

How Logic Works: Solutions to Problems

Hans Halvorson

September 26, 2025

Chapter 3

Exercise 3.1

1. $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

| | | | |
|-----|-----|------------------------------|----------------|
| 1 | (1) | P | A |
| 2 | (2) | Q | A |
| 1,2 | (3) | $P \wedge Q$ | 1,2 \wedge I |
| 1 | (4) | $Q \rightarrow (P \wedge Q)$ | 2,3 CP |

2. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$

| | | | |
|-----|-----|--|----------------|
| 1 | (1) | $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$ | A |
| 2 | (2) | P | A |
| 1 | (3) | $P \rightarrow Q$ | 1 \wedge E |
| 1 | (4) | $P \rightarrow R$ | 1 \wedge E |
| 1,2 | (5) | Q | 3,2 MP |
| 1,2 | (6) | R | 4,2 MP |
| 1,2 | (7) | $Q \wedge R$ | 5,6 \wedge I |
| 1 | (8) | $P \rightarrow (Q \wedge R)$ | 2,7 CP |

3. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

| | | | |
|-------|-----|-----------------------------------|--------|
| 1 | (1) | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | A |
| 2 | (2) | Q | A |
| 3 | (3) | P | A |
| 1,3 | (4) | $Q \rightarrow R$ | 3,1 MP |
| 1,2,3 | (5) | R | 4,2 MP |
| 1,2 | (6) | $P \rightarrow R$ | 3,5 CP |
| 1 | (7) | $Q \rightarrow (P \rightarrow R)$ | 2,6 CP |

4. $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

| | | | | |
|--|-------|-----|---|--------------|
| | 1 | (1) | $P \rightarrow Q$ | A |
| | 2 | (2) | $Q \rightarrow R$ | A |
| | 3 | (3) | P | A |
| | 1,3 | (4) | Q | 1,3 MP |
| | 1,2,3 | (5) | R | 2,4 MP |
| | 1,2 | (6) | $P \rightarrow R$ | 3,5 CP |
| | 1 | (7) | $(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$ | 2,6 CP |
| 5. $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q$ | | | | |
| | 1 | (1) | $P \rightarrow (P \rightarrow Q)$ | A |
| | 2 | (2) | P | A |
| | 1,2 | (3) | $P \rightarrow Q$ | 1,2 MP |
| | 1,2 | (4) | Q | 3,2 MP |
| | 1 | (5) | $P \rightarrow Q$ | 2,4 CP |
| 6. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$ | | | | |
| | 1 | (1) | $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$ | A |
| | 2 | (2) | $P \wedge Q$ | A |
| | 2 | (3) | P | 2 \wedge E |
| | 2 | (4) | Q | 2 \wedge E |
| | 1,2 | (5) | $Q \rightarrow R$ | 1,3 MP |
| | 1,2 | (6) | R | 5,4 MP |
| | 1 | (7) | $(P \wedge Q) \rightarrow R$ | 2,6 CP |
| 7. $(P \vee Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$ | | | | |
| | 1 | (1) | $(P \vee Q) \rightarrow R$ | A |
| | 2 | (2) | P | A |
| | 2 | (3) | $P \vee Q$ | 2 \vee I |
| | 1,2 | (4) | R | 1,3 MP |
| | 1 | (5) | $P \rightarrow R$ | 2,4 CP |
| 8. $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$ | | | | |
| | 1 | (1) | $\neg P$ | A |
| | 2 | (2) | $P \wedge Q$ | A |
| | 2 | (3) | P | 2 \wedge E |
| | | (4) | $(P \wedge Q) \rightarrow P$ | 2,3 CP |
| | 1 | (5) | $\neg(P \wedge Q)$ | 4,1 MT |
| 9. $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$ | | | | |

| | | | |
|---|------|----------------------------|----------------|
| 1 | (1) | $\neg(P \vee Q)$ | A |
| 2 | (2) | P | A |
| 2 | (3) | $P \vee Q$ | 2 \vee I |
| | (4) | $P \rightarrow (P \vee Q)$ | 2,3 CP |
| 1 | (5) | $\neg P$ | 4,1 MT |
| 6 | (6) | Q | A |
| 6 | (7) | $P \vee Q$ | 6 \vee I |
| | (8) | $Q \rightarrow (P \vee Q)$ | 6,7 CP |
| 1 | (9) | $\neg Q$ | 8,1 MT |
| 1 | (10) | $\neg P \wedge \neg Q$ | 5,9 \wedge I |

10. $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

| | | | |
|-----|-----|---|--------|
| 1 | (1) | P | A |
| 2 | (2) | $P \rightarrow \neg P$ | A |
| 1,2 | (3) | $\neg P$ | 2,1 MP |
| 1 | (4) | $(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$ | 2,3 CP |
| 1 | (5) | $\neg\neg P$ | 1 DN |
| 1 | (6) | $\neg(P \rightarrow \neg P)$ | 4,5 MT |
| | (7) | $P \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg P)$ | 1,6 CP |
| 2 | (8) | $\neg\neg(P \rightarrow \neg P)$ | 2 DN |
| 2 | (9) | $\neg P$ | 7,8 MT |

Exercise 3.4

1. $P \rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

| | | | |
|-----|-----|-------------------------|----------------|
| 1 | (1) | $P \rightarrow Q$ | A |
| 2 | (2) | $P \wedge \neg Q$ | A |
| 2 | (3) | P | 2 \wedge E |
| 1,2 | (4) | Q | 1,3 MP |
| 2 | (5) | $\neg Q$ | 2 \wedge E |
| 1,2 | (6) | $Q \wedge \neg Q$ | 4,5 \wedge I |
| 1 | (7) | $\neg(P \wedge \neg Q)$ | 2,6 RA |

2. $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

| | | | |
|-----|------|--|-----------------|
| 1 | (1) | $\neg(P \wedge Q)$ | A |
| 2 | (2) | $\neg(\neg P \vee \neg Q)$ | A |
| 3 | (3) | $\neg P$ | A |
| 3 | (4) | $\neg P \vee \neg Q$ | 3 \vee I |
| 2,3 | (5) | $(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ | 4,2 \wedge I |
| 2 | (6) | $\neg\neg P$ | 3,5 RA |
| 2 | (7) | P | 6 DN |
| 8 | (8) | $\neg Q$ | A |
| 8 | (9) | $\neg P \vee \neg Q$ | 8 \vee I |
| 2,8 | (10) | $(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$ | 9,2 \wedge I |
| 2 | (11) | $\neg\neg Q$ | 8,10 RA |
| 2 | (12) | Q | 11 DN |
| 2 | (13) | $P \wedge Q$ | 7,12 \wedge I |
| 1,2 | (14) | $(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$ | 13,1 \wedge I |
| 1 | (15) | $\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$ | 2,14 RA |
| 1 | (16) | $\neg P \vee \neg Q$ | 15 DN |

3. $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$

| | | | |
|------|------|--|------------------|
| 1 | (1) | $\neg(P \rightarrow Q)$ | A |
| 2 | (2) | $\neg P$ | A |
| 3 | (3) | $\neg Q$ | A |
| 4 | (4) | P | A |
| 2,4 | (5) | $P \wedge \neg P$ | 2,4 \wedge I |
| 2,4 | (6) | $\neg\neg Q$ | 3,5 RA |
| 2,4 | (7) | Q | 6 DN |
| 2 | (8) | $P \rightarrow Q$ | 4,7 CP |
| 1,2 | (9) | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 8,1 \wedge I |
| 1 | (10) | $\neg\neg P$ | 2,9 RA |
| 1 | (11) | P | 10 DN |
| 12 | (12) | Q | A |
| 12 | (13) | $P \rightarrow Q$ | 4,12 CP |
| 1,12 | (14) | $(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$ | 13,1 \wedge I |
| 1 | (15) | $\neg Q$ | 12,14 RA |
| 1 | (16) | $P \wedge \neg Q$ | 11,15 \wedge I |