

MA8020 Tekniska beräkningar

Något om randvärdesproblem

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

18 december 2025

Randvärdesproblem

- Ett **Randvärdesproblem** (RVP) söker lösningen till en differentialekvation i ett givet **intervall** eller mer allmänt i ett **område**.
- BVP anger villkoren vid en startpunkt (ofta $t = 0$) medan lösningen till ett RVP specificeras vid **gränserna (randen)** av området:
- Exempel på BVP och RVP av 2:a ordningen:

$$\begin{array}{lcl}
 (BVP) & \left\{ \begin{array}{l} y''(x) = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = \beta. \end{array} \right. & \begin{array}{l} (ODE) \\ (BV1) \\ (BV2) \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 (RVP) & \left\{ \begin{array}{l} y''(x) = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(b) = \beta. \end{array} \right. & \begin{array}{l} (ODE) \\ (RV1) \\ (RV2) \end{array}
 \end{array}$$

Randvärdesproblem

Vi studerar stationär temperaturfördelning $u(x)$ i en metallstav med längd L .

- I ett litet segment $[x, x + \Delta x]$: Stationärt tillstånd \Rightarrow Nettoflöde in + värmegeneration = 0:

$$q(x) - q(x + \Delta x) + f(x)\Delta x = 0 \Leftrightarrow \frac{q(x + \Delta x) - q(x)}{\Delta x} = f(x)$$

där $q(x)$ är värmeflödet (energi/ytenhet) och $f(x)$ den inre värmekällan (energi/volymsenhet). Låter vi $\Delta x \rightarrow 0$ får vi

$$\frac{dq}{dx} = f(x)$$

- Fouriers lag: Värme flödar från varmt till kallt dvs i motsatt riktning mot temperaturökningen:

$$q(x) = -k \frac{du}{dx}$$

där k är materialet värmeledningsförmåga.

$$\Rightarrow \frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx} \left(-k \frac{du}{dx} \right) = f(x) \quad \text{Om } k \text{ konstant} \Leftrightarrow -\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{f(x)}{k}$$

- Normaliserar vi värmekällan: $Q(x) = f(x)/k$ får vi **Poissons ekvation**:

$$-u''(x) = Q(x)$$

- Lösningen bestäms av vad som händer vid stavens ändar ($x = 0$ och $x = L$).

Randvärdesproblem

Två huvudtyper av randvillkor

1 **Dirichlet-villkor** (värdevillkor)

- *Definition:* Lösningens värde är specificerat på randen: $u(x_{\text{rand}}) = g$.
- *Fysikalisk betydelse (värmeledning):* Temperaturen är fixerad på randen:

$$u(0) = 0^{\circ}\text{C} \quad \text{och} \quad u(L) = 100^{\circ}\text{C}$$

- *Numeriskt:* Enklast att hantera eftersom värdena vid randen är kända.

2 **Neumann-villkor** (flödesvillkor)

- *Definition:* Lösningens normalderivata (flödet) är specificerat på randen.

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{x_{\text{rand}}} = \nabla u \cdot \mathbf{n} \Big|_{x_{\text{rand}}} = q$$

- *Fysikalisk betydelse (värmeledning):* Värmeflödet är fixerat på randen.

Ex: Isolerad rand: $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L} = 0$, eller känt flöde: $\left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} = -\frac{q}{k}$.

- *Numeriskt:* Kräver approximation av derivatan vid randen.

3 **Robin-villkor** (konvektionsvillkor): Kombination av värdes- och flödesvillkor (t.ex. värmeöverföring till omgivande luft):

$$k \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L} = h(u(L) - u_{\text{omg}})$$

Randvärdesproblem

Numeriska metoder

Finita differensmetoden (FDM):

- Ersätter derivator med **differenskvoter** i specifika noder.
- Lämplig för **enkla geometrier** (t.ex. 1D-intervall).
- Ger en **diskret approximation** $\{(x_i, y_i)\}$ för värdena i noderna.

Finita elementmetoden (FEM):

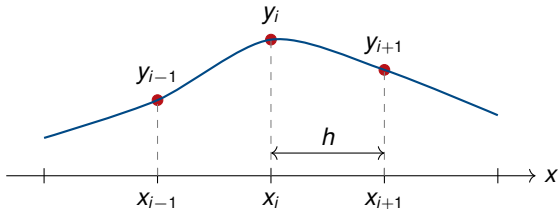
- Delar upp domänen i **element** (mesh).
- Lämplig för **komplexa geometrier** och varierande materialegenskaper.
- Hanterar Neumannvillkor naturligt och Dirichletvillkor via randmodifiering.
- Ger en **kontinuerlig approximation** $u_h(x)$ via basfunktioner.

Finita differensmetoden (FDM)

Grundidé

Huvudsteg:

- Derivator ersätts med **differenskvoter**.
- Det kontinuerliga området $[a, b]$ delas in i ett n st delintervall (**element**) och motsvarande punkter x_i (**noder**).
- Lösningen $y(x)$ beräknas endast i dessa punkter: $y_i \approx y(x_i)$.



Anm: Delintervallens längd $x_{i+1} - x_i$ behöver inte vara lika.

Finita differensmetoden (FDM)

Grundidé

Derivator i punkten x_i beräknas med hjälp av grannpunkterna. Steglängden $h = (b - a)/n$.

1:a-derivatan:

- Framåtdifferens:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad \text{Felet: } \mathcal{O}(h)$$

- Bakåtdifferens:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \quad \text{Felet: } \mathcal{O}(h)$$

- Centraldifferens:

$$y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad \text{Felet: } \mathcal{O}(h^2)$$

2:a derivatan:

- Centraldifferens:

$$y''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}, \quad \text{Felet: } \mathcal{O}(h^2)$$

Finita differensmetoden (FDM)

Grundidé

Lös randvärdesproblemet genom att:

① *Diskretisera ekvationen:*

Ersätt derivator med differensformler i varje inre nod i .

② *Applicera randvillkor:*

Använd Dirichlet eller Neumann (approximerad derivata) för att hantera randnoder.

③ *Ställ upp och lös ekvationssystemet*

Resultat

En vektor $\mathbf{y} = (y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ som approximerar lösningen.

Finita differensmetoden (FDM)

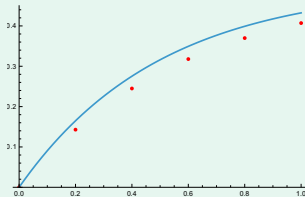
Exempel 1

Lös BVP $y' + 2y = 1$, $0 < x < 1$, $y(0) = 0$ med FDM. Dela intervallet $[0, 1]$ i 4 lika delar. $n = 4 \Rightarrow h = (1 - 0)/4 = 0.25$ och punkterna:

$$(0, 0), (0.25, y_1), (0.5, y_2), (0.75, y_3), (1, y_4)$$

Vi använder bakåtdifferens:

$$\begin{cases} \frac{y_i - y_{i-1}}{h} + 2y_i = 1, \\ y_0 = 0, i = 1, 2, 3, 4. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{y_1 - y_0}{h} + 2y_1 = 1 \\ \frac{y_2 - y_1}{h} + 2y_2 = 1 \\ \frac{y_3 - y_2}{h} + 2y_3 = 1 \\ \frac{y_4 - y_3}{h} + 2y_4 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 0.166667 \\ y_2 = 0.277778 \\ y_3 = 0.351852 \\ y_4 = 0.401235 \end{cases}$$



Finita differensmetoden (FDM)

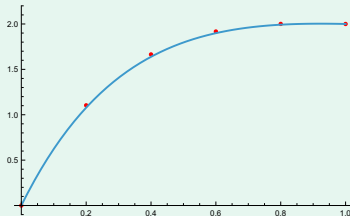
Exempel 2

Lös RVP med FDM. Dela intervallet i 5 lika delar.

$$(RVP) \quad \begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^3, & 0 < x < 1, & (ODE) \\ y(0) = 0, & & (RV1) \\ y(1) = 2. & & (RV2) \end{cases}$$

Vi kan vi använda centraldifferens:

$$\begin{cases} \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 3\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i^3, & i = 1, 2, 3, 4. \\ y_0 = 0, y_5 = 2 \end{cases}$$



Finita differensmetoden (FDM)

Matrisformulering för linjära RVP

- Vi betraktar följande **linjära** RVP med **konstanta koefficienter**:

$$\begin{cases} \alpha y'' + \beta y' + \gamma y = g(x), & (ODE) \\ y(a) = y_a, y(b) = y_b. & (RV) \end{cases}$$

- n element, centraldifferens och multiplikation med h^2 ($h = \frac{b-a}{n}$):

$$\alpha(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) + \beta \frac{h}{2}(y_{i+1} - y_{i-1}) + \gamma h^2 y_i = h^2 g_i, \text{ där } g_i = g(x_i).$$

- $N = n - 1$ inre noder och gruppering av termerna ger följande ekvationer:

$$\underbrace{(\alpha - \frac{\beta h}{2})}_{a_l} y_{i-1} + \underbrace{(-2\alpha + \gamma h^2)}_{a_c} y_i + \underbrace{(\alpha + \frac{\beta h}{2})}_{a_r} y_{i+1} = h^2 g_i, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Inkluderar vi randvillkoren kan ekvationerna skrivas på matrisform:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_c & a_r & 0 & \cdots \\ a_l & a_c & a_r & \cdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_l & a_c \end{pmatrix}}_{\text{Styvhetmatris } \mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{\text{Lösning } \mathbf{y}} = h^2 \underbrace{\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ (Lastvektor + randvillkor)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -a_l y_a \\ 0 \\ \vdots \\ -a_r y_b \end{pmatrix}}_{\mathbf{b} \text{ (Lastvektor + randvillkor)}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{y} = \mathbf{b}$$

Finita differensmetoden (FDM)

Matrisformulering för linjära RVP

- Styvhetsmatrisen är en $N \times N$ -bandmatris (tridiagonal):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_c & a_r & 0 & \cdots & 0 \\ a_l & a_c & a_r & \cdots & 0 \\ 0 & a_l & a_c & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_l & a_c \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} a_l = \alpha - \frac{\beta h}{2} \\ a_c = -2\alpha + \gamma h^2 \\ a_r = \alpha + \frac{\beta h}{2} \end{cases}$$

- \mathbf{A} är symmetrisk omm $\beta = 0$ ($a_l = a_r = \alpha$).
- RVP kan skrivas på matrisform omm ode:n är **linjär** dvs den behöver inte nödvändigtvis ha konstanta koefficienter.
- Med konstanta koefficienter är \mathbf{A} en **Toeplitz-matris** (samma värde på varje diagonal). Om koefficienterna inte är konstanta gäller inte detta eftersom a_l , a_c och a_r då beror på x

Finita differensmetoden (FDM)

Matrisformulering för linjära RVP

Exempel 3

Lös återigen RVP med FDM men med matrisformulering.

$$(RVP) \quad \begin{cases} y''(x) + 3y'(x) + y(x) = x^3, & 0 < x < 1, & (ODE) \\ y(0) = 0, & & (RV1) \\ y(1) = 2. & & (RV2) \end{cases}$$

FDM kan förstås även användas för icke-linjära RVP:

Exempel 4

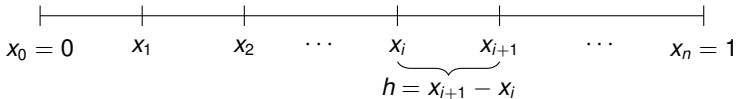
Lös RVP med FDM.

$$(RVP) \quad \begin{cases} y''(x) = \sqrt{1 + (y'(x))^2}, & 0 < x < 1, & (ODE) \\ y(0) = 1, & & (RV1) \\ y(1) = 2. & & (RV2) \end{cases}$$

Finita elementmetoden (FEM)

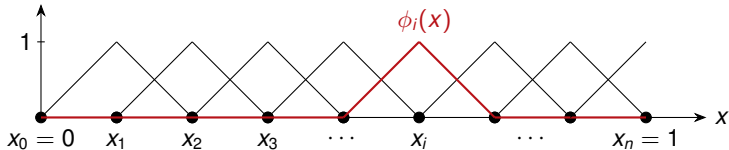
Kontinuerliga styckvisa linjära funktioner (V_h)

- Intervallat $[0, 1]$ delas in i n delintervall med lika längd:



- Funktionsrummet V_h är mängden av alla funktioner som är **kontinuerliga och styckvis linjära på $[0, 1]$ samt noll vid vänstra randen ($x = 0$)**.
- En uppsättning basfunktioner $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ för V_h definieras enligt:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{om } i = j, \\ 0, & \text{om } i \neq j. \end{cases} \quad \leftarrow \text{Hattfunktioner}$$



Anm: Det finns ingen hattfunktion vid $x = 0$ och bara en "halvhatt" vid $x = 1$.

Finita elementmetoden (FEM)

Stark och svag form

Vi betraktar ett RVP (Poissons ekv i enklaste form) i intervallet $0 < x < 1$:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, & \text{(Dirichlet, essentiellt RV)} \\ u'(1) = 0. & \text{(Neumann, naturligt RV)} \end{cases} \quad \text{(Stark form)} \quad (1)$$

- Multiplicera residualen $R(u) = -u''(x) - f(x)$ med en godtycklig testfunktion v i testrummet $V = \{v(x) \in C^\infty \text{ (slät funktion): } v(0) = 0\}$.
- Integrera över intervallet $[0, 1]$. Eftersom $R(u) = 0$ är integralen trivialt noll:

$$\int_0^1 R(u)v(x) dx = \int_0^1 (-u''(x)v(x) - f(x)v(x)) dx = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow - \int_0^1 u''(x)v(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \quad \forall v \in V. \quad (3)$$

- Detta säger att residualen $R(u)$ ska vara **ortogonal mot alla testfunktioner** $v \in V$ i L^2 -skalärprodukten: $\int_0^1 R(u)v(x) dx = \langle R(u), v \rangle = 0$ vilket är det villkor vi kommer att använda för vår approximation.

Finita elementmetoden (FEM)

Stark och svag form

- Regularitet hos $v(x)$ gör att vi kan integrera VL i (3) partiellt

$$\begin{aligned}
 - \int_0^1 u''(x)v(x) dx &= - [u'(x)v(x)]_0^1 + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \\
 &= - \underbrace{u'(1)}_{=0} v(1) + u'(0) \underbrace{v(0)}_{=0} + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx
 \end{aligned}$$

Svag form av (1): Bestäm $u(x)$ så att

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad \forall v(x) \in V \quad (4)$$

- Randvillkoret $u'(1) = 0$ är nu implicit inkluderat i den svaga formen och kallas därför **det naturliga randvillkoret**.

Anm: Genom den svaga formen (4) reduceras kraven på u och v till att tillhöra testrummet $V = \{v \in H^1(0, 1) : v(0) = 0\}$. Till skillnad från den starka formen (1) krävs endast att de svaga derivatorna existerar och är kvadratisk integrerbara, vilket tillåter användandet av styckvis linjära basfunktioner.

Finita elementmetoden (FEM)

Galerkins metod och approximation

- Om $u_h(x)$ är en approximation kan residualen $R(u_h)$ inte förväntas vara noll i varje punkt.
- Enligt **Galerkinmetoden** kräver vi istället att $R(u_h)$ är ortogonal mot alla funktioner i ett ändligdimensionellt testrum V_h .
- Vi väljer V_h som rummet av **kontinuerliga styckvis linjära funktioner** där $v(0) = 0$.

FEM-problemet:

Hitta $u_h(x) \in V_h$ så att:

$$\int_0^1 u_h'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx, \quad \forall v(x) \in V_h. \quad (5)$$

- Vi representerar den approximativa lösningen $u_h(x)$ i basen $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ (hattfunktionerna):

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i(x). \quad (6)$$

- $u_i = u_h(x_i)$ är n okända koefficienter som nu ska bestämmas.

Finita elementmetoden (FEM)

Galerkins metod och approximation

- Vi sätter in $u_h(x)$ i (5) och väljer basfunktionerna som testfunktioner

$$v(x) = \phi_i(x), i = 1, 2, \dots, n.$$

- Detta ger ett system av n ekvationer (**Galerkin-ansatsen**):

$$\int_0^1 u_h'(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int_0^1 (u_1 \phi_1' + u_2 \phi_2' + \dots + u_n \phi_n') \phi_1' dx = \int_0^1 f \phi_1 dx \\ \int_0^1 (u_1 \phi_1' + u_2 \phi_2' + \dots + u_n \phi_n') \phi_2' dx = \int_0^1 f \phi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 (u_1 \phi_1' + u_2 \phi_2' + \dots + u_n \phi_n') \phi_n' dx = \int_0^1 f \phi_n dx \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

- Styvhetsmatrisen \mathbf{A} , lastvektorn \mathbf{b} och lösningsvektorn \mathbf{u} ges av:

$$a_{ij} = \int_0^1 \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx, \quad b_j = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx, \quad \mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$$

Finita elementmetoden (FEM)

Assemblering

- Vi observerar att

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} x - x_{i-1} & \text{om } x_{i-1} \leq x < x_i, \\ x_{i+1} - x & \text{om } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases} \Rightarrow \phi'_i(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} 1 & \text{om } x_{i-1} \leq x < x_i, \\ -1 & \text{om } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

- Om $|i - j| > 1$ är $a_{ij} = 0$ eftersom ϕ_i och ϕ_j då inte överlappar.
- Om $i = j$ är:

$$a_{ii} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} dx = \frac{2}{h}, \quad i \neq n$$

$$a_{nn} = \frac{1}{h} \quad (\phi_n \text{ halvhatt})$$

- Om $j = i + 1$ är:

$$a_{i,i+1} = \int_0^1 \phi'_i(x) \phi'_{i+1}(x) dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(-\frac{1}{h}\right) \frac{1}{h} dx = -\frac{1}{h}$$

- Om $j = i - 1$ får vi på samma sätt $a_{i-1,i} = -\frac{1}{h}$.

Finita elementmetoden (FEM)

Assemblering

- Vi får en tridiagonal symmetrisk styvhetsmatris:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

- $a_{nn} = \mathbf{1}/h$ eftersom $\phi_n(x)$ är en halvhatt.
- Lastvektorn beror på $f(x)$ och behöver i allmänna fallet beräknas numeriskt vilket oftast görs med Gauss-kvadratur:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f(x) \phi_1(x) dx \\ \int_0^1 f(x) \phi_2(x) dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f(x) \phi_n(x) dx \end{pmatrix}$$

Finita elementmetoden (FEM)

Exempel 5

Lös RVP med finita elementmetoden för $n = 4$ och $f(x) = 1$.

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x), & 0 < x < 1, \\ u(0) = 0, u'(1) = 0. \end{cases}$$

- Eftersom $f(x) = 1$ får vi

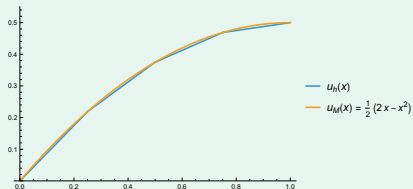
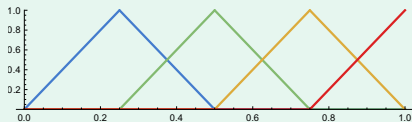
$$b_i = \int_0^1 f(x)\phi_i(x)dx = \int_0^1 \phi_i(x)dx = h = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}, \quad i \neq n, \quad b_n = \frac{h}{2} = \frac{1}{8}.$$

- Vi får ekvationssystemet

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \Leftrightarrow \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} 7 \\ 12 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u_h(x) = \sum_{i=1}^4 u_i \phi_i(x) \quad (\text{Exakt lösning: } u(x) = x - \frac{x^2}{2}.)$$

Exempel 5 (Forts.)



Finita elementmetoden (FEM)

Mer om Dirichlet-villkor

- Randvillkoret $u(0) = 0$ uppfylls automatiskt genom att exkludera basfunktionen (hattfunktionen) för $x = 0$ som vi gjort här.
- Om man inkluderar en basfunktion i $x = 0$ för att hantera $u(0) = \alpha \neq 0$ får **A** ytterligare en rad och en kolonn som motsvarar noden $x_0 = 0$.
- **b** får då också ett extra element $b_0 = \alpha \Rightarrow \mathbf{b} = (\alpha, b_1, b_2, \dots, b_n)^T$
- Första raden i ekvationssystemet $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$ blir därför :

$$1 \cdot u_0 + 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \dots + 0 \cdot u_n = \alpha$$

vilket tvingar nodvärdet till $u_0 = \alpha$.

- Dirichlet-villkor $u(1) = \beta$ vid den högra randen hanteras genom att **modifiera den sista raden** i systemet:

$$0 \cdot u_0 + 0 \cdot u_1 + \dots + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_n = b_n = \beta$$

Anm: Valet påverkar implementationen. Med n element ($n + 1$ noder):

- Ingen basfunktion i $x = 0$ ger ett $n \times n$ -system. $u(0) = 0$ uppfylls implicit.
- Basfunktion i $x = 0$ ger ett $(n + 1) \times (n + 1)$ -system.

Finita elementmetoden (FEM)

Mer om Neumann-villkor

- Neumann-villkor, t.ex. $u'(1) = g$, kallas **naturliga randvillkor** eftersom de inkluderas direkt i den svaga formuleringen. Partialintegrationen av $-\int_0^1 u''(x)v(x)dx$ i (3) ger randtermen:

$$-\left[u'(x)v(x)\right]_0^1 = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) = -g \cdot v(1)$$

- När termen flyttas till HL (lastvektorn **b**) byter den tecken och endast sista raden ($x = 1$) påverkas eftersom $\phi_i(1) = 0$ för $i < n$:

$$b_n^{\text{nya}} = \int_0^1 f(x)\phi_n(x) dx + g = b_n + g$$

- Om $g = 0$ (homogent villkor) som i vårt fall behöver vi inte göra någonting alls, termen försvinner och $u'(1) = 0$ uppfylls naturligt.
- Till skillnad från Dirichlet-villkor behöver vi **inte modifiera raderna i A**:

$$a_{n,1}u_1 + a_{n,2}u_2 + \dots + a_{n,n}u_n = b_n + g$$

Anm: Skillnad i hantering:

- Dirichlet:** Låser ett värde genom att ersätta en rad i matrisen ($1 \cdot u_i = \alpha$).
- Neumann:** Adderar ett flöde till motsvarande element i lastvektorn.

Finita elementmetoden (FEM)

Andra differentialekvationer

- Vi har här utgått från ODE:n

$$-u''(x) = f(x) \quad (\text{Enklaste formen av Poissons ekvation})$$

vilket ger den svaga formen:

$$\int_{\Omega} u' v' dx = \int_{\Omega} f v dx$$

- Galerkinmetoden fungerar även för andra ODE:er men då förändras den svaga formen. För t.ex. $-\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = f(x)$ får vi

$$\int_{\Omega} (\alpha u' v' + \beta u' v + \gamma u v) dx = \int_{\Omega} f v dx$$

- I ekvationssystemet $\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$ delas styvhetsmatrisen \mathbf{A} då upp i:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{C} + \mathbf{M} \quad \text{där} \quad a_{ij} = \underbrace{\alpha \int_{\Omega} \phi_j' \phi_i' dx}_{d_{ij} \text{ (Diffusion)}} + \underbrace{\beta \int_{\Omega} \phi_j' \phi_i dx}_{c_{ij} \text{ (Konvektion)}} + \underbrace{\gamma \int_{\Omega} \phi_j \phi_i dx}_{m_{ij} \text{ (Massa)}}$$

- P.g.a. konvektionstermen $\beta u'$ är styvhetsmatrisen \mathbf{A} inte längre nödvändigtvis symmetrisk.
- Ekvationens ordning påverkar kraven på basfunktionerna $\phi_i(x)$.

Finita elementmetoden (FEM)

Generalisering

- **Linjära vs. icke-linjära problem:** Linjära ekvationer leder till $\mathbf{Au} = \mathbf{b}$.
Icke-linjära problem resulterar i $\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, vilket löses iterativt.
- **Högre dimensioner och geometri:** Domänen delas upp i t.ex. trianglar eller tetraedrar. Isoparametrisk mappning transformerar elementen till ett fixerat referenselement (t.ex. $\hat{\Omega} = [-1, 1]$ i 1D) vilket möjliggör effektiv beräkning av integraler på komplexa och krökta geometrier med Gausskvadratur.
- **Funktionsrum:** Kraven flyttas till att funktionen och dess gradient ∇u är kvadratisk integrerbara ($u, v \in H^1$). Detta tillåter element där gradienten är diskontinuerlig över elementgränserna.
- **Randvillkor:**
 - *Essentiella (Dirichlet):* Påtvingas direkt genom att låsa värden i specifika noder.
 - *Naturliga (Neumann/Robin):* Inkluderas som yt- eller randintegraler i \mathbf{b} .
- **Tidsberoende problem:** Genom semi-diskretisering (linjemetoden) omvandlas PDE:n till ett system av 1:a ordningens ODE:er:

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{A}\mathbf{u}(t) = \mathbf{b}(t)$$

där \mathbf{M} är den sk **massmatrisen**. Systemet kan sedan integreras i tiden med t.ex. bakåt-Euler.