2) - f(0.5 - 0.2)}{2 \cdot 0.2} \right) \\
 &= \frac{1}{3} \left(4 \frac{0.82534 - 0.92106}{0.2} - \frac{0.76484 - 0.95534}{0.4} \right) = -0.47938
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f'(0.5) = -0.47860 + \mathcal{O}(h^2) \quad \text{respektive} \quad f'(0.5) = -0.47938 + \mathcal{O}(h^4)$$

Anm: I tabellen ovan är $f(x) = \cos x \Rightarrow f'(0.5) = -\sin 0.5 = -0.47942\dots$