

# How Logic Works: Solutions to Problems

Hans Halvorson

November 16, 2025

## Chapter 3

### Exercise 3.1

1.  $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

|     |     |                              |                |
|-----|-----|------------------------------|----------------|
| 1   | (1) | $P$                          | A              |
| 2   | (2) | $Q$                          | A              |
| 1,2 | (3) | $P \wedge Q$                 | 1,2 $\wedge$ I |
| 1   | (4) | $Q \rightarrow (P \wedge Q)$ | 2,3 CP         |

2.  $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$

|     |     |  |                |
|-----|-----|--|----------------|
| 1   | (1) | $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ | A              |
| 2   | (2) | $P$  | A              |
| 1   | (3) | $P \rightarrow Q$                            | 1 $\wedge$ E   |
| 1   | (4) | $P \rightarrow R$                            | 1 $\wedge$ E   |
| 1,2 | (5) | $Q$  | 3,2 MP         |
| 1,2 | (6) | $R$  | 4,2 MP         |
| 1,2 | (7) | $Q \wedge R$                                 | 5,6 $\wedge$ I |
| 1   | (8) | $P \rightarrow (Q \wedge R)$                 | 2,7 CP         |

3.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

|       |     |                                   |        |
|-------|-----|-----------------------------------|--------|
| 1     | (1) | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | A      |
| 2     | (2) | $Q$                               | A      |
| 3     | (3) | $P$                               | A      |
| 1,3   | (4) | $Q \rightarrow R$                 | 3,1 MP |
| 1,2,3 | (5) | $R$                               | 4,2 MP |
| 1,2   | (6) | $P \rightarrow R$                 | 3,5 CP |
| 1     | (7) | $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ | 2,6 CP |

4.  $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$
- |       |     |   |        |
|-------|-----|---|--------|
| 1     | (1) | $P \rightarrow Q$                                 | A      |
| 2     | (2) | $Q \rightarrow R$                                 | A      |
| 3     | (3) | $P$   | A      |
| 1,3   | (4) | $Q$   | 1,3 MP |
| 1,2,3 | (5) | $R$   | 2,4 MP |
| 1,2   | (6) | $P \rightarrow R$                                 | 3,5 CP |
| 1     | (7) | $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ | 2,6 CP |
5.  $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q$
- |     |     |                                   |        |
|-----|-----|-----------------------------------|--------|
| 1   | (1) | $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ | A      |
| 2   | (2) | $P$                               | A      |
| 1,2 | (3) | $P \rightarrow Q$                 | 1,2 MP |
| 1,2 | (4) | $Q$                               | 3,2 MP |
| 1   | (5) | $P \rightarrow Q$                 | 2,4 CP |
6.  $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$
- |     |     |                                   |              |
|-----|-----|-----------------------------------|--------------|
| 1   | (1) | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | A            |
| 2   | (2) | $P \wedge Q$                      | A            |
| 2   | (3) | $P$                               | 2 $\wedge$ E |
| 2   | (4) | $Q$                               | 2 $\wedge$ E |
| 1,2 | (5) | $Q \rightarrow R$                 | 1,3 MP       |
| 1,2 | (6) | $R$                               | 5,4 MP       |
| 1   | (7) | $(P \wedge Q) \rightarrow R$      | 2,6 CP       |
7.  $(P \vee Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$
- |     |     |                            |            |
|-----|-----|----------------------------|------------|
| 1   | (1) | $(P \vee Q) \rightarrow R$ | A          |
| 2   | (2) | $P$                        | A          |
| 2   | (3) | $P \vee Q$                 | 2 $\vee$ I |
| 1,2 | (4) | $R$                        | 1,3 MP     |
| 1   | (5) | $P \rightarrow R$          | 2,4 CP     |
8.  $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$
- |   |     |                              |              |
|---|-----|------------------------------|--------------|
| 1 | (1) | $\neg P$                     | A            |
| 2 | (2) | $P \wedge Q$                 | A            |
| 2 | (3) | $P$                          | 2 $\wedge$ E |
|   | (4) | $(P \wedge Q) \rightarrow P$ | 2,3 CP       |
| 1 | (5) | $\neg(P \wedge Q)$           | 4,1 MT       |
9.  $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$

|   |      |                            |                |
|---|------|----------------------------|----------------|
| 1 | (1)  | $\neg(P \vee Q)$           | A              |
| 2 | (2)  | $P$                        | A              |
| 2 | (3)  | $P \vee Q$                 | 2 $\vee$ I     |
|   | (4)  | $P \rightarrow (P \vee Q)$ | 2,3 CP         |
| 1 | (5)  | $\neg P$                   | 4,1 MT         |
| 6 | (6)  | $Q$                        | A              |
| 6 | (7)  | $P \vee Q$                 | 6 $\vee$ I     |
|   | (8)  | $Q \rightarrow (P \vee Q)$ | 6,7 CP         |
| 1 | (9)  | $\neg Q$                   | 8,1 MT         |
| 1 | (10) | $\neg P \wedge \neg Q$     | 5,9 $\wedge$ I |

10.  $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

|     |     |   |        |
|-----|-----|---|--------|
| 1   | (1) | $P$   | A      |
| 2   | (2) | $P \rightarrow \neg P$                      | A      |
| 1,2 | (3) | $\neg P$                                    | 2,1 MP |
| 1   | (4) | $(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$ | 2,3 CP |
| 1   | (5) | $\neg\neg P$                                | 1 DN   |
| 1   | (6) | $\neg(P \rightarrow \neg P)$                | 4,5 MT |
|     | (7) | $P \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg P)$  | 1,6 CP |
| 2   | (8) | $\neg\neg(P \rightarrow \neg P)$            | 2 DN   |
| 2   | (9) | $\neg P$                                    | 7,8 MT |

### Exercise 3.4

1.  $P \rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

|     |     |                         |                |
|-----|-----|-------------------------|----------------|
| 1   | (1) | $P \rightarrow Q$       | A              |
| 2   | (2) | $P \wedge \neg Q$       | A              |
| 2   | (3) | $P$                     | 2 $\wedge$ E   |
| 1,2 | (4) | $Q$                     | 1,3 MP         |
| 2   | (5) | $\neg Q$                | 2 $\wedge$ E   |
| 1,2 | (6) | $Q \wedge \neg Q$       | 4,5 $\wedge$ I |
| 1   | (7) | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | 2,6 RA         |

2.  $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

|     |      |  |                 |
|-----|------|--|-----------------|
| 1   | (1)  | $\neg(P \wedge Q)$                                     | A               |
| 2   | (2)  | $\neg(\neg P \vee \neg Q)$                             | A               |
| 3   | (3)  | $\neg P$   | A               |
| 3   | (4)  | $\neg P \vee \neg Q$                                   | 3 $\vee$ I      |
| 2,3 | (5)  | $(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ | 4,2 $\wedge$ I  |
| 2   | (6)  | $\neg\neg P$   | 3,5 RA          |
| 2   | (7)  | $P$  | 6 DN            |
| 8   | (8)  | $\neg Q$   | A               |
| 8   | (9)  | $\neg P \vee \neg Q$                                   | 8 $\vee$ I      |
| 2,8 | (10) | $(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ | 9,2 $\wedge$ I  |
| 2   | (11) | $\neg\neg Q$   | 8,10 RA         |
| 2   | (12) | $Q$  | 11 DN           |
| 2   | (13) | $P \wedge Q$   | 7,12 $\wedge$ I |
| 1,2 | (14) | $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$                 | 13,1 $\wedge$ I |
| 1   | (15) | $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$                         | 2,14 RA         |
| 1   | (16) | $\neg P \vee \neg Q$                                   | 15 DN           |

3.  $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$

|      |      |  |                  |
|------|------|--|------------------|
| 1    | (1)  | $\neg(P \rightarrow Q)$                          | A                |
| 2    | (2)  | $\neg P$   | A                |
| 3    | (3)  | $\neg Q$   | A                |
| 4    | (4)  | $P$  | A                |
| 2,4  | (5)  | $P \wedge \neg P$                                | 2,4 $\wedge$ I   |
| 2,4  | (6)  | $\neg\neg Q$                                     | 3,5 RA           |
| 2,4  | (7)  | $Q$  | 6 DN             |
| 2    | (8)  | $P \rightarrow Q$                                | 4,7 CP           |
| 1,2  | (9)  | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 8,1 $\wedge$ I   |
| 1    | (10) | $\neg\neg P$                                     | 2,9 RA           |
| 1    | (11) | $P$  | 10 DN            |
| 12   | (12) | $Q$  | A                |
| 12   | (13) | $P \rightarrow Q$                                | 4,12 CP          |
| 1,12 | (14) | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 13,1 $\wedge$ I  |
| 1    | (15) | $\neg Q$   | 12,14 RA         |
| 1    | (16) | $P \wedge \neg Q$                                | 11,15 $\wedge$ I |

4.  $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

|             |      |  |                 |
|-------------|------|--|-----------------|
| 1           | (1)  | $\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$   | A               |
| 2           | (2)  | $P$  | A               |
| 3           | (3)  | $Q$  | A               |
| 2           | (4)  | $Q \rightarrow P$  | 3,2 CP          |
| 2           | (5)  | $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$   | 4 $\vee$ I      |
| 1,2         | (6)  | $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$ | 5,1 $\wedge$ I  |
| 1           | (7)  | $\neg P$   | 2,6 RA          |
| 8           | (8)  | $\neg Q$   | A               |
| 1,2         | (9)  | $P \wedge \neg P$  | 2,7 $\wedge$ I  |
| 1,2         | (10) | $\neg\neg Q$   | 8,9 RA          |
| 1,2         | (11) | $Q$  | 10 DN           |
| 1           | (12) | $P \rightarrow Q$  | 2,11 CP         |
| 1           | (13) | $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$   | 12 $\vee$ I     |
| 1           | (14) | $((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$ | 13,1 $\wedge$ I |
| $\emptyset$ | (15) | $\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$   | 1,14 RA         |
| $\emptyset$ | (16) | $(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$   | 15 DN           |

5.  $P \rightarrow (Q \vee R) \vdash (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$

|     |      |  |                         |
|-----|------|--|-------------------------|
| 1   | (1)  | $P \rightarrow (Q \vee R)$   | A                       |
| 2   | (2)  | $\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$   | A                       |
| 3   | (3)  | $\neg P$   | A                       |
| 4   | (4)  | $P$  | A                       |
| 5   | (5)  | $\neg Q$   | A                       |
| 3,4 | (6)  | $P \wedge \neg P$  | 4,3 $\wedge$ I          |
| 3,4 | (7)  | $\neg\neg Q$   | 5,6 RA                  |
| 3,4 | (8)  | $Q$  | 7 DN                    |
| 3   | (9)  | $P \rightarrow Q$  | 4,8 CP                  |
| 3   | (10) | $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$   | 9 $\vee$ I              |
| 2,3 | (11) | $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$ | 10,2 $\wedge$ I         |
| 2   | (12) | $\neg\neg P$   | 3,11 RA                 |
| 2   | (13) | $P$  | 12 DN                   |
| 1,2 | (14) | $Q \vee R$   | 1,13 MP                 |
| 15  | (15) | $Q$  | A                       |
| 15  | (16) | $P \rightarrow Q$  | 4,15 CP                 |
| 15  | (17) | $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$   | 16 $\vee$ I             |
| 18  | (18) | $R$  | A                       |
| 18  | (19) | $P \rightarrow R$  | 4,18 CP                 |
| 18  | (20) | $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$   | 19 $\vee$ I             |
| 1,2 | (21) | $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$   | 14,15,17,18,20 $\vee$ E |
| 1,2 | (22) | $((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$ | 21,2 $\wedge$ I         |
| 1   | (23) | $\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$   | 2,22 RA                 |
| 1   | (24) | $(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$   | 23 DN                   |

|       |   |                                   |                |
|-------|---|-----------------------------------|----------------|
| 6.    | $(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q \vdash P \rightarrow \neg Q$ |                                   |                |
| 1     | (1)   | $(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q$ | A              |
| 2     | (2)   | $P$                               | A              |
| 3     | (3)   | $Q$                               | A              |
| 2,3   | (4)   | $P \wedge Q$                      | 2,3 $\wedge$ I |
| 1,2,3 | (5)   | $\neg Q$                          | 1,4 MP         |
| 1,2,3 | (6)   | $Q \wedge \neg Q$                 | 3,5 $\wedge$ I |
| 1,2   | (7)   | $\neg Q$                          | 3,6 RA         |
| 1     | (8)   | $P \rightarrow \neg Q$            | 2,7 CP         |

## Chapter 6

### Exercise 6.8

|       |   |   |                    |
|-------|---|---|--------------------|
| 1.    | $\neg \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$ |   |                    |
| 1     | (1)   | $\neg \exists x(Fx \wedge Gx)$                                | A                  |
| 2     | (2)   | $Fa$  | A                  |
| 3     | (3)   | $Ga$  | A                  |
| 2,3   | (4)   | $Fa \wedge Ga$  | 2,3 $\wedge$ I     |
| 2,3   | (5)   | $\exists x(Fx \wedge Gx)$                                     | 4 EI               |
| 1,2,3 | (6)   | $\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \neg \exists x(Fx \wedge Gx)$ | 5,1 $\wedge$ I     |
| 1,2   | (7)   | $\neg Ga$   | 3,6 RA             |
| 1     | (8)   | $Fa \rightarrow \neg Ga$                                      | 2,7 CP             |
| 1     | (9)   | $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$                           | 8 UI               |
| 2.    | $\forall xFx \vdash \exists xFx$  |   |                    |
| 1     | (1)   | $\forall xFx$   | A                  |
| 1     | (2)   | $Fa$  | 1 UE               |
| 1     | (3)   | $\exists xFx$   | 2 EI               |
| 3.    | $\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fa \vdash \exists xGx$                   |   |                    |
| 1     | (1)   | $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$                                | A                  |
| 2     | (2)   | $Fa$  | A                  |
| 1     | (3)   | $Fa \rightarrow Ga$   | 1 UE               |
| 1,2   | (4)   | $Ga$  | 3,2 MP             |
| 1,2   | (5)   | $\exists xGx$   | 4 EI               |
| 4.    | $\neg Fa \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$                            |   |                    |
| 1     | (1)   | $\neg Fa$   | A                  |
| 1     | (2)   | $Fa \rightarrow P$  | 1 negative paradox |
| 1     | (3)   | $\exists x(Fx \rightarrow P)$                                 | 2 EI               |

5.  $\neg\forall xFx \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

|     |      |  |                        |
|-----|------|--|------------------------|
| 1   | (1)  | $\neg\forall xFx$  | A                      |
| 2   | (2)  | $\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$                                    | A                      |
| 3   | (3)  | $Fa \rightarrow P$   | A                      |
| 3   | (4)  | $\exists x(Fx \rightarrow P)$  | 3 EI                   |
| 2,3 | (5)  | $\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg\exists x(Fx \rightarrow P)$ | 4,2 $\wedge$ I         |
| 2   | (6)  | $\neg(Fa \rightarrow P)$   | 3,5 RA                 |
| 2   | (7)  | $Fa$   | 6 material conditional |
| 2   | (8)  | $\forall xFx$  | 7 UI                   |
| 1,2 | (9)  | $\forall xFx \wedge \neg\forall xFx$                                 | 8,1 $\wedge$ I         |
| 1   | (10) | $\neg\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$                                | 2,9 RA                 |
| 1   | (11) | $\exists x(Fx \rightarrow P)$  | 10 DN                  |

6.  $\neg\exists xFx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

|     |     |                                      |                |
|-----|-----|--------------------------------------|----------------|
| 1   | (1) | $\neg\exists xFx$                    | A              |
| 2   | (2) | $Fa$                                 | A              |
| 3   | (3) | $\neg Ga$                            | A              |
| 2   | (4) | $\exists xFx$                        | 2 EI           |
| 1,2 | (5) | $\exists xFx \wedge \neg\exists xFx$ | 4,1 $\wedge$ I |
| 1,2 | (6) | $\neg\neg Ga$                        | 3,5 RA         |
| 1,2 | (7) | $Ga$                                 | 6 DN           |
| 1   | (8) | $Fa \rightarrow Ga$                  | 2,7 CP         |
| 1   | (9) | $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$       | 8 UI           |

7.  $\forall x\forall yRxy \vdash \exists xRxx$

|   |     |                         |      |
|---|-----|-------------------------|------|
| 1 | (1) | $\forall x\forall yRxy$ | A    |
| 1 | (2) | $\forall yRay$          | 1 UE |
| 1 | (3) | $Raa$                   | 2 UE |
| 1 | (4) | $\exists xRxx$          | 3 EI |

8.  $P \rightarrow Fa \vdash P \rightarrow \exists xFx$

|     |     |                             |        |
|-----|-----|-----------------------------|--------|
| 1   | (1) | $P \rightarrow Fa$          | A      |
| 2   | (2) | $P$                         | A      |
| 1,2 | (3) | $Fa$                        | 1,2 MP |
| 1,2 | (4) | $\exists xFx$               | 3 EI   |
| 1   | (5) | $P \rightarrow \exists xFx$ | 2,4 CP |

9.  $\exists xFx \rightarrow P \vdash \forall x(Fx \rightarrow P)$

|     |     |                               |        |
|-----|-----|-------------------------------|--------|
| 1   | (1) | $\exists xFx \rightarrow P$   | A      |
| 2   | (2) | $Fa$                          | A      |
| 2   | (3) | $\exists xFx$                 | 2 EI   |
| 1,2 | (4) | $P$                           | 1,3 MP |
| 1   | (5) | $Fa \rightarrow P$            | 2,4 CP |
| 1   | (6) | $\forall x(Fx \rightarrow P)$ | 5 UI   |

There is a typo here in the book: the direction  $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P$  cannot be proven without EE, which is only introduced in the next section.

10.  $\neg \exists xFx \vdash \forall x(Fx \rightarrow P)$

|     |     |                                       |                |
|-----|-----|---------------------------------------|----------------|
| 1   | (1) | $\neg \exists xFx$                    | A              |
| 2   | (2) | $Fa$                                  | A              |
| 2   | (3) | $\exists xFx$                         | 2 EI           |
| 1,2 | (4) | $\exists xFx \wedge \neg \exists xFx$ | 3,1 $\wedge$ I |
| 1   | (5) | $\neg Fa$                             | 2,4 RA         |
| 1   | (6) | $Fa \rightarrow P$                    | 5 neg paradox  |
| 1   | (7) | $\forall x(Fx \rightarrow P)$         | 6 UI           |

11.  $\neg \exists x(Fx \rightarrow P) \vdash \forall xFx \wedge \neg P$

|     |      |   |                        |
|-----|------|---|------------------------|
| 1   | (1)  | $\neg \exists x(Fx \rightarrow P)$                                    | A                      |
| 2   | (2)  | $Fa \rightarrow P$  | A                      |
| 2   | (3)  | $\exists x(Fx \rightarrow P)$   | 2 EI                   |
| 1,2 | (4)  | $\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg \exists x(Fx \rightarrow P)$ | 3,1 $\wedge$ I         |
| 1   | (5)  | $\neg(Fa \rightarrow P)$  | 2,4 RA                 |
| 1   | (6)  | $Fa \wedge \neg P$  | 5 material conditional |
| 1   | (7)  | $\neg P$  | 6 $\wedge$ E           |
| 1   | (8)  | $Fa$  | 6 $\wedge$ E           |
| 1   | (9)  | $\forall xFx$   | 8 UI                   |
| 1   | (10) | $\forall xFx \wedge \neg P$   | 9,7 $\wedge$ I         |

12.  $\forall xFx \rightarrow P \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$



|     |      |  |                 |
|-----|------|--|-----------------|
| 1   | (1)  | $\forall xFx \rightarrow P$  | A               |
| 2   | (2)  | $\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$                                    | A               |
| 3   | (3)  | $\neg Fa$  | A               |
| 3   | (4)  | $Fa \rightarrow P$   | 3 neg paradox   |
| 3   | (5)  | $\exists x(Fx \rightarrow P)$  | 4 EI            |
| 2,3 | (6)  | $\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg\exists x(Fx \rightarrow P)$ | 5,2 $\wedge$ I  |
| 2   | (7)  | $\neg\neg Fa$  | 3,6 RA          |
| 2   | (8)  | $Fa$   | 7 DN            |
| 2   | (9)  | $\forall xFx$  | 8 UI            |
| 1,2 | (10) | $P$  | 1,9 MP          |
| 1,2 | (11) | $Fb \rightarrow P$   | 10 pos paradox  |
| 1,2 | (12) | $\exists x(Fx \rightarrow P)$  | 11 EI           |
| 1,2 | (13) | $\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg\exists x(Fx \rightarrow P)$ | 12,2 $\wedge$ I |
| 1   | (14) | $\neg\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$                                | 2,13 RA         |
| 1   | (15) | $\exists x(Fx \rightarrow P)$  | 14 DN           |

### Exercise 6.11

1.  $\exists xFx \vee \exists xGx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$

|   |      |                                |                     |
|---|------|--------------------------------|---------------------|
| 1 | (1)  | $\exists xFx \vee \exists xGx$ | A                   |
| 2 | (2)  | $\exists xFx$                  | A                   |
| 3 | (3)  | $Fa$                           | A                   |
| 3 | (4)  | $Fa \vee Ga$                   | 3 $\vee$ I          |
| 3 | (5)  | $\exists x(Fx \vee Gx)$        | 4 EI                |
| 2 | (6)  | $\exists x(Fx \vee Gx)$        | 2,3,5 EE            |
| 7 | (7)  | $\exists xGx$                  | A                   |
| 8 | (8)  | $Ga$                           | A                   |
| 8 | (9)  | $Fa \vee Ga$                   | 8 $\vee$ I          |
| 8 | (10) | $\exists x(Fx \vee Gx)$        | 9 EI                |
| 7 | (11) | $\exists x(Fx \vee Gx)$        | 7,8,10 EE           |
| 1 | (12) | $\exists x(Fx \vee Gx)$        | 1,2,6,7,11 $\vee$ E |

2.  $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg\exists xGx \vdash \neg\exists xFx$

|       |      |                                      |                |
|-------|------|--------------------------------------|----------------|
| 1     | (1)  | $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$       | A              |
| 2     | (2)  | $\neg\exists xGx$                    | A              |
| 3     | (3)  | $\exists xFx$                        | A              |
| 4     | (4)  | $Fa$                                 | A              |
| 1     | (5)  | $Fa \rightarrow Ga$                  | 1 UE           |
| 1,4   | (6)  | $Ga$                                 | 5,4 MP         |
| 1,4   | (7)  | $\exists xGx$                        | 6 EI           |
| 1,3   | (8)  | $\exists xGx$                        | 3,4,7 EE       |
| 1,2,3 | (9)  | $\exists xGx \wedge \neg\exists xGx$ | 8,2 $\wedge$ I |
| 1,2   | (10) | $\neg\exists xFx$                    | 3,9 RA         |

3.  $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x\neg Gx \rightarrow \exists x\neg Fx$

|     |     |   |          |
|-----|-----|---|----------|
| 1   | (1) | $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$                  | A        |
| 2   | (2) | $\exists x\neg Gx$                              | A        |
| 3   | (3) | $\neg Ga$                                       | A        |
| 1   | (4) | $Fa \rightarrow Ga$                             | 1 UE     |
| 1,3 | (5) | $\neg Fa$                                       | 4,3 MT   |
| 1,3 | (6) | $\exists x\neg Fx$                              | 5 EI     |
| 1,2 | (7) | $\exists x\neg Fx$                              | 2,3,6 EE |
| 1   | (8) | $\exists x\neg Gx \rightarrow \exists x\neg Fx$ | 2,7 CP   |

4.  $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P$

|     |     |                               |          |
|-----|-----|-------------------------------|----------|
| 1   | (1) | $\forall x(Fx \rightarrow P)$ | A        |
| 2   | (2) | $\exists xFx$                 | A        |
| 3   | (3) | $Fa$                          | A        |
| 1   | (4) | $Fa \rightarrow P$            | 1 UE     |
| 1,3 | (5) | $P$                           | 4,3 MP   |
| 1,2 | (6) | $P$                           | 2,3,5 EE |
| 1   | (7) | $\exists xFx \rightarrow P$   | 2,6 CP   |

5.  $P \wedge \exists xFx \vdash \exists x(P \wedge Fx)$

|     |     |                          |                |
|-----|-----|--------------------------|----------------|
| 1   | (1) | $P \wedge \exists xFx$   | A              |
| 1   | (2) | $P$                      | 1 $\wedge$ E   |
| 1   | (3) | $\exists xFx$            | 1 $\wedge$ E   |
| 4   | (4) | $Fa$                     | A              |
| 1,4 | (5) | $P \wedge Fa$            | 2,4 $\wedge$ I |
| 1,4 | (6) | $\exists x(P \wedge Fx)$ | 5 EI           |
| 1   | (7) | $\exists x(P \wedge Fx)$ | 3,4,6 EE       |

6.  $\exists x(Fx \rightarrow P) \vdash \forall xFx \rightarrow P$

|     |     |                               |          |
|-----|-----|-------------------------------|----------|
| 1   | (1) | $\exists x(Fx \rightarrow P)$ | A        |
| 2   | (2) | $\forall xFx$                 | A        |
| 3   | (3) | $Fa \rightarrow P$            | A        |
| 2   | (4) | $Fa$                          | 2 UE     |
| 2,3 | (5) | $P$                           | 3,4 MP   |
| 3   | (6) | $\forall xFx \rightarrow P$   | 2,5 CP   |
| 1   | (7) | $\forall xFx \rightarrow P$   | 1,3,6 EE |

## Exercise 6.14

9.  $\forall x\exists y(Fx \rightarrow Gy) \vdash \exists y\forall x(Fx \rightarrow Gy)$

Here we use “prop taut” to indicate any of the previously proved propositional logic sequents.

|             |      |   |                     |
|-------------|------|---|---------------------|
| 1           | (1)  | $\forall x \exists y (Fx \rightarrow Gy)$ | A                   |
| $\emptyset$ | (2)  | $\exists y Gy \vee \neg \exists y Gy$     | prop taut           |
| 3           | (3)  | $\exists y Gy$                            | A                   |
| 4           | (4)  | $Ga$                                      | A                   |
| 4           | (5)  | $Fb \rightarrow Ga$                       | 4 prop taut         |
| 4           | (6)  | $\forall x (Fx \rightarrow Ga)$           | 5 UI                |
| 4           | (7)  | $\exists y \forall x (Fx \rightarrow Gy)$ | 6 EI                |
| 3           | (8)  | $\exists y \forall x (Fx \rightarrow Gy)$ | 3,4,7 EE            |
| 9           | (9)  | $\neg \exists y Gy$                       | A                   |
| 10          | (10) | $Fc$                                      | A                   |
| 1           | (11) | $\exists y (Fc \rightarrow Gy)$           | 1 UE                |
| 12          | (12) | $Fc \rightarrow Gd$                       | A                   |
| 10,12       | (13) | $Gd$                                      | 12,10 MP            |
| 10,12       | (14) | $\exists y Gy$                            | 13 EI               |
| 9,10,12     | (15) | $\exists y Gy \wedge \neg \exists y Gy$   | 14,9 $\wedge$ I     |
| 9,12        | (16) | $\neg Fc$                                 | 10,15 RA            |
| 9,12        | (17) | $Fc \rightarrow Ge$                       | 16 prop taut        |
| 1,9         | (18) | $Fc \rightarrow Ge$                       | 11,12,17 EE         |
| 1,9         | (19) | $\forall x (Fx \rightarrow Ge)$           | 18 UI               |
| 1,9         | (20) | $\exists y \forall x (Fx \rightarrow Gy)$ | 19 EI               |
| 1           | (21) | $\exists y \forall x (Fx \rightarrow Gy)$ | 2,3,8,9,20 $\vee$ E |

## Chapter 7

### Exercise 7.1

Here the proof is lengthened because of the strictness of the  $=$  rules. From  $a = c$  and  $b = c$ , we cannot immediately apply  $=E$  to get  $a = b$ .

|             |      |  |              |
|-------------|------|--|--------------|
| 1           | (1)  | $\exists x \forall y (Py \rightarrow y = x)$             | A            |
| 2           | (2)  | $Pa \wedge Pb$   | A            |
| 3           | (3)  | $\forall y (Py \rightarrow y = c)$                       | A            |
| 3           | (4)  | $Pa \rightarrow a = c$                                   | 3 UE         |
| 3           | (5)  | $Pb \rightarrow b = c$                                   | 3 UE         |
| 2           | (6)  | $Pa$   | 2 $\wedge$ E |
| 2           | (7)  | $Pb$   | 2 $\wedge$ E |
| 2,3         | (8)  | $a = c$  | 4,6 MP       |
| 2,3         | (9)  | $b = c$  | 5,7 MP       |
| $\emptyset$ | (10) | $b = b$  | =I           |
| 2,3         | (11) | $c = b$  | 10,9 =E      |
| 2,3         | (12) | $a = b$  | 8,11 =E      |
| 1,2         | (13) | $a = b$  | 1,3,12 EE    |
| 1           | (14) | $(Pa \wedge Pb) \rightarrow a = b$                       | 2,13 CP      |
| 1           | (15) | $\forall y ((Pa \wedge Py) \rightarrow a = y)$           | 14 UI        |
| 1           | (16) | $\forall x \forall y ((Px \wedge Py) \rightarrow x = y)$ | 15 UI        |

## Exercise 7.2

|             |      |  |                        |
|-------------|------|--|------------------------|
| 1           | (1)  | $Fa \wedge \forall x (Fx \rightarrow x = a)$ | A                      |
| 2           | (2)  | $Fb$   | A                      |
| 1           | (3)  | $\forall x (Fx \rightarrow x = a)$           | 1 $\wedge$ E           |
| 1           | (4)  | $Fb \rightarrow b = a$                       | 3 UE                   |
| 1,2         | (5)  | $b = a$                                      | 4,2 MP                 |
| 6           | (6)  | $b = a$                                      | A                      |
| 1           | (7)  | $Fa$   | 1 $\wedge$ E           |
| $\emptyset$ | (8)  | $b = b$                                      | =I                     |
| 6           | (9)  | $a = b$                                      | 8,6 =E                 |
| 1,6         | (10) | $Fb$   | 7,9 =E                 |
| 1           | (11) | $Fb \leftrightarrow b = a$                   | 2,5,6,10 CP $\times$ 2 |
| 1           | (12) | $\forall x (Fx \leftrightarrow x = a)$       | 11 UI                  |
| 1           | (1)  | $\forall x (Fx \leftrightarrow x = a)$       | A                      |
| 1           | (2)  | $Fa \leftrightarrow a = a$                   | 1 UE                   |
| $\emptyset$ | (3)  | $a = a$                                      | =I                     |
| 1           | (4)  | $Fa$   | 2,3 MP                 |
| 1           | (5)  | $Fb \leftrightarrow b = a$                   | 1 UE                   |
| 1           | (6)  | $Fb \rightarrow b = a$                       | 5 $\wedge$ E           |
| 1           | (7)  | $\forall x (Fx \rightarrow x = a)$           | 6 UI                   |
| 1           | (8)  | $Fa \wedge \forall x (Fx \rightarrow x = a)$ | 4,7 $\wedge$ I         |