HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2047/MA2051 Algebra och diskret matematik 6 hp
Fredagen den 10 januari 2025
Skrivtid: 9.00-14.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Lös ekvationen *(2p)*

$$|x| - |x+1| = x^2.$$

(b) Bestäm samtliga implikationer mellan följande utsagor för reella tal x: *(3p)*

$$A: \frac{x^3+3x^2-2x}{x-2} \leq x, \qquad B: e^{x-2} < 1, \qquad C: x^2 \leq 4.$$

2. (a) Hur många olika ”ord” med 10 bokstäver kan man bilda med hjälp av bokstäverna i

”MATTETENTA”

om varje bokstav ska användas en gång och om

1) orden ska inledas med “M” och avslutas med “A”?
2) orden ska inledas med “M” och samtliga vokaler (“A,A,E,E”) ska stå intill varandra (oavsett inbördes ordning)?

Svaret ska anges på beräknad form som ett heltal. *(2p)*

(b) Lös differensekvationen *(3p)*

$$\begin{cases} y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 2n, \\ y_0 = 1,\ y_1 = 0. \end{cases}$$

3. (a) Skriv talet

$$\left(\frac{2i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{102}$$

på rektangulär form ($a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$). *(2p)*

(b) Ekvationen

$$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 8z + 4 = 0$$

har en rot som är $1 - i$ och en rot som är lätt att gissa. Lös ekvationen fullständigt. *(3p)*

4. (a) Formulera och bevisa formeln för en geometrisk summa. *(2p)*

(b) Visa att

$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{k+1} = 6 + 12 + 24 + \cdots + 3 \cdot 2^{n+1} = 6(2^{n+1} - 1)$$

för alla heltal $n \geq 0$. *(3p)*

5. (a) Grafen G är sammanhängande och har 10 bågar. 4 av noderna har grad 2 och 2 av noderna har grad 4. De resterande noderna är färre än 3. Kan man med denna information dra slutsatsen att G är en Eulergraf? *(2p)*

(b) Den lilla filmklubben Finfilm hade filmvisning en kväll. Föreställningen var öppen för alla men klubbens medlemmar fick 40 kr i rabatt på biljettpriset som var 140 kr. Av dem som såg filmen var mindre än hälften medlemmar och filmklubben fick totalt in 2000 kr i biljettintäkter under kvällen. Hur många medlemmar såg filmen? *(3p)*

6. Pelle tjuvlyssnar på Kajsas och Kalles krypterade internetkommunikation och han lyckas identifiera det krypterade meddelandet $K = 2$ från Kajsa, som hon krypterat med RSA genom

$$K = M^e \bmod n,$$

där heltalet M är det hemliga meddelandet hon vill skydda ($1 \leq M \leq n-1$), $e = 13$ och $n = 51$.

(a) Bestäm $\phi(n)$. *(1p)*

(b) Vilket var Kajsas hemliga meddelande M ? *(4p)*

Lycka till!

Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Lös ekvationen i de tre intervallen $x < -1$, $-1 \leq x < 0$ och $x \geq 0$. Svar: $x = -1$.

   (b) A: Samla alla termer på vänster sida, gör liknämnigt och faktorisera:

$$\frac{x^2(x+2)}{x-2} \leq 0$$

   Därefter görs lämpligen teckenstudium vilket ger att $-2 \leq x < 2$. B: $x < 2$ och C: $-2 \leq x \leq 2$ dvs. de implikationer som gäller är $A \Rightarrow B$ och $A \Rightarrow C$.

2. (a) 1) Om alla ord ska inledas med "M" och avslutas med "A" kan vi plocka bort dessa bokstäver och har då kvar "ATTETENT" dvs 8 bokstäver. Med dessa kan vi bilda totalt

$$\frac{8!}{2!4!} = 840 \text{ ord}$$

   eftersom vi har 4 T:n och 2 E:n.

   2) Vi börjar med att ta bort första bokstaven (M). Om sedan alla vokalerna ska stå intill varandra kan vi betrakta dem som en bokstav dvs. AAEE = X. Vi har då kvar de 6 bokstäverna "TTTTNX" av vilka vi kan bilda totalt

$$\frac{6!}{4!} = 30 \text{ ord}$$

   eftersom vi fortfarande har 4 T:n.

   (b) $y_{hn} = C_1 + C_2 2^n$. Ansats: $y_{pn} = (An + B)n$ eftersom standardansatsen $y_{pn} = An + B$ ingår i y_{hn}. Insättning ger $A = B = -1$. Allmän lösning: $y_n = C_1 + C_2 2^n - n(n+1)$. Sökt lösning: $y_n = 2^n - n(n+1)$.

3. (a) Vi söker en formel för den geometriska summan:

$$S = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n,\ x \neq 1.$$

   Vi har

$$xS = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + x^{n+1} = S - 1 + x^{n+1}$$
$$\Leftrightarrow S(x-1) = x^{n+1} - 1 \Leftrightarrow S = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

   (b) Visas t.ex. med induktion eller väldigt enkelt genom att utnyttja formeln för en geometrisk summa som vi visat ovan:

$$\sum_{k=0}^{n} 3 \cdot 2^{k+1} = 6 \sum_{k=0}^{n} 2^k = 6\frac{2^{n+1}-1}{2-1} = 6(2^{n+1}-1).$$

4. (a) Sätt $z = \dfrac{2i}{1+i\sqrt{3}}$. Vi får då

$$|z| = \frac{|2i|}{|1+i\sqrt{3}|} = \frac{2}{2} = 1, \quad \arg(z) = \arg(2i) - \arg(1+i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$
$$\Rightarrow z = e^{\frac{i\pi}{6}} \Rightarrow z^{102} = (e^{\frac{i\pi}{6}})^{102} = e^{\frac{i102\pi}{6}} = e^{i17\pi} = e^{i\pi+8\cdot 2\pi} = e^{i\pi} = -1.$$

   (b) Eftersom den algebraiska ekvationen har reella koefficienter är även $1+i$ en rot. Gissning ger dessutom roten $z = 1$ och enligt Faktorsatsen är därför $(z-(1+i))(z-(1-i))(z-1) = z^3 - 3z^2 + 4z - 2$ en faktor i polynomet i ekvationens vänsterled. Polynomdivision ger nu

$$z^5 - 3z^4 + 2z^3 + 4z^2 - 8z + 4 = (z^3 - 3z^2 + 4z - 2)(z^2 - 2) = 0$$

   där den sista faktorn ger de två återstående har rötterna $\pm\sqrt{2}$.

5. (a) Om n är det resterande antalet noder och g deras grad ger "Handskakningslemmat":

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + ng = 2|E| = 2 \cdot 10 \Leftrightarrow ng = 4 \Leftrightarrow (n, g) = (1, 4),\ (2, 2),\ (4, 1).$$

Eftersom $n < 3$ är de enda möjligheterna $(n, g) = (1, 4)$ eller $(n, g) = (2, 2)$. G är en Eulergraf omm samtliga noder har jämnt gradtal vilket de har i de båda möjliga alternativen. Svaret är alltså: Ja.

(b) Med i = antal icke-medlemmar och m = antal medlemmar söker vi de icke-negativa heltalslösningarna till den Diofantiska ekvationen

$$140i + 100m = 2000 \Leftrightarrow 7i + 5m = 100.$$

Den allmänna lösningen är $(i, m) = (-200+5n, 300-7n)$ där $40 \leq n \leq 42$ ger de icke-negativa heltalslösningarna. Eftersom $m < (i + m)/2$ är det enda alternativet $n = 42$ vilket ger $m = 6$.

6. (a) Om p och q är två olika primtal är $\phi(pq) = (p-1)(q-1)$. Eftersom $51 = 17 \cdot 3$ (dvs en produkt av två olika primtal) får vi direkt att $\phi(51) = (17 - 1)(3 - 1) = 32$.

(b) Se föreläsningen Restklassaritmetik sid 19-21. Hemliga nyckeln $d = 5$ vilket ger $M = 2^5 \mod 51 = 32$.