

MA2001 Envariabelanalys

Något om generaliserade integraler

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

26 november 2025

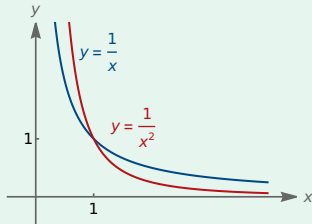
Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 1

Undersök

$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx \quad \text{och} \quad \int_1^R \frac{1}{x} dx \quad \text{då} \quad R \rightarrow \infty.$$



$$\int_1^R \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R = -\frac{1}{R} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 1 - \frac{1}{R} \rightarrow 1 \text{ då } R \rightarrow \infty$$

$$\int_1^R \frac{1}{x} dx = [\ln |x|]_1^R = \ln R - \ln 1 = \ln R \rightarrow \infty \text{ då } R \rightarrow \infty$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Definition 1

Om funktionen f är integrerbar på $[a, R]$ för alla $R \geq a$ och om gränsvärdet

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_a^R f(x) dx = A$$

existerar ändligt så är den **generaliserade integralen**

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

konvergent med värdet A . I annat fall är den **divergent**.

I exemplet ovan:

- $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent
- $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$ är divergent

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 2

Avgör om den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} e^{-x} dx$$

är konvergent.

Lösning:

$$\int_1^R e^{-x} dx = \left[-e^{-x} \right]_1^R = -e^{-R} - (-e^{-1}) = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^R} \rightarrow \frac{1}{e} \text{ då } R \rightarrow \infty$$

$$\Leftrightarrow \int_1^{\infty} e^{-x} dx = \frac{1}{e}$$

$$\therefore \int_1^{\infty} e^{-x} dx \text{ är konvergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 3

Undersök konvergensen hos

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Lösning:

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int_1^R \frac{\overset{f'(x)}{2x}}{\underset{f(x)}{1+x^2}} dx = \frac{1}{2} \left[\ln |1+x^2| \right]_1^R = \frac{1}{2} (\ln(1+R^2) - \ln 2) \\ &= \frac{1}{2} (\ln(1+R^2) - \ln 2) \rightarrow \infty \text{ då } R \rightarrow \infty \\ \therefore \int_1^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx &\text{ är divergent.} \end{aligned}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 4

Undersök konvergensen hos

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

Lösning:

$$\int_0^R \sin x \, dx = [-\cos x]_0^R = 1 - \cos R \rightarrow ?$$

$\cos R$ saknar gränsvärde då $R \rightarrow \infty$!

$$\therefore \int_0^{\infty} \sin x \, dx \quad \text{är divergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsat intervall

Exempel 5

För vilka värden på α är den generaliserade integralen

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \quad \text{konvergent?}$$

Lösning:

Enligt Ex 1 är den divergent om $\alpha = 1$. För $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{1}{x^{\alpha}} dx &= \int_1^R x^{-\alpha} dx = \left[\frac{1}{-\alpha + 1} x^{-\alpha+1} \right]_1^R \\ &= \frac{1}{\alpha - 1} \left(-R^{-\alpha+1} + 1 \right) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{då } R \rightarrow \infty \text{ om } \alpha > 1. \\ \infty & \text{då } R \rightarrow \infty \text{ om } \alpha < 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sats 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}} dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow \alpha > 1.$$

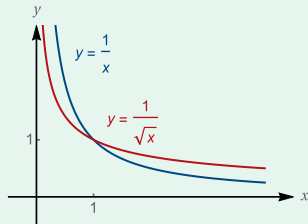
Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 6

Undersök

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{och} \quad \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \quad \text{då} \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$



Båda integranderna $\rightarrow \infty$ då $x \rightarrow 0^+$ dvs de är obegränsade för $0 < x \leq 1$.
Borde då inte integralerna bli oändligt stora?

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \left[2\sqrt{x} \right]_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \rightarrow 2 \quad \text{då} \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \left[\ln |x| \right]_{\varepsilon}^1 = \ln 1 - \ln \varepsilon = -\ln \varepsilon \rightarrow \infty \quad \text{då} \quad \varepsilon \rightarrow 0^+$$

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Definition 2

Om funktionen f är integrerbar över intervallet $[a + \varepsilon, b]$ för varje $\varepsilon > 0$ men obegränsad i intervallet $a < x \leq b$ och om gränsvärdet

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = A$$

existerar så är den **generaliserade integralen** $\int_a^b f(x) dx$ **konvergent** med värdet A . I annat fall är den **divergent**.

Anm: Om $f(x)$ inte är definierad i $x = a$ så säger man att integralen $\int_a^b f(x) dx$ är **generaliserad i punkten a** . I Ex 6:

- $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ är konvergent
- $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ är divergent

och båda är generaliserade i $x = 0$.

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 7

Avgör om

$$\int_0^1 \ln x \, dx$$

är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserad i $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon}^1 \ln x \, dx &= [x \ln x - x]_{\varepsilon}^1 = 1 \cdot \ln 1 - 1 - (\varepsilon \ln \varepsilon - \varepsilon) \\ &= -1 - \underbrace{\varepsilon \ln \varepsilon}_{\rightarrow 0 \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0^+} + \varepsilon \rightarrow -1 \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

$$\therefore \int_0^1 \ln x \, dx = -1 \quad \text{dvs konvergent.}$$

Generaliserade integraler

Obegränsad integrand

Exempel 8

För vilka värden på α är den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \quad \text{konvergent?}$$

Lösning:

Enligt Ex 6 är den divergent om $\alpha = 1$. För $\alpha \neq 1$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha} dx &= \int_\varepsilon^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{1}{-\alpha+1} x^{-\alpha+1} \right]_\varepsilon^1 \\ &= \frac{1}{1-\alpha} (1 - \varepsilon^{-\alpha+1}) \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{då } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ om } \alpha < 1. \\ \infty & \text{då } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ om } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Sats 2

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ är konvergent} \Leftrightarrow \alpha < 1.$$

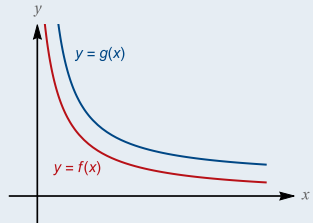
Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Sats 3

Om $0 \leq f(x) \leq g(x)$ för alla x i integrationsintervallet I så gäller

- $\int_I g(x) dx$ konvergent $\Rightarrow \int_I f(x) dx$ konvergent
- $\int_I f(x) dx$ divergent $\Rightarrow \int_I g(x) dx$ divergent



Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 9

Undersök konvergens hos $\int_1^{\infty} \frac{5x-4}{x^3+x} dx$.

Lösning:

$$\int_1^R \frac{5x-4}{x^3+x} dx = \dots \quad \text{Jobbigt!}$$

Vi behöver inte beräkna integralen! För $x \geq 1$ är

$$0 \leq \frac{5x-4}{x^3+x} \leq \frac{5x}{x^3+x} \leq \frac{5x}{x^3} = \frac{5}{x^2}$$

$$\text{Sats 1} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{5}{x^2} dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{5x-4}{x^3+x} dx \quad \text{konvergent}$$

Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 10

Undersök konvergensen hos $\int_1^5 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} dx$.

Lösning:

Integralen är generaliserad i $x = 1$. För $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} &= \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+2}{x-1} \geq \frac{2}{x-1} \\ \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{2}{x-1} dx &= 2 \int_{1+\varepsilon}^5 \frac{dx}{x-1} = 2 [\ln(x-1)]_{1+\varepsilon}^5 \\ &= 2 (\ln(5-1) - \ln(1+\varepsilon-1)) \\ &= 2 \ln 4 - 2 \ln \varepsilon \rightarrow \infty \text{ då } \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Sats 3: $\int_1^5 \frac{2}{x-1} dx$ divergent $\Rightarrow \int_1^5 \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 1} dx$ divergent

Generaliserade integraler

Jämförelsekriterier för generaliserade integraler med positiv integrand

Exempel 11

Avgör om $\int_2^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}} dx$ är konvergent.

Lösning:

För $x \geq 2$ är

$$0 \leq \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2}} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Sats 1} \Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \Rightarrow \int_2^{\infty} \frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}} dx \text{ konvergent}$$

Anm: Integranden $\frac{\arctan x}{x\sqrt{x^2+1}}$ saknar elementär primitiv funktion dvs en som kan uttryckas med elementära funktioner.

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 12

Avgör om $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$ är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserad på två sätt:

Obegränsat intervall och obegränsad integrand (generaliserad i $x = 0$).

Dela upp integralen så att varje delintegral är generaliserad på endast ett sätt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx}_A + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_B \quad \leftarrow \text{en möjlig uppdelning}$$

Integralen är konvergent om A och B **båda** är konvergenta. \leftarrow Definition

Enligt Sats 1 & 2 är B konvergent men A är divergent.

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \text{är divergent}$$

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Anm:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R x^3 dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4}{4} \right]_{-R}^R = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{R^4}{4} - \frac{(-R)^4}{4} \right) = 0$$

Integralen är alltså konvergent. Eller?

NEJ!!! $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx = \int_{-\infty}^0 x^3 dx + \int_0^{\infty} x^3 dx$

Båda delintegralerna är divergenta!

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} x^3 dx \text{ är divergent!}$$

Varning!

Enligt definitionen måste alltid uppdelning göras så att varje delintegral är generaliserad på endast **ett** sätt!

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 13

Avgör om $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx$ är konvergent.

Lösning:

Integralen är generaliserad på två sätt.

Dela upp den så att varje integral är generaliserad på endast ett sätt:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx}_{\text{generaliserad i } x=0} + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx}_{\text{O begränsat intervall}}$$

$$0 < x \leq 1 : \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{1/2}}$$

$$\text{Sats 2} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx \quad \text{konvergent}$$

Generaliserade integraler

Integraler som är generaliserade på fler än ett sätt

Exempel 13 (forts.)

$$x \geq 1 : \quad 0 \leq \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$$\text{Sats 1} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \quad \text{konvergent}$$

$$\text{Sats 3} \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx \quad \text{konvergent}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x+x^3}} dx \quad \text{är konvergent}$$

Generaliserade integraler

Uppgifter från tentor

Exempel 14 (Tentamen 120413, uppgift 1)

(a) Beräkna $\int_1^e \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$. (3p)

Exempel 15 (Tentamen 170113, uppgift 5)

(a) Beräkna den generaliserade integralen $\int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x} + 1} dx$. (2p)

Exempel 16 (Tentamen 210115, uppgift 5)

(a) Visa att den generaliserade integralen $\int_1^{\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x^3} dx$ är konvergent utan att beräkna den. (2p)

(b) Beräkna den generaliserade integralen i (a). (3p)