HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Onsdagen den 1 juni 2022
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen (*2p*)

$$2\ln(x)\cdot\ln(x^2)\cdot\ln(x^3) = 3\ln(x^4)$$

   (b) Lös olikheten (*3p*)

$$\frac{2x^3}{x^2-1} \leq x\,.$$

2. (a) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: (*2p*)

$$A:\ |x|-|x-2|<2x, \qquad B:\ x^2\leq 1, \qquad C:\ \ln(x+2)\geq 0.$$

   (b) Lös differensekvationen (*3p*)

$$\begin{cases} y_{n+2}-3y_{n+1}+2y_n = 2^{n+1}, \\ y_0=-1,\ y_1=1. \end{cases}$$

3. (a) Hur många olika ”ord” med 12 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTEAPPARAT”

   om varje bokstav ska användas en gång och om

   1) två T:n inte får stå intill varandra?
   2) alla T:n ska stå intill varandra och varje ord ska avslutas med “PAR”?

   (*2p*)

   (b) Visa att

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = 2+6+12+\cdots+n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

   för alla heltal $n\geq 1$. (*3p*)

4. (a) Polynomet $p(z)$ har reella koefficienter och ett nollställe z_1 med imaginärdel skild från noll. Visa att $p(z)$ också har nollstället $\bar{z}_1$. (*2p*)

   (b) Ekvationen

$$z^4-2z^3+3z^2-2z+2=0$$

   har roten i. Lös ekvationen fullständigt. (*3p*)

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 12 bågar. Fyra av noderna har grad 2 och två har grad 4. De resterande noderna är färre än 8 och har alla samma grad. Är G en Eulergraf? (*1p*)

   (b) Är utsagan $(A\Rightarrow B)\vee\neg B$ en tautologi? (*1p*)

   (c) Till en konsert såldes biljetter för 50000 kr. Biljettpriset var 450 kr för ståplats och 550 kr för sittplats. Det fanns totalt 100 ståplatser och 100 sittplatser. Kan de ha sålt för många av någon sort? (*3p*)

6. Nollställena till polynomet

$$p(z)=z^3-3z^2+3\alpha z+\beta,$$

   där $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, bildar hörn i en liksidig triangel med sidlängd 3 i det komplexa talplanet. Var i talplanet ligger talen α och β ? (*5p*)

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Omskrivning med logaritmlagarna ger

$$(\ln x)^3 = \ln x \Leftrightarrow ((\ln x)^2 - 1)\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \text{ eller } \ln x = \pm 1.$$

Svar: $x = 1$, $x = e$ eller $x = 1/e$.

(b) Flytta över till ena sidan, gör liknämnigt, faktorisera och gör teckenstudium.
Svar: $x < -1$ eller $0 \leq x < 1$.

2. (a) Vi har $A : x > -1$, $B : -1 \leq x \leq 1$ och $C : x \geq -1$ dvs $A \Rightarrow C$ och $B \Rightarrow C$.

(b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = An2^n$. Insättning ger $A = 1$.
Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n + n2^n$. Sökt lösning: $y_n = n2^n - 1$.

3. (a) i. Ta först bort ett T och betrakta de två återstående T:na som en bokstav. Antalet ord med 11 bokstäver där båda T:na står intill varandra är då $\frac{10!}{4!2!}$. Totala antalet ord med 11 bokstäver är $\frac{11!}{4!2!2!}$. Totala antalet ord med 11 bokstäver där de båda T:na *inte* står intill varandra är därför $\frac{11!}{4!2!2!} - \frac{10!}{4!2!}$. Den sista bokstaven T kan nu placeras på 8 olika platser (den får inte stå jämte något av de två T:na som inte står intill varandra).
Svar: $8 \cdot \left(\frac{11!}{4!2!2!} - \frac{10!}{4!2!}\right)$ olika ord.

ii. Betrakta de tre T:na som en bokstav och ta bort PER. Då återstår 7 bokstäver där alla bokstäver är olika utom de tre A:na.
Svar: $\frac{7!}{3!}$ olika ord.

(b) Visas t.ex. med induktion.

4. (a) Se föreläsningsanteckningar (Komplexa tal).

(b) Eftersom ekvationen har reella koefficienter är även $-i$ en rot och polynomet i vänsterledet har därför faktorn $(z - i)(z + i) = z^2 + 1$. Polynomdivision ger $z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2 = (z^2 + 1)(z^2 - 2z + 2)$ där den sista faktorn ger de två återstående rötterna $z = 1 \pm i$.

5. (a) ”Handskakningslemmat” ger:

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + ng = 2|E| = 2 \cdot 12 \Leftrightarrow ng = 8$$

där n är det resterande antalet noder och g deras grad. Eftersom de resterande noderna är färre än 8 är $(n, g) = (1, 8)$, $(2, 4)$ eller $(4, 2)$. Enligt Euler-Hierholzers sats är G en Eulergraf omm samtliga noder har jämn grad vilket alltså gäller här.
Svar: Ja.

(b) Gör sanningsvärdestabell.
Svar: Utsagan är en tautologi.

(c) Med x = antal sittplatser och y = antal ståplatser söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$550x + 450y = 50000 \Leftrightarrow 11x + 9y = 1000.$$

En möjlig lösning är $(x, y) = (5, 105)$ dvs de kan ha sålt 105 ståplatser.
Svar: Ja.

6. Eftersom nollställena bildar en liksidig triangel är de efter ett variabelbyte rötter till en binomisk ekvation $\tilde{z}^3 = w$. Triangeln har sidan 3 och därför ligger alla tre rötterna (hörnen) på en cirkel med radien $\sqrt{3}$ dvs $|w| = 3\sqrt{3}$. Variabelbytet $\tilde{z} = z - 1$ ger

$$\tilde{z}^3 = (z - 1)^3 = z^3 - 3z^2 + 3z - 1 = w \Leftrightarrow z^3 - 3z^2 + 3z - 1 - w = 0.$$

Det återstår nu bara att identifiera $\alpha = 1$ och $\beta = -1 - w$ dvs β ligger på en cirkel med centrum i $z = -1$ och radie $3\sqrt{3}$.