

MA8020 Tekniska beräkningar

Något om numerisk integrering

Mikael Hindgren



20 november 2025

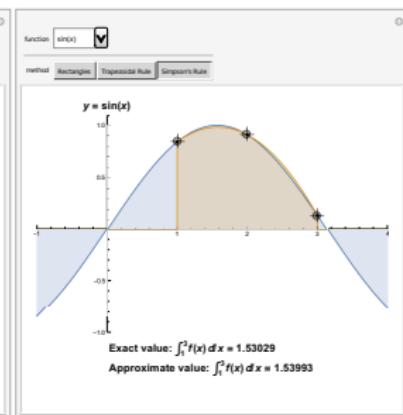
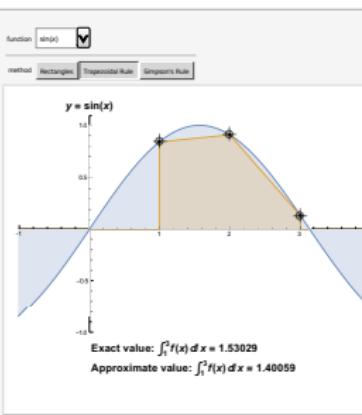
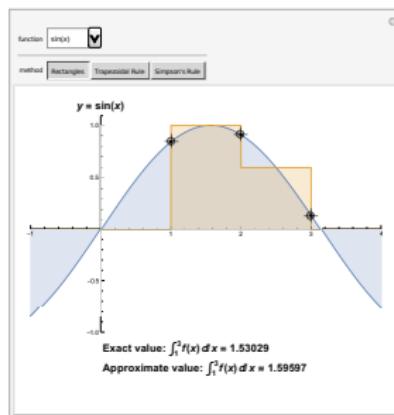
Numerisk integration

Antag att vi vill beräkna ett approximativt värde på integralen $\int_a^b f(x)dx$.

Metod:

- Dela in intervallet $[a, b]$ i ett antal delintervall
- Approximera $f(x)$ i varje delintervall med en funktion som är lätt att integrera

Några alternativ:



Riemannsumma:
 $f(x) \approx a$ (konstant)

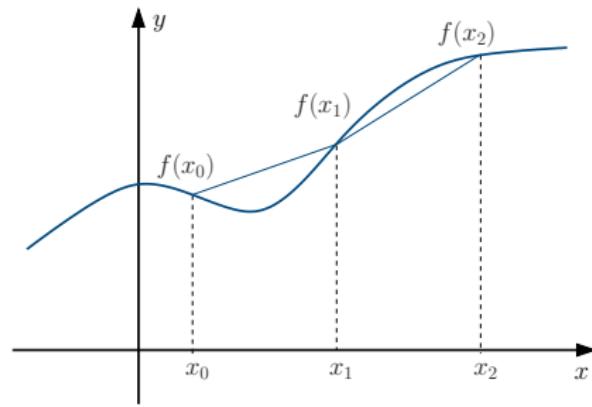
Trapetsformeln:
 $f(x) \approx ax + b$

Simpsons formel:
 $f(x) \approx ax^2 + bx + c$

Numerisk integration

Trapetsformeln

- Dela in intervallet i n lika stora delintervall med längd $h = \frac{b-a}{n}$.
- Approximera integralen i varje delintervall med arean under den räta linjen mellan $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ och $(x_i, f(x_i))$.
- Varje paralleltrapets har arean $A_i = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h$.
- $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n A_i$



Numerisk integration

Trapetsformeln

Sats 1 (Trapetsformeln)

Om $f(x)$ är två gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ så är

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{2}(f(a) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(b)) + R_n \\ &= T(h) + R_n\end{aligned}$$

där $h = \frac{b-a}{n}$ och resttermen

$$R_n = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi) = -\frac{b-a}{12}f''(\xi)h^2 = \mathcal{O}(h^2), \quad a \leq \xi \leq b$$

Exempel 1

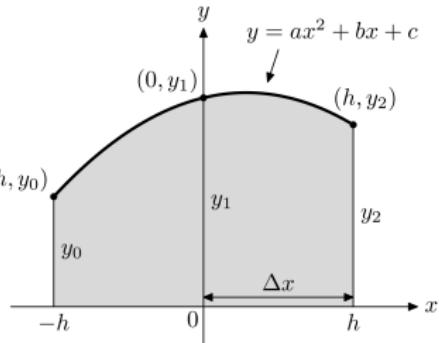
Bestäm ett approximativt värde på $\int_0^2 \sin x^2 dx$ med trapetsformeln samt uppskatta felets storlek.

Numerisk integration

Simpsons formel

Antag att $f(x) \approx p(x) = ax^2 + bx + c$ i $[-h, h]$:

$$\begin{aligned} \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx &= \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx \right]_{-h}^h \\ &= 2 \left(\frac{ah^3}{3} + ch \right) \end{aligned}$$



Om $p(x)$ går genom punkterna $(-h, y_0)$, $(0, y_1)$ och (h, y_2) kan vi enkelt bestämma a och c :

$$\begin{cases} p(-h) = a(-h)^2 + b(-h) + c = y_0 \\ p(0) = c = y_1 \\ p(h) = ah^2 + bh + c = y_2 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)$$

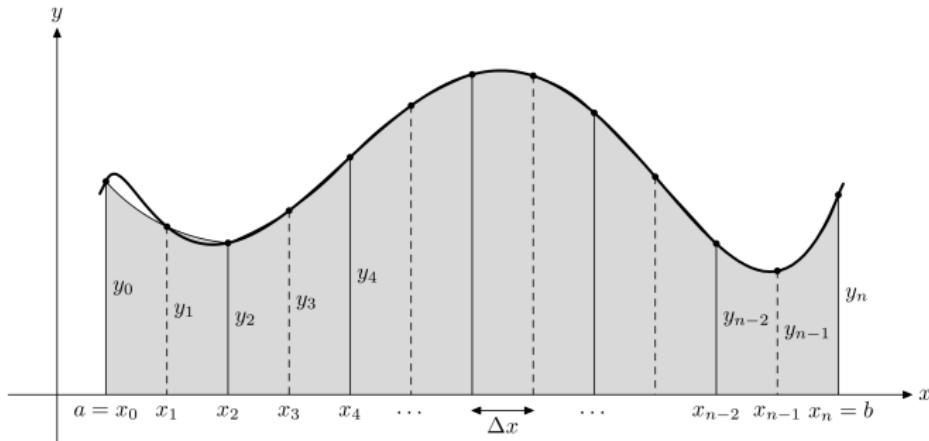
$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{-h}^h p(x) dx &= 2 \left(\frac{\frac{1}{2h^2}(y_2 + y_0 - 2y_1)h^3}{3} + y_1 h \right) = \frac{(y_2 + y_0 - 2y_1)h}{3} + 2hy_1 \\ &= \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) \end{aligned}$$

Numerisk integration

Simpsons formel

Vi kan utnyttja resultatet för att beräkna ett approximativt värde på integralen

$$\int_a^b f(x)dx$$



Vi delar upp intervallet i ett **jämnt antal** (n) delintervall med samma längd h :

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + h, \quad x_2 = a + 2h, \quad \dots \quad x_n = a + nh, \quad h = \frac{b - a}{n}$$

Numerisk integration

Simpsons formel

Vi kan nu approximera $f(x)$ med ett andragradspolynom $p(x)$ i varje delintervall $[x_i, x_{i+2}]$ och utnyttja vårt tidigare resultat:

$$\int_{-h}^h p(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2)$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{h}{3}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Sats 2 (Simpsons formel)

Om $f(x)$ är fyra gånger kontinuerligt deriverbar på intervallet $[a, b]$ så är

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{h}{3}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + 2f(x_4) + \cdots \\ &\quad + 2f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(b)) + R_n = S(h) + R_n \end{aligned}$$

där $h = \frac{b-a}{n}$ och resttermen

$$R_n = -\frac{(b-a)^5}{180n^4} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)}{180} f^{(4)}(\xi)h^4 = \mathcal{O}(h^4), \quad a \leq \xi \leq b$$

Anm: $S(h) = \int_a^b f(x)dx$ för alla polynom f av grad ≤ 3 eftersom $f^{(4)}(x) = 0 \forall x$.

Numerisk integration

Simpsons formel

Exempel 2

Beräkna ett approximativt värde på integralen $\int_0^\pi \sin x \, dx$ med Simpsons formel för $n = 4$ och uppskatta felet i approximationen.

Lösning:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin x \, dx &\approx \frac{b-a}{3n}(f(a) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + 4f(x_3) + f(b)) \\ &= \frac{\pi}{12} (\sin 0 + 4 \sin \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 4 \sin \frac{3\pi}{4} + \sin \pi) \\ &= 2.00455975...\end{aligned}$$

$$|R_4| = \left| \frac{(b-a)^5}{180 \cdot n^4} f^{(4)}(\xi) \right| = \left| \frac{\pi^5}{180 \cdot 4^4} \sin(\xi) \right| \leq \frac{\pi^5}{180 \cdot 4^4} = 0.0066410... \leq 0.01$$

$$\therefore \int_0^\pi \sin x \, dx = 2.00 \pm 0.01 \quad (\text{Anm: Integralens exakta värde är } 2.)$$

Numerisk integration

Simpsons formel

Anm:

- Trapetsformeln: Exakt integration av styckvis linjär interpolation
- Simpsons formel: Exakt integration av styckvis kvadratisk interpolation
- Formlerna ovan är praktiska vid "handberäkningar". I verkliga fall används oftast adaptiva metoder dvs inte ekvidistant indelning av intervallet.

Exempel 3

Bestäm ett approximativt värde på $\int_0^2 \sin x^2 dx$ med Simpsons formel samt uppskatta felets storlek.

Numerisk integration

Rombergs metod: Richardson extrapolation på trapetsformeln

- Man kan visa att

$$\int_a^b f(x)dx = T(h) + a_2 h^2 + a_3 h^4 + \dots + a_k h^{2k} + \mathcal{O}(h^{2k+2})$$

där koefficienterna a_2, a_3, \dots, a_k är oberoende av h .

- Kombination av $T(h)$ och $T(2h)$ ger:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{3}(4T(h) - T(2h)) + \mathcal{O}(h^4) = T_4(h) + \mathcal{O}(h^4)$$

- Samma sak för $T_4(h)$ ger:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{15}(16T_4(h) - T_4(2h)) + \mathcal{O}(h^6) = T_6(h) + \mathcal{O}(h^6) \quad \text{osv.}$$

Allmän formel:

$$T_{2n+2}(h) = \frac{1}{4^n - 1}(4^n T_{2n}(h) - T_{2n}(2h)) + \mathcal{O}(h^{2n+2}), \quad n \geq 1.$$

Anm: $T_4(h) = S(h)$ (Simpsons formel).

Numerisk integration

Exempel på adaptiv metod: Intervallhalvering med trapetsformeln

Beräkning av $\int_a^b f(x)dx$ med ett fel $< \varepsilon$:

- Låt $h = \frac{b-a}{2}$ och $c = \frac{b+a}{2}$. Beräkna $T(2h)$ och $T(h)$:

$$T(2h) = h(f(a) + f(b)), \quad T(h) = \frac{h}{2}(f(a) + 2f(c) + f(b))$$

- Felet:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= T(h) + a_2 h^2 + \mathcal{O}(h^4) = T(2h) + a_2 (2h)^2 + \mathcal{O}(h^4) \\ T(h) - T(2h) &= 3a_2 h^2 + \mathcal{O}(h^4) \\ \varepsilon_h &= \int_a^b f(x)dx - T(h) = a_2 h^2 + \mathcal{O}(h^4) \approx \frac{T(h) - T(2h)}{3} \end{aligned}$$

- Om $\varepsilon_h < \varepsilon$ är vi klara och $\int_a^b f(x)dx \approx T(h)$.
- Annars: Börja om med $\int_a^c f(x)dx$ och $\int_c^b f(x)dx$ med kravet att felet $< \varepsilon/2$ för båda integralerna.

Numerisk integration

Gaussisk kvadratur¹

$$\int_{-1}^1 g(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \omega_i g(\xi_i)$$

- Vikterna ω_i och punkterna ξ_i väljs så att summan ger exakt integral för alla polynom av grad $p = 2n - 1$:

$$\xi_i = \text{rötterna till } P_n(\xi) = 0, \quad \omega_i = \frac{2}{(P'_n(\xi_i))^2(1 - \xi_i^2)}$$

- **Optimal ordning:** Minsta möjliga n som ger integral av polynom exakt värde.
- **Legendrepolyomet** $P_n(\xi)$ av grad n kan beräknas rekursivt:

$$\begin{cases} (n+1)P_{n+1}(\xi) = (2n+1)\xi P_n(\xi) - nP_{n-1}(\xi) \\ P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = x \end{cases}$$

- Egenskaper: $P_n(1) = 1$ och Legendrepolyomet är parvis ortogonal:

$$\int_{-1}^1 P_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = 0 \quad \text{om} \quad m \neq n$$

¹Carl Friedrich Gauss (1777-1855) & Carl Gustav Jacobi (1804-1851)

Numerisk integration

Gaussisk kvadratur

- För hög noggrannhet krävs att $f(x)$ approximeras väl av ett polynom av grad $2n - 1$ eller lägre i integrationsintervallet.
- Felanalysen är mer komplicerad än för Trapetsformeln och Simpsons formel.
- I Mathematica:

```
In[=]:= LegendreP[3, x]
xi = NSolve[LegendreP[3, x] == 0, x]
wi = 2 / (D[LegendreP[3, x], x]^2 * (1 - x^2)) /. xi
```

$$Out[=]= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -3x + 5x^3 \\ \end{pmatrix}$$

$$Out[=]= \{ \{x \rightarrow -0.774597\}, \{x \rightarrow 0.\}, \{x \rightarrow 0.774597\} \}$$

$$Out[=]= \{0.555556, 0.888889, 0.555556\}$$

n	p	i	ξ_i	ω_i
1	1	1	0	2
2	3	1	-0.57735027	1
		2	+0.57735027	1
3	5	1	-0.77459667	0.55555556
		2	0	0.88888889
		3	+0.77459667	0.55555556

Numerisk integration

Gaussisk kvadratur

Exempel 4

Beräkna $\int_0^2 (x^5 - x) dx$ med optimal Gaussisk kvadratur.

Lösning:

- Integranden är ett polynom med grad 5:
Optimal ordning $2n - 1 = 5 \Leftrightarrow n = 3$.
- Variabelsubst. $\int_a^b f(x) dx \rightarrow \int_{-1}^1 g(\xi) d\xi : x = \frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2} \Rightarrow dx = \frac{b-a}{2} d\xi$

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x) dx &= \int_{-1}^1 \underbrace{f\left(\frac{a+b}{2} + \xi \frac{b-a}{2}\right)}_{g(\xi)} \frac{b-a}{2} d\xi \\
 &= \int_{-1}^1 f\left(\frac{0+2}{2} + \xi \frac{2-0}{2}\right) \frac{2-0}{2} d\xi = \int_{-1}^1 ((1+\xi)^5 - (1+\xi)) d\xi \\
 &= \sum_{i=1}^3 \omega_i g(\xi_i) = \omega_1 g(\xi_1) + \omega_2 g(\xi_2) + \omega_3 g(\xi_3) = 8.666...
 \end{aligned}$$