

# How Logic Works: Solutions to Problems

Hans Halvorson

September 26, 2025

## Chapter 3

### Exercise 3.1

1.  $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

1	(1)	$P$	A
2	(2)	$Q$	A
1,2	(3)	$P \wedge Q$	1,2 $\wedge$ I
1	(4)	$Q \rightarrow (P \wedge Q)$	2,3 CP

2.  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$

1	(1)	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P$	A
1	(3)	$P \rightarrow Q$	1 $\wedge$ E
1	(4)	$P \rightarrow R$	1 $\wedge$ E
1,2	(5)	$Q$	3,2 MP
1,2	(6)	$R$	4,2 MP
1,2	(7)	$Q \wedge R$	5,6 $\wedge$ I
1	(8)	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	2,7 CP

3.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$Q$	A
3	(3)	$P$	A
1,3	(4)	$Q \rightarrow R$	3,1 MP
1,2,3	(5)	$R$	4,2 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$Q \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP

4.  $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	$P$	A
1,3	(4)	$Q$	1,3 MP
1,2,3	(5)	$R$	2,4 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP
5. $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q$			
1	(1)	$P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	$P$	A
1,2	(3)	$P \rightarrow Q$	1,2 MP
1,2	(4)	$Q$	3,2 MP
1	(5)	$P \rightarrow Q$	2,4 CP
6. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$			
1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge$ E
2	(4)	$Q$	2 $\wedge$ E
1,2	(5)	$Q \rightarrow R$	1,3 MP
1,2	(6)	$R$	5,4 MP
1	(7)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	2,6 CP
7. $(P \vee Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$			
1	(1)	$(P \vee Q) \rightarrow R$	A
2	(2)	$P$	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 $\vee$ I
1,2	(4)	$R$	1,3 MP
1	(5)	$P \rightarrow R$	2,4 CP
8. $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$			
1	(1)	$\neg P$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge$ E
	(4)	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg(P \wedge Q)$	4,1 MT
9. $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$			

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	$P$	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 $\vee$ I
	(4)	$P \rightarrow (P \vee Q)$	2,3 CP
1	(5)	$\neg P$	4,1 MT
6	(6)	$Q$	A
6	(7)	$P \vee Q$	6 $\vee$ I
	(8)	$Q \rightarrow (P \vee Q)$	6,7 CP
1	(9)	$\neg Q$	8,1 MT
1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	5,9 $\wedge$ I

10.  $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

1	(1)	$P$	A
2	(2)	$P \rightarrow \neg P$	A
1,2	(3)	$\neg P$	2,1 MP
1	(4)	$(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg\neg P$	1 DN
1	(6)	$\neg(P \rightarrow \neg P)$	4,5 MT
	(7)	$P \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg P)$	1,6 CP
2	(8)	$\neg\neg(P \rightarrow \neg P)$	2 DN
2	(9)	$\neg P$	7,8 MT

### Exercise 3.4

1.  $P \rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$P \wedge \neg Q$	A
2	(3)	$P$	2 $\wedge$ E
1,2	(4)	$Q$	1,3 MP
2	(5)	$\neg Q$	2 $\wedge$ E
1,2	(6)	$Q \wedge \neg Q$	4,5 $\wedge$ I
1	(7)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2,6 RA

2.  $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$	3 $\vee$ I
2,3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	4,2 $\wedge$ I
2	(6)	$\neg\neg P$	3,5 RA
2	(7)	$P$	6 DN
8	(8)	$\neg Q$	A
8	(9)	$\neg P \vee \neg Q$	8 $\vee$ I
2,8	(10)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	9,2 $\wedge$ I
2	(11)	$\neg\neg Q$	8,10 RA
2	(12)	$Q$	11 DN
2	(13)	$P \wedge Q$	7,12 $\wedge$ I
1,2	(14)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	13,1 $\wedge$ I
1	(15)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,14 RA
1	(16)	$\neg P \vee \neg Q$	15 DN

3.  $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	$\neg Q$	A
4	(4)	$P$	A
2,4	(5)	$P \wedge \neg P$	2,4 $\wedge$ I
2,4	(6)	$\neg\neg Q$	3,5 RA
2,4	(7)	$Q$	6 DN
2	(8)	$P \rightarrow Q$	4,7 CP
1,2	(9)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	8,1 $\wedge$ I
1	(10)	$\neg\neg P$	2,9 RA
1	(11)	$P$	10 DN
12	(12)	$Q$	A
12	(13)	$P \rightarrow Q$	4,12 CP
1,12	(14)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	13,1 $\wedge$ I
1	(15)	$\neg Q$	12,14 RA
1	(16)	$P \wedge \neg Q$	11,15 $\wedge$ I

4.  $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	A
2	(2)	$P$	A
3	(3)	$Q$	A
2	(4)	$Q \rightarrow P$	3,2 CP
2	(5)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	4 $\vee$ I
1,2	(6)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	5,1 $\wedge$ I
1	(7)	$\neg P$	2,6 RA
8	(8)	$\neg Q$	A
1,2	(9)	$P \wedge \neg P$	2,7 $\wedge$ I
1,2	(10)	$\neg\neg Q$	8,9 RA
1,2	(11)	$Q$	10 DN
1	(12)	$P \rightarrow Q$	2,11 CP
1	(13)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	12 $\vee$ I
1	(14)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	13,1 $\wedge$ I
$\emptyset$	(15)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	1,14 RA
$\emptyset$	(16)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	15 DN

5.  $P \rightarrow (Q \vee R) \vdash (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \vee R)$	A
2	(2)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	A
3	(3)	$\neg P$	A
4	(4)	$P$	A
5	(5)	$\neg Q$	A
3,4	(6)	$P \wedge \neg P$	4,3 $\wedge$ I
3,4	(7)	$\neg\neg Q$	5,6 RA
3,4	(8)	$Q$	7 DN
3	(9)	$P \rightarrow Q$	4,8 CP
3	(10)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	9 $\vee$ I
2,3	(11)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	10,2 $\wedge$ I
2	(12)	$\neg\neg P$	3,11 RA
2	(13)	$P$	12 DN
1,2	(14)	$Q \vee R$	1,13 MP
15	(15)	$Q$	A
15	(16)	$P \rightarrow Q$	4,15 CP
15	(17)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	16 $\vee$ I
18	(18)	$R$	A
18	(19)	$P \rightarrow R$	4,18 CP
18	(20)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	19 $\vee$ I
1,2	(21)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	14,15,17,18,20 $\vee$ E
1,2	(22)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	21,2 $\wedge$ I
1	(23)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	2,22 RA
1	(24)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	23 DN

6. $(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q \vdash P \rightarrow \neg Q$			
1	(1)	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q$	A
2	(2)	$P$	A
3	(3)	$Q$	A
2,3	(4)	$P \wedge Q$	2,3 $\wedge$ I
1,2,3	(5)	$\neg Q$	1,4 MP
1,2,3	(6)	$Q \wedge \neg Q$	3,5 $\wedge$ I
1,2	(7)	$\neg Q$	3,6 RA
1	(8)	$P \rightarrow \neg Q$	2,7 CP