HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Envariabelanalys
Uppgiftspaket 3
18 november 2025

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Bestäm

   (a) $\int \sqrt{x}\ln x dx$ (b) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$ (c) $\int \frac{dx}{\tanh x}$ (d) $\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}dx$

2. Bestäm

   (a) $\int \frac{x+3}{x^2+3x+2}dx$

   (b) $\int \frac{2x}{x^2+2x+2}dx$

   (c) $\int \frac{3x^5-10x^4+13x^3-8x^2+3x-2}{x^3-2x^2+x}dx$

   (d) $\int \frac{3x^5+4x^4+11x^3-10x^2+5x-5}{x^3+2x^2+5x}dx$

3. (a) Bestäm en funktion $f(x)$ sådan att linjen $y = x + 2$ är tangent till kurvan $y = f(x)$ och $f'(x) = x^4$.

   (b) Kurvan $y = f(x)$ går genom punkten $(2, 4)$ och riktningskoefficienten för tangenten till kurvan i punkten $(x, f(x))$ är $1 - 4x$. Bestäm $f(1)$.

   (c) För funktionen $f(x)$ gäller följande: $f'(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ och $f(0) = 2$. Bestäm $f(1)$.

   (d) Bestäm

   (1) $\int \cos(\ln x)dx$ (2) $\int \frac{8}{(x^2+2x+2)^3}dx$

4. (a) Tågingenjören Sara har konstruerat ett snabbtåg med maxfarten 360 km/h. Saras tåg accelererar med 2 m/s^2 och bromsar in med 1 m/s^2 oberoende av farten.

   i. Hur lång sträcka färdas tåget om det startar från stillastående, accelererar upp till toppfarten och därefter bibehåller denna fart under 15 min?
   ii. Vilken är den längsta sträcka tåget kan färdas om det startar från stillastående och måste återgå till stillastående inom 15 min?
   iii. Hur snabbt kan en resenär färdas mellan två stationer som ligger 70 km ifrån varandra?
   iv. En resa mellan två stationer tar minst 40 min. Hur långt är det mellan stationerna?

   I samtliga deluppgifter krävs figurer som beskriver förloppet.

   (b) En fluga startar sin flygtur 1 m från en sockerskål och flyger mot den med farten $v(t) = t/(1+t^2)$ m/s. Hur stor är flugans startacceleration? Vid vilken tidpunkt börjar flugan sin inbromsning och hur fort flyger den då? Hur lång tid tar det för flugan att nå sockerskålen och vilken fart har den vid landningen?

   (c) Vattnets strömningshastighet i Göta kanal ges av

   $$v(x) = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

   Kanalens bredd är $2a$ och x är x-koordinaten i ett tänkt koordinatsystem där y-axeln är parallell med kanalen och med $x = 0$ i kanalens mitt. Kanalingenjören Kajsa simmar från ena stranden rakt mot den andra med konstant hastighet v_k relativt vattnet. Bestäm Kajsas färdväg $y(x)$ och skissera grafen till denna. Hur långt nedströms i förhållande till startpunkten befinner sig Kajsa när hon når andra sidan av kanalen?

   (d) Raketingenjören Pelle avfyrar en modellraket vertikalt uppåt från marknivå. Då bränslesteget brinner är raketens acceleration $20t$ m/s^2. Efter 3 s tar bränslet slut och raketen faller fritt (luftmotståndet kan då försummas) i 12 s. Därefter utvecklas fallskärmen och raketens fart minskar linjärt till 6 m/s på 5 s. Raketen faller sedan med denna fart tills den når marken.

   i. Bestäm en funktion $h(t)$ som beskriver raketens höjd över marken som funktion av tiden.
   ii. Gör en skiss av de grafer som beskriver raketens hastighet respektive höjd som funktion av tiden.
   iii. Hur högt når raketen?
   iv. Under hur lång tid är raketen i luften?