

How Logic Works: Solutions to Problems

Hans Halvorson

November 3, 2025

Chapter 3

Exercise 3.1

1. $P \vdash Q \rightarrow (P \wedge Q)$

1	(1)	P	A
2	(2)	Q	A
1,2	(3)	$P \wedge Q$	1,2 \wedge I
1	(4)	$Q \rightarrow (P \wedge Q)$	2,3 CP

2. $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \vdash P \rightarrow (Q \wedge R)$

1	(1)	$(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)$	A
2	(2)	P	A
1	(3)	$P \rightarrow Q$	1 \wedge E
1	(4)	$P \rightarrow R$	1 \wedge E
1,2	(5)	Q	3,2 MP
1,2	(6)	R	4,2 MP
1,2	(7)	$Q \wedge R$	5,6 \wedge I
1	(8)	$P \rightarrow (Q \wedge R)$	2,7 CP

3. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash Q \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	Q	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	$Q \rightarrow R$	3,1 MP
1,2,3	(5)	R	4,2 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$Q \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP

4. $P \rightarrow Q \vdash (Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$Q \rightarrow R$	A
3	(3)	P	A
1,3	(4)	Q	1,3 MP
1,2,3	(5)	R	2,4 MP
1,2	(6)	$P \rightarrow R$	3,5 CP
1	(7)	$(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)$	2,6 CP
5. $P \rightarrow (P \rightarrow Q) \vdash P \rightarrow Q$			
1	(1)	$P \rightarrow (P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	P	A
1,2	(3)	$P \rightarrow Q$	1,2 MP
1,2	(4)	Q	3,2 MP
1	(5)	$P \rightarrow Q$	2,4 CP
6. $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \vdash (P \wedge Q) \rightarrow R$			
1	(1)	$P \rightarrow (Q \rightarrow R)$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	2 \wedge E
2	(4)	Q	2 \wedge E
1,2	(5)	$Q \rightarrow R$	1,3 MP
1,2	(6)	R	5,4 MP
1	(7)	$(P \wedge Q) \rightarrow R$	2,6 CP
7. $(P \vee Q) \rightarrow R \vdash P \rightarrow R$			
1	(1)	$(P \vee Q) \rightarrow R$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 \vee I
1,2	(4)	R	1,3 MP
1	(5)	$P \rightarrow R$	2,4 CP
8. $\neg P \vdash \neg(P \wedge Q)$			
1	(1)	$\neg P$	A
2	(2)	$P \wedge Q$	A
2	(3)	P	2 \wedge E
	(4)	$(P \wedge Q) \rightarrow P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg(P \wedge Q)$	4,1 MT
9. $\neg(P \vee Q) \vdash \neg P \wedge \neg Q$			

1	(1)	$\neg(P \vee Q)$	A
2	(2)	P	A
2	(3)	$P \vee Q$	2 \vee I
	(4)	$P \rightarrow (P \vee Q)$	2,3 CP
1	(5)	$\neg P$	4,1 MT
6	(6)	Q	A
6	(7)	$P \vee Q$	6 \vee I
	(8)	$Q \rightarrow (P \vee Q)$	6,7 CP
1	(9)	$\neg Q$	8,1 MT
1	(10)	$\neg P \wedge \neg Q$	5,9 \wedge I

10. $P \rightarrow \neg P \vdash \neg P$

1	(1)	P	A
2	(2)	$P \rightarrow \neg P$	A
1,2	(3)	$\neg P$	2,1 MP
1	(4)	$(P \rightarrow \neg P) \rightarrow \neg P$	2,3 CP
1	(5)	$\neg\neg P$	1 DN
1	(6)	$\neg(P \rightarrow \neg P)$	4,5 MT
	(7)	$P \rightarrow \neg(P \rightarrow \neg P)$	1,6 CP
2	(8)	$\neg\neg(P \rightarrow \neg P)$	2 DN
2	(9)	$\neg P$	7,8 MT

Exercise 3.4

1. $P \rightarrow Q \vdash \neg(P \wedge \neg Q)$

1	(1)	$P \rightarrow Q$	A
2	(2)	$P \wedge \neg Q$	A
2	(3)	P	2 \wedge E
1,2	(4)	Q	1,3 MP
2	(5)	$\neg Q$	2 \wedge E
1,2	(6)	$Q \wedge \neg Q$	4,5 \wedge I
1	(7)	$\neg(P \wedge \neg Q)$	2,6 RA

2. $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \wedge Q)$	A
2	(2)	$\neg(\neg P \vee \neg Q)$	A
3	(3)	$\neg P$	A
3	(4)	$\neg P \vee \neg Q$	3 \vee I
2,3	(5)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	4,2 \wedge I
2	(6)	$\neg\neg P$	3,5 RA
2	(7)	P	6 DN
8	(8)	$\neg Q$	A
8	(9)	$\neg P \vee \neg Q$	8 \vee I
2,8	(10)	$(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)$	9,2 \wedge I
2	(11)	$\neg\neg Q$	8,10 RA
2	(12)	Q	11 DN
2	(13)	$P \wedge Q$	7,12 \wedge I
1,2	(14)	$(P \wedge Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$	13,1 \wedge I
1	(15)	$\neg\neg(\neg P \vee \neg Q)$	2,14 RA
1	(16)	$\neg P \vee \neg Q$	15 DN

3. $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P \wedge \neg Q$

1	(1)	$\neg(P \rightarrow Q)$	A
2	(2)	$\neg P$	A
3	(3)	$\neg Q$	A
4	(4)	P	A
2,4	(5)	$P \wedge \neg P$	2,4 \wedge I
2,4	(6)	$\neg\neg Q$	3,5 RA
2,4	(7)	Q	6 DN
2	(8)	$P \rightarrow Q$	4,7 CP
1,2	(9)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	8,1 \wedge I
1	(10)	$\neg\neg P$	2,9 RA
1	(11)	P	10 DN
12	(12)	Q	A
12	(13)	$P \rightarrow Q$	4,12 CP
1,12	(14)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg(P \rightarrow Q)$	13,1 \wedge I
1	(15)	$\neg Q$	12,14 RA
1	(16)	$P \wedge \neg Q$	11,15 \wedge I

4. $\vdash (P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2	(4)	$Q \rightarrow P$	3,2 CP
2	(5)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	4 \vee I
1,2	(6)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	5,1 \wedge I
1	(7)	$\neg P$	2,6 RA
8	(8)	$\neg Q$	A
1,2	(9)	$P \wedge \neg P$	2,7 \wedge I
1,2	(10)	$\neg\neg Q$	8,9 RA
1,2	(11)	Q	10 DN
1	(12)	$P \rightarrow Q$	2,11 CP
1	(13)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	12 \vee I
1	(14)	$((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	13,1 \wedge I
\emptyset	(15)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P))$	1,14 RA
\emptyset	(16)	$(P \rightarrow Q) \vee (Q \rightarrow P)$	15 DN

5. $P \rightarrow (Q \vee R) \vdash (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$

1	(1)	$P \rightarrow (Q \vee R)$	A
2	(2)	$\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	A
3	(3)	$\neg P$	A
4	(4)	P	A
5	(5)	$\neg Q$	A
3,4	(6)	$P \wedge \neg P$	4,3 \wedge I
3,4	(7)	$\neg\neg Q$	5,6 RA
3,4	(8)	Q	7 DN
3	(9)	$P \rightarrow Q$	4,8 CP
3	(10)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	9 \vee I
2,3	(11)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	10,2 \wedge I
2	(12)	$\neg\neg P$	3,11 RA
2	(13)	P	12 DN
1,2	(14)	$Q \vee R$	1,13 MP
15	(15)	Q	A
15	(16)	$P \rightarrow Q$	4,15 CP
15	(17)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	16 \vee I
18	(18)	R	A
18	(19)	$P \rightarrow R$	4,18 CP
18	(20)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	19 \vee I
1,2	(21)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	14,15,17,18,20 \vee E
1,2	(22)	$((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)) \wedge \neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	21,2 \wedge I
1	(23)	$\neg\neg((P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R))$	2,22 RA
1	(24)	$(P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow R)$	23 DN

6.	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q \vdash P \rightarrow \neg Q$		
1	(1)	$(P \wedge Q) \rightarrow \neg Q$	A
2	(2)	P	A
3	(3)	Q	A
2,3	(4)	$P \wedge Q$	2,3 \wedge I
1,2,3	(5)	$\neg Q$	1,4 MP
1,2,3	(6)	$Q \wedge \neg Q$	3,5 \wedge I
1,2	(7)	$\neg Q$	3,6 RA
1	(8)	$P \rightarrow \neg Q$	2,7 CP

Chapter 6

Exercise 6.8

1.	$\neg \exists x(Fx \wedge Gx) \vdash \forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$		
1	(1)	$\neg \exists x(Fx \wedge Gx)$	A
2	(2)	Fa	A
3	(3)	Ga	A
2,3	(4)	$Fa \wedge Ga$	2,3 \wedge I
2,3	(5)	$\exists x(Fx \wedge Gx)$	4 EI
1,2,3	(6)	$\exists x(Fx \wedge Gx) \wedge \neg \exists x(Fx \wedge Gx)$	5,1 \wedge I
1,2	(7)	$\neg Ga$	3,6 RA
1	(8)	$Fa \rightarrow \neg Ga$	2,7 CP
1	(9)	$\forall x(Fx \rightarrow \neg Gx)$	8 UI
2.	$\forall xFx \vdash \exists xFx$		
1	(1)	$\forall xFx$	A
1	(2)	Fa	1 UE
1	(3)	$\exists xFx$	2 EI
3.	$\forall x(Fx \rightarrow Gx), Fa \vdash \exists xGx$		
1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	Fa	A
1	(3)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,2	(4)	Ga	3,2 MP
1,2	(5)	$\exists xGx$	4 EI
4.	$\neg Fa \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$		
1	(1)	$\neg Fa$	A
1	(2)	$Fa \rightarrow P$	1 negative paradox
1	(3)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	2 EI

5. $\neg\forall xFx \vdash \exists x(Fx \rightarrow P)$

1	(1)	$\neg\forall xFx$	A
2	(2)	$\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	A
3	(3)	$Fa \rightarrow P$	A
3	(4)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	3 EI
2,3	(5)	$\exists x(Fx \rightarrow P) \wedge \neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	4,2 \wedge I
2	(6)	$\neg(Fa \rightarrow P)$	3,5 RA
2	(7)	Fa	6 material conditional
2	(8)	$\forall xFx$	7 UI
1,2	(9)	$\forall xFx \wedge \neg\forall xFx$	8,1 \wedge I
1	(10)	$\neg\neg\exists x(Fx \rightarrow P)$	2,9 RA
1	(11)	$\exists x(Fx \rightarrow P)$	10 DN

6. $\neg\exists xFx \vdash \forall x(Fx \rightarrow Gx)$

1	(1)	$\neg\exists xFx$	A
2	(2)	Fa	A
3	(3)	$\neg Ga$	A
2	(4)	$\exists xFx$	2 EI
1,2	(5)	$\exists xFx \wedge \neg\exists xFx$	4,1 \wedge I
1,2	(6)	$\neg\neg Ga$	3,5 RA
1,2	(7)	Ga	6 DN
1	(8)	$Fa \rightarrow Ga$	2,7 CP
1	(9)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	8 UI

Exercise 6.11

1. $\exists xFx \vee \exists xGx \vdash \exists x(Fx \vee Gx)$

1	(1)	$\exists xFx \vee \exists xGx$	A
2	(2)	$\exists xFx$	A
3	(3)	Fa	A
3	(4)	$Fa \vee Ga$	3 \vee I
3	(5)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	4 EI
2	(6)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	2,3,5 EE
7	(7)	$\exists xGx$	A
8	(8)	Ga	A
8	(9)	$Fa \vee Ga$	8 \vee I
8	(10)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	9 EI
7	(11)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	7,8,10 EE
1	(12)	$\exists x(Fx \vee Gx)$	1,2,6,7,11 \vee E

2. $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg\exists xGx \vdash \neg\exists xFx$

1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$\neg \exists xGx$	A
3	(3)	$\exists xFx$	A
4	(4)	Fa	A
1	(5)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,4	(6)	Ga	5,4 MP
1,4	(7)	$\exists xGx$	6 EI
1,3	(8)	$\exists xGx$	3,4,7 EE
1,2,3	(9)	$\exists xGx \wedge \neg \exists xGx$	8,2 \wedge I
1,2	(10)	$\neg \exists xFx$	3,9 RA
3. $\forall x(Fx \rightarrow Gx) \vdash \exists x\neg Gx \rightarrow \exists x\neg Fx$			
1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$	A
2	(2)	$\exists x\neg Gx$	A
3	(3)	$\neg Ga$	A
1	(4)	$Fa \rightarrow Ga$	1 UE
1,3	(5)	$\neg Fa$	4,3 MT
1,3	(6)	$\exists x\neg Fx$	5 EI
1,2	(7)	$\exists x\neg Fx$	2,3,6 EE
1	(8)	$\exists x\neg Gx \rightarrow \exists x\neg Fx$	2,7 CP
4. $\forall x(Fx \rightarrow P) \vdash \exists xFx \rightarrow P$			
1	(1)	$\forall x(Fx \rightarrow P)$	A
2	(2)	$\exists xFx$	A
3	(3)	Fa	A
1	(4)	$Fa \rightarrow P$	1 UE
1,3	(5)	P	4,3 MP
1,2	(6)	P	2,3,5 EE
1	(7)	$\exists xFx \rightarrow P$	2,6 CP
5. $P \wedge \exists xFx \vdash \exists x(P \wedge Fx)$			
1	(1)	$P \wedge \exists xFx$	A
1	(2)	P	1 \wedge E
1	(3)	$\exists xFx$	1 \wedge E
4	(4)	Fa	A
1,4	(5)	$P \wedge Fa$	2,4 \wedge I
1,4	(6)	$\exists x(P \wedge Fx)$	5 EI
1	(7)	$\exists x(P \wedge Fx)$	3,4,6 EE

Chapter 7

Exercise 7.1

Here the proof is lengthened because of the strictness of the $=$ rules. From $a = c$ and $b = c$, we cannot immediately apply $=E$ to get $a = b$.

1	(1)	$\exists x \forall y (Py \rightarrow y = x)$	A
2	(2)	$Pa \wedge Pb$	A
3	(3)	$\forall y (Py \rightarrow y = c)$	A
3	(4)	$Pa \rightarrow a = c$	3 UE
3	(5)	$Pb \rightarrow b = c$	3 UE
2	(6)	Pa	2 $\wedge E$
2	(7)	Pb	2 $\wedge E$
2,3	(8)	$a = c$	4,6 MP
2,3	(9)	$b = c$	5,7 MP
\emptyset	(10)	$b = b$	$=I$
2,3	(11)	$c = b$	10,9 $=E$
2,3	(12)	$a = b$	8,11 $=E$
1,2	(13)	$a = b$	1,3,12 EE
1	(14)	$(Pa \wedge Pb) \rightarrow a = b$	2,13 CP
1	(15)	$\forall y ((Pa \wedge Py) \rightarrow a = y)$	14 UI
1	(16)	$\forall x \forall y ((Px \wedge Py) \rightarrow x = y)$	15 UI

Exercise 7.2

1	(1)	$Fa \wedge \forall x (Fx \rightarrow x = a)$	A
2	(2)	Fb	A
1	(3)	$\forall x (Fx \rightarrow x = a)$	1 $\wedge E$
1	(4)	$Fb \rightarrow b = a$	3 UE
1,2	(5)	$b = a$	4,2 MP
6	(6)	$b = a$	A
1	(7)	Fa	1 $\wedge E$
\emptyset	(8)	$b = b$	$=I$
6	(9)	$a = b$	8,6 $=E$
1,6	(10)	Fb	7,9 $=E$
1	(11)	$Fb \leftrightarrow b = a$	2,5,6,10 CP \times 2
1	(12)	$\forall x (Fx \leftrightarrow x = a)$	11 UI

1	(1)	$\forall x(Fx \leftrightarrow x = a)$	A
1	(2)	$Fa \leftrightarrow a = a$	1 UE
\emptyset	(3)	$a = a$	=I
1	(4)	Fa	2,3 MP
1	(5)	$Fb \leftrightarrow b = a$	1 UE
1	(6)	$Fb \rightarrow b = a$	5 \wedge E
1	(7)	$\forall x(Fx \rightarrow x = a)$	6 UI
1	(8)	$Fa \wedge \forall x(Fx \rightarrow x = a)$	4,7 \wedge I