Zadaća 5

iz predmeta Diskretna matematika

Prezime i ime: Hamzić Huso

Broj indeksa: 18305

Grupa: DM2 Pon[15.00]

Odgovorni asistent: Šeila Bećirović

Elektrotehnički fakultet Sarajevo

1. Dat je periodični diskretni signal perioda 6, čije vrijednosti u trenucima 0, 1, 2, 3, 4 i 5 respektivno iznose 2, 9, –7, –7, –5 i –9.
a) Predstavite ovaj diskretni signal formulom u kojoj se javlja cijeli dio broja;
b) Predstavite ovaj signal diskretnim Fourierovim redom;
c) Odredite amplitudni i fazni spektar za ovaj signal i predstavite ga u vidu sume harmonika.

a) Svaki periodični signal osnovnog perioda N se može izraziti kao suma N članova u kojima figurira funkcija "cijeli dio broja":

$$x_n = x_{-1} + \sum_{k=0}^{N-1} (x_k - x_{k-1}) \lfloor \tfrac{n-k}{N} \rfloor$$

Poznate su nam vrijednosti x_n za N[0..5] pa uvrštavanjem imamo:

$$\underline{x_n = -9 + 11 \cdot \lfloor \tfrac{n}{6} \rfloor + 7 \cdot \lfloor \tfrac{n-1}{6} \rfloor - 16 \cdot \lfloor \tfrac{n-2}{6} \rfloor + 0 \cdot \lfloor \tfrac{n-3}{6} \rfloor + 2 \cdot \lfloor \tfrac{n-4}{6} \rfloor - 4 \cdot \lfloor \tfrac{n-5}{6} \rfloor}$$

b) Svaki periodični diskretni signal se može izraziti kao suma konačno mnogo harmonijskih diskretnih signala. Oblik diskretnog Fourierovog reda:

$$x_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\lfloor N/2 \rfloor} a_k \ cos\frac{2k\pi}{N}n + b_k \ sin\frac{2k\pi}{N}n$$

$$a_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \ cos\frac{2k\pi}{N}n, \ \ k = 0, 1, ..., \lfloor \ \frac{N}{2} \ \rfloor$$

$$b_k = \frac{2}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n \ sin\frac{2k\pi}{N}n, \ \ k = 0, 1, ..., \lfloor \ \frac{N}{2} \ \rfloor$$

Treba napomenuti da se kod računanja a_k za k=N/2 ispred sume javlja 1/N (umjesto 2/N) kada je N paran broj.

Računanjem dobijamo sljedeće koeficijente:

$$\boxed{a_0 = -17/3} \ \boxed{a_1 = 5} \ \boxed{a_2 = 1/3} \ \boxed{a_3 = 1/2}$$

$$\boxed{b_1 = -\sqrt{3}/3} \ \boxed{b_2 = 10 \cdot \sqrt{3}/3} \ \boxed{b_3 = 0}$$

Pa je naš diskretni Fourierov red:

$$\underline{x_n = -\tfrac{17}{6} + 5 \cdot cos\tfrac{n\pi}{3} - \tfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot sin\tfrac{\pi}{3}n + \tfrac{1}{3} \cdot cos\tfrac{2\pi}{3}n + 10\tfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot sin\tfrac{2\pi}{3}n + \tfrac{1}{2} \cdot cos(n\pi)}$$

c) Odredimo amplitudni i fazni spektar signala:

$$x_n = \sum_{k=0}^{\lfloor N/2 \rfloor} A_k \ sin(\frac{2k\pi}{N}n + \varphi_k) \ (*)$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \quad \varphi_k = arctg\frac{a_k}{b_k}$$

Iz čega slijedi:

$$\boxed{A_0 = -17/3} \ \boxed{A_1 = 2\sqrt{57}/3} \ \boxed{A_2 = \sqrt{301}/3} \ \boxed{A_3 = 1/2}$$

$$\boxed{\phi_0 = -\pi/2} \ \boxed{\phi_1 = arctg(\tfrac{-15}{\sqrt{3}})} \ \boxed{\phi_2 = arctg(\tfrac{1}{10\sqrt{3}})} \ \boxed{\phi_3 = \pi/2}$$

Nakon što raspišemo izraz za x_n sa dobijenim vrijednostima, imamo:

$$\underline{x_n = -\tfrac{17}{3} + 2\tfrac{\sqrt{57}}{3} \cdot cos(\tfrac{\pi}{3}n + arctg(\tfrac{-15}{\sqrt{3}})) + \tfrac{\sqrt{301}}{3} \cdot cos(\tfrac{2\pi}{3}n + arctg(\tfrac{1}{10\sqrt{3}})) + \tfrac{1}{2}cos(n\pi + \tfrac{\pi}{2})}$$

2. Ispitajte koji su od sljedećih diskretnih signala periodični a koji nisu. Za one koji jesu, nađite osnovni period N:
   a) $sin(2n\pi/15) + 3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$
   b) $sin(3n\pi/4)cos(2n\pi/5)$
   c) $(n + 1)cos(n\pi/5) - ncos(9n\pi/5)$
   d) $(-1)^n cos(4n\pi/7)$
   Odgovori moraju biti obrazloženi, inače se neće priznavati!

a) $f = sin(2n\pi/15) + 3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$
Najprije ćemo rastaviti funkciju na prvi i drugi dio:
$f_1(x) = sin(2n\pi/15)$ *i* $f_2(x) = 3cos(5n\pi/21 + \pi/4)$
Period prvog dijela je očigledno 15, obzirom da se po formuli $T = \frac{2\pi}{w}$ *lako dobije da je w = 15, pa je i* $\boxed{T_1 = 15}$.
Što se tiče drugog dijela funkcije, računanje perioda je nešto složenije. Prije svega moramo shvatiti da $\frac{\pi}{4}$ *nema utjecaja na period funkcije obzirom da ne ovisi od n i njen period je 0. Ostaje nam prvi dio* f_2, *odnosno* $sin(3cos(\frac{5n\pi}{21}))$ *čiji je period jednak* $T = \frac{2\pi}{\frac{5\pi}{21}}$, *odnosno* $\boxed{T_2 = \frac{42}{5}}$. *Ono što preostaje jeste da nađemo najmanji zajednički sadržilac za vrijednosti perioda iz dva dijela naše funkcije, tj. NZS (42, 15) = 210, što je i period naše funkcije T.*
$\boxed{T_f = 210}$

b) Primijetimo da je f sastavljena od $f_1 = sin(3n\pi/4)$ *i* $f_2 = cos(2n\pi/5)$ *odakle očito imamo da je period* $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{3\pi}{4}}$ *odnosno imamo da je* $T_1 = 8/3$
analogno imamo da je $T_2 = 5$ *pa je onda period funkcije f* $NZS(\frac{8}{3}, \frac{1}{5})$ *odnosno* $\boxed{T=40}$

c) $f(n)=(n + 1)cos(n\pi/5) - ncos(9n\pi/5) = n[cos(\frac{n\pi}{5}) - cos(\frac{9n\pi}{5})] + cos(\frac{n\pi}{5}) =$
$-2n \cdot sin\frac{\frac{n\pi}{5}+\frac{9n\pi}{5}}{2} sin\frac{\frac{n\pi}{5}-\frac{9n\pi}{5}}{2} + cos(\frac{n\pi}{5}) = 2n \cdot sin(n\pi)sin(\frac{4n\pi}{5}) + cos(\frac{n\pi}{5})$
Odakle se jasno vidi da je za $n \in N$ *ili* $n \in Z$, $f(n) = cos(\frac{n\pi}{5})$ *odnosno* $\Omega = \frac{\pi}{5}$, $p = 1$, $q = 5$ *pa je onda* $\boxed{T = 2q = 10}$

d) $f(n) = (-1)^n cos(4n\pi/7) = cos(n\pi)cos(\frac{4n\pi}{7}) = \frac{1}{2}[cos(n\pi - \frac{4n\pi}{7}) + cos(n\pi + \frac{4n\pi}{7})]$

$=\frac{1}{2}[cos(\frac{3n\pi}{7}) + cos(\frac{9n\pi}{7})]$

odakle jasno vidimo da 1/2 ne igra ulogu na period već da će samo periodi ovih kosinusa igrat ulogu u periodu početne funkcije, analogno prethodnim zadacima odmah vidimo da je period prvog kosinusa $T_1 = \frac{14}{3}$ *a period drugog* $T_2 = \frac{14}{9}$ *odakle imamo da je period početne funkcije*
$\boxed{T = NZS(T_1, T_2) = 14}$

3. Odredite i nacrtajte amplitudno-frekventnu i fazno-frekventnu karakteristiku diskretnog sistema opisanog diferentnom jednačinom $y_n - 9y_{n-1} = 2x_n - 7x_{n-1}$, a nakon toga, odredite odziv ovog sistema na periodični signal iz Zadatka 1. Uputa: razmotrite prolazak svakog od harmonika posebno.

Nađimo prvo funkciju sistema H(z). Ako izvršimo Z transformaciju lijeve i desne strane, naša diferentna jednačina postaje: $z^n H(z) - 9z^{n-1}H(z) = 2z^n - 7z^{n-1}$

Odavde je H(z) $= \frac{2z^2-7z}{z^2-9z}$

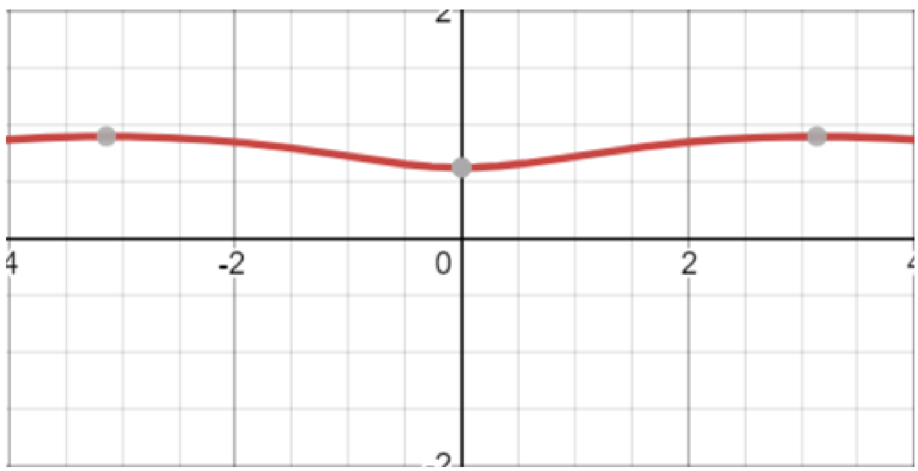
Amplitudno-frekventnu karakteristiku nalazimo kao:

$A(\Omega) = |He^{i\Omega}|$.

$$A(\Omega) = |\frac{2e^{2i\Omega}-7e^{i\Omega}}{e^{2i\Omega}-9e^{i\Omega}}| = |\frac{-7+2e^{i\Omega}}{-9+e^{i\Omega}}| = |\frac{-7+2(cos\Omega+i\cdot sin\Omega)}{-9+(cos\Omega+i\cdot sin\Omega)}| = \sqrt{\frac{(-7+2cos\Omega)^2+4sin^2\Omega}{(-9+cos\Omega)^2+sin^2\Omega}} =$$

$$= \sqrt{\frac{53-28cos\Omega}{82-18cos\Omega}}$$

Obzirom da je A(Ω) periodična funkcija, dovoljno ju je skicirati na intervalu [-π, π]:



Nađimo sada fazno-frekventnu karakteristiku $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\Omega) = \arg(\frac{-7+2\cdot cos\Omega+2\cdot i\cdot sin\Omega}{-9+cos\Omega+i\cdot sin\Omega)}) =$$

.

.

.

Nema se profesore kada raspisivati, ispitna sedmica :(

$$= \arg[\frac{65-25cos\Omega}{(cos\Omega-9)^2+sin2\Omega} + i\cdot\frac{-14\cdot sin(\Omega)\cdot cos(\Omega)+19\cdot sin(\Omega)}{10-6cos\Omega}]$$

Vrijedi $\Phi(\Omega) = -\pi + arctg(\frac{Im(z)}{Re(z)}) = -\pi + arctg(\frac{-11sin\Omega}{65-25cos\Omega})$

Skicirajmo i grafik $\Phi(\Omega)$:

Preostaje nam još samo da odredimo odziv sistema na periodični signal iz prvog zadatka:

$$y_n = 2x_n - 7x_{n-1} + 9y_{n-1}.$$

Obzirom da je sistem kauzalan (ne ovisi od budućih vrijednosti x_n), tj. iz x_n=0 za n<0 slijedi y_n=0 za n<0, imamo:

$$y_0 = 2x_0 - 7x_{-1} + 9y_{-1}$$
$$y_1 = 2x_1 - 7x_0 + 9y_0$$
$$y_2 = 2x_2 - 7x_1 + 9y_1$$
$$y_3 = 2x_3 - 7x_2 + 9y_2$$

Sada ćemo razmotriti prolazak svakog od harmonika iz prvog zadatka posebno:

$$\underline{1.\ x_n = \frac{-17}{3}}$$

Prateći gore izvedene relacije dobijamo redom:

$$y_0 = \frac{-34}{3}$$

$$y_1 = \frac{-221}{3}$$

$$y_2 = \frac{-1904}{3}$$

$$y_3 = \frac{-17051}{3}$$

$$\underline{2.\ x_n = \frac{\sqrt{301}}{3} \cdot cos(\frac{2\pi}{3}n + arctg(\frac{1}{10\sqrt{3}}))}$$

$$y_0 = 20\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$y_1 = 33\sqrt{3}$$
$$y_2 = 1841\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$y_3 = 8836\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{3.\ x_n = 2\frac{\sqrt{57}}{3}\cdot cos(\frac{\pi}{3}n + arctg(\frac{-15}{\sqrt{3}}))}$$

$$y_0 = 2\frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$y_1 = 9\sqrt{3}$$
$$y_2 = 67\sqrt{3}$$
$$y_3 = 586\sqrt{3}$$

$$\underline{4.\ x_n = \frac{1}{2}\cdot cos(\pi n + \frac{\pi}{2})}$$

$$y_0 = 0$$
$$y_1 = 0$$
$$y_2 = 0$$
$$y_3 = 0$$

4. Nađite z-transformaciju sekvence $x_n = (n^2 cos(\frac{n\pi}{3}) + \frac{(5)^n}{(2n+1)!})u_{n-2}$. Pri tome se po potrebi možete koristiti tablicama i osobinama z-transformacije.

Na početku riješimo sve prvo osim u_{n-2} odnosno ovo u zagradi. Prvi dio ovog u zagradi je oblika $n^k y_{1n}$ (gdje je y_{1n} samo oznaka). Prvo nađimo Z transformaciju kosinusa koju iščitavamo iz tablice:

$$Y_1(z) = \frac{2z^2-z}{2z^2-2z+2}.$$

Zatim drugo pravilo kaže za transformaciju sekvenci oblika $n^k y_1 n$ imamo :

$$X_1(z) = (-z\frac{d}{dz})^2 Y_1(z) = -z\frac{d}{dz}[-z\frac{d}{dz}(\frac{2z^2-z}{2z^2-2z+2})] = \frac{z^5+7z^4+7z^2-z}{2(z^2-z+1)^3}$$

Sad je potrebno naći transformaciju drugog dijela naše osnovne sekvence odnosno $\frac{5^n}{(2n+1)!}$.

Razdvojimo ovo na dvije sekvence pa imamo da je $Z\{\frac{1}{(2n+1)!}\} = \frac{\sqrt{z}}{2}[e^{\frac{1}{\sqrt{3}}} - e^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}]$

Sada na osnovu pravila o Z transformaciji sekvence pomnožene sa a^n slijedi da je

$$Z\{\frac{5^n}{(2n+1)!}\} = \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{5}}[e^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} - e^{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}]$$

Pa imamo konačno uzevši u obzir u u_{n-2} da je naše Y(z) :

$$Y(z) = \frac{z^5+7z^4+7z^2-z}{2(z^2-z+1)^3} + \frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{5}}[e^{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}} - e^{\frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{3}}}] - 1 - \frac{4}{3z}$$

5. Dat je diskretni sistem opisan diferentnom jednačinom $7y_{n+3} + 5y_{n+2} = 3x_{n+3} - 2x_n$. Nađite odziv ovog sistema na pobudu $x_n = nsin(7n\pi/4)u_n$. Rješenje treba izraziti u obliku u kojem se ne javljaju kompleksni brojevi.

Ako stavimo da je $x_n = z^n$ i $y_n = z^n H(z)$ imamo:

$7z^{n+3}H(z) + 5z^{n+2}H(z) = 3z^{n+3} - 2z^n$ odnosno

$$\boxed{H(z) = \frac{3z^3-2}{7z^3+5z^2}}$$

Nađimo sada X(z) kao X(z) $= -z\frac{d}{dz}[Z\{sin\frac{7n\pi}{4}\}]$ odnosno očitavajući iz tablica Z transformaciju sinusa i diferencirajući po z dobijamo:

$$X(z) = \frac{z-z^3}{\sqrt{2}(z^2-\sqrt{2}z+1)^2}$$

a kako vrijedi da je Y(z)=X(z)H(z) dobijamo da je:

$$Y(z) = \frac{-(z^2-1)(3z^2-2)}{z\sqrt{2}(7z+5)(z^2-\sqrt{2}z+1)^2}$$

nule karakterističnog polinoma su z=0, $z=\frac{-5}{7}$, $z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, $z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ gdje su ove dvije zadnje višestruke pa inverznu Z transformaciju ćemo naći uz pomoć rezidiuma jer se y_n može napisati kao:

$$y_n = [Res(Y(z)z^{n-1})]_{z=0} + [Res(Y(z)z^{n-1})]_{z=\frac{-5}{z}} + [Res(Y(z)z^{n-1})]_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}} + [Res(Y(z)z^{n-1})]_{z=\frac{1-i}{\sqrt{2}}}$$

Gdje se prva dva rezidiuma računaju lagano kao:

$$[Res(Y(z)z^{n-1})]_{z=0} = \lim_{z\to 0}[\frac{-(z^2-1)(3z^2-2)zz^{n-1}}{z\sqrt{2}(7z+5)(z^2-\sqrt{2}z+1)^2}] = \frac{-\sqrt{2}}{5}\delta_{n-1}$$

Analogno dobijamo i drugi rezidium iznosi $\frac{6366\sqrt{2}}{35(3963+2590\sqrt{2})}(\frac{-5}{7})^{n-1}$

Treći rezidium ćemo računati kao:

$$[\frac{d}{dz}\{\frac{-(z^2-\sqrt{2}z+1)z^{n-1}(z^2-1)(3z^2-2)}{z\sqrt{2}(7z+5)(z^2-\sqrt{2}z+1)^2}\}]_{z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}}$$

gdje nakon malo dužeg računa dobijamo da on iznosi:

$$(\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n\frac{(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})[(5i-1)(n-1)-(11+i)\sqrt{2}]}{\sqrt{2}(5+\frac{7-7i}{\sqrt{2}})^2}$$

analogno četvrti iznosi:

$$(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n\frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})[(-5i-1)(n-1)-(11-i)\sqrt{2}]}{\sqrt{2}(5+\frac{7-7i}{\sqrt{2}})^2}$$

Pa je onda naše y_n

$$y_n = \frac{-\sqrt{2}}{5}\delta_{n-1} + \frac{6366\sqrt{2}}{35(3963+2590\sqrt{2})}(\frac{-5}{7})^{n-1} + (\frac{1-i}{\sqrt{2}})^n\frac{(\frac{1}{2}+\frac{i}{2})[(5i-1)(n-1)-(11+i)\sqrt{2}]}{\sqrt{2}(5+\frac{7-7i}{\sqrt{2}})^2} +$$
$$+(\frac{1+i}{\sqrt{2}})^n\frac{(\frac{1}{2}-\frac{i}{2})[(-5i-1)(n-1)-(11-i)\sqrt{2}]}{\sqrt{2}(5+\frac{7-7i}{\sqrt{2}})^2}$$