HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren

Envariabelanalys
Uppgiftspaket 6
8 december 2025

För varje uppgift krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Korrekt löst uppgift ger 0.25 bonuspoäng.

1. Lös begynnelsevärdesproblemen

   (a) $\begin{cases} y'' + 3y' + 2y = 2(x^2 + x), \\ y(0) = 1, y'(0) = -1. \end{cases}$

   (b) $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 2(3x - 1)e^{2x}, \\ y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$

   (c) $\begin{cases} y'' - y = 4xe^{-x} + 3x^2 - 2x + 2, \\ y(0) = 2, y'(0) = -1. \end{cases}$

   (d) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = 4xe^x \cos 2x, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$

2. Beräkna gränsvärdena

   (a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1-x)\cos x + e^x - 2}{\sin x - \arctan x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \ln(1 + x^2) - 1}{\cos 2x + 2x \sin x - 1}$

   (c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x} - e^x - \arctan x + \sin x}{(1 + 2x)^{3/2} - 3\sin x - \cos x - 2x^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{\cos x} - e\cos x}{x(\sqrt{1 - x^3} - 1)}$

3. (a) Funktionen $y(x)$ uppfyller differentialekvationen

   $$\begin{cases} y' + y^2 - 2y = 0, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

   Bestäm Taylorpolynomet av ordning 3 till $y(x)$ kring $x = 1$ och utnyttja detta för att beräkna ett närmevärde till $y(1.2)$.

   (b) Använd Maclaurinutvecklingen av ordning 6 till e^{x^2} för att bestämma ett approximativt värde på integralen

   $$\int_0^{1/4} e^{x^2}\,dx.$$

   Visa sedan att approximationen har minst tre korrekta decimaler.
   Anm: $x \approx y$ med n korrekta decimaler innebär att

   $$|x - y| \leqslant 0.5 \cdot 10^{-n}$$

   dvs felets storlek är högst en halv enhet i n:te decimalen.

   (c) Ett välkänt fenomen i högskolekretsar är att så fort en kurs är avslutad börjar studenterna glömma bort det de lärt sig under kursen. Fenomenet är extra tydligt efter avslutade kurser i envariabelanalys. Enligt Ebbinghaus modell är den hastighet med vilken en student glömmer kursinnehållet proportionell mot differensen mellan innehållet som studenten för tillfället kommer ihåg och en positiv konstant.

   Låt $y(t)$ vara den andel av det ursprungliga innehållet som studenten kommer ihåg tiden t veckor efter avslutad kurs. Ställ upp en differentialekvation för funktionen $y(t)$ och lös denna. Beskriv också vad eventuella konstanter i lösningen symboliserar.

   (d) Ryktesingenjören Kajsa har följande modell för ryktesspridning i en grupp: Hastigheten med vilken ett rykte sprids är proportionell mot produkten av den andel av gruppen som hört ryktet och den andel som inte hört det.

   En liten stad i södra Sverige har 1000 invånare. Kl 08.00 på julafton har 80 personer hört det osanna och illasinnade ryktet att tomten inte finns. Vid lunch har halva stan hört det. Vid vilken tidpunkt har 90% av invånarna i stan hört ryktet om man antar att ryktesspridningen följer Kajsas modell?

Vänd!

4. (a) Enligt Einsteins speciella relativitetsteori ges massan m och totala energin E hos en partikel som rör sig med konstant hastighet v av

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{och} \quad E = mc^2$$

där m_0 är partikelns vilomassa och c ljusets hastighet i vakuum. Partikelns kinetiska energi är alltså

$$E_k(v) = mc^2 - m_0c^2$$

i. Bestäm första icke-försvinnande termen i Maclaurinutvecklingen av $E_k(v)$.

ii. Visa att om $E_k(v)$ approximeras med uttrycket i (i) blir relativa felet (felet/approximationen) mindre än 10^{-6} för $0 \leq v \leq \dfrac{c}{1000}$.

(b) Ingenjörstomten Pelle är julstressad och hinner inte dricka upp det glas med öl han fick hos en snäll familj där han delade ut julklappar. Då Pelle försvinner ut i julnatten är öldjupet i glaset 10 cm. Ölen står sedan orörd i fem dagar och då har öldjupet sjunkit till 9 cm pga avdunstning. Hur lång tid tar det innan all öl har avdunstat?

Vätska avdunstar med en hastighet som är proportionell mot vätskeytans area.

(c)* En otrevlig men icke dödlig magsjukdom härjar i en stad med N invånare. Magsjukans härjningar i staden beskrivs mycket väl av magingenjören Knuts modell: Den hastighet (i antal personer per dag) med vilken friska insjuknar är proportionell mot produkten av antalet friska och antalet sjuka i staden vid den aktuella tidpunkten. Proportionalitetskonstanten är $\alpha = 0.01/N$.

Den hastighet med vilken sjuka personer tillfrisknar är proportionell mot antalet sjuka personer. Proportionalitetskonstanten är här $\beta = 0.009$.

i. Ställ upp en differentialekvation som beskriver antalet sjuka i staden som funktion av tiden och lös denna.

ii. Skissera kurvan som beskriver hur antalet sjuka förändras med tiden om man antar att endast ett litet antal var sjuka från början.

iii. Hur många procent av invånarna i staden kommer att vara sjuka efter mycket lång tid?

(d)* Hundingenjören Berit är ute på ett fält och tränar sin hund Kalle. Plötsligt får Kalle se kaninen Karin som springer med konstant fart längs en rät linje på fältet. Vid denna tidpunkt är längden av sträckan mellan Kalle och Karin l och sträckan bildar rät vinkel med den linje längs vilken Karin springer. Eftersom Berit har dålig disciplin på sin hund börjar Kalle nu springa med samma konstanta fart som Karin och hela tiden i riktning mot henne.

i. Bestäm den kurva längs vilken Kalle springer.

ii. Kalle är inte världens smartaste hund och förstår inte att han aldrig hinner ifatt Karin. (Varför?) Men antag att Kalle från start lägger i överväxeln och hela tiden springer dubbelt så fort som Karin. Var hinner han då upp henne?

iii. Antag att Kalle är trött och bara springer hälften så fort som Karin. Hur nära Karin kommer han och var befinner sig Kalle och Karin då?

*Användning av Mathematica för beräkningar i uppgifterna 4c och 4d rekommenderas.