MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om potenser

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

6 oktober 2025

Potenser

Exempel 1

2^3, e^2, π^e är potenser.

Definition 1

Talet a^α kallas en potens. a kallas basen och α exponenten.

Exempel 2

- $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5$
- $5^3 \cdot 5^2 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5 = 5^{3+2}$
- $\dfrac{5^5}{5^2} = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 = 5^{5-2}$
- $(5^2)^3 = (5 \cdot 5)(5 \cdot 5)(5 \cdot 5) = 5^6 = 5^{2 \cdot 3}$

Potenser med heltalsexponent

Sats 1 (Potenslagar)

För positiva heltalsexponenter gäller:

$$
\begin{aligned}
a^n &= \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n\ st} && (1) \\
a^n a^m &= a^{n+m} && (2) \\
\frac{a^n}{a^m} &= a^{n-m},\ m < n && (3)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(a^n)^m &= a^{nm} && (4) \\
a^n b^n &= (ab)^n && (5) \\
a > 1,\ m < n &\Rightarrow a^m < a^n && (6) \\
0 < a < b,\ n > 0 &\Rightarrow a^n < b^n && (7)
\end{aligned}
$$

- Hur ska vi definiera a^0 ? Om (2) skall gälla även för $m = 0$:

$$a^n \cdot a^0 = a^{n+0} = a^n \Leftrightarrow a^0 = 1$$

- Hur ska vi definiera a^n om $n < 0$? Om (3) skall gälla även för $m > n$:

$$a^{-m} = a^{0-m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m} \tag{8}$$

Räknelagarna (1) - (8) nu gäller för alla heltalsexponenter.

Potenser med rationell exponent

Definition 2

För alla $a > 0$ och heltal p och $q > 0$ sätter vi

- $a^{1/q} = \sqrt[q]{a} =$ det *positiva reella tal* som är rot till $x^q = a$
- $a^{p/q} = \left(a^{1/q}\right)^p$

Exempel 3

$27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = \{\text{det positiva reella tal som är rot till ekvationen } x^3 = 27\} = 3$

Exempel 4

$27^{2/3} = \left(27^{1/3}\right)^2 = 3^2 = 9$

Anm: Man kan visa att

- $x^q = a$, där $a > 0$ och $q \in \mathbb{Z}^+$, har precis en positiv rot
- potenslagarna (1) - (8) gäller även för rationella exponenter

Potenser med rationell exponent

Exempel 5

Förenkla

$$2^{7/24}\sqrt[2]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}}$$

Lösning:

$$\begin{aligned}
2^{7/24}\sqrt[2]{2\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}} &= 2^{7/24}\left(2\left(2\left(2^{1/4}\right)\right)^{1/3}\right)^{1/2} = 2^{7/24}\left(2\left(2^{5/4}\right)^{1/3}\right)^{1/2} \\
&= 2^{7/24}\left(2\cdot 2^{5/12}\right)^{1/2} = 2^{7/24}\left(2^{17/12}\right)^{1/2} \\
&= 2^{7/24}2^{17/24} = 2^{7/24+17/24} = 2^{1} = 2
\end{aligned}$$

Potenser med irrationell exponent

Vad ska vi mena med 2^π?

- π kan approximeras med ett rationellt tal till godtycklig noggrannhet:

$$\begin{aligned}
\pi \approx r_1 &= \frac{3}{1} = 3 \\
r_2 &= \frac{31}{10} = 3.1 \\
r_3 &= \frac{314}{100} = 3.14 \\
r_4 &= \frac{3142}{1000} = 3.142 \\
r_5 &= \frac{31416}{10000} = 3.1416 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

- π kan betraktas som gränsvärdet av en talföljd $\{r_n\}$ av rationella tal.
- Vi sätter

$$2^\pi = \text{gränsvärdet av } 2^{r_n} \text{ då } n \to \infty$$

Potensfunktioner

Definition 3 (Potenser)

Om a är ett positivt reellt tal så definierar vi potensen a^α enligt:

1. α är ett *positivt heltal*
   - $a^\alpha = a \cdot a \cdot a \cdots a$ där antalet faktorer är α
   - $a^0 = 1$
   - $a^{-\alpha} = \dfrac{1}{a^\alpha}$
2. $\alpha = \dfrac{p}{q}$ där p och q är *heltal*, $q > 0$
   - $a^\alpha = \left(a^{1/q}\right)^p$
   - $a^{1/q} =$ *den* entydigt bestämda positiva roten till ekvationen $x^q = a$
3. α är ett *irrationellt tal*
   - $a^\alpha = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ där $\{r_n\}$ är en talföljd av rationella tal med gränsvärdet α

Man kan visa att räknelagarna (1)- (8) för heltalsexponenter gäller för alla *positiva* reella tal a.

Potensfunktioner

Definition 4

Funktionen $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$, kallas en potensfunktion.

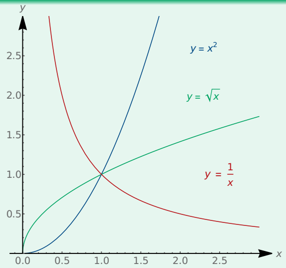
Exempel 6

$f(x) = x^2$, $x > 0$, $g(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $h(x) = x^\pi$, $x > 0$, är potensfunktioner.

Exempel 7

Graferna till potensfunktionerna

- $f(x) = x^2$, $x > 0$
- $g(x) = x^{1/2} = \sqrt{x}$
- $h(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x > 0$



Anm: $g(x) = \sqrt{x}$ är invers till $f(x) = x^2$, $x > 0$.

Potensfunktioner

Sats 2

Potensfunktionen $f(x) = x^{\alpha}$ *är strängt växande om* $\alpha > 0$ *och strängt avtagande om* $\alpha < 0$*. Vidare gäller att*

$$\lim_{x \to \infty} x^{\alpha} = \begin{cases} \infty \text{ om } \alpha > 0 \\ 0 \text{ om } \alpha < 0 \end{cases}$$

Anm:

- Om $x_1 < x_2$ så är funktion $f(x)$ växande om $f(x_1) \leq f(x_2)$ och strängt växande om $f(x_1) < f(x_2)$.
- Avtagande och strängt avtagande definieras på motsvarade sätt.
- Om $f(x)$ är (strängt) växande eller avtagande så är $f(x)$ (strängt) monoton.

Exponentialfunktioner

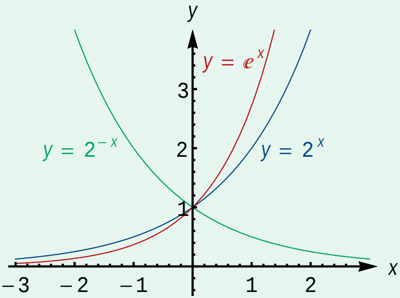
Definition 5

Funktionen $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, kallas en exponentialfunktion.

Exempel 8

Graferna till exponentialfunktionerna

- $f(x) = 2^x$
- $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$
- $h(x) = e^x$



Exponentialfunktioner

Sats 3

Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ *är strängt växande om* $a > 1$ *och strängt avtagande om* $0 < a < 1$. *Vidare gäller att*

$$\lim_{x\to\infty} a^x = \begin{cases} \infty \text{ om } a > 1 \\ 0 \text{ om } a < 1 \end{cases}$$

Exempel 9

Bestäm en funktion f vars värden fördubblas i varje intervall av längden 2 och som uppfyller $f(1) = 3$.

Lösning:

Ansats: $f(x) = Ca^x \Rightarrow f(1) = Ca = 3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(1+2) &= f(3) = Ca^3 = 2f(1) = 2Ca \\ &\Leftrightarrow a^2 = 2 \underset{a>0}{\Leftrightarrow} a = 2^{1/2} \Rightarrow C = 3 \cdot 2^{-1/2} \end{aligned}$$

$\therefore f(x) = 3 \cdot 2^{-1/2} \cdot \left(2^{1/2}\right)^x = 3 \cdot 2^{\frac{x-1}{2}}$.

Logaritmfunktioner

Definition 6

Om $y = a^x$ där $a > 0$ och $a \neq 1$ så sätter vi

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y.$$

Talet x kallas *a-logaritmen för y.*

Anm:

- $\log_a x =$ det tal a skall upphöjas till för att resultatet ska bli x.
- För baserna 10 respektive e så skriver vi lg respektive ln. e-logaritmen kallas den naturliga logaritmen.
- Om $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$ så är $f^{-1}(x) = \log_a x$

Logaritmfunktioner

Exempel 10

- $\log_{10} 1000 = \lg 1000 = 3$
- $\lg 0.1 = -1$
- $\log_4 16 = 2$
- $\log_3 9 = 2$
- $\lg 1 = 0$, $\ln 1 = 0$
- $1000 = 10^3 = 10^{\lg 1000}$
- $3 = \lg 1000 = \lg 10^3$

Sats 4

För logaritmer gäller

$$\begin{aligned} \log_a 1 &= 0 \\ x &= a^{\log_a x} = \log_a a^x, \; x > 0 \end{aligned}$$

Logaritmlagarna

Sats 5 (Logaritmlagarna)

För positiva tal x och y gäller

$$\begin{aligned} \log_a x + \log_a y &= \log_a xy & \qquad \log_a x^y &= y \log_a x \\ \log_a x - \log_a y &= \log_a \frac{x}{y} & \qquad \log_b x &= \frac{\log_a x}{\log_a b} \end{aligned}$$

Exempel 11

$3 \ln 2 - 2 \ln 3 = \ln 2^3 - \ln 3^2 = \ln \frac{2^3}{3^2} = \ln \frac{8}{9}$.

Exempel 12

Lös ekvationen $\ln\left(2^x + 2^{x+1}\right) = 1$

Lösning:

$$\begin{aligned} \ln\left(2^x + 2^{x+1}\right) &= \ln\left(2^x + 2 \cdot 2^x\right) = \ln\left(3 \cdot 2^x\right) = \ln 3 + \ln 2^x \\ &= \ln 3 + x \ln 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 - \ln 3}{\ln 2} \end{aligned}$$

Logaritmlagarna

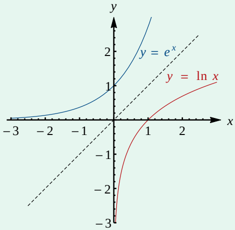
Definition 7

Funktionen $f(x) = \log_a x$, $a > 1$, $x > 0$, kallas en logaritmfunktion.

Exempel 13

Grafen till funktionen $f(x) = \ln x$

$f(x) = \ln x$ är invers till e^x
$\therefore$ $y = \ln x$ är spegelbilden av $y = e^x$ i linjen $y = x$.



Sats 6

Logaritmfunktionen $f(x) = \log_a x$ *är strängt växande om* $a > 1$. *Vidare gäller att*

$$\log_a x \to \begin{cases} \infty \text{ då } x \to \infty \\ -\infty \text{ då } x \to 0^+ \end{cases}$$

Logaritmlagarna

Anm: Om $0 < a < 1$ så är $\frac{1}{a} > 0$ och

$$\log_a x = \frac{\log_{\frac{1}{a}} x}{\log_{\frac{1}{a}} a} = -\log_{\frac{1}{a}} x$$

Ex: $\log_{1/2} x = -\log_2 x$.

Exempel 14

Lös ekvationen $\sqrt{\ln x} = \ln \sqrt{x}$.

Lösning:

$$\ln \sqrt{x} = \ln x^{1/2} = \frac{\ln x}{2}$$

Substitutionen $t = \ln x \Leftrightarrow x = e^t$ ger

$$\begin{aligned} \sqrt{t} = \frac{t}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{t}(\sqrt{t} - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad t = 0 \text{ eller } t = 4 \Leftrightarrow x = e^0 = 1 \text{ eller } x = e^4 \end{aligned}$$

Logaritmlagarna

Exempel 15

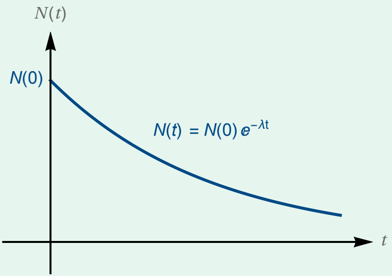
Radioaktivt sönderfall beskrivs av

$$N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$$

där $N(t)$ är antalet radioaktiva kärnor vid tiden t och λ sönderfallskonstanten. Bestäm halveringstiden, dvs den tid T vid vilken häften av de ursprungliga radioaktiva kärnorna sönderfallit.

Lösning:

$$\begin{aligned} N(T) &= \frac{N(0)}{2} = N(0)e^{-\lambda T} \\ \Leftrightarrow &\quad \frac{1}{2} = e^{-\lambda T} \\ \Leftrightarrow &\quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -\lambda T \\ \Leftrightarrow &\quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} \end{aligned}$$



Logaritmlagarna

Exempel 16 (Tenta 101028, uppgift 1a, 2p)

Lös ekvationen $27^x + 2 \cdot 3^x = 3 \cdot 9^x$

Exempel 17

Lös ekvationen $\ln(x-4) + \ln(x-3) = \ln 2$