MA2001 Envariabelanalys

Något om derivator del 2

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

10 november 2025

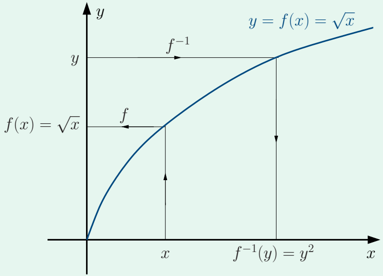
Derivatan av inversen till en funktion

Exempel 1

$y = f(x) = \sqrt{x}$ är strängt växande och har en invers.
Bestäm $Df(x)$ och $Df^{-1}(y)$.

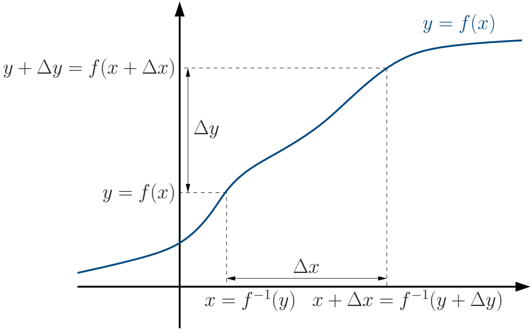
Lösning:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} \\
\Rightarrow Df(x) &= \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\text{Inversen: } y &= \sqrt{x} \Leftrightarrow x = y^2,\ y \geq 0. \\
\therefore f^{-1}(y) &= y^2 \Rightarrow Df^{-1}(y) = 2y
\end{aligned}
$$



Anm: $Df^{-1}(y) = 2y = 2\sqrt{x} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{Df(x)}$. Gäller detta allmänt?

Derivatan av inversen till en funktion



$$\frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{f^{-1}(y+\Delta y)-f^{-1}(y)}} = \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$$

$$\to \frac{1}{Df(x)} \text{ då } \Delta x \to 0 \text{ dvs då } \Delta y \to 0$$

Sats 1 (Derivatan av invers)

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{Df(x)} \quad om\ f'(x) \neq 0$$

Derivatan av inversen till en funktion

Exempel 2

Bestäm $D\arctan x$.

$$\begin{aligned} y &= \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y,\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow D\arctan x &= \frac{1}{D\tan y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Sammanfattning av deriveringsregler

1. $D(f+g) = f' + g'$
2. $D(f \cdot g) = f'g + fg'$
3. $D\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
4. $Df(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$
5. $Df^{-1}(y) = \frac{1}{Df(x)}$ om $f'(x) \neq 0$

Högre derivator

- Derivatan av $f'(x)$ kallas andra-derivatan.

  Beteckningar: $f''(x)$, $f^{(2)}(x)$, $D^2(f(x))$, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$
- Pss betecknas n:te-derivatan: $f^{(n)}(x)$, $D^n(f(x))$, $\dfrac{d^n f}{dx^n}$

Exempel 3

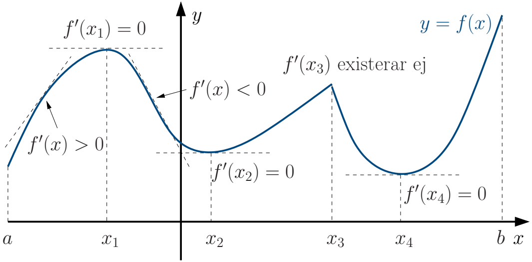
Bestäm $D^5 \ln x$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
D \ln x &= \frac{1}{x} = x^{-1} \\
\Rightarrow D^2 \ln x &= (-1)x^{-2} \\
\Rightarrow D^3 \ln x &= (-2)(-1)x^{-3} \\
\Rightarrow D^4 \ln x &= (-3)(-2)(-1)x^{-4} \\
\Rightarrow D^5 \ln x &= (-4)(-3)(-2)(-1)x^{-5} = (-1)^4 4! x^{-5}
\end{aligned}$$

Allmänt: $D^n \ln x = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$

Extremvärden



- f har lokalt maximum i x_1, x_3, b $\quad\leftarrow$ lokala maximipunkter
- f har lokalt minimum i x_2, x_4, a $\quad\leftarrow$ lokala minimipunkter
- $f'(x_1) = f'(x_2) = f'(x_4) = 0 \Rightarrow x_1, x_2, x_4$ är stationära punkter
- Lokala max- och min-punkter/värden kallas lokala extrempunkter/värden

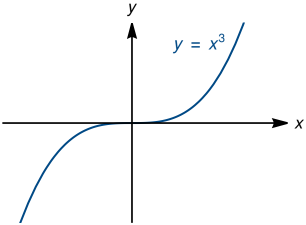
Sats 2

Om f har ett lokalt extremvärde i en inre punkt x_0 i definitionsområdet och om $f(x)$ är deriverbar så är $f'(x_0) = 0$.

Extremvärden

Är x_0 alltid en extrempunkt om $f'(x_0) = 0$?

$$\text{Ex:} \quad f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(0) = 0$$



x_0 är en terasspunkt dvs en stationär punkt som inte är en extrempunkt.

Sammanfattning

Om x_0 är en stationär punkt dvs om $f'(x_0) = 0$, så kan x_0 vara en lokal minimi-, maximi- eller terasspunkt.

Extremvärden

Antag att $f'(x_0) = 0$ och $f''(x_0) > 0$:

$$f''(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0$$

För tillräckligt små h är alltså

$$\frac{f'(x_0 + h)}{h} > 0 \Rightarrow \begin{cases} f'(x_0 + h) < 0 \text{ om } h < 0 \\ f'(x_0 + h) > 0 \text{ om } h > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow f \text{ har ett lokalt minimum i } x_0$$

Gör vi motsvarande för fallet $f''(x_0) < 0$ får vi:

Sats 3

Om $f(x_0) = 0$ och $f''(x_0)$ existerar så gäller:

1. $f''(x_0) > 0 \Rightarrow f(x)$ *har lokalt minimum i* x_0
2. $f''(x_0) < 0 \Rightarrow f(x)$ *har lokalt maximum i* x_0

Extremvärden

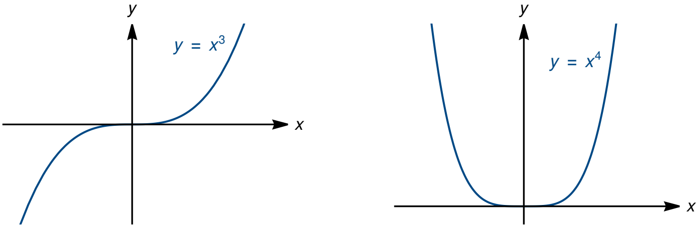
Anm: Om $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ kan man inte dra några slutsatser. x_0 kan vara en lokal maximi-, minimi- eller terasspunkt.

- För $f(x) = x^3$ är $\begin{cases} f'(x) = 3x^2 \\ f''(x) = 6x \end{cases} \Rightarrow f'(0) = f''(0) = 0$

  I det här fallet är $x = 0$ en terasspunkt.

- För $f(x) = x^4$ är $\begin{cases} f'(x) = 4x^3 \\ f''(x) = 12x^2 \end{cases} \Rightarrow f'(0) = f''(0) = 0$

  I det här fallet är $x = 0$ en minimipunkt.



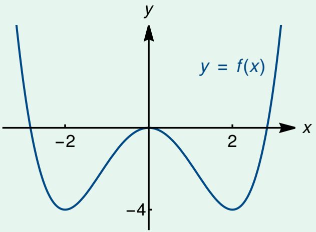
Extremvärden

Exempel 4

Bestäm alla lokala extremvärden till $f(x) = \dfrac{x^4 - 8x^2}{4}$.

$$f'(x) = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ eller } x = \pm 2$$

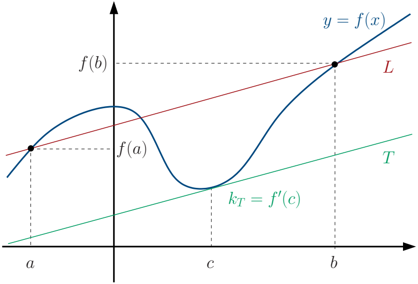
$$f''(x) = 3x^2 - 4 \Rightarrow \begin{cases} f''(-2) = 8 > 0 & \Rightarrow \text{ lokalt min } f(-2) = -4 \\ f''(0) = -4 < 0 & \Rightarrow \text{ lokalt max } f(0) = 0 \\ f''(2) = 8 > 0 & \Rightarrow \text{ lokalt min } f(2) = -4 \end{cases}$$



Medelvärdessatsen

- Vi studerar en deriverbar funktion $f(x)$ i intervallet $[a, b]$
- Drag en linje L mellan punkterna $(a, f(a))$ och $(b, f(b))$.
- Då är

$$k_L = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Det finns minst en punkt $x = c \in \,]a, b[$ sådan att tangenten T till $y = f(x)$ i $x = c$ är parallell med L dvs

$$k_L = k_T \Leftrightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Sats 4 (Medelvärdessatsen)

Om f är kontinuerlig i [a,b] och deriverbar i]a,b[så finns det ett $c \in \,]a, b[$ sådant att

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Medelvärdessatsen

Exempel 5

Visa att $e^{-x} - \frac{5x}{4} = 0$ har en rot $x = b$ i intervallet $[0, 1]$ och uppskatta felet i approximationen $b \approx 0.5$.

Lösning:

Vi visar först att ekvationen har en rot i $[0, 1]$:

$$\begin{aligned}
\text{Sätt } f(x) &= e^{-x} - \frac{5x}{4} \\
&\Rightarrow f(x) \text{ är kontinuerlig och strängt avtagande} \\
&\Rightarrow f(x) \text{ har högst nollställe } x = b. \\
f(0) &= 1 > 0 \\
f(1) &= \frac{1}{e} - \frac{5}{4} < \frac{1}{2} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4} < 0 \\
&\Rightarrow f(x) \text{ har ett nollställe i }]0, 1[
\end{aligned}$$

Medelvärdessatsen

Exempel 5 (forts)

Vi kan använda medelvärdessatsen för att uppskatta storleken av felet $|b - 0.5|$:

Medelvärdessatsen

Om f är kontinuerlig i [a,b] och deriverbar i]a,b[så finns det ett $c \in \,]a, b[$ sådant att

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

$$\begin{aligned}
\underbrace{f(b)}_{=0} - f(0.5) &= f'(c)(b - 0.5) \Rightarrow \underbrace{|b - 0.5|}_{\text{felet}} = \frac{|f(0.5)|}{|f'(c)|} \\
|f'(x)| &= \left| -e^{-x} - \frac{5}{4} \right| = e^{-x} + \frac{5}{4} = \frac{1}{e^x} + \frac{5}{4} \\
&\underset{x \in [0,1]}{>} \frac{1}{e^1} + \frac{5}{4} > \frac{1}{3} + \frac{5}{4} = \frac{4 + 15}{12} = \frac{19}{12} \\
\Rightarrow |b - 0.5| &< \frac{|e^{-0.5} - \frac{5 \cdot 0.5}{4}|}{\frac{19}{12}} = \frac{|\frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{5}{8}|}{\frac{19}{12}} \approx 0.01166 < 0.02
\end{aligned}$$

$\therefore$ Roten $b = 0.5 \pm 0.02$

Växande och avtagande

Sats 5

1. *$f'(x) = 0$ för alla $x \in I \Leftrightarrow f(x)$ är konstant i I.*
2. *$f'(x) \geq 0$ för alla $x \in I \Leftrightarrow f(x)$ är växande i I.*
3. *$f'(x) > 0$ för alla $x \in I \Rightarrow f(x)$ är strängt växande i I.*

Motsvarande gäller för (strängt)avtagande

Exempel 6

Visa att $e^x \geq 1 + x$ för alla x.

Exempel 7

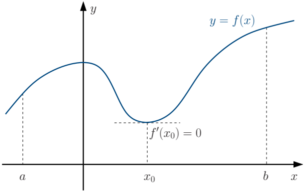
Rita kurvan $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 3}$. (Tenta 020327, uppg 2, 5p)

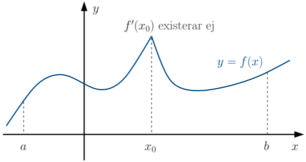
Exempel 8

Rita kurvan $y = f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x} + 4 \arctan x$. (Tenta 070111, uppg 3, 5p)

Optimering

Var och när antar en kontinuerlig funktion största och minsta värde i ett intervall $[a, b]$?





- maximum i b (ändpunkt)
- minimum i x_0 $(f(x_0) = 0)$

- maximum i x_0 $f'(x_0)$ existerar ej
- minimum i a (ändpunkt)

Sats 6

Om f är kontinuerlig i $[a, b]$ så har f ett maximum och ett minimum i $[a, b]$ vilka antas i någon av följande punkter:

1. *a eller b*
2. *en punkt $x_0 \in]a, b[$ sådan att $f'(x_0)$ inte existerar*
3. *en punkt $x_0 \in]a, b[$ sådan att $f'(x_0) = 0$*

Optimering

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 9

En bonde ska göra en rektangulär inhägnad av 100 m staket. Ena sidan av inhägnaden utgörs av en bäck och behöver inget staket. Vilken är den största möjliga arean av inhägnaden?

Exempel 10

En cylinder är inskriven i en kon. Hur stor del av konens volym kan cylindern högst uppta?

Optimering

Exempel 11

En fyr ligger i havet 5 km utanför en lång rak strand där det finns en elstation. Sträckan mellan elstationen och den punkt på stranden som har det kortaste avståndet till fyren är $b = 10$ km.

Pelle ska dra kabel från fyren över havet till en punkt P på stranden och sedan därifrån till elstationen. Kostnaden att dra kabel på land är 25 kr/m och i havet är det dubbelt så dyrt.

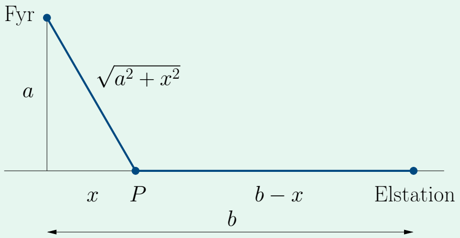
a) Var på stranden ska punkten P ligga för att kostnaden för kabeldragningen ska minimeras?

b) Ändras svaret om $b = 2.5$ km och i så fall hur?

Optimering

Exempel 11 (forts)

Lösning:



- Sätt $k_l = 25$ kr/m och $k_h = 2k_l = 50$ kr/m.
- Totala kostnaden för kabeldragningen ges då av funktionen

$$K(x) = k_h\sqrt{a^2 + x^2} + k_l(b - x) = k_l(2\sqrt{a^2 + x^2} + b - x),\ 0 \leq x \leq b$$

- Eftersom $K(x)$ är deriverbar ($\Rightarrow$ kontinuerlig) i $I = [0, b]$ antar K sitt minsta värde i någon av I:s ändpunkter eller i en punkt x_0 där $K'(x_0) = 0$.

Optimering

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Exempel 11 (forts)

Eventuella stationära punkter till $K(x) = k_l(2\sqrt{a^2+x^2} + b - x)$ ges av:

$$\begin{aligned} K'(x) &= k_l\left(2\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}\cdot 2x - 1\right) = \frac{k_l(2x-\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x - \sqrt{a^2+x^2} = 0 \underset{a\geq 0,\, x\geq 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Eftersom $b = 2a$ får vi:

$$\begin{aligned} K(0) &= k_l(2\sqrt{a^2+0^2} + b - 0) = k_l(2a+b) = 4k_l a \\ K\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) &= k_l\left(2\sqrt{a^2+\frac{a^2}{3}} + b - \frac{a}{\sqrt{3}}\right) = k_l(\sqrt{3}a + b) = (2+\sqrt{3})k_l a < K(0) \\ K(b) &= k_l(2\sqrt{a^2+b^2} + b - b) = 2k_l\sqrt{a^2+b^2} = 2\sqrt{5}k_l a > K(0) \end{aligned}$$

$\therefore$ Kostnaden blir minst om punkten P ligger $10 - \frac{5}{\sqrt{3}} \approx 7.1$ km från elstationen

$$\Rightarrow K_{\min} = K\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right) = (2+\sqrt{3})k_l a \approx 466500 \text{ kr}$$

Optimering

Exempel 11 (forts)

Om $b = \frac{a}{2} = 2.5$ km: $K(x)$ och derivatans nollställe $a/\sqrt{3} \approx 2.89$ påverkas inte men nollstället ligger utanför intervallet $[0, b = 2.5]$

$\Rightarrow f(\frac{a}{\sqrt{3}})$ kan inte vara funktionens minsta värde

$\Rightarrow$ minsta värdet måste antas i någon av ändpunkterna:

$$\begin{aligned}
K(0) &= k_l(2\sqrt{a^2+0^2}+b-0) = k_l(2a+b) = k_l(2a+\frac{a}{2}) = \frac{5ak_l}{2} \\
K(b) &= k_l(2\sqrt{a^2+b^2}+b-b) = 2k_l\sqrt{a^2+b^2} = 2k_l\sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} \\
&= \sqrt{5}k_l a < K(0)
\end{aligned}$$

$\therefore$ Minsta kostnaden får vi om vi drar kabeln direkt från fyren till elstationen

$$\Rightarrow K_{\min} = K(b) = \sqrt{5}k_l a \approx 279500 \text{ kr}$$