HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Torsdagen den 4 april 2024
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna integralen (*2p*)

$$\int_{-1}^{1} \frac{2x}{x^2-4}\,dx\,.$$

   (b) Beräkna gränsvärdet (*3p*)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+\ln(1+x)-1}{\arctan(x)-x\cos(x)}.$$

2. Lös begynnelsevärdesproblemet (*5p*)

$$\begin{cases} y''+3y'+2y=2xe^{-x}, \\ y(0)=y'(0)=-1. \end{cases}$$

3. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{x^2-x+1}{1-x}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. (*5p*)

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av e^x. (*1p*)

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$xy'+2y=e^x,$$

   för vilken $\lim_{x\to 0} y(x)=\frac{1}{2}$. (*4p*)

5. (a) För vilka värden på talet α är den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

   konvergent? (*1p*)

   (b) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^{3/2}}\,dx$$

   är konvergent utan att beräkna den. (*2p*)

   (c) Beräkna den generaliserade integralen i (b). (*2p*)

6. (a) Härled formeln för derivatan av produkten av två deriverbara funktioner $f(x)$ och $g(x)$. (*1p*)

   (b) Dosingenjören Pelle ska bygga en cylinderformad snusdosa av plåt. Dosan ska ha botten men inget lock och volymen ska vara 1 dl. Vilken är den minsta plåtarean som krävs? (*4p*)

Lycka till!

HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Torsdagen den 4 april 2024
Skrivtid: 9.00-14.00

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Integranden är en udda funktion ($f(-x) = -f(x)$) och integrationsområdet symmetriskt kring $x = 0$. Vi kan därför direkt säga att integralens värde är 0.

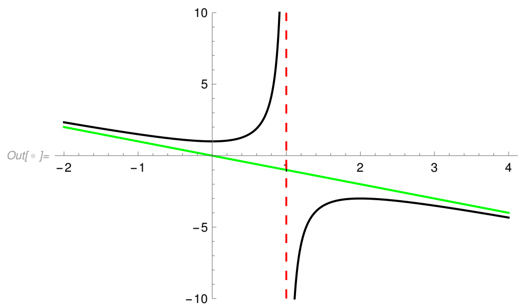
   Alternativet är att beräkna integralen med insättningsformeln vilket ger samma resultat:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\overset{f'(x)}{2x}}{\underset{f(x)}{x^2 - 4}} dx = \Big[\ln |\underset{f(x)}{x^2 - 4}|\Big]_{-1}^{1} = 0.$$

   (b) Maclaurinutveckla täljare och nämnare. Svar: 1.

2. Allmän lösning: $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + (x^2 - 2x)e^{-x}$. Sökt lösning: $y(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

3. Lokal maximipunkt $f(2) = -3$ och lokal minimipunkt $f(0) = 1$. Lodrät asymptot: $x = 1$. Sned asymptot: $y = -x$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{1 - x}$.

4. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1*, exempel 5a.

   (b) Linjär differentialekvation av 1:a ordningen med integrerande faktor x^2.
   Allmän lösning: $y(x) = \dfrac{e^x(x-1) + C}{x^2}$. Sökt lösning: $y(x) = \dfrac{e^x(x-1) + 1}{x^2}$.

5. (a) Se föreläsningen *Generaliserade integraler*, sidan 7.

   (b) $\dfrac{\ln x}{x^\alpha} \to 0$ då $x \to \infty$ om $\alpha > 0$ (standardgränsvärde). För tillräckligt stora x är då

$$0 \leq \frac{\ln x}{x^{3/2}} = \frac{\ln x}{x^{1/4}} \cdot \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}} \leq 1 \cdot \frac{x^{1/4}}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{5/4}}$$

   Enligt (a) är den generaliserade integralen därför konvergent.

   (c) Sätt $t = \sqrt{x}$, använd partiell integration och utnyttja standardgränsvärdet i (b). Svar: 4.

6. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1*, Produktregeln på sidan 10.

   (b) Dosans volym är $V = \pi r^2 h = 1$ dl vilket ger arean

$$A(r) = \underset{\text{botten}}{\pi r^2} + \underset{mantel}{2\pi r h} = \pi r^2 + \frac{2}{r}, \quad r > 0.$$

   Minsta area är $A_{\min} = A\left(\dfrac{1}{\pi^{1/3}}\right) = 3\pi^{1/3}\,(\text{dl})^{2/3} = 3\pi^{1/3}\,10^{1/3}\,\text{cm}^2 \approx 94.7\,\text{cm}^2$.