

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om trigonometriska funktioner

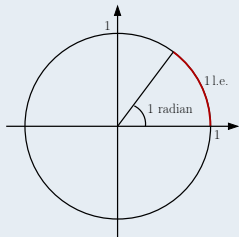
Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

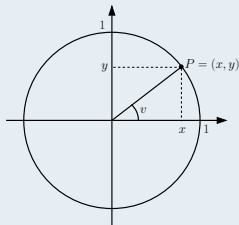
8 oktober 2025

Definition 1 (Vinkelmåttet radianer)



- Den vinkel som motsvarar en båge med längden 1 l.e. i enhetscirkeln är **1 radian**.
- Normalt anges ingen enhet om vinkeln anges i radianer.
- Vridning moturs motsvarar positiv vinkel.
- 1 varv i e.c. \Leftrightarrow vinkeln 2π radianer.

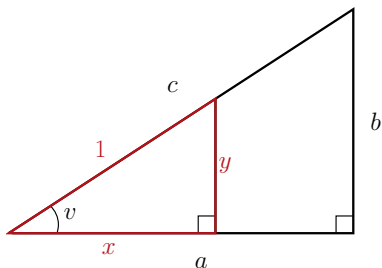
Definition 2 (Trigonometriska funktioner)



I enhetscirkeln:

- $\sin v = y$
- $\cos v = x$
- $\tan v = \frac{\sin v}{\cos v}, \quad v \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$
- $\cot v = \frac{\cos v}{\sin v} = \frac{1}{\tan v}, \quad v \neq n\pi$

Rätvinkliga trianglar



De båda trianglarna är likformiga:

- $\frac{b}{c} = \frac{y}{1} = \sin v$
- $\frac{a}{c} = \frac{x}{1} = \cos v$
- $\frac{b}{a} = \frac{y}{x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan v$

Trigonometriska samband i rätvinkliga trianglar

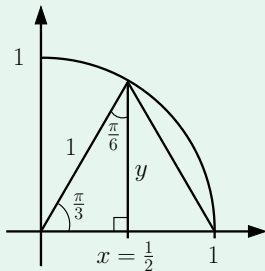
- $\sin v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{hypotenusan}}$
- $\cos v = \frac{\text{närliggande katet}}{\text{hypotenusan}}$
- $\tan v = \frac{\text{motstående katet}}{\text{närliggande katet}}$

Viktiga vinklar

Exempel 1

Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då $v = \frac{\pi}{3}$ respektive $v = \frac{\pi}{6}$.

Lösning:



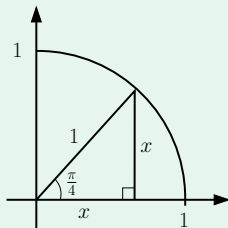
- $\sin \frac{\pi}{3} = y = \sqrt{1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{3} = x = \frac{1}{2}$
- $\sin \frac{\pi}{6} = x = \frac{1}{2}$
- $\cos \frac{\pi}{6} = y = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\tan \frac{\pi}{3} = \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \sqrt{3}$
- $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Viktiga vinklar

Exempel 2

Bestäm $\sin v$, $\cos v$ och $\tan v$ då $v = \frac{\pi}{4}$.

Lösning:



Pythagoras sats:

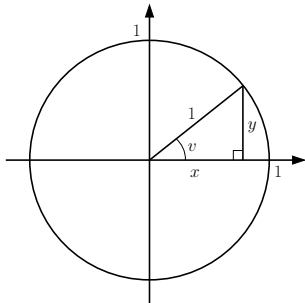
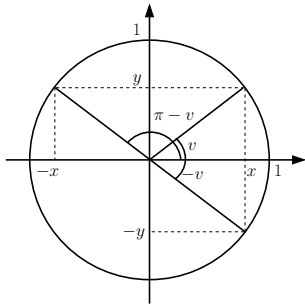
$$x^2 + x^2 = 1^2 \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

- $\sin \frac{\pi}{4} = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\cos \frac{\pi}{4} = x = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $\tan \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1$

Viktiga vinklar!

v		$\sin v$	$\cos v$
0°	0	0	1
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0

Symmetriegenskaper och samband



Symmetriegenskaper

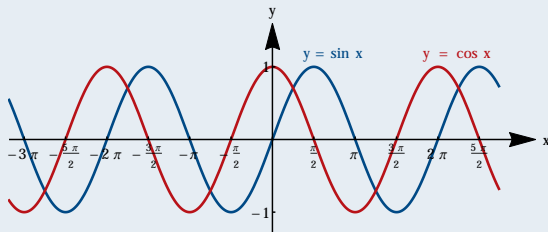
- $\sin(\pi - v) = \sin v$
- $\cos(\pi - v) = -\cos v$
- $\sin(-v) = -\sin v$ (udda funktion)
- $\cos(-v) = \cos v$ (jämn funktion)
- $\sin(\frac{\pi}{2} \pm v) = \cos v$
- $\cos(\frac{\pi}{2} \pm v) = \mp \sin v$

Pythagoras sats $\Rightarrow x^2 + y^2 = 1^2 \Leftrightarrow$

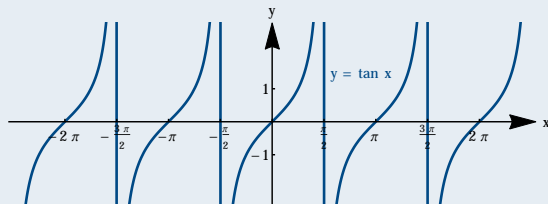
"Trigonometriska ettan"

$$\cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

De periodiska funktionerna $\sin x$, $\cos x$ och $\tan x$



- $\cos x = \cos(x + n \cdot 2\pi)$
Period $T = 2\pi$
- $\sin x = \sin(x + n \cdot 2\pi)$
Period $T = 2\pi$



- $\tan x = \tan(x + n \cdot \pi)$
Period $T = \pi$

Anm: $y = \tan x$ har lodräta asymptoter $x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}$

Additions och subtraktionssatserna

Sats 1

För alla vinklar u och v gäller:

- ① $\sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u$
- ② $\sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u$
- ③ $\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$
- ④ $\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$

Exempel 3

$$\cos \frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \stackrel{(1.4)}{=} \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

$u = v$ i (1) och (3) ger:

Sats 2 (Formler för dubbla vinkeln)

- ① $\sin 2v = 2 \sin v \cos v$
- ② $\cos 2v = \cos^2 v - \sin^2 v = 2 \cos^2 v - 1 = 1 - 2 \sin^2 v$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 4

Lös ekvationen $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Lösning:

$$x = \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \pi - \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{3} + n \cdot 2\pi$$

Exempel 5

Lös ekvationen $\cos 2x = 1 - \sin x$

Lösning:

$$\cos 2x \stackrel{(2.2)}{=} 1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \left(\sin x - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Leftrightarrow x = n \cdot \pi \\ \text{eller} \\ \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 6

Lös ekvationen $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Lösning:

$$x = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

Exempel 7

Lös ekvationen $2 \sin^2 x - \cos x = 1$

Lösning:

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ och $t = \cos x$ ger

$$2(1 - t^2) - t - 1 = 0 \Leftrightarrow t^2 + \frac{t}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow t = -1 \text{ eller } t = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + n \cdot 2\pi \\ \text{eller} \\ t = \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + n \cdot 2\pi \end{cases}$$

Trigonometriska ekvationer

Exempel 8

Lös ekvationen $\cos 5x = \cos 3x$

Lösning:

$$\begin{aligned} \cos 5x = \cos 3x &\Leftrightarrow 5x = \pm 3x + n \cdot 2\pi \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n \cdot \pi \\ \text{eller} \\ 8x = n \cdot 2\pi \Leftrightarrow x = n \frac{\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = n \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Exempel 9

Lös ekvationen $\sin x = \cos 3x$

Lösning:

$$\begin{aligned} \sin x &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \cos 3x \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x = \pm 3x + n \cdot 2\pi \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\pi}{8} + n \frac{\pi}{4} \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} + n\pi \end{aligned}$$

Hjälpvinkelmetoden

Exempel 10

Lös ekvationen $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 1$

Allmänt: Vi vill lösa ekvationer av typen $a \sin kx + b \cos kx = c$

- Kan vi använda additionssatsen för $\sin x$ (Sats 1.1):

$$\sin(kx + \varphi) = \cos \varphi \sin kx + \sin \varphi \cos kx \quad ?$$

- Fungerar endast om punkten (a, b) ligger på e.c. dvs om $a = \cos \varphi$ och $b = \sin \varphi \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$. Vad gör vi om det inte gäller?
- Bryt ut $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\begin{aligned} a \sin kx + b \cos kx &= \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin kx + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos kx \right) \\ &= A(a_1 \sin kx + b_1 \cos kx) \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_1^2 + b_1^2 = 1 \Rightarrow$ vi kan hitta en hjälpvinkel φ sådan att

$$\cos \varphi = a_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \varphi = b_1 = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Hjälpvinkelmetoden

Sammanfattning:

Varje funktion av typen $f(x) = a \sin kx + b \cos kx$ kan skrivas på formen $f(x) = A \sin(kx + \varphi)$ där amplituden $A = \sqrt{a^2 + b^2}$

Exempel 10 (forts)

$$\begin{aligned}
 \sin x + \sqrt{3} \cos x &= \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2}} \cos x \right) \\
 &= 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) = 2(\cos \varphi \sin x + \sin \varphi \cos x) \\
 \Leftrightarrow \cos \varphi &= \frac{1}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \text{vi kan välja } \varphi = \frac{\pi}{3} \\
 \Rightarrow \sin x + \sqrt{3} \cos x &= 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + n \cdot 2\pi \\
 \Leftrightarrow x &= -\frac{\pi}{6} + n \cdot 2\pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi
 \end{aligned}$$

Exempel 11

Lös ekvationen $\sin 2x - \cos 2x = 1$

Lösning:

Hjälpvinkelmetoden med $A = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$:

$$\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x + \frac{-1}{\sqrt{2}} \cos 2x \right)$$

$$= \sqrt{2}(\cos \varphi \sin 2x + \sin \varphi \cos 2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \text{vi kan välja } \varphi = -\frac{\pi}{4}$$

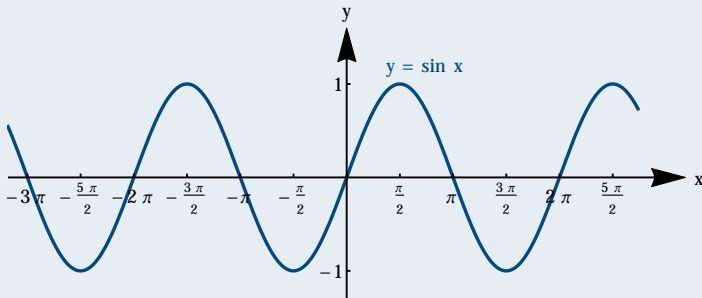
$$\Rightarrow \sin 2x - \cos 2x = \sqrt{2} \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + n \cdot 2\pi \text{ eller } 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + n \cdot 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \text{ eller } x = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi$$

Inversa trigonometriska funktioner

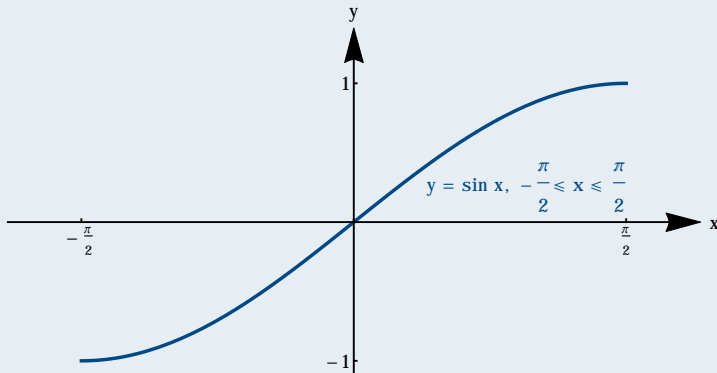
Studera funktionen $f(x) = \sin x$:



- $f(x)$ är periodisk $\Rightarrow f(x) = f(x + 2\pi) = f(x + 4\pi) = \dots$
 $\therefore x_1 \neq x_2 \nRightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 $\Rightarrow f(x)$ är inte inverterbar.
- Motsvarande gäller för $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$.

Inversa trigonometriska funktioner

Studera istället funktionen $f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$:



- $f(x)$ är strängt växande $\Rightarrow f(x)$ är inverterbar och har en invers.
- Det finns intervall där även $\cos x$, $\tan x$ och $\cot x$ är strängt monotona och har invers.

Inversa trigonometriska funktioner

Definition 3

Inverserna till de trigonometriska funktionerna kallas **arcusfunktioner** och definieras genom:

$$y = \sin x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \quad \Leftrightarrow x = \arcsin y$$

$$y = \cos x, 0 \leq x \leq \pi, \quad \Leftrightarrow x = \arccos y$$

$$y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad \Leftrightarrow x = \arctan y$$

$$y = \cot x, 0 < x < \pi, \quad \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} y$$

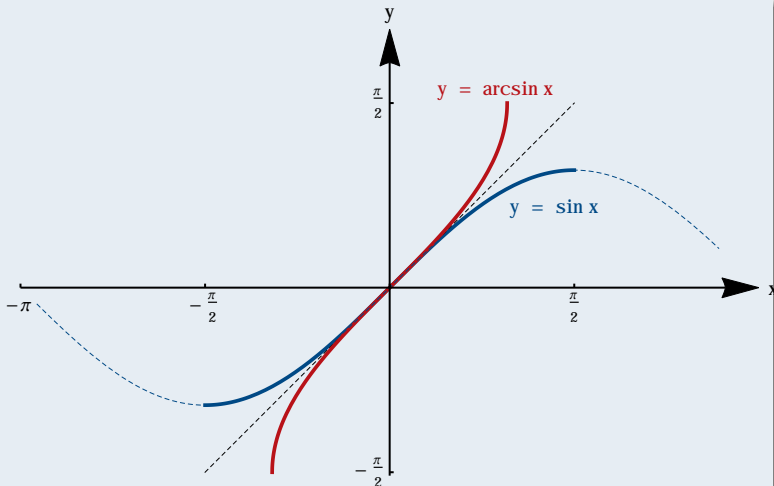
$f(x)$	D_f	V_f
$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\arctan x$	\mathbb{R}	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\operatorname{arccot} x$	\mathbb{R}	$(0, \pi)$

Minnesregel:

$\arcsin y =$ "Den vinkel mellan $-\frac{\pi}{2}$ och $\frac{\pi}{2}$ vars sinusvärde är y "

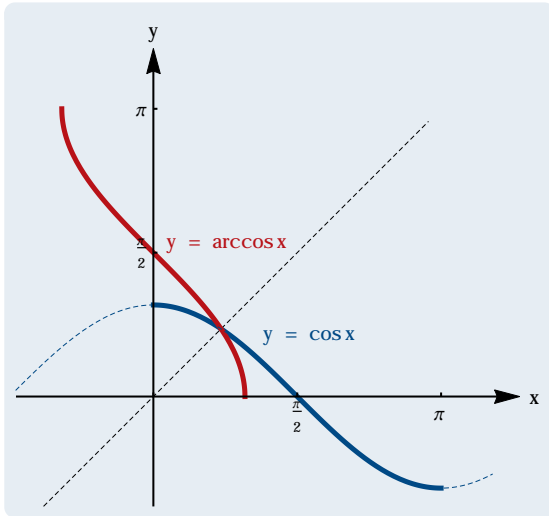
Inversa trigonometriska funktioner

$$y = \arcsin x$$



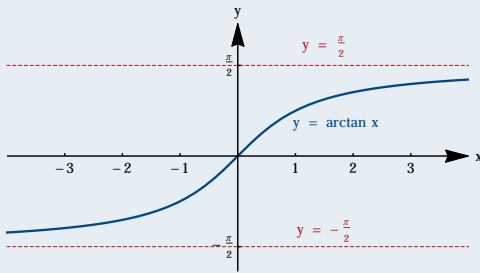
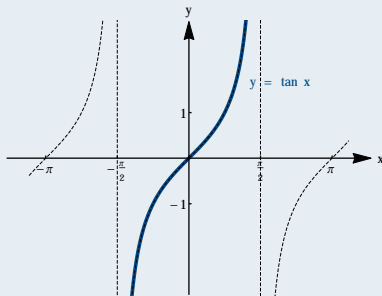
Inversa trigonometriska funktioner

$$y = \arccos x$$



Inversa trigonometriska funktioner

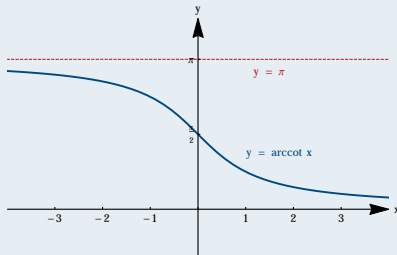
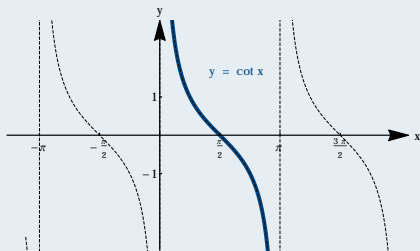
$$y = \arctan x$$



- $\arctan x \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \pm\infty$
- \Rightarrow kurvan $y = \arctan x$ har de vågräta asymptoterna $x = \pm \frac{\pi}{2}$ då $x \rightarrow \pm\infty$

Inversa trigonometriska funktioner

$$y = \operatorname{arccot} x$$



- $\operatorname{arccot} x \rightarrow 0$ resp π då $x \rightarrow \infty$ resp $-\infty$
- \Rightarrow kurvan $y = \operatorname{arccot} x$ har de vågräta asymptoterna $y = 0$ då $x \rightarrow \infty$ och $y = \pi$ då $x \rightarrow -\infty$

Inversa trigonometriska funktioner

Exempel 12

$$\arcsin \frac{1}{2} = \{\text{Den vinkel mellan } -\frac{\pi}{2} \text{ och } \frac{\pi}{2} \text{ som ger sinusvärdet } \frac{1}{2}\} = \frac{\pi}{6}$$

$$\arccos \frac{-\sqrt{3}}{2} = \{\text{Den vinkel mellan } 0 \text{ och } \pi \text{ som ger cosinusvärdet } -\frac{\sqrt{3}}{2}\} = \frac{5\pi}{6}$$

Anm:

- $\sin(\arcsin \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- $\arcsin(\sin \frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$
- $\arcsin(\sin \frac{2\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} !$

Allmänt:

- $\sin(\arcsin x) = x$ för alla $x \in [-1, 1]$
- $\arcsin(\sin x) = x$ **endast om** $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} !$

Motsvarande gäller för övriga arcusfunktioner.

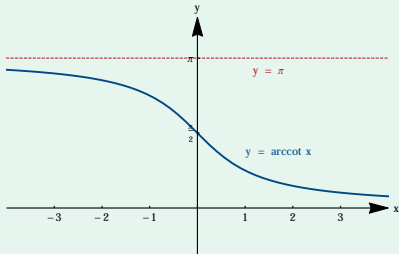
Inversa trigonometriska funktioner

Exempel 13

Lös ekvationerna $\arctan x = \frac{\pi}{4}$ och $\operatorname{arccot} x = -\frac{\pi}{4}$

Lösning:

- $\arctan x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \tan \frac{\pi}{4} = 1$
- $\operatorname{arccot} x = -\frac{\pi}{4}$ saknar lösning eftersom $0 < \operatorname{arccot} x < \pi$!



Hyperboliska funktioner

Definition 4

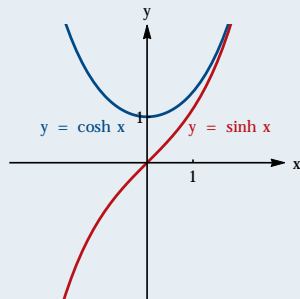
Cosinus-, sinus-, tangens- och cotangens-hyperbolicus definieras enligt:

$$\bullet \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\bullet \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

$$\bullet \coth x = \frac{1}{\tanh x}$$



De hyperboliska funktioner har vissa egenskaper som liknar de trigonometriska, t.ex. "hyperboliska ettan":

$$\begin{aligned} \cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})) = 1 \end{aligned}$$