HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 31 maj 2024
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen *(2p)*

$$8^x + 2^{x+3} = 4^x + 2^{2x+3}.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: *(3p)*

$$A: |x-2| + |x+2| > 4x, \qquad B: \ln(x+1) \le 0, \qquad C: x^2 \le 1.$$

2. (a) Formulera och bevisa faktorsatsen. *(2p)*

(b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2 + 6 + 12 + 20 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

för alla heltal $n \ge 1$. *(3p)*

3. (a) Hur många olika "ord" med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

"KAFFEMASKIN"

om alla ord ska innehålla ordet

i. "KAFFE" ? *(1p)*

ii. "MASKIN" ? *(1p)*

Svaren ska anges på beräknad form som ett heltal.

(b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1, \\ y_0 = y_1 = 1. \end{cases}$$

4. (a) Skriv talen $z_{1,2} = 1 \pm i$ på polär form. Beräkna därefter talen z_1^4 och z_2^4 och ange resultatet på rektangulär form. *(2p)*

(b) Ekvationen

$$z^6 - 2z^5 + z^4 + 4z^2 - 8z + 4 = 0$$

har en dubbelrot som är lätt att gissa. Lös ekvationen fullständigt och ange samtliga rötter på rektangulär form. *(3p)*

5. (a) Grafingenjören Pelle hävdar att det finns en Eulergraf som har 13 bågar där 5 av noderna har grad 4 och där de resterande n noderna är fler än 3 och har alla samma grad. Finns det en sådan graf? *(2p)*

(b) Företagaren Kajsa säljer två sorters produkter: A och B. Produkt A säljs för 70 kr per enhet och produkt B säljs för 50 kr per enhet. Under en dag uppgår den totala försäljningen av produkterna till 1020 kr. Vilket är det maximala totalantalet produkter som kan ha sålts den dagen? *(3p)*

6. (a) Bestäm $\phi(42)$ och därefter ett positivt tal d sådant att $5d \equiv 1 \pmod{\phi(42)}$. *(2p)*

(b) Spelingenjören Sara gör 5 kast med en vanlig tärning. Vad är sannolikheten för att

i. det blir minst en sexa? *(1p)*

ii. minst två tärningar visar samma? *(2p)*

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Sätter vi $t = 2^x$ övergår ekvationen i $t^3 - 9t^2 + 8t = 0$ som har rötterna $t = 0$, $t = 1$ och $t = 8$, där den första är en falsk rot eftersom $2^x > 0$.
   Svar: $x = 0$ eller $x = 3$.

   (b) A: Löser vi olikheten i de tre intervallen $x < -2$, $-2 \leq x < 2$ och $x \geq 2$ kan resultatet sammanfattas som $x < 1$. B: $-1 < x \leq 0$ och C: $-1 \leq x \leq 1$ dvs. de implikationer som gäller är $B \Rightarrow A$ och $B \Rightarrow C$.

2. (a) Se föreläsningen *Polynom*, Sats 2

   (b) Visas enklast med induktion.

3. (a) Utgår.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An$ eftersom standardansatsen $y_{pn} = A$ ingår i y_{hn}. Insättning ger $A = -1$. Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n - n$. Sökt lösning: $y_n = 2^n - n$.

4. (a) $z_{1,2} = 1 \pm i = \sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow z_{1,2}^4 = \left(\sqrt{2}e^{\pm i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = \sqrt{2}^4 e^{\pm i4\frac{\pi}{4}} = 4e^{\pm i\pi} = -4$.

   (b) Gissning ger dubbelroten $z = 1$ och polynomdividion med den motsvarande faktorn $(z-1)^2 = z^2 - 2z + 1$ ger

   $$z^6 - 2z^5 + z^4 + 4z^2 - 8z + 4 = (z^2 - 2z + 1)(z^4 + 4) = 0.$$

   Den binomiska ekvationen $z^4 = -4$ kan lösas genom att gå över till polär form. Det behövs dock inte i det här fallet eftersom 4a redan gett oss två rötter: $1 \pm i$. Eftersom rötterna till en binomisk ekvation av grad 4 har 4 olika rötter som bildar en regelbunden 4-hörning i det komplexa talplanet, får vi direkt att de övriga två rötterna är $-1 \pm i$. Den ursprungliga ekvationen har alltså rötterna $z_{1,2} = 1$ och $z_{3,4,5,6} = \pm 1 \pm i$.

5. (a) Om n är det resterande antalet noder och g deras grad ger ”Handskakningslemmat”:

   $$\sum_{v \in V} \deg(v) = 5 \cdot 4 + ng = 2|E| = 2 \cdot 13 \Leftrightarrow ng = 6 \Leftrightarrow (n, g) = (1, 6),\ (2, 3),\ (3, 2),\ (6, 1).$$

   Eftersom $n > 3$ är den enda möjligheten att $(n, g) = (6, 1)$. I en Eulergraf har samtliga noder jämnt gradtal och G kan därför inte vara en Eulergraf.
   Svar: Nej, det finns ingen sådan graf.

   (b) Med $x =$ antal produkter A och $y =$ antal produkter B, söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

   $$70x + 50y = 1020 \Leftrightarrow 7x + 5y = 102.$$

   Den allmänna lösningen är $(x, y) = (306 - 5n, -408 + 7n)$ där $59 \leq n \leq 61$ ger de icke-negativa hetalslösningarna. Eftersom totala antalet sålda produkter ska maximeras ska vi maximera antalet av produkten B dvs y och vi ska därför välja största möjliga n vilket ger $(x + y)_{\max} = 306 - 5 \cdot 61 - 408 + 7 \cdot 61 = 20$ st.

6. (a) Eftersom $\phi(mn) = \phi(m)\phi(n)$ för godtyckliga positiva heltal $m \neq n$ och $\phi(p) = p - 1$ för godtyckligt primtal p har vi

   $$\phi(42) = \phi(2 \cdot 3 \cdot 7) = \phi(2)\phi(3)\phi(7) = (2-1)(3-1)(7-1) = 12.$$

   Vi har nu

   $$5d \equiv 1 \pmod{\phi(42)} \Leftrightarrow 5d = k\phi(42) + 1 \Leftrightarrow 5d - 12k = 1$$

   för något heltal k. Euklides algoritm ger en lösning $(d, k) = (5, 2)$ dvs ett möjligt svar är $d = 5$.

   (b) Totala antalet möjliga utfall då en tärning kastas 5 gånger är 6^5.

   i. $P(\text{Minst en sexa}) = 1 - P(\text{Ingen sexa})$. Om vi inte ska få en sexa är antalet utfall per kast 5 och vi får

   $$P(\text{Minst en sexa}) = 1 - \frac{5^5}{6^5} = \frac{4651}{7776} = 0.598...$$

   ii. $P(\text{Minst två visar samma}) = 1 - P(\text{Alla visar olika})$. Om alla ska visa olika har vi 6 utfall på första kastet, 5 på andra, 4 på tredje osv. Detta ger:

   $$P(\text{Minst två visar samma}) = 1 - \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6^5} = \frac{49}{54} = 0.907...$$