MA8020 Tekniska beräkningar

Något om numerisk integrering

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

21 november 2024

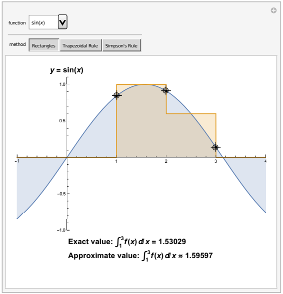
Numerisk integration

Antag att vi vill beräkna ett approximativt värde på integralen $\int_a^b f(x)dx$.

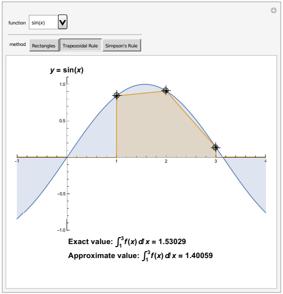
Metod:

- Dela in intervallet $[a, b]$ i ett antal delintervall
- Approximera $f(x)$ i varje delintervall med en funktion som är lätt att integrera

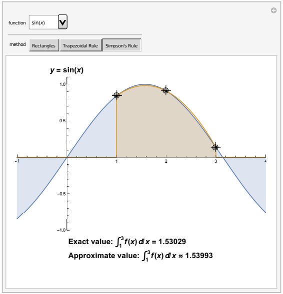
Några alternativ:



Riemannsumma:
$f(x) \approx a$ (konstant)



Trapetsformeln:
$f(x) \approx ax + b$

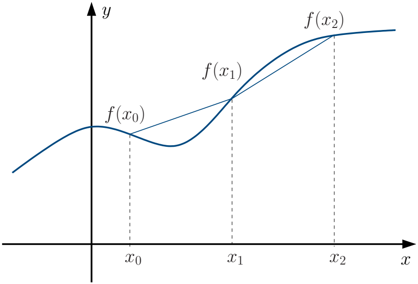


Simpsons formel:
$f(x) \approx ax^2 + bx + c$

Numerisk integration

Trapetsformeln

- Dela in intervallet i n lika stora delintervall med längd $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.
- Approximera integralen i varje delintervall med arean under den räta linjen mellan $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ och $(x_i, f(x_i))$.
- Varje parallelltrapets har arean $A_i = \dfrac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\Delta x$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i$



Numerisk integration

Trapetsformeln

Sats 1 (Trapetsformeln)

Om f(x) är två gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ *så är*

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)\right) + R_n$$

där resttermen

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(\xi), \quad a \leq \xi \leq b$$

Exempel 1

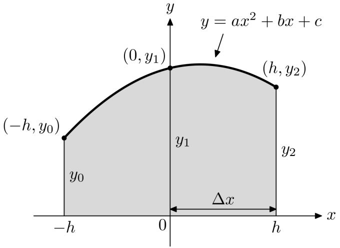
Bestäm ett approximativt värde på $\int_0^2 \sin x^2 dx$ med trapetsformeln samt uppskatta felets storlek.

Numerisk integration

Simpsons formel

Antag att $f(x) \approx p(x) = ax^2 + bx + c$ i $[-h, h]$:

$$\int_{-h}^{h} (\underbrace{ax^2 + bx + c}_{p(x)})dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx\right]_{-h}^{h} = 2\left(\frac{ah^3}{3} + ch\right)$$



Om $p(x)$ går genom punkterna $(-h, y0)$, $(0, y_1)$ och (h, y_2) kan vi enkelt bestämma a och c:

$$\begin{cases} p(-h) & = a(-h)^2 + b(-h) + c = y_0 \\ p(0) & = c = y_1 \\ p(h) & = ah^2 + bh + c = y_2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)$$

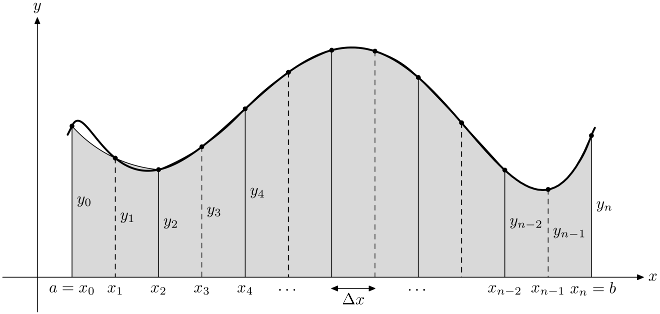
$$\Rightarrow \int_{-h}^{h} p(x)dx = 2\left(\frac{\frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)h^3}{3} + y_1 h\right) = \frac{(y_2 + y_0 - 2y_1)h}{3} + 2hy_1$$

$$\underset{\Delta x = h}{=} \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

Numerisk integration
Simpsons formel

Vi kan utnyttja resultatet för att beräkna ett approximativt värde på integralen

$$\int_a^b f(x)dx$$



Vi delar upp intervallet i ett jämnt antal (n) delintervall med samma längd Δx:

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \quad \dots \quad x_n = a + n\Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Numerisk integration

Simpsons formel

Vi kan nu approximera $f(x)$ med ett andragradspolynom $p(x)$ i varje delintervall $[x_i, x_{i+2}]$ och utnyttja vårt tidigare resultat:

$$\int_{-h}^{h} p(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}(y_0+4y_1+y_2)+\frac{\Delta x}{3}(y_2+4y_3+y_4)+\cdots+\frac{\Delta x}{3}(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)$$

Sats 2 (Simpsons formel)

Om f(x) är fyra gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ *så är*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{3n}\big(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\ &+ 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)\big) + R_n\end{aligned}$$

där resttermen

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi), \quad a \le \xi \le b$$

Anm: Simpsons formel ger exakt resultat för alla polynom f av grad ≤ 3.

Numerisk integration
Simpsons formel

Exempel 2

Beräkna ett approximativt värde på integralen $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$ med Simpsons formel för $n = 4$ och uppskatta felet i approximationen.

Lösning:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \sin x \, dx &\approx \frac{b-a}{3n}\left(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)\right) \\
&= \frac{\pi}{12}\left(\sin 0 + 4\sin\frac{\pi}{4} + 2\sin\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{3\pi}{4} + \sin\pi\right) \\
&= 2.00455975...
\end{aligned}$$

$$|R_4| = \left|\frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4} f^{(4)}(\xi)\right| = \left|\frac{\pi^5}{180\cdot 4^4}\sin(\xi)\right| \leq \frac{\pi^5}{180\cdot 4^4} = 0.0066410... \leq 0.01$$

$$\therefore \int_0^{\pi} \sin x \, dx = 2.00 \pm 0.01 \qquad \text{(Anm: Exakt värde på integralen är 2.)}$$

Numerisk integration

Simpsons formel

Anm:

- Trapetsformeln: Exakt integration av styckvis linjär interpolation
- Simpsons formel: Exakt integration av styckvis kvadratisk interpolation
- Formlerna ovan är praktiska vid “handberäkningar”. I verkliga fall används oftast adaptiva metoder dvs inte ekvidistant indelning av intervallet.

Exempel 3

Bestäm ett approximativt värde på $\int_0^2 \sin x^2 dx$ med Simpsons formel samt uppskatta felets storlek.