HÖGSKOLAN I HALMSTAD
Akademin för informationsteknologi
Mikael Hindgren
035-167220

Tentamensskrivning
MA2001/MA2049 Envariabelanalys 6 hp
Onsdagen den 26 mars 2025
Skrivtid: 15.00-20.00

Inga hjälpmedel. *Fyll i omslaget fullständigt och skriv anonymiseringskod på varje papper. Skriv läsligt och högst en uppgift per sida. För att erhålla full poäng på ett problem krävs en kortfattad men fullständig motivering samt ett tydligt och exakt angivet svar på enklaste form. Betygsgränserna är 15 p för 3 och godkänd, 20 p för 4 och 25 p för 5.*

1. (a) Beräkna gränsvärdet *(2p)*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}+(x+1)\cos(x)-2}{\arctan(x)-\sin(x)}.$$

   (b) Beräkna integralen *(3p)*

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}\,dx\,.$$

2. Bestäm eventuella lokala extrempunkter och terasspunkter till

$$f(x)=\frac{2x^2+x+1}{x+1}$$

   samt eventuella asymptoter till kurvan $y=f(x)$. Rita också kurvan i grova drag. *(5p)*

3. Lös begynnelsevärdesproblemet *(5p)*

$$\begin{cases} y''-3y'+2y=2xe^{x},\\ y(0)=0,\ y'(0)=-2.\end{cases}$$

4. (a) Utgå från derivatans definition och härled derivatan av $\ln x$. *(1p)*

   (b) Bestäm den lösning $y(x)$ till differentialekvationen

$$y'=2xe^{-y}\,,$$

   för vilken $\lim_{x\to 0}\frac{y(x)}{x^2}=1$. *(4p)*

5. (a) Visa att den generaliserade integralen

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$$

   är konvergent. *(1p)*

   (b) Maclaurinutveckla $\cos x$ till och med ordning 3 och utnyttja polynomet för att beräkna ett approximativt värde på den generaliserade integralen i (a). *(2p)*

   (c) Visa att att felet i approximationen i (b) är mindre än 0.01. *(2p)*

6. (a) Formulera Medelvärdessatsen och förklara innebörden av den med hjälp av en figur. *(1p)*

   (b) Bakingenjören Pelle bakar en god kaka. När Pelle tar ut kakan från ugnen är dess temperatur 242 °C och han låter den därför svalna en stund i ett stort rum som har temperaturen 18 °C. Efter 6 minuter är kakans temperatur 130 °C dvs fortfarande för varm för att ätas. Vad är kakans temperatur efter 18 minuter?

   Vi kan anta att Newtons avsvalningslag gäller dvs avsvalningshastigheten är proportionell mot differensen mellan kakans temperatur och omgivningens temperatur. *(4p)*

Lycka till!

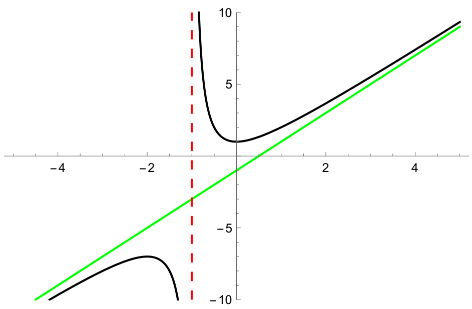
Kortfattade motiveringar och svar

1. (a) Maclaurinutveckla täljare och nämnare t.o.m. ordning 3. Svar: 4.

   (b) Partialbråksuppdela integranden:

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3+x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{t}{1+x^2}\right) dx = \left[\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right]_1^2 = \frac{\ln\left(\frac{8}{5}\right)}{2}.$$

2. Lokal maximipunkt $f(-2) = -7$ och lokal minimipunkt $f(0) = 1$. Lodrät asymptot: $x = -1$. Sned asymptot: $y = 2x - 1$ då $x \to \pm\infty$.



Figur 1: Kurvan $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x+1}$.

3. Allmän lösning: $y(x) = C_1e^x + C_2e^{2x} - (x^2+2x)e^x$. Sökt lösning: $y(x) = -(x^2+2x)e^x$.

4. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1.*

   (b) Separabel differentialekvation av 1:a ordningen. Allmän lösning: $y(x) = \ln(x^2+C)$. Sökt lösning: $y(x) = \ln(x^2+1)$.

5. (a) För $x > 0$ är

$$0 < \frac{\cos x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

   Eftersom $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ är konvergent omm $\alpha < 1$ är också den sökta integralen konvergent.

   (b) Utveckling av $\cos x$ t.o.m. ordning 3 ger

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx \approx \int_0^1 \frac{1-\frac{x^2}{2}}{\sqrt{x}}dx = \frac{9}{5} = 1.8.$$

   (c) Felet ges av

$$\int_0^1 \frac{R_3(x)}{\sqrt{x}}dx = \int_0^1 \frac{\frac{x^4\cos(\xi)}{24}}{\sqrt{x}}dx \leq \int_0^1 \frac{\frac{x^4}{24}}{\sqrt{x}}dx = \frac{1}{108} < \frac{1}{100} = 0.01.$$

6. (a) Se föreläsningen *Derivator, del 1.*

   (b) Kakans temperatur vid tiden t beskrivs av Newtons avsvalningslag:

$$T'(t) = k(T(t) - T_0)$$

   där T_0 är omgivningens temperatur (konstant). De givna parametrarna ger lösningen

$$T(t) = 18 + 7\cdot 2^{5-t/6} \Rightarrow T(18) = 18 + 7\cdot 2^2 = 46°\text{C}.$$