

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om logik och mängdlära

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

3 september 2025

Utsagor

Utsaga = Påstående som har sanningsvärde

Utsagan kan vara

- *sann* (S) eller *falsk* (F)
- *öppen* eller *sluten*

Exempel 1

- A: $5 \cdot 6 = 30$ Sann, Sluten
- B: Volvo är ett bilmärke Sann, Sluten
- C: $a + 2 = 6$ Sann om $a = 4$ annars falsk,
Öppen utsaga (sanningsvärdet beror på a)
- D: Jag kan flyga Falsk, Sluten

Exempel 2

- A: $2x + 5$ Ingen utsaga!
- B: $x^2 + y^2 = 5$, Öppen utsaga
- C: $4 \geq 3$ Sluten utsaga (Sann!)

Konnektiv

Negation

Negationen till en utsaga A (skrivs $\neg A$) = motsatsen till A

Exempel 3

- $A : x \geq 2$
- $\neg A : x < 2$

Exempel 4

- A : Alla hundar kan skälla
- $\neg A$: Det finns (minst) en hund som inte kan skälla

Konnektiv

Konjunktion och disjunktion

Flera utsagor kan kombineras till en ny utsaga:

① **Konjunktion:** $C = A \wedge B$: Sann om A **och** B är sanna

↑
och

② **Disjunktion:** $C = A \vee B$: Sann om A **eller** B är sanna

↑
eller

Sanningsvärdestabell för negation (\neg), konjunktion (\wedge) och disjunktion (\vee):

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$
S	S	F	S	S
S	F	F	F	S
F	S	S	F	S
F	F	S	F	F

Exempel 5

- A: Sverige ligger i Asien (Falsk)
- B: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (Sann)

$\therefore A \wedge B$ är falsk, $A \vee B$ är sann

Konnektiv

Tautologi och kontradiktion

En sammansatt utsaga är en **tautologi**/**kontradiktion** om den alltid är **sann**/**falsk** oberoende av de ingående utsagornas sanningsvärde.

Exempel 6

Är utsagan $(\neg A \wedge (A \vee B)) \vee A$ en tautologi? Är det en kontradiktion?

Sanningsvärdestabell:

A	B	$\neg A$	$A \vee B$	$\neg A \wedge (A \vee B)$	Tot
S	S	F	S	F	S
S	F	F	S	F	S
F	S	S	S	S	S
F	F	S	F	F	F

Svar: Utsagan är varken en tautologi eller en kontradiktion.

Exemplet ovan i Mathematica:

```
utsaga = (!a && (a || b)) || a;
BooleanTable[{a, b, !a, a || b, !a && (a || b), utsaga}, {a, b}] // TableForm
```

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Exempel 7

Utsagan "Om $\underbrace{x = 5}_A$ så är $\underbrace{x^2 = 25}_B$ " skrivs: $x = 5 \Rightarrow x^2 = 25$
implicerar

- Utsagan $A \Rightarrow B$ (medför, om ... så är) kallas en **implikation**
- A kallas **förutsättning** (premiss, hypotes) och B kallas **slutsats** (konsekvens).

Exempel 8

- $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ Sann
- $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$ Falsk
 $A \Rightarrow B$ sann behöver inte betyda att **omvändningen** $B \Rightarrow A$ är sann.
- $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq 2$ Sann
Den kontrapositiva formen $\neg B \Rightarrow \neg A$ är logiskt sett densamma som $A \Rightarrow B$
- $x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$ Falsk

Anm: Om utsagan i VL är specifikt angiven menar vi att den är sann.

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Olika ekvivalenta formuleringar för $A \Rightarrow B$:

- A är ett tillräckligt villkor för B
- B är ett nödvändigt villkor för A
- A gäller endast då B gäller

Exempel 9

$$x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$$

- 1 Att $x = 3$ är ett tillräckligt villkor för att $x^2 = 9$
- 2 Att $x^2 = 9$ är ett nödvändigt villkor för att $x = 3$
- 3 $x = 3$ gäller endast om $x^2 = 9$

Konnektiv

Implikation och ekvivalens

Exempel 10

$$A : x^2 = 4, \quad B : (x = 2) \vee (x = -2)$$

$$\left. \begin{array}{ll} A \Rightarrow B & \text{Sann} \\ B \Rightarrow A & \text{Sann} \end{array} \right\} A \Leftrightarrow B \quad \text{Sann}$$

$$\therefore x^2 = 4 \Leftrightarrow (x = 2) \vee (x = -2)$$

- Utsagan $A \Leftrightarrow B$ kallas en **ekvivalens**
- \Leftrightarrow : Formuleras "är ekvivalent med" eller "om och endast om (omm)"

Sanningsvärdestabell för implikation och ekvivalens:

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
S	S	S	S
S	F	F	F
F	S	S	F
F	F	S	S

Exempel 11

- $A : x^2 \geq 4$
- $B : x \leq -1$
- $C : x > 1$

Avgör om utsagan $(A \wedge \neg B) \Rightarrow C$ är sann eller falsk. Är omvändningen sann?

Prioritetsordning för de logiska operatorerna

Regel: \neg före \wedge före \vee

Exempel 12

- $A \wedge B \vee C$ tolkas som $(A \wedge B) \vee C$
- $\neg A \wedge B$ tolkas som $(\neg A) \wedge B$

Vill man att uttrycket ska tolkas i annan ordning används parenteser.

De Morgans lagar

Exempel 13

Gör sanningsvärdestabell för utsagorna $\neg(A \vee B)$ och $\neg A \wedge \neg B$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$	$\neg A \wedge \neg B$
S	S	F	F	S	F	F
S	F	F	S	S	F	F
F	S	S	F	S	F	F
F	F	S	S	F	S	S

Sats 1 (de Morgans Lagar)

För utsagorna A och B gäller

- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$

Exempel 14

Utsagan A: "Alla hundar kan skälla" kan skrivas som

$$A : \forall \text{ hund} : \text{hunden kan skälla}$$

\forall : "För varje", "för alla":

Exempel 15

$\neg A$: Det finns minst en hund som inte kan skälla

$$\neg A : \exists \text{ hund} : \text{hunden kan inte skälla}$$

\exists : "Det finns (existerar) en/ett"

Exempel 16

A: För alla reella tal x gäller det att $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$

$$A : \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Exempel 17

B: Det finns ett reellt tal x sådant att $2x = 4$

$$B : \exists x \in \mathbb{R} : 2x = 4$$

Mängder

Vad är en mängd?

- En mängd är en samling objekt som kallas **element**
- En mängd kan anges genom uppräknings av dess element inom $\{\dots\}$ eller genom en definierande utsaga
- Antalet element i en mängd A kallas mängdens **kardinalitet** och betecknas $|A|$
- Om x är ett element i mängden M skriver vi $x \in M$ (x tillhör M)
- Två mängder är lika om de innehåller samma element
- **Den tomma mängden** \emptyset innehåller inga element
- Det finns alltid en **grundmängd** eller **universum** U

Exempel 18

- $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$
- $B = \{1, 2, 3, \dots, 99\}$
- $C = \{\text{Alla heltal } x \text{ sådana att } 1 \leq x \leq 3627\} = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 3627\}$

Exempel 19

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$$

- $|A| = 4$
- $|B| = \infty$
- $2 \in A$
- $\frac{3}{2} \in B$
- $5 \notin B$

Exempel 20

- $\{1, 3, 4\} = \{1, 4, 3\} = \{4, 4, 3, 1\}$
- $|\{4, 4, 3, 1\}| = 3$
- $\emptyset = \{\} = \{x : x \neq x\} = \{\text{Alla reella tal } x \text{ sådana att } x^2 = -1\} = \dots$

Talmängder

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$: De naturliga talen
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: De hela talen
- $\mathbb{Z}_+ = \{1, 2, 3, \dots\}$: De positiva hela talen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$: De rationella talen
- \mathbb{R} = De reella talen
- $\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$: De komplexa talen

Exempel 21

Intervall:

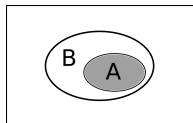
- $[-1, 9] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 9\}$: Slutet och begränsat (kompakt)
- $(2, 6) = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x < 6\}$: Öppet och begränsat
- $[1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 3\}$: Halvöppet och begränsat
- $[1, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$: Slutet och obegränsat

Delmängd

Mängden A är en **delmängd** av B om och endast om varje element i A är ett element i B :

$$A \subseteq B \text{ omm } x \in A \Rightarrow x \in B$$

Om $A \subseteq B$ och $A \neq B$ så är A en **äkta delmängd** av B : $A \subset B$.



Venn diagram

Exempel 22

$$\mathbb{Z}_+ \subset \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Exempel 23

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\Rightarrow A \subseteq B.$$

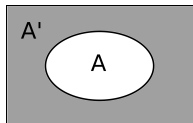
$$A \neq B \Rightarrow A \subset B.$$

Anm: Den tomma mängden är en delmängd av varje mängd: $\emptyset \subseteq A \forall A$

Komplementmängd

Komplementet till A betecknas A' och består av alla element i U som inte finns i A :

$$A' = \{x : x \notin A\}$$



Exempel 24

Bestäm A' om $A = \{1, 3, 4, 6\}$ och $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Svar: $A' = \{2, 5, 7\}$

Exempel 25

Bestäm A' om $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$ och $U = \mathbb{R}$.

Svar: $A' = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

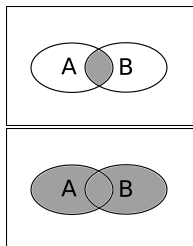
Snitt och Union

Snittet av två mängder A och B betecknas $A \cap B$ och består av alla element som finns i A och i B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

Unionen av två mängder A och B betecknas $A \cup B$ och består av alla element som finns i A eller i B :

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



Exempel 26

Bestäm $A \cap B$ och $A \cup B$ om $A = \{1, 3, 4, 8\}$ och $B = \{1, 2, 5, 8\}$.

- $A \cap B = \{1, 8\}$
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$

Om $A \cap B = \emptyset$ så är A och B **disjunkta**.

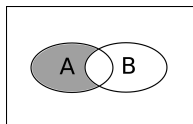
Sats 2 (de Morgans lagar)

- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
- $(A \cup B)' = A' \cap B'$

Mängddifferens och Produktmängd

Mängddifferensen $A \setminus B$ är mängden av alla element som finns i A men inte i B :

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$$



Produktmängden eller den **Cartesiska produkten** av mängderna A och B är mängden av alla ordnade par (a, b) där $a \in A$ och $b \in B$:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

Exempel 27

Bestäm $A \setminus B$ och $A \times B$ om $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{3, 5\}$

- $A \setminus B = \{1, 2\}$
- $A \times B = \{(1, 3), (1, 5), (2, 3), (2, 5), (3, 3), (3, 5)\}$

Exempel 28

$$B' \cap (A \cup B) = A \setminus B$$