MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om komplexa tal

Mikael Hindgren

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

13 oktober 2025

Den imaginära enheten i

Det finns inga *reella* tal som uppfyller ekvationen $x^2 + 1 = 0$.

Vi inför den imaginära enheten i med egenskapen

$$i^2 = -1$$

Ekvationen $x^2 + 1 = 0$ har då lösningen $x^2 = -1 = i^2 \Leftrightarrow x = \pm i$

Exempel 1

Lös ekvationen $x^2 + 4 = 0$.

Lösning:

$$x^2 = -4 = (-1) \cdot 4 = i^2 \cdot 4 \Leftrightarrow x = \pm 2i$$

Det komplexa talområdet

Exempel 2

Lös ekvationen $x^2 + 2x + 10 = 0$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x + 10 &= (x+1)^2 - 1 + 10 = (x+1)^2 + 9 = 0 \\
\Leftrightarrow (x+1)^2 &= -9 = (-1)9 = i^2 9 \\
\Leftrightarrow x + 1 &= \pm 3i \\
\Leftrightarrow x &= -1 \pm 3i
\end{aligned}$$

Lösningarna består av en reell del (-1) och en imaginär del (3 respektive -3).

Anm: *pq*-formeln om $(\frac{p}{2})^2 < q$:

$$\begin{aligned}
x^2 + px + q &= (x + \tfrac{p}{2})^2 - (\tfrac{p}{2})^2 + q = 0 \\
\Leftrightarrow (x + \tfrac{p}{2})^2 &= \underbrace{(\tfrac{p}{2})^2 - q}_{<0} = \underbrace{i^2}_{=-1} \underbrace{(q - (\tfrac{p}{2})^2)}_{>0} \\
\Leftrightarrow x &= -\tfrac{p}{2} \pm i\sqrt{q - (\tfrac{p}{2})^2}
\end{aligned}$$

Det komplexa talområdet

Definition 1 (Komplexa talområdet)

Mängden av tal $z = a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$, kallas det komplexa talområdet $\mathbb{C}$.

- $a =$ realdelen av z ($\operatorname{Re} z$)
- $b =$ imaginärdelen av z ($\operatorname{Im} z$)

Om $\operatorname{Re} z = 0$ är z imaginärt.

Anm:

- Imaginärdelen av ett komplext tal är ett *reellt tal*:
  Ex: $z = 2 - 3i \Rightarrow \operatorname{Im} z = -3$
- De reella talen är de komplexa tal vars imaginärdel är noll
  $\Rightarrow \mathbb{R}$ är en äkta delmängd av $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Räkneregler för komplexa tal

Definition 2 (Räkneregler)

Om $z_1 = a + ib$ och $z_2 = c + id$ är två komplexa tal och x ett reellt tal så definierar vi *likhet*, *addition, subtraktion* och *multiplikation* enligt:

1. $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a = c$ och $b = d$
2. $xz_1 = xa + ixb$
3. $z_1 + z_2 = (a + ib) + (c + id) = a + c + i(b + d)$
4. $z_1 - z_2 = z_1 + (-1)z_2$
5. $z_1 \cdot z_2 = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd = ac - bd + i(ad + bc)$

Sats 1

Lagarna för addition, multiplikation och subtraktion av reella tal gäller också för komplexa tal.

Anm: Vi kan alltså räkna med komplexa tal precis som med reella om vi tar hänsyn till att $i^2 = -1$.

Räkneregler för komplexa tal

Exempel 3

Bestäm $z_1 + z_2$, $z_1 \cdot z_2$ och $z_1 - z_2$ om $z_1 = 2 + 3i$ och $z_2 = 5 - 4i$.

Lösning:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 2 + 3i + 5 - 4i = 7 - i \\
z_1 \cdot z_2 &= (2 + 3i)(5 - 4i) = 10 - 8i + 15i - 12i^2 = 22 + 7i \\
z_1 - z_2 &= z_1 + (-1)z_2 = 2 + 3i + (-1)(5 - 4i) = -3 + 7i
\end{aligned}$$

Komplexa tal och olikheter

Kan vi definiera olikheter för komplexa tal som uppfyller de vanliga lagarna för olikheter mellan reella tal?
För $a, b, c \in \mathbb{R}$ har vi t ex

$$c > 0 \text{ och } a < b \Rightarrow ac < bc \qquad (\text{Ex: } \quad 2 < 3 \Rightarrow 2 \cdot 4 < 3 \cdot 4)$$

Vi väljer talen 0 och i:

- $i \neq 0 \Rightarrow i > 0$ eller $i < 0$
- Antag att $i > 0$:

$$\Rightarrow 0 = \underset{a}{0} \cdot \underset{c}{i} < \underset{b}{i} \cdot \underset{c}{i} = i^2 = -1 \text{ orimligt!}$$

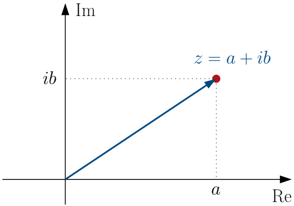
- Antag istället att $i < 0 \Leftrightarrow -i > 0$:

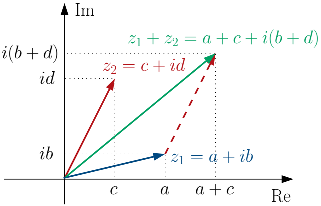
$$\Rightarrow 0 = \underset{a}{0} \cdot \underset{c}{(-i)} < \underset{b}{(-i)} \cdot \underset{c}{(-i)} = i^2 = -1 \text{ orimligt!}$$

Slutsats: Det går inte att definiera en ordningsrelation på $\mathbb{C}$ som uppfyller de vanliga ordningslagarna på $\mathbb{R}$. Uttryck av typen $z_1 < z_2$ har ingen mening om vi med "$<$" menar den vanliga ordningsrelationen på $\mathbb{R}$.

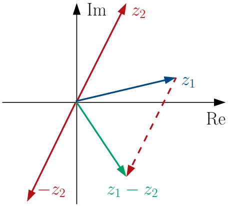
Det komplexa talplanet

- Ett komplext tal $z = a + ib$ kan tolkas geometriskt som en punkt (a, b) eller en vektor i det komplexa talplanet
- x-axeln kallas den reella axeln och y-axeln den imaginära axeln
- Addition av två komplexa tal z_1 och z_2 motsvaras av vektoraddition





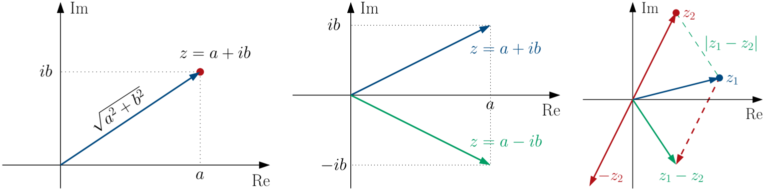
Addition



Subtraktion

Absolutbelopp och konjugat

- Avståndet mellan talet (punkten) $z = a + ib$ och origo är $\sqrt{a^2 + b^2}$
- Spegelbilden av talet $z = a + ib$ i den reella axeln är talet $a - ib$



Definition 3

Om $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, kallas

- $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ absolutbeloppet av z
- $\bar{z} = a - ib$ komplexkonjugatet till z

- $|z_1 - z_2|$ är avståndet mellan punkterna z_1 och z_2
- Om $z = x$ där $x \in \mathbb{R}$ är

$$|z| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$$

Absolutbelopp och konjugat

Exempel 4

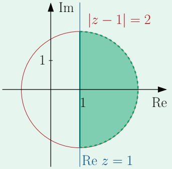
Bestäm $z \cdot \bar{z}$, $|\bar{z}|$, $z + \bar{z}$ och $z - \bar{z}$.

Lösning:

$$
\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (a+ib)(a-ib) = a^2 - iab + iba - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \\
|\bar{z}| &= \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \\
z + \bar{z} &= a + ib + a - ib = 2a = 2\operatorname{Re} z \\
z - \bar{z} &= a + ib - (a - ib) = 2ib = 2i\operatorname{Im} z
\end{aligned}
$$

Exempel 5

Rita mängden av de komplexa tal z för vilka
$|z - 1| < 2$ och $\operatorname{Re} z \geq 1$.



Absolutbelopp och konjugat

Exempel 6

Lös ekvationen $2z + i\bar{z} = 4 - i$.

Lösning:

Sätt $z = a + ib$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2z + i\bar{z} &= 2(a+ib) + i(a-ib) = 2a + b + i(2b+a) = 4 - i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b &= 4 \\ 2b + a &= -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 3 \\ b &= -2 \end{cases} \Rightarrow z = 3 - 2i \end{aligned}$$

Division

Exempel 7

Hur ska vi definiera kvoten $\dfrac{5+15i}{1-3i}$?

Lösning:

Om vi antar att vi kan räkna på som vanligt:

$$\frac{5+15i}{1-3i} = \frac{(5+15i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{-40+30i}{(-1)^2+3^2} = \frac{-40+30i}{10} = -4+3i$$

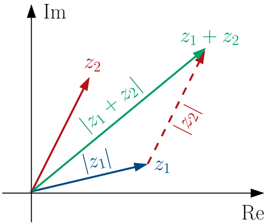
Definition 4 (Division)

Om z_1 och $z_2 \neq 0$ är två komplexa tal så definierar vi *kvoten* mellan z_1 och z_2 enligt

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z}_2}{|z_2|^2}$$

Triangelolikheten

Från den geometriska tolkningen av komplexa tal får vi:



Sats 2 (Triangelolikheten)

För alla komplexa tal z_1 och z_2 gäller

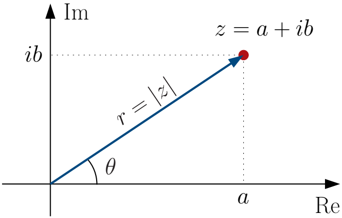
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Exempel 8

Visa att om $|z| = 1$ så är $|z + 3 + 4i| \leq 6$. Rita figur!

Komplexa tal på polär form

Den geometriska tolkningen ger oss ett alternativt sätt att representera ett komplext tal z:



$$\Rightarrow \begin{cases} a &= r\cos\theta \\ b &= r\sin\theta \end{cases}$$

$$\boxed{z = \underbrace{a + ib}_{\text{Rektangulär form}} = \underbrace{r(\cos\theta + i\sin\theta)}_{\text{Polär form}}}$$

- θ kallas argumentet för z ($\arg z$) och räknas positiv om den motsvaras av en vridning moturs från den reella axeln.
- θ är inte entydig: $r(\cos\theta + i\sin\theta) = r(\cos(\theta + n\cdot 2\pi) + i\sin(\theta + n\cdot 2\pi))$.
- Argumentet θ för vilket $-\pi < \theta \leq \pi$ kallas principalargumentet.

Komplexa tal på polär form

Exempel 9

Skriv talet $2-2i$ på polär form.

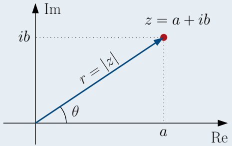
Lösning:

$z = 2-2i \Rightarrow$

$$r = |z| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos\theta &= \frac{2}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta &= \frac{-2}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{ vi kan välja } \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad 2-2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$



$$\cos\theta = \frac{a}{r}, \ \sin\theta = \frac{b}{r}$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Anm: Principalargumentet i exemplet ovan är $-\frac{\pi}{4}$.

Den komplexa exponentialfunktionen

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Definition 5

Om $z = a + ib$, där $a, b \in \mathbb{R}$, så sätter vi

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b).$$

- e^z överensstämmer med den reella exponentialfunktionen om $z \in \mathbb{R}$
- Ett komplext tal på polär form kan nu skrivas som

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Definition 5 ger:

Eulers formler

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Den komplexa exponentialfunktionen

HÖGSKOLAN I HALMSTAD

Sats 3 (Potenslagar)

För två godtyckliga komplexa tal z, z_1 och z_2 gäller

1. $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
3. $(e^z)^n = e^{nz}$, *där n är ett heltal (de Moivres formel).*

Om $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ och $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ får vi

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}
\end{aligned}
$$

Vid multiplikation/division av två komplexa tal i polär form:

- multipliceras/divideras absolutbeloppen
- adderas/subtraheras argumenten

Den komplexa exponentialfunktionen

Exempel 10

Om $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ och $z_2 = 3e^{i\frac{\pi}{4}}$ vad blir $z_1 \cdot z_2$ och $\dfrac{z_1}{z_2}$?

Lösning:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 2 \cdot 3e^{i(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4})} = 6e^{i\frac{7\pi}{12}} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{2}{3}e^{i(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})} = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

Exempel 11

Skriv talet $(1+i)^{24}$ på rektangulär form.

Lösning:

$$1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow (1+i)^{24} = \left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{24} = \sqrt{2}^{24}e^{i\frac{24\pi}{4}} = 2^{12}e^{i6\pi} = 2^{12} = 4096$$

Den komplexa exponentialfunktionen

Exempel 12

Förenkla $z = \dfrac{i(\sqrt{3} - i)^3}{(-1 + i)^2}$. Ange svaret på rektangulär och polär form.

Lösning:

$$\begin{aligned}
|z| &= \frac{|i| \cdot |\sqrt{3} - i|^3}{|-1 + i|^2} = \frac{1 \cdot 2^3}{\sqrt{2}^2} = 4 \\
\arg z &= \arg(i) + 3\arg(\sqrt{3} - i) - 2\arg(-1 + i) = \frac{\pi}{2} + 3(-\frac{\pi}{6}) - 2\frac{3\pi}{4} = -\frac{3\pi}{2} \\
\Rightarrow z &= 4e^{i\frac{\pi}{2}} = = 4(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = 4i
\end{aligned}$$

Den komplexa exponentialfunktionen

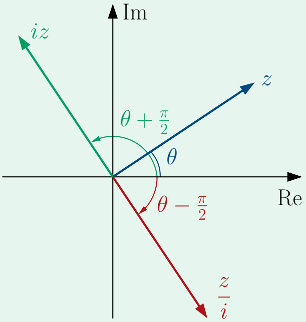
Exempel 13

Vad innebär multiplikation och division med talet i för den grafiska tolkningen av komplexa tal?

Lösning:

$$z = re^{i\theta} \text{ och } i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} iz &= re^{i\theta}e^{i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta+\frac{\pi}{2})} \\ \frac{z}{i} &= \frac{re^{i\theta}}{e^{i\frac{\pi}{2}}} = re^{i\theta}e^{-i\frac{\pi}{2}} = re^{i(\theta-\frac{\pi}{2})} \end{aligned}$$



Multiplikation/division med i motsvaras av en vridning moturs/medurs av vektorn z vinkeln $\frac{\pi}{2}$.

Binomiska ekvationer

Exempel 14

Lös ekvationen $z^2 = 2i$.

Lösning:

$$\begin{aligned} z &= a + ib \Rightarrow z^2 = (a+ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 0 & (1) \\ 2ab = 2 & (2) \end{cases} \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow a = 1/b$. Insättning i (1) $\Rightarrow b^4 = 1 \Leftrightarrow b = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 1$.
Enligt (2) har a och b har samma tecken och vi får lösningarna $z = \pm(1+i)$.

- Ekvationen $z^n = w$, där $w \in \mathbb{C}$ och $n \in \mathbb{Z}$, kallas en binomisk ekvation.
- För högre $n > 2$ blir det jobbigt att lösa binomiska ekvationer med metoden ovan. Det är bättre att gå över till polär form.

Binomiska ekvationer

Exempel 15

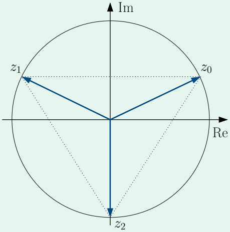
Lös ekvationen $z^3 = 8i$.

Lösning:

$$z = re^{i\theta} \text{ och } 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z^3 = r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 8^{1/3} = 2 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

där k är ett godtyckligt heltal.



$$k = 0: \quad z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = \sqrt{3} + i$$

$$k = 1: \quad z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}) = 2(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}) = -\sqrt{3} + i$$

$$k = 2: \quad z_2 = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}) = 2(0 - i) = -2i$$

$$k = 3: \quad z_3 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = z_0$$