HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Onsdagen den 4 januari 2023
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2^{3x} = 3 \cdot 2^{2x} - 2^{x+1}.$$

   (b) Lös olikheten (*3p*)

$$\frac{2x^2 - x - 3}{x - 3} < x.$$

2. (a) Är utsagan $(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee B)$ en tautologi? (*2p*)

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} (2k)^3 = 2^3 + 4^3 + 6^3 + 8^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$$

   för alla heltal $n \geq 1$. (*3p*)

3. (a) Lös ekvationen $z^3 - 8i = 0$. Rötterna ska anges på rektangulär form och ritas i det komplexa talplanet. (*2p*)

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2^{n+1}, \\ y_0 = 1, \ y_1 = 2. \end{cases}$$

4. (a) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och ett nollställe z_1 med imaginärdel skild från noll. Visa att $p(z)$ också har nollstället $\bar{z}_1$. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^6 - z^4 - 5z^2 - 3 = 0$$

   har dubbelroten i. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande, har 10 bågar och 4 av noderna har grad 2. De resterande noderna är fler än 2 och har alla samma grad. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf? (*2p*)

   (b) På en studentpub i stan kostar en öl 51 kr och en läsk 27 kr. En kväll köpte ett gäng törstiga ingenjörsstudenter öl och läsk för totalt 930 kr. Hur många läsk kan de högst ha köpt? (*3p*)

6. (a) Visa att (*2p*)

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}, \quad 1 \leq k \leq n. \qquad \text{(Pascals triangel)}$$

   (b) Skruvingenjören Pelle har en låda som innehåller 20 skruvar varav 8 är defekta. Pelle blundar, stoppar ner handen i lådan och tar upp en näve skruvar. Vad är sannolikheten för att högst 2 är defekta om han har totalt 10 skruvar i handen?
   Svaret får innehålla binomialkoefficienter. (*3p*)

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Sätter vi $t = 2^x$ övergår ekvationen i $t^3 = 3t^2 - 2t$ som har rötterna $t = 0$, $t = 1$ och $t = 2$ där den första är en falsk rot eftersom $2^x > 0$.
   Svar: $x = 0$ eller $x = 1$.

   (b) Samlar vi alla termer på vänstra sidan, gör liknämnigt och faktoriserar får vi:

   $$\frac{(x-1)(x+3)}{x-3} < 0$$

   Därefter görs lämpligen teckenstudium.
   Svar: $x < -3$ eller $1 < x < 3$.

2. (a) Sanningsvärdestabell visar att utsagan är en tautologi.

   (b) Visas t.ex. med induktion.

3. (a) Binomisk ekvation som kan lösas med standardmetoden genom att först gå över till polär form.
   Svar: $z_k = 2e^{i(\frac{\pi}{6}+k\frac{2\pi}{3})}$, $k = 0, 1, 2$ dvs $z_0 = \sqrt{3} + i$, $x_1 = -\sqrt{3} + i$, $z_2 = -2i$

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger $A = 1$.
   Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n + n2^n$. Sökt lösning: $y_n = 2 - 2^n + n2^n$.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Komplexa tal).

   (b) Eftersom ekvationen har reella koefficienter är även $-i$ en dubbelrot och polynomet i vänsterledet har därför faktorn $(z-i)^2(z+i)^2 = z^4 + 2z^2 + 1$. Polynomdivision ger nu $z^6 - z^4 - 5z^2 - 3 = (z^4 + 2z^2 + 1)(z^2 - 3)$ där den sista faktorn ger de två återstående rötterna $z = \pm\sqrt{3}$.

5. (a) ”Handskakningslemmat” ger:

   $$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4 \cdot 2 + ng = 2|E| = 2 \cdot 10 \Leftrightarrow ng = 12$$

   där n är det resterande antalet noder och g deras grad. De möjligheter där $n > 2$ är

   $$(n, g) = (3, 4),\ (4, 3),\ (6, 2),\ (12, 1).$$

   Enligt Euler-Hierholzers sats är G en Eulergraf omm samtliga noder har jämnt gradtal. $(n, g) = (12, 1)$ är inget möjligt alternativ om G ska vara sammanhängande men det är $(n, g) = (4, 3)$ och vi kan alltså inte säkerställa att alla noder har jämnt gradtal.
   Svar: Nej.

   (b) Med x = antal öl och y = antal läsk söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

   $$51x + 27y = 930 \Leftrightarrow 17x + 9y = 310.$$

   Den allmänna lösningen är $(x, y) = (-310 + 9n, 620 - 17n)$ där $35 \leq n \leq 36$ ger icke-negativa hetalslösningar. Ska antalet läsk (y) maximeras ska vi alltså använda minsta möjliga n.
   Svar: Högst $620 - 17 \cdot 35 = 25$ läsk.

6. (a) Utnyttjar vi att

   $$(n - (k-1))! = (n-k)!(n-(k-1)) \quad \text{och} \quad k! = (k-1)!k$$

   samt gör liknämnigt i högerledet fås vänsterledet.

   (b) Det handlar här om urval utan hänsyn till ordningen och utan återläggning. Totala antalet sätt att plocka upp 10 skruvar är $\binom{20}{10}$. Antalet sätt att plocka upp 10 skruvar så att högst 2 är defekta (dvs. 0, 1 eller 2) ges av

   $$\binom{8}{0}\binom{12}{10} + \binom{8}{1}\binom{12}{9} + \binom{8}{2}\binom{12}{8}$$

   Den sökta sannolikheten ges av kvoten mellan dessa två tal ($\approx 8.5\%$).