

MA2047 Algebra och diskret matematik

Något om funktioner och relationer

Mikael Hindgren



HÖGSKOLAN
I HALMSTAD

29 september 2025

Funktionsbegreppet

Exempel 1

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x - 3}$ och $y = \sin x$ är funktioner.

Exempel 2

Kan följande samband representeras av en funktion?

- ❶ För varje fingeravtryck finns exakt en människa.
- ❷ För varje människa med fingrar finns (minst) ett fingeravtryck.

❸ a)

x	y
1	2
2	3
3	5
4	4

b)

x	y
1	± 1
9	± 5
6	± 9
8	± 7

c)

x	y
± 1	1
± 9	5
± 6	9
± 8	7

- ❹ Billackeringsfirma: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Röd eller grön bil lackeras svart} \\ \text{Bilar i andra färger lackeras vita} \end{array} \right.$

Funktionsbegreppet

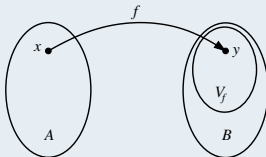
Vad är en funktion?

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas **en funktion från A till B** :

$$f : A \rightarrow B$$

- A = funktionens **definitionsområde** (D_f) (alla tillåtna invärden)
- B = funktionens **målmängd** (den typ av värden funktionen producerar)
- V_f = funktionens **värdomängd** $= \{y \in B; y = f(x), x \in A\}$ (de värden funktionen faktiskt producerar)



Anm: B (Målmängden) är ett val man gör när man definierar funktionen $f : A \rightarrow B$ medan V_f (Värdomängden) är ett resultat som beror på A och funktionsregeln.

Exempel 2 (forts)

1 Funktion:

- $A = D_f = \{\text{Alla fingeravtryck}\}$
- $B = \{\text{Alla människor}\}$
- $V_f = \{\text{Alla människor med finger}\}$

2 Ej funktion.

3 a) Funktion:

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, \}, B = \mathbb{Z}$$

$$V_f = \{2, 3, 5, 4\}$$

b) Ej funktion.

c) Funktion:

$$D_f = \{\pm 1, \pm 9, \pm 6, \pm 8\}$$

$$B = \mathbb{Z}, V_f = \{1, 5, 9, 7\}$$

4 Funktion:

$$D_f = \{\text{Alla bilar}\}$$

$$B = \{\text{Alla bilar}\}$$

$$V_f = \{\text{Alla svarta och vita bilar}\}$$

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas **en funktion från A till B** :

$$f : A \rightarrow B$$

A = funktionens **definitionsområde** (D_f)

B = funktionens **målmängd**

V_f = funktionens **värdomängd** $= \{y \in B; y = f(x), x \in A\}$



1 För varje fingeravtryck finns exakt en människa.

2 För varje människa med finger finns (minst) ett fingeravtryck.

x	y	x	y	x	y
1	2	1	± 1	± 1	1
2	3	9	± 5	± 9	5
3	5	6	± 9	± 6	9
4	4	8	± 7	± 8	7

3 a)

4

Billackeringsfirma: $\begin{cases} \text{Röd eller grön bil lackeras svart} \\ \text{Bilar i andra färger lackeras vita} \end{cases}$

Exempel 3

$$f(x) = \sqrt{x-3}, \quad D_f = [3, \infty), \quad B = \mathbb{R}, \quad V_f = [0, \infty)$$

Olika beteckningar för samma funktion:

- $f : x \rightarrow \sqrt{x-3}, x \geq 3$
- $y = \sqrt{x-3}, x \geq 3$
- $f(\phi) = \sqrt{\phi-3}, \phi \geq 3$
- $f() = \sqrt{()-3}, D_f = [3, \infty)$

Anm:

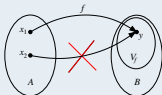
- Ofta anges inte definitionsmängden och då är D_f den största mängd för vilket funktionsuttrycket har mening.
Skriver vi $f(x) = \frac{1}{x}$ innebär det att $V_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$.
- Två funktioner $f : A \rightarrow B$ och $g : C \rightarrow D$ är lika omm $A = C$, $B = D$ och $f(x) = g(x)$ för alla $x \in A$.

Injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner

Definition 2

En funktion $f : A \rightarrow B$ kallas

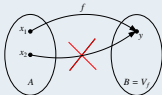
- **Injektiv** om det för varje $y \in B$ finns högst ett $x \in A$.



- **Surjektiv** om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$.



- **Bijektiv** om det för varje $y \in B$ finns exakt ett $x \in A$.



Anm: f bijektiv $\Leftrightarrow f$ injektiv och surjektiv.

Injektiva, surjektiva och bijektiva funktioner

Exempel 4

$f(x) = x^2$. Är f injektiv, surjektiv eller bijektiv om

- 1 $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R}$?
- 2 $A = \mathbb{R}, B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$?
- 3 $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, B = \mathbb{R}$?
- 4 $A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\}$?

Lösning:

- 1 Inget av dem.
- 2 Surjektiv ($B = V_f$).
- 3 Injektiv ($V_f \subset B$).
- 4 Injektiv och surjektiv \Rightarrow bijektiv ($B = V_f$).

En funktion $f : A \rightarrow B$ kallas

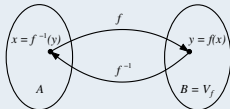
- **Injektiv** om det för varje $y \in B$ finns högst ett $x \in A$.
- **Surjektiv** om det för varje $y \in B$ finns minst ett $x \in A$.
- **Bijektiv** om det för varje $y \in B$ finns exakt ett $x \in A$.

Invers funktion

Definition 3

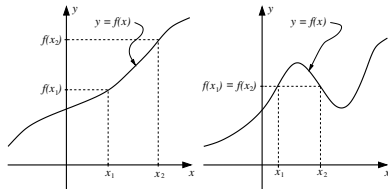
En bijektiv funktion $f : A \rightarrow B$ kallas **inverterbar**. Den funktion som till varje $y \in B$ ordnar ett $x \in A$ sådant att $f(x) = y$ kallas för **inversen till f** och betecknas **f^{-1}** :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$



Av definitionen följer att om f är inverterbar så gäller följande:

- $D_{f^{-1}} = V_f = B$ och $V_{f^{-1}} = D_f = A$
- $f^{-1}(f(x)) = x$ för alla $x \in D_f$
- $f(f^{-1}(y)) = y$ för alla $y \in V_f$
- $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$



(a) f inverterbar

(b) f ej inverterbar

Anm: Om funktionen är injektiv men inte surjektiv (dvs inte bijektiv) så existerar en invers men den är bara definierad på V_f .

Exempel 5

Är funktionen $f(x) = x^2$ inverterbar?

Lösning:

$$x_1 = 1, x_2 = -1 \Rightarrow f(x_1) = 1^2 = 1, f(x_2) = (-1)^2 = 1$$

$\therefore x_1 \neq x_2 \nRightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ dvs f är inte inverterbar.

Invers funktion

Exempel 6

Undersök om $f(x) = x^2 - 2x - 3$, $x \geq 1$, är inverterbar och bestäm i så fall inversen $f^{-1}(x)$.

Lösning:

Sätt $y = f(x)$ och lös ut x :

$$y = x^2 - 2x - 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - (3 + y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{4 + y}$$

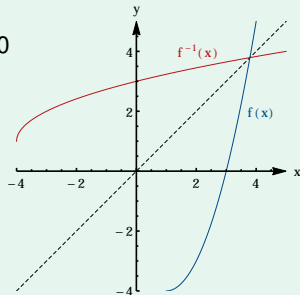
$$x \geq 1 \Rightarrow x = 1 + \sqrt{4 + y}$$

$$\therefore x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

dvs f är inverterbar.

Byter vi variabel från y till x får vi

$$f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{4 + x}, \quad x \geq -4$$



Anm: Kurvan $y = f^{-1}(x)$ är spegelbilden av $y = f(x)$ i linjen $y = x$

Exempel 7

Kan $y \geq x$, $A = B = \mathbb{R}$, representeras av en funktion $f : A \rightarrow B$?

Nej, för varje $x \in A$ finns oändligt många $y \in B$ som uppfyller $y \geq x$.

Definition 1

En regel som för varje element x i en mängd A ordnar exakt ett element y i en mängd B kallas **en funktion från A till B** :

$$f : A \rightarrow B$$



Relationer mellan tal, t ex $y \geq x$, kan inte beskrivas inom ramen för funktionsbegreppet.

Relationer

I matematiken är en relation något som gäller (eller inte gäller) mellan två eller flera objekt:

- Sara är mamma till Kalle
- Kalle är släkt med Sara
- Sara och Kalle bor i samma land
- a är större än eller lika med b
- a ligger mellan b och c
- b är delbart med a

Definition 4

Om A och B är mängder så är den **Cartesiska produkten**

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

Exempel 8

$$A = \{i, j, k\}, B = \{m, n\} \Rightarrow A \times B = \{(i, m), (i, n), (j, m), (j, n), (k, m), (k, n)\}$$

Relationer

Definition 5

En (binär) **relation** \mathcal{R} från A till B är en delmängd av $A \times B$.

Beteckning: $(x, y) \in \mathcal{R} \Leftrightarrow x \mathcal{R} y$

Exempel 9

- $A = \{a, c, k, l\}$
- $B = A$
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ kommer före y i alfabetet

$\Rightarrow \mathcal{R} = \{(a, c), (a, k), (a, l), (c, k), (c, l), (k, l)\}$

Exempel 10

- $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
- $B = A$
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \mid y$

$\Rightarrow \mathcal{R} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$

Om $A = B$ är \mathcal{R} **homogen** och man säger att \mathcal{R} är en relation på A .

Definition 6

En relation \mathcal{R} på A kallas

- **Reflexiv** om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- **Symmetrisk** om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- **Antisymmetrisk** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
- **Transitiv** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$
- **Total** om $x \mathcal{R} y \vee y \mathcal{R} x \quad \forall x, y \in A$

Exempel 11

Är någon av relationerna nedan symmetrisk, antisymmetrisk eller transitiv?

- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ är släkt* med y : Symmetrisk, transitiv
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ är mamma till y : Inget av dem
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$: Antisymmetrisk, transitiv
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \neq y$: Symmetrisk
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \subseteq y$: Antisymmetrisk, transitiv

*En släkt avser här en eller flera familjer med gemensam förfader eller -moder och släktskap mellan två personer innebär att de tillhör samma släkt.

Ekvivalensrelationer

Definition 7

En **ekvivalensrelation** på A är reflexiv, symmetrisk och transitiv

Exempel 12

- $A =$ Sveriges befolkning
- $B = A$
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ känner y

Är \mathcal{R} en ekvivalensrelation?

En relation \mathcal{R} på A kallas

- **Reflexiv** om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- **Symmetrisk** om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- **Transitiv** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- x känner x för alla $x \in A \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
- x känner $y \Rightarrow y$ känner $x \Rightarrow \mathcal{R}$ är symmetrisk
- x känner $y \wedge y$ känner $z \not\Rightarrow x$ känner $z \Rightarrow \mathcal{R}$ är inte transitiv

$\therefore \mathcal{R}$ är inte en ekvivalensrelation.

Ekvivalensrelationer

Exempel 13

- $A =$ Sveriges befolkning
- $B = A$
- $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x$ är släkt med y

Är \mathcal{R} en ekvivalensrelation?

En relation \mathcal{R} på A kallas

- **Reflexiv** om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- **Symmetrisk** om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- **Transitiv** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- x är släkt med x för alla x i $A \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
 - x är släkt med $y \Rightarrow y$ är släkt med $x \Rightarrow \mathcal{R}$ är symmetrisk
 - x är släkt med $y \wedge y$ är släkt med $z \Rightarrow x$ är släkt med $z \Rightarrow \mathcal{R}$ är transitiv
- $\therefore \mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Anm: Att vara släkt med = being related

Ekvivalensrelationer

Exempel 14

Är $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow n \mid x - y$, $A = \mathbb{Z}$, en ekvivalensrelation?

En relation \mathcal{R} på A kallas

- **Reflexiv** om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- **Symmetrisk** om $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- **Transitiv** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- $n \mid x - x \quad \forall x \in \mathbb{Z} \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
 - $n \mid x - y \Rightarrow n \mid y - x \Rightarrow \mathcal{R}$ är symmetrisk
 - $n \mid x - y \wedge n \mid y - z \Rightarrow n \mid x - y + y - z \Rightarrow n \mid x - z \Rightarrow \mathcal{R}$ är transitiv
- $\therefore \mathcal{R}$ är en ekvivalensrelation.

Relationen \mathcal{R} ovan är kongruens modulo n :

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow n \mid x - y$$

Anm: Ekvivalensrelationer kan jämföras med likhetstecken.

Partiella ordningsrelationer

Definition 8

En **partiell ordningsrelation** på A är reflexiv, antisymmetrisk och transitiv.

Exempel 15

Är $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \leq y$, $A = \mathbb{R}$, en partiell ordningsrelation?

En relation \mathcal{R} på A kallas

- **Reflexiv** om $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in A$
- **Antisymmetrisk** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} x \Rightarrow x = y$
- **Transitiv** om $x \mathcal{R} y \wedge y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

- $x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{R}$ är reflexiv
- $x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y \Rightarrow \mathcal{R}$ är antisymmetrisk
- $x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z \Rightarrow \mathcal{R}$ är transitiv

$\therefore \mathcal{R}$ är en partiell ordningsrelation.

Partiella ordningsrelationer

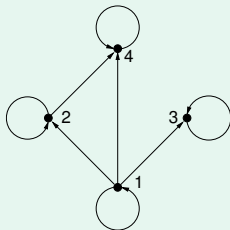
Hassediagram

Exempel 16

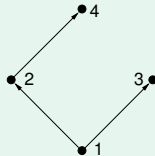
Partiell ordningsrelation:

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \mid y, \quad A = \{1, 2, 3, 4\}$$

- $\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$
- \mathcal{R} reflexiv: $x \mid x$ för alla $x \in A$
- \mathcal{R} antisymmetrisk: $x \mid y \wedge y \mid x \Rightarrow x = y$
- \mathcal{R} transitiv: $x \mid y \wedge y \mid z \Rightarrow x \mid z$



Relationsgraf



Hassediagram: Redundant information borttagen

Partiella ordningsrelationer

Maximala element och största element

Definition 9

Ett element $a \in A$ kallas

- **Maximalt** om $x \neq a \Rightarrow a \not\mathcal{R} x$
- **Minimalt** om $x \neq a \Rightarrow a \mathcal{R} x$
- Ett **största element** i A om $x \mathcal{R} a \quad \forall x \in A$
- Ett **minsta element** i A om $x \mathcal{R} a \quad \forall x \in A$

Anm: Ett **största/minsta** element är alltid **maximalt/minimalt**.

Partiella Ordningsrelationer

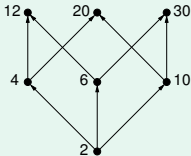
Maximala element och största element

Exempel 17

\mathcal{R} binär relation på $A = \{2, 4, 6, 10, 12, 20, 30\}$. $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \mid y$

- 1 Rita Hassediagram.
- 2 Bestäm alla maximala och minimala element.
- 3 Bestäm största och minsta element.

Lösning:



Ett element $a \in A$ kallas

- **Maximalt** om $x \neq a \Rightarrow a \not\mathcal{R} x$
- **Minimalt** om $x \neq a \Rightarrow a \mathcal{R} x$
- Ett **största element** i A om $x \mathcal{R} a \quad \forall x \in A$
- Ett **minsta element** i A om $x \mathcal{R} a \quad \forall x \in A$

- 1
- 2 12, 20 och 30 delar inte något av de övriga \Rightarrow De är maximala element.
2 är det enda tal som delar alla andra \Rightarrow 2 är minimalt element.
- 3 Det finns inget tal som alla delar \Rightarrow Största element saknas.
Inget av de övriga talen delar 2 \Rightarrow 2 är minsta element.