HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Torsdagen den 4 januari 2024
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen *(2p)*

$$4\ln x + 2\ln 2x = \ln 4x.$$

   (b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: *(3p)*

$$A: \ \frac{x^3 - x^2 + x}{x+1} \leq x, \qquad B: \ |x-1| < 1, \qquad C: \ x^2 < 4.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTETENTA”

   om alla ord ska inledas med “MAT” och i den återstående delen av orden (efter “MAT”) får inte två E:n stå intill varandra? *(2p)*

   (b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+1}, \\ y_0 = -1, \ y_1 = 0. \end{cases}$$

3. (a) Härled formeln för en aritmetisk summa. *(2p)*

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{2k-1} = 6 + 24 + 96 + \cdots + 3 \cdot 2^{2n-1} = 2(4^n - 1)$$

   för alla heltal $n \geq 1$. *(3p)*

4. (a) Skriv talen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i$ på polär form. Beräkna därefter talen z_1^3 och z_2^3 och ange resultatet på rektangulär form. *(2p)*

   (b) Ekvationen

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 + 8z^2 - 16z + 16 = 0$$

   har roten $1 - i$. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. *(3p)*

5. (a) Grafen G är en Eulergraf som har 13 bågar. 5 av noderna har grad 4 och de resterande n noderna har alla samma grad. Vilka värden på n är möjliga? *(2p)*

   (b) Vid en föreställning på en skolteater såldes biljetter till barnens föräldrar och syskon för sammanlagt 1600 kr. Biljetterna kostade 55 kr för föräldrar och 35 kr för syskon. Vilket är det största antalet biljetter som kan ha sålts vid detta tillfälle? *(3p)*

6. (a) Bestäm $\phi(55)$ och därefter alla positiva tal d sådana att $7d \equiv 1 \pmod{\phi(55)}$. *(2p)*

   (b) Spelingenjören Sara gör ett kast med fyra vanliga tärningar. Vad är sannolikheten för att

      i. alla tärningarna visar olika? *(1p)*

      ii. precis två tärningar visar samma? *(2p)*

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Användning av logaritmlagarna ger

$$4\ln x + 2\ln 2x - \ln 4x = \ln x^4 + \ln(2x)^2 - \ln 4x = \ln\left(\frac{x^4(2x)^2}{4x}\right) = \ln x^5 = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

   (b) A: Samla alla termer på vänster sida, gör liknämnigt och faktorisera:

$$\frac{x^2(x-2)}{x+1} \leq 0$$

   Därefter görs lämpligen teckenstudium vilket ger $-1 < x \leq 2$. B: $0 < x < 2$ och C: $2 < x < 2$ dvs. de implikationer som gäller är $B \Rightarrow A$ och $B \Rightarrow C$.

2. (a) Om alla ord ska inledas med "MAT" kan vi plocka bort dessa bokstäver och har då kvar "TETENTA" dvs 7 bokstäver. Med dessa kan vi bilda totalt

$$\frac{7!}{2!3!} = 420 \text{ ord}$$

   eftersom vi har 3 T:n och 2 E:n. Vi utreder nu det komplementära problemet dvs. att de båda E:na ska stå intill varandra och betraktar dem därför som en bokstav dvs. EE $= \mathcal{E}$. Vi har då 6 bokstäver "TTTNA$\mathcal{E}$" av vilka vi kan bilda totalt

$$\frac{6!}{3!} = 120 \text{ ord}$$

   eftersom vi fortfarande har 3 T:n. Antalet ord som börjar med MAT och där två E:n inte står intill varandra ges därför av $420 - 120 = 300$.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An2^n$ eftersom standardansatsen $y_{pn} = A2^n$ ingår i y_{hn}. Insättning ger $A = 1$. Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n + n2^n$. Sökt lösning: $y_n = 2^n(n-1)$.

3. (a) Vi söker en formel för den aritmetiska summan:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n.$$

   Vi har

$$\begin{aligned} 2S &= 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n + 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n \\ &= \underbrace{(1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \cdots + (n+1)}_{n \text{ st lika stora termer}} = n(n+1) \\ \Leftrightarrow S &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

   (b) Visas t.ex. med induktion eller enklast genom att utnyttja formeln för en geometrisk summa:

$$\sum_{k=1}^{n} 3 \cdot 2^{2k-1} = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} 4^k = \frac{3}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} 4^k - 1\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{4^{n+1}-1}{4-1} - 1\right) = 2(4^n - 1).$$

4. (a) $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}i = 2e^{\pm i\frac{\pi}{3}} \Rightarrow z_{1,2}^3 = \left(2e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)^3 = 2^3 e^{\pm i3\frac{\pi}{3}} = 8e^{\pm i\pi} = -8.$

   (b) Eftersom den algebraiska ekvationen har reella koefficienter är även $\bar{z}_0 = 1 + i$ en rot och enligt Faktorsatsen är därför $(z-(1+i))(z-(1-i)) = z^2 - 2z + 2$ en faktor i polynomet i ekvationens vänsterled. Polynomdivision ger nu

$$z^5 - 2z^4 + 2z^3 - 8z^2 - 16z + 16 = (z^2 - 2z + 2)(z^3 + 8) = 0.$$

   Den binomiska ekvationen $z^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow z^3 = -8$ kan lösas genom att gå över till polär form. Det behövs dock inte i det här fallet eftersom 4a redan gett oss två rötter: $1 \pm \sqrt{3}i$. Eftersom rötterna till en binomisk ekvation av grad 3 har 3 olika rötter (de bildar en regelbunden 3-hörning i det komplexa talplanet) får vi direkt att det bara är den reella roten -2 som saknas. Den ursprungliga ekvationen har alltså rötterna $z = 1 \pm i$, $z = 1 \pm \sqrt{3}i$ och $z = -2$.

5. (a) Om n är det resterande antalet noder och g deras grad ger ”Handskakningslemmat”:

$$\sum_{v\in V} \deg(v) = 5\cdot 4 + ng = 2|E| = 2\cdot 13 \Leftrightarrow ng = 6 \Leftrightarrow (n, g) = (1, 6),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (6, 1).$$

Eftersom G är en Eulergraf har samtliga noder jämnt gradtal dvs. $n = 1$ eller $n = 3$.

(b) Med x = antal föräldrar och y = antal barn söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$55x + 35y = 1600 \Leftrightarrow 11x + 7y = 320.$$

Den allmänna lösningen är $(x, y) = (640-7n, -960+11n)$ där $88 \leq n \leq 91$ ger de icke-negativa hetalslösningarna. Eftersom totala antalet biljetter ska maximeras ska vi maximera antalet barn y dvs. vi ska välja största möjliga n vilket ger $(x+y)_{\max} = 640-7\cdot 91-960+11\cdot 91 = 44$ biljetter.

6. (a) Om p och q är två olika primtal är $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$. Eftersom $55 = 11\cdot 5$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(55) = (11-1)(5-1) = 40$. Vi har nu

$$7d \equiv 1 \pmod{\phi(55)} \Leftrightarrow 7d = k\phi(55) + 1 \Leftrightarrow 7d - 40k = 1$$

för något heltal k. Euklides algoritm ger en lösning $(d_0, k_0) = (-17, -3)$ och den allmänna lösningen är $(d, k) = (-17 + 40n, -3 + 7n)$. Första positiva d är $-17 + 40 = 23$ och samtliga positiva d ges därför av $d = 23 + 40m$ där $m \geq 0$.

(b) Totala antalet möjliga utfall då 4 tärningar kastas är 6^4.

i. Vi ska först välja ut 4 element av 6 utan hänsyn till ordningen och utan upprepning vilket kan göras på $\binom{6}{4}$ olika sätt. Varje sådan kombination kan sedan permuteras på 4! olika sätt. Sannolikheten för att alla visar olika är därför

$$\frac{\binom{6}{4}\cdot 4!}{6^4} = \frac{5}{432} \approx 27\%$$

ii. Vi väljer först ut det resultat som de två tärningarna ska visa vilket kan göras på 6 olika sätt. Vi har nu 5 möjliga resultat kvar för de övriga två tärningarna men de får inte visa samma. Vi söker därför först antalet kombinationer av 2 element bland 5 vilket ges av $\binom{5}{2}$. Varje sådan kombination kan sedan permuteras på 2! olika sätt. Sannolikheten för att precis två tärningar visar samma är därför

$$\frac{6\cdot\binom{5}{2}\cdot 2!}{6^4} = \frac{5}{54} \approx 9.3\%$$