

# How Logic Works: Solutions to Problems

Hans Halvorson

November 3, 2025

## Chapter 3

### Exercise 3.1

1.  $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

1	(1)	$P$	A
2	(2)	$Q$	A
1,2	(3)	$P \wedge Q$	1,2 $\wedge I$
1	(4)	$Q \rightarrow (P \wedge Q)$	2,3 CP

2.  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$

1	(1)	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P$	A
1	(3)	$P \rightarrow Q$	1 $\wedge E$
1	(4)	$P \rightarrow R$	1 $\wedge E$
1,2	(5)	$Q$	3,2 MP
1,2	(6)	$R$	4,2 MP
1,2	(7)	$Q \wedge R$	5,6 $\wedge I$
1	(8)	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	2,7 CP

3.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$Q$	A
3	(3)	$P$	A
1,3	(4)	$Q \rightarrow R$	3,1 MP
1,2,3	(5)	$R$	4,2 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$Q \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP

4.  $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	$P$	A
1,3	(4)	$Q$	1,3 MP
1,2,3	(5)	$R$	2,4 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP

5.  $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q$

1	(1)	$P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	$P$	A
1,2	(3)	$P \rightarrow Q$	1,2 MP
1,2	(4)	$Q$	3,2 MP
1	(5)	$P \rightarrow Q$	2,4 CP

6.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge E$
2	(4)	$Q$	2 $\wedge E$
1,2	(5)	$Q \rightarrow R$	1,3 MP
1,2	(6)	$R$	5,4 MP
1	(7)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	2,6 CP

7.  $(P \vee Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$

1	(1)	$(P \vee Q) \rightarrow R$	A
2	(2)	$P$	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 $\vee I$
1,2	(4)	$R$	1,3 MP
1	(5)	$P \rightarrow R$	2,4 CP

8.  $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$

1	(1)	$\neg P$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge E$
	(4)	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg(P \wedge Q)$	4,1 MT

9.  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	$P$	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 $\vee I$
	(4)	$P \rightarrow (P \vee Q)$	2,3 CP
1	(5)	$\neg P$	4,1 MT
6	(6)	$Q$	A
6	(7)	$P \vee Q$	6 $\vee I$
	(8)	$Q \rightarrow (P \vee Q)$	6,7 CP
1	(9)	$\neg Q$	8,1 MT
1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	5,9 $\wedge I$

10.  $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

1	(1)	$P$	A
2	(2)	$P \rightarrow \neg P$	A
1,2	(3)	$\neg P$	2,1 MP
1	(4)	$(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg\neg P$	1 DN
1	(6)	$\neg(P \rightarrow \neg P)$	4,5 MT
	(7)	$P \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg P)$	1,6 CP
2	(8)	$\neg\neg(P \rightarrow \neg P)$	2 DN
2	(9)	$\neg P$	7,8 MT

### Exercise 3.4

1.  $P \rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$P \wedge \neg Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge E$
1,2	(4)	$Q$	1,3 MP
2	(5)	$\neg Q$	2 $\wedge E$
1,2	(6)	$Q \wedge \neg Q$	4,5 $\wedge I$
1	(7)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2,6 RA

2.  $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$	3 $\vee I$
2,3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	4,2 $\wedge I$
2	(6)	$\neg\neg P$	3,5 RA
2	(7)	$P$	6 DN
8	(8)	$\neg Q$	A
8	(9)	$\neg P \vee \neg Q$	8 $\vee I$
2,8	(10)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	9,2 $\wedge I$
2	(11)	$\neg\neg Q$	8,10 RA
2	(12)	$Q$	11 DN
2	(13)	$P \wedge Q$	7,12 $\wedge I$
1,2	(14)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	13,1 $\wedge I$
1	(15)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,14 RA
1	(16)	$\neg P \vee \neg Q$	15 DN

3.  $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	$\neg Q$	A
4	(4)	$P$	A
2,4	(5)	$P \wedge \neg P$	2,4 $\wedge I$
2,4	(6)	$\neg\neg Q$	3,5 RA
2,4	(7)	$Q$	6 DN
2	(8)	$P \rightarrow Q$	4,7 CP
1,2	(9)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	8,1 $\wedge I$
1	(10)	$\neg\neg P$	2,9 RA
1	(11)	$P$	10 DN
12	(12)	$Q$	A
12	(13)	$P \rightarrow Q$	4,12 CP
1,12	(14)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	13,1 $\wedge I$
1	(15)	$\neg Q$	12,14 RA
1	(16)	$P \wedge \neg Q$	11,15 $\wedge I$

4.  $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	A
2	(2)	$P$	A
3	(3)	$Q$	A
2	(4)	$Q \rightarrow P$	3,2 CP
2	(5)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	4 VI
1,2	(6)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	5,1 $\wedge$ I
1	(7)	$\neg P$	2,6 RA
8	(8)	$\neg Q$	A
1,2	(9)	$P \wedge \neg P$	2,7 $\wedge$ I
1,2	(10)	$\neg\neg Q$	8,9 RA
1,2	(11)	$Q$	10 DN
1	(12)	$P \rightarrow Q$	2,11 CP
1	(13)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	12 VI
1	(14)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	13,1 $\wedge$ I
$\emptyset$	(15)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	1,14 RA
$\emptyset$	(16)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	15 DN

5.  $P \rightarrow (Q \vee R) \vdash (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \vee R)$	A
2	(2)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	A
3	(3)	$\neg P$	A
4	(4)	$P$	A
5	(5)	$\neg Q$	A
3,4	(6)	$P \wedge \neg P$	4,3 $\wedge$ I
3,4	(7)	$\neg\neg Q$	5,6 RA
3,4	(8)	$Q$	7 DN
3	(9)	$P \rightarrow Q$	4,8 CP
3	(10)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	9 VI
2,3	(11)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	10,2 $\wedge$ I
2	(12)	$\neg\neg P$	3,11 RA
2	(13)	$P$	12 DN
1,2	(14)	$Q \vee R$	1,13 MP
15	(15)	$Q$	A
15	(16)	$P \rightarrow Q$	4,15 CP
15	(17)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	16 VI
18	(18)	$R$	A
18	(19)	$P \rightarrow R$	4,18 CP
18	(20)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	19 VI
1,2	(21)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	14,15,17,18,20 $\vee$ E
1,2	(22)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	21,2 $\wedge$ I
1	(23)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	2,22 RA
1	(24)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	23 DN

6.  $(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q \vdash P \rightarrow \neg Q$

1	(1)	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q$	A
2	(2)	$P$	A
3	(3)	$Q$	A
2,3	(4)	$P \wedge Q$	2,3 $\wedge I$
1,2,3	(5)	$\neg Q$	1,4 MP
1,2,3	(6)	$Q \wedge \neg Q$	3,5 $\wedge I$
1,2	(7)	$\neg Q$	3,6 RA
1	(8)	$P \rightarrow \neg Q$	2,7 CP

## Chapter 6

### Exercise 6.8

1.  $\neg \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$

1	(1)	$\neg \exists x(Fx \wedge Gx)$	A
2	(2)	$Fa$	A
3	(3)	$Ga$	A
2,3	(4)	$Fa \wedge Ga$	2,3 $\wedge I$
2,3	(5)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	4 EI
1,2,3	(6)	$\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \neg \exists x(Fx \wedge Gx)$	5,1 $\wedge I$
1,2	(7)	$\neg Ga$	3,6 RA
1	(8)	$Fa \rightarrow \neg Ga$	2,7 CP
1	(9)	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	8 UI

2.  $\forall x Fx \vdash \exists x Fx$

1	(1)	$\forall x Fx$	A
1	(2)	$Fa$	1 UE
1	(3)	$\exists x Fx$	2 EI

3.  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fa \vdash \exists x Gx$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$Fa$	A
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,2	(4)	$Ga$	3,2 MP
1,2	(5)	$\exists x Gx$	4 EI

4.  $\neg Fa \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg Fa$	A
1	(2)	$Fa \rightarrow P$	1 negative paradox
1	(3)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	2 EI

5.  $\neg\forall x Fx \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg\forall x Fx$	A
2	(2)	$\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	A
3	(3)	$Fa \rightarrow P$	A
3	(4)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	3 EI
2,3	(5)	$\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	4,2 $\wedge I$
2	(6)	$\neg(Fa \rightarrow P)$	3,5 RA
2	(7)	$Fa$	6 material conditional
2	(8)	$\forall x Fx$	7 UI
1,2	(9)	$\forall x Fx \wedge \neg\forall x Fx$	8,1 $\wedge I$
1	(10)	$\neg\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	2,9 RA
1	(11)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	10 DN

6.  $\neg\exists x Fx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$\neg\exists x Fx$	A
2	(2)	$Fa$	A
3	(3)	$\neg Ga$	A
2	(4)	$\exists x Fx$	2 EI
1,2	(5)	$\exists x Fx \wedge \neg\exists x Fx$	4,1 $\wedge I$
1,2	(6)	$\neg\neg Ga$	3,5 RA
1,2	(7)	$Ga$	6 DN
1	(8)	$Fa \rightarrow Ga$	2,7 CP
1	(9)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	8 UI

## Exercise 6.11

1.  $\exists x Fx \vee \exists x Gx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$\exists x Fx \vee \exists x Gx$	A
2	(2)	$\exists x Fx$	A
3	(3)	$Fa$	A
3	(4)	$Fa \vee Ga$	3 $\vee I$
3	(5)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	4 EI
2	(6)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2,3,5 EE
7	(7)	$\exists x Gx$	A
8	(8)	$Ga$	A
8	(9)	$Fa \vee Ga$	8 $\vee I$
8	(10)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	9 EI
7	(11)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	7,8,10 EE
1	(12)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1,2,6,7,11 $\vee E$

2.  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg\exists x Gx \vdash \neg\exists x Fx$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$\neg \exists xGx$	A
3	(3)	$\exists xFx$	A
4	(4)	$Fa$	A
1	(5)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,4	(6)	$Ga$	5,4 MP
1,4	(7)	$\exists xGx$	6 EI
1,3	(8)	$\exists xGx$	3,4,7 EE
1,2,3	(9)	$\exists xGx \wedge \neg \exists xGx$	8,2 AI
1,2	(10)	$\neg \exists xFx$	3,9 RA

3.  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x \neg Gx \rightarrow \exists x \neg Fx$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$\exists x \neg Gx$	A
3	(3)	$\neg Ga$	A
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,3	(5)	$\neg Fa$	4,3 MT
1,3	(6)	$\exists x \neg Fx$	5 EI
1,2	(7)	$\exists x \neg Fx$	2,3,6 EE
1	(8)	$\exists x \neg Gx \rightarrow \exists x \neg Fx$	2,7 CP

4.  $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists x Fx \rightarrow P$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2)	$\exists x Fx$	A
3	(3)	$Fa$	A
1	(4)	$Fa \rightarrow P$	1 UE
1,3	(5)	$P$	4,3 MP
1,2	(6)	$P$	2,3,5 EE
1	(7)	$\exists x Fx \rightarrow P$	2,6 CP

5.  $P \wedge \exists x Fx \vdash \exists x(P \wedge Fx)$

1	(1)	$P \wedge \exists x Fx$	A
1	(2)	$P$	1 $\wedge E$
1	(3)	$\exists x Fx$	1 $\wedge E$
4	(4)	$Fa$	A
1,4	(5)	$P \wedge Fa$	2,4 AI
1,4	(6)	$\exists x(P \wedge Fx)$	5 EI
1	(7)	$\exists x(P \wedge Fx)$	3,4,6 EE

# Chapter 7

## Exercise 7.1

Here the proof is lengthened because of the strictness of the  $=$  rules. From  $a = c$  and  $b = c$ , we cannot immediately apply  $=E$  to get  $a = b$ .

1	(1)	$\exists x \forall y (Py \rightarrow y = x)$	A
2	(2)	$Pa \wedge Pb$	A
3	(3)	$\forall y (Py \rightarrow y = c)$	A
3	(4)	$Pa \rightarrow a = c$	3 UE
3	(5)	$Pb \rightarrow b = c$	3 UE
2	(6)	$Pa$	2 $\wedge E$
2	(7)	$Pb$	2 $\wedge E$
2,3	(8)	$a = c$	4,6 MP
2,3	(9)	$b = c$	5,7 MP
$\emptyset$	(10)	$b = b$	$=I$
2,3	(11)	$c = b$	10,9 $=E$
2,3	(12)	$a = b$	8,11 $=E$
1,2	(13)	$a = b$	1,3,12 EE
1	(14)	$(Pa \wedge Pb) \rightarrow a = b$	2,13 CP
1	(15)	$\forall y ((Pa \wedge Py) \rightarrow a = y)$	14 UI
1	(16)	$\forall x \forall y ((Px \wedge Py) \rightarrow x = y)$	15 UI

## Exercise 7.2

1	(1)	$Fa \wedge \forall x (Fx \rightarrow x = a)$	A
2	(2)	$Fb$	A
1	(3)	$\forall x (Fx \rightarrow x = a)$	1 $\wedge E$
1	(4)	$Fb \rightarrow b = a$	3 UE
1,2	(5)	$b = a$	4,2 MP
6	(6)	$b = a$	A
1	(7)	$Fa$	1 $\wedge E$
$\emptyset$	(8)	$b = b$	$=I$
6	(9)	$a = b$	8,6 $=E$
1,6	(10)	$Fb$	7,9 $=E$
1	(11)	$Fb \leftrightarrow b = a$	2,5,6,10 CP $\times 2$
1	(12)	$\forall x (Fx \leftrightarrow x = a)$	11 UI

1	(1)	$\forall x(Fx \leftrightarrow x = a)$	A
1	(2)	$Fa \leftrightarrow a = a$	1 UE
$\emptyset$	(3)	$a = a$	=I
1	(4)	$Fa$	2,3 MP
1	(5)	$Fb \leftrightarrow b = a$	1 UE
1	(6)	$Fb \rightarrow b = a$	5 $\wedge$ E
1	(7)	$\forall x(Fx \rightarrow x = a)$	6 UI
1	(8)	$Fa \wedge \forall x(Fx \rightarrow x = a)$	4,7 $\wedge$ I