



UM ESTUDO COMPLEMENTAR DO CONTROLE PID SERVO E REGULADOR APLICADO AO SISTEMA PÊNDULO INVERTIDO

Héber H. A. – heber_arcolezi2@hotmail.com
Universidade do Estado de Mato Grosso
Av. dos Ingás, 3001, Jardim Imperial
78550-000 – Sinop – Mato Grosso

Rogério B. Q. – rb_quirino@hotmail.com

Resumo: *O estudo de sistemas clássicos de controle com extensão e aprofundamento aplicados a plantas igualmente clássicas propostas e discutidas na literatura de controle, capacita os alunos à generalização dos conceitos e habilidades adquiridas e a transpô-los para novas plantas de forma a alcançar a real compreensão da engenharia de controle projetada. A iniciativa de exploração teórica com autonomia na aprendizagem, distanciando-se da tipicamente comportamentalista de meramente assistir as aulas e não se perguntar sobre variações e especulações referentes aos estudos de caso disponibilizados na literatura, demonstra ser um paradigma mais adequado para a construção do saber, aprendizagem de conceitos e das competências inerentes ao profissional de engenharia de controle. Mais especificamente, este trabalho faz uma análise complementar a literatura, dos projetos de controle servo e regulador PID's da planta clássica pêndulo invertido baseado nas representações espaço de estados e função de transferência.*

Palavras-chave: Controle PID, Ensino, Pêndulo invertido, Sistema regulador, Sistema servo.

1. INTRODUÇÃO

O sistema do pêndulo invertido tem sido uma das ferramentas clássicas utilizadas no ensino e pesquisa da teoria de controle desde meados de 1950 (BOUBAKER, 2012). A primeira abordagem para esse sistema foi descrita por Roberge em 1960. Em sua obra “*The Mechanical Seal*”, ele descreve o desenvolvimento e modelagem de um servomecanismo para estabilizar um modelo de sistema físico de pêndulo invertido (LUNDBERG, 2009). Diversos autores abordaram esse sistema desde suas versões mais simples à outras mais complexas, aplicando diferentes técnicas de controle para estabilizar o sistema. Alguns com objetivos didáticos de representar em controle linear um sistema instável, outros para apresentar a viabilidade das técnicas aplicadas (ÅSTRÖM & FURUTA, 1996).

A importância teórica do sistema pêndulo invertido vem do fato de ser um sistema não linear e relativamente complexo. O comportamento do sistema pode ser descrito por equações diferenciais, sendo possível linearizá-lo em torno de um ponto de equilíbrio para possibilitar a aplicação de técnicas de controle linear a fim de estabilizá-lo. As variações na modelagem e simulação se devem ao fato de o princípio que o rege poder ser aplicado extensivamente a diversos sistemas do dia a dia, tornando-o um importante objeto de estudo e ensino na área de engenharia e controle de sistemas (KAFETZIS & MOYSIS, 2017).



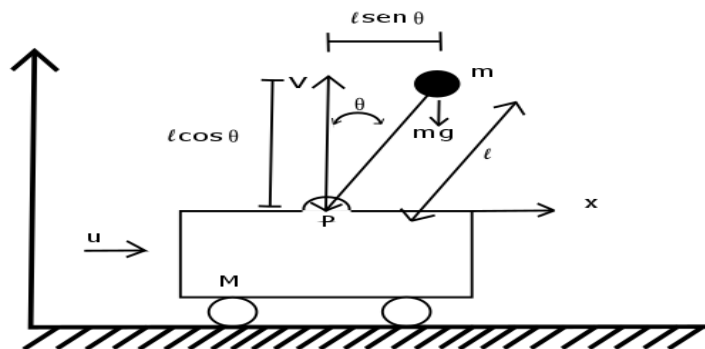
Entretanto, apesar do sistema pêndulo invertido já ser bastante estudado na literatura por diversos autores desde o século anterior, esse trabalho visa contribuir com o material já existente, discutindo a aplicação do controle PID (Proporcional-Integral-Derivativo) no projeto de controle servo via espaço de estados, tomando-se como referência a posição do móvel sobre o qual está instalado a haste do pêndulo, bem como a aplicação de controle PID na malha de realimentação do regulador utilizando a representação por função de transferência, tomando-se como referência a perturbação angular na haste.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

Para as técnicas de controle servo e regulador que hão de ser desenvolvidas nesse trabalho, serão utilizadas as plataformas computacionais Matlab® e Simulink® para facilitar o cálculo de parte das implementações e para processo de simulação dos resultados obtidos. Pois além das vantagens que oferecem ao facilitar os cálculos e simular o comportamento dos sistemas, os ambientes de simulação despertam o interesse e curiosidade à respeito principalmente do sistema aqui tratado, como também, de quaisquer sistema dinâmico modelado.

O sistema pêndulo invertido representado na Figura 1 será considerado para aplicação do sistema de controle servo. Cabe ressaltar que o movimento do sistema fica restrito apenas ao plano da página, e a haste pode cair para ambos os lados caso não seja aplicada uma técnica de controle adequada. A técnica de controle empregada será o método de alocação de pólos baseada no modelo por espaço de estados. O objetivo de controle nesse caso é de levar o carro para uma posição x desejada e ao mesmo tempo manter a haste na posição de equilíbrio vertical, onde o ângulo $\theta = 0^\circ$ é definido para a linha vertical V . Sendo $\theta = 0^\circ$ o ponto de equilíbrio de interesse, o sistema é linearizado em torno dele (OGATA, 2010).

Figura 1: Sistema pêndulo invertido



Fonte: Autoria própria (2017)

Onde,

M = massa do carro;
 m = massa do pêndulo;
 g = aceleração da gravidade;
 l = comprimento da haste;
 u = sinal de controle.

O modelo da Figura 1 pode ser representado no espaço de estados pelas seguintes equações vetoriais-matriciais:

Organização



UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA



Promoção





$$\dot{x} = Ax + Bu = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (1)$$

$$y = Cx = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (2)$$

no qual x_1, x_2, x_3, x_4 são denominadas variáveis de estado, descritas como:

$$\begin{aligned} x_1 &= \theta = \text{posição do pêndulo;} \\ x_2 &= \dot{\theta} = \text{velocidade angular do pêndulo;} \\ x_3 &= x = \text{posição do carro;} \\ x_4 &= \dot{x} = \text{velocidade do carro;} \end{aligned} \quad (3)$$

Define-se os parâmetros do modelo como sendo $M = 2\text{kg}$, $m = 0,1\text{kg}$, $l = 0,5\text{m}$, $g = 9,8\text{m/s}^2$, logo, as matrizes A , B e C assumem os seguintes valores:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

A técnica de controle via espaço de estados a ser desenvolvido neste trabalho é realizada sobre as variáveis de estado, no qual o método de alocação de pólos será utilizado para garantir a estabilidade do sistema. Os sistemas de controle servo e regulador de estados consistem em controlar o sistema através de um sinal de controle, $u(t)$, que seja função da entrada de referência r , das diversas variáveis de estado e da saída medida y . Uma restrição à aplicação desse método é que o sistema seja de estado completamente controlável, isto é, que todas as variáveis de estado do sistema sejam mensuráveis e estejam disponíveis para realimentação (DORF & BISHOP, 2001).

Inicialmente abordaremos o projeto de controle PID servo sobre sistema do pêndulo invertido. As ações de controle PID serão aplicadas na malha direta entre a planta do sistema e o comparador de erro para controlar a posição do carro em conjunto com a malha do regulador de estados para controlar a posição do pêndulo. Mais especificamente, será adotada uma referência de posição degrau unitário para o móvel e o resultado que se pretende alcançar é que o móvel vá para a posição desejada de referência mantendo o pêndulo na posição de equilíbrio.

Essa estratégia de controle foi tratada em OGATA (2010) apenas com o emprego do ganho Integral na malha servo. Com o intuito de complementar tal estratégia, este trabalho explora a inserção dos ganhos Proporcional e Derivativo em conjunto com o ganho Integral,

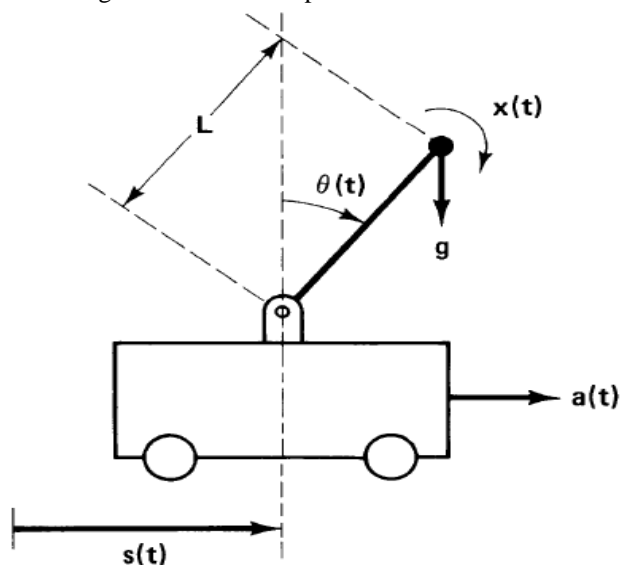


ressaltando prioritariamente a dedução matemática envolvida baseada na teoria de controle por alocação de pólos à estabilização da resposta do sistema. Ademais, pretende-se discutir a inviabilidade do controlador proposto quando tenta-se representar a dinâmica do sistema com uma variável de estado redundante, tornando o sistema de estado não completamente controlável. Nesse contexto, serão apresentadas duas situações, em que, a primeira consiste na modelagem da dinâmica do sistema com uma variável de estado redundante, e a segunda, com a modelagem da dinâmica do sistema com as variáveis de estado suficientes a modelagem do sistema.

A segunda contribuição desse trabalho consiste na análise pelo Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz da aplicação do controle PID na malha de realimentação do regulador, muitas vezes pouco intuitiva e desconhecida quanto a sua possibilidade de utilização na malha de regulação. O sistema regulador é caracterizado por compensar os efeitos de distúrbios externos a fim de manter a saída constante nula dado um valor de perturbação como entrada. O Critério de Estabilidade de Routh-Hurwitz indica se existem ou não raízes instáveis na equação característica do sistema de controle. A condição necessária e suficiente estabelecida neste método para que o sistema seja assintoticamente estável é que a primeira coluna do arranjo em tabela de Routh-Hurwitz contenha apenas coeficientes positivos (NISE, 2011).

O modelo de pêndulo invertido mostrado na Figura 2, foi modelado conforme a equação (5) e estudado utilizando o método de lugar das raízes em (OPPENHEIM, 1987). O controle de estabilidade da posição angular da haste em resposta a uma entrada de perturbação $x(t)$ é função da retroação do valor do ângulo θ a fim de se projetar um valor de aceleração $a(t)$ do carro para trazer a haste para a posição vertical de equilíbrio. Na abordagem do autor por meio do Método do Lugar das Raízes, foi apresentado os efeitos do ganho P aplicado individualmente resultando que para qualquer valor de ganho escolhido o sistema não é levado a estabilidade. Posteriormente foi analisada a aplicação somente do ganho derivativo D, resultando que para qualquer valor de ganho o sistema tenderá a estabilidade, mas nunca vindo a atingi-la de fato. E por fim, implementou-se o controle PD, resultando que escolhendo-se apropriadamente os ganhos, o sistema é estabilizado. Cabe ressaltar que o projeto de um PID regulador baseado no lugar das raízes, torna a análise de estabilidade exaustiva, razão pela qual adotamos neste trabalho o critério de Routh-Hurwitz à análise de estabilidade ao controle PID regulador.

Figura 2: Sistema do pêndulo invertido



Fonte: OPPENHEIM (1987)



$$\theta(s) = \frac{1}{Ls^2 - g} [LX(s) - A(s)] \quad (5)$$

No qual,

$a(t)$ = sinal de controle;

L = comprimento da haste;

$\theta(t)$ = ângulo de equilíbrio da haste;

g = aceleração da gravidade;

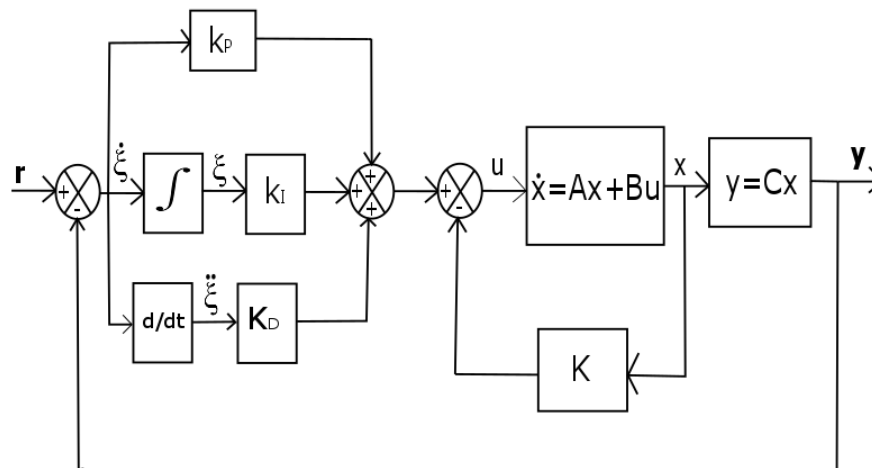
$x(t)$ = perturbação de entrada na haste.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

3.1. Sistema de controle servo

A ideia básica é projetar um sistema servo estável baseado num vetor de estados de ordem aumentada. Isto é realizado, acrescentando-se variáveis de estado associadas ao sinal de erro $\xi(t)$. A técnica de controle (PID servo) baseada na representação espaço de estados empregada para o sistema pêndulo invertido é esquematizada através de diagrama de blocos conforme mostrado na Figura 3 e pelas Equações de 6 a 11 que regem o comportamento do sistema. Destaca-se que o controle PID foi empregado de forma que cada parcela tenha sua dependência em relação ao erro ξ .

Figura 3: Esquema de representação para o sistema de controle PID Servo



Fonte: Autoria própria (2017)

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (6)$$

$$y = Cx \quad (7)$$

$$u = -Kx + k_I \xi + k_P \dot{\xi} + k_D \ddot{\xi} \quad (8)$$

$$\dot{\xi} = r - y = r - Cx \quad (9)$$



$$\ddot{\xi} = -C\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

A fim de viabilizar a representação da variável $\ddot{\xi}$ com base na definição do vetor de estado, a Equação (10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\ddot{\xi} = T\dot{x} \quad (11)$$

Onde $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Situação 1: Descrição do sistema com variáveis de estado redundante e suficientes

De acordo com o conjunto de Equações 6 a 11 e da Figura 3, a dinâmica do sistema controlado pode ser descrita em termos das variáveis de estado do sistema (Equação 3) e da nova variável de estado ξ gerada pelo Integrador, para uma dada referência r . Porém, para esse primeiro caso a dinâmica do sistema será descrita em termos da variável de estado ξ redundante. Dessa forma, para $t \geq 0$ pode-se descrever o comportamento do sistema conforme a Equação 12:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \\ \ddot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (12)$$

O intuito é projetar um sistema estável com o erro $\xi = 0$, $x(\infty)$, $u(\infty)$ e $\dot{\xi}(\infty)$ constantes em regime estacionário, fazendo com que a saída siga a entrada r , ou seja, $y(\infty) = r$. Assim, em regime permanente o comportamento do sistema é descrito pela equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \\ \ddot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (13)$$

Visto que a referência degrau unitário adotada r é constante para todo $t \geq 0$, o erro de estado no tempo até que o regime permanente seja atingido pode ser escrito conforme a equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \\ \ddot{\xi}(t) - \ddot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (14)$$

Considere as seguintes definições:



$$\begin{aligned}x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ \xi(t) - \xi(\infty) &= \xi_e(t) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) &= \dot{\xi}_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t)\end{aligned}\tag{15}$$

Dessa forma o sinal de controle $u_e(t)$ pode ser descrito como:

$$u_e(t) = -x_e(t)(K + k_p C + k_D T) + k_I \xi_e(t) + k_p r\tag{16}$$

Dessa forma, substituindo a Equação 15 na Equação 14, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t)\tag{17}$$

Como nesse caso o sistema teve a ordem aumentada em dois, devido às novas variáveis de estado ξ e $\dot{\xi}$, o novo vetor de erro de estado $e(t)$ de ordem $(n+2)$ pode ser escrito da forma:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = (n+2) - \text{vetor}\tag{18}$$

Portanto, a dinâmica de erro pode ser escrito como:

$$\dot{e}(t) = \hat{A}e(t) + \hat{B}u_e(t)\tag{19}$$

Substituindo os valores dos parâmetros nas matrizes A , B e C , resulta que:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ -T & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 20,601 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -0,4905 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\tag{20}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{21}$$



A aplicação do método de alocação de pólos requer que o sistema seja de estado completamente controlável. Para tanto, a matriz de controlabilidade M (Equação 22) de 6ª ordem deve ser de posto 6, ou seja, as 6 colunas e as 6 linhas devem ser linearmente independentes entre si. Em outras palavras, a matriz M deve ser não singular e seu *determinante*, consequentemente, deve ser não nulo.

$$M = \begin{bmatrix} \hat{B} & \hat{A}\hat{B} & \hat{A}^2\hat{B} & \hat{A}^3\hat{B} & \hat{A}^4\hat{B} & \hat{A}^5\hat{B} \end{bmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -20,601 & 0 & -424,4012 \\ -1 & 0 & -20,601 & 0 & -424,4012 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 & 0,4905 & 0 & 10,1048 \\ 0,5 & 0 & 0,4905 & 0 & 10,1048 & 0 \\ 0 & 0 & -0,5 & 0 & -0,4905 & 0 \\ 0 & -0,5 & 0 & -0,4905 & 0 & -10,1048 \end{bmatrix} \quad (22)$$

Os resultados obtidos para o *posto* e *determinante* da matriz M (Equação 22), com o uso da ferramenta computacional Matlab®, foram que o *Posto* é 5 e o *Determinante* é nulo. Portanto, a matriz de controlabilidade M do sistema descrito com uma variável de estado redundante, torna o sistema de estado incontrolável, não passível de aplicação do método de alocação de pólos.

Esse resultado desfavorável deve-se ao fato de que na definição do vetor de estados um estado redundante, desnecessário, apesar da factibilidade e coerência na modelagem matemática, foi selecionado para descrever a dinâmica do sistema. Portanto, segundo Ogata (2010) são consideradas variáveis de estados apenas as variáveis criadas pelas saídas dos integradores, e nesse caso foi considerado como variável de estado o próprio erro ξ devido à intenção de prescrever a dinâmica do sistema por meio do Derivador. Em outras palavras, significa que o número de variáveis de estado suficientes à descrição do sistema é igual ao número de integradores existentes na planta. Diante disto, a próxima elaboração levará em consideração as recomendações da bibliografia de controle. Cabe ressaltar que esse caminho foi tomado para demonstração da inviabilidade do projeto de técnicas de controle por espaço de estados ao utilizar redundantemente uma variável de estado para descrever o comportamento do sistema.

Situação 2: Descrição do sistema baseado nas variáveis de estado suficientes

De acordo com o conjunto de Equações 6 a 11 e da Figura 3 a dinâmica do sistema nesse caso será descrita apenas pelas variáveis de estados existentes no sistema. Isto é, conforme as saídas do sistema (Equação 3) e pela variável de estado criada pela saída do Integrador ξ . Para esse caso de controle, também deseja-se projetar um sistema assintoticamente estável com erro $\dot{\xi} = 0$, $x(\infty)$, $u(\infty)$ e $\xi(\infty)$ constantes em regime estacionário, fazendo com que a saída siga a entrada r , ou seja, $y(\infty) = r$. Para $t > 0$ a dinâmica do sistema pode ser descrita pela seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\xi}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \xi(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \quad (23)$$



Em regime permanente a dinâmica do sistema é descrita conforme a equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u(\infty) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(\infty) \quad (24)$$

Desde que a referência degrau unitário adotada r é constante para todo $t \geq 0$, o erro de estado no tempo até que o regime permanente seja atingido pode ser escrito como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) - \dot{x}(\infty) \\ \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) - x(\infty) \\ \xi(t) - \xi(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} [u(t) - u(\infty)] \quad (25)$$

Considere as seguintes definições:

$$\begin{aligned} x(t) - x(\infty) &= x_e(t) \\ \xi(t) - \xi(\infty) &= \xi_e(t) \\ u(t) - u(\infty) &= u_e(t) \end{aligned} \quad (26)$$

O sinal de controle $u_e(t)$ pode ser descrito por:

$$u_e(t) = -x_e(t)(K + k_p C + k_D T) + k_I \xi_e(t) + K_p r \quad (27)$$

Dessa forma, substituindo a Equação (26) na Equação (25), obtém-se a seguinte equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_e(t) \\ \dot{\xi}_e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_e(t) \quad (28)$$

Como nesse caso o sistema teve a ordem aumentada em apenas uma variável de estado, ξ , define-se um novo vetor de erro de estado $e(t)$ com ordem $(n+1)$, conforme a equação:

$$e(t) = \begin{bmatrix} x_e(t) \\ \xi_e(t) \end{bmatrix} = (n+1) - \text{vetor} \quad (29)$$

Então, a Equação (28) pode ser descrita em termos da Equação (29) conforme a equação:

$$\dot{e} = \hat{A}e + \hat{B}u_e \quad (30)$$

No qual



$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$u_e = -\hat{K}e \quad (33)$$

$$\hat{K} = [k_1 \quad k_2 \quad k_3 + k_p \quad k_4 + k_D \quad -k_I] \quad (34)$$

Para esse caso, é possível verificar a controlabilidade do sistema por meio da análise da matriz P (Equação 35) com as mesmas restrições da matriz de controlabilidade M (Equação 22). Isto é, a matriz P de 5ª ordem deve ter *posto 5* e *determinante* diferente de zero.

$$P = \begin{bmatrix} A & B \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 20.601 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (35)$$

O *posto* e o *determinante* da matriz P foram encontrados através da ferramenta computacional Matlab® como de *posto* $P = 5$ e *determinante* $D = 9.81$. Portanto, a matriz P de 5ª ordem é não singular e o sistema é então de estado completamente controlável. Dessa forma, o método de alocação de polos pode ser aplicado. A próxima etapa consiste em encontrar a matriz \hat{K} de retroação de estado (Equação 34) satisfazendo a devida alocação de pólos. Essa etapa consiste na compatibilização entre o polinômio de projeto de alocação e o polinômio de projeto do controlador, de forma a encontrar os valores da matriz \hat{K} que satisfaçam a alocação conforme a equação:

$$|sI - \hat{A} + \hat{B}\hat{K}| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (36)$$

Com o uso da plataforma computacional Matlab®, a partir dos pólos escolhidos para alocação, que são:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5, \mu_5 = -5 \quad (37)$$



obtem-se os seguintes valores dos ganhos para realimentação:

$$\begin{aligned} k_1 &= -157,6336 \\ k_2 &= -35,3733 \\ k_4 + k_D &= -36,7466 \\ k_I &= 50,9684 \\ k_3 + k_P &= -56,0652 \end{aligned} \quad (38)$$

Dando continuidade ao projeto da técnica de controle, a resposta ao degrau unitário do sistema pode ser encontrada conforme a equação:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (39)$$

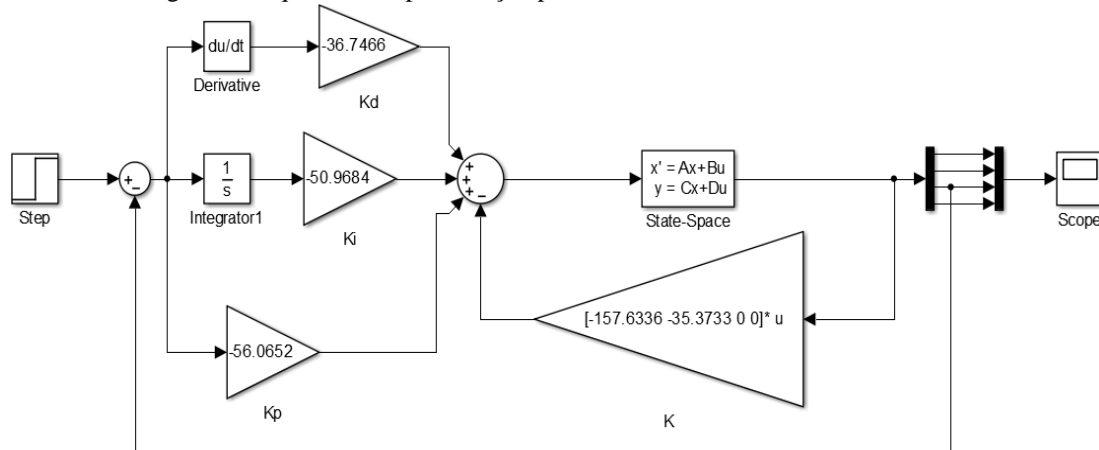
Substituindo os parâmetros das matrizes A, B e C (Equação 4) e do sinal de controle u (Equação 27) na Equação (39) obtém-se a equação que rege a dinâmica do sistema controlado conforme:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & k_3 + 2K_p & k_4 + 2K_d & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & -0,5k_3 - K_p & -0,5k_4 - K_d & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -K_p \\ 0 \\ 0,5K_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (40)$$

Dessa forma, os resultados obtidos matematicamente serão simulados por meio da plataforma Simulink®, conforme a Figura 4, e Matlab® por meio de programação básica para validar o projeto. Para fim de validação de projeto, os seguintes valores de ganho proporcional, derivativo e de realimentação estado foram selecionados baseado na Equação (38):

$$\begin{aligned} k_P &= -56,0652 & k_3 &= 0 \\ k_D &= -36,7466 & k_4 &= 0 \end{aligned} \quad (41)$$

Figura 4: Esquema de representação para o controle PID Servo no Simulink®

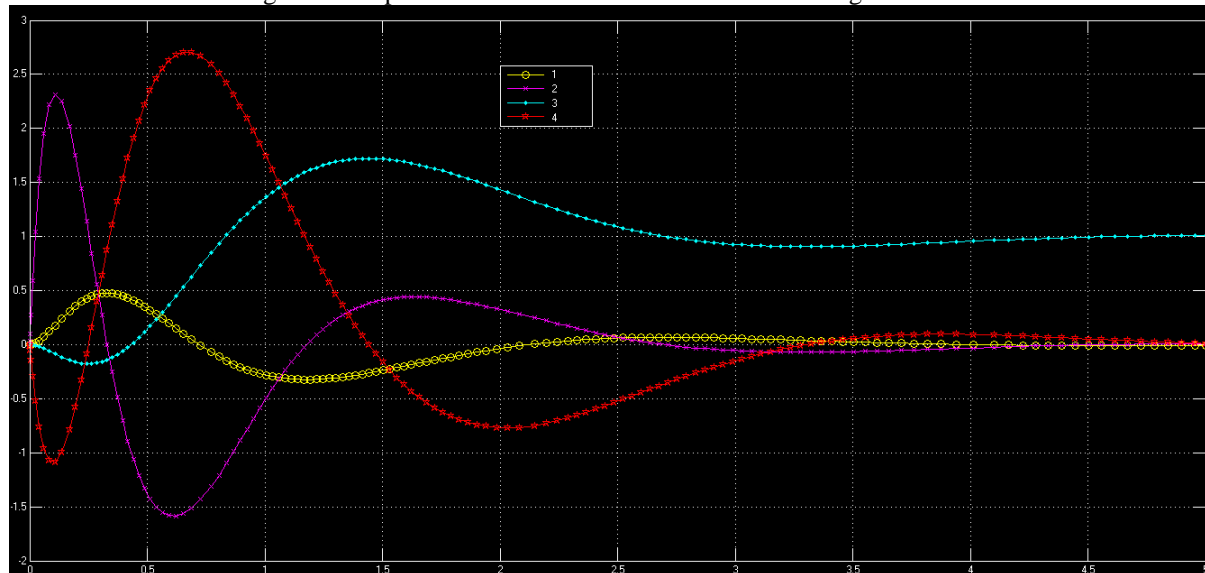


Fonte: Autoria própria (2017)



Os resultados das simulações segundo o esquema da Figura 4 e da programação no Matlab® conduzem naturalmente aos mesmos resultados apresentados na Figura 5, tomando-se a entrada degrau unitário como referência. Vale ressaltar que as cores amarelo, rosa, azul e vermelho representam as saídas do sistema (Posição do pêndulo, velocidade angular, posição do carro e velocidade do carro), respectivamente representadas na legenda por “1,2,3 e 4”.

Figura 5: Respostas do sistema servo PID à referência degrau unitário



Fonte: Autoria própria (2017)

Portanto, pode-se concluir, baseado na formulação da modelagem do sistema com as variáveis suficientes, não redundantes, que é factível o projeto do controle servo PID por espaço de estados e pelo método de alocação de polos. Isto significa dizer que a regra estabelecida na literatura para a descrição do número de elementos do vetor de estados deve de fato ser igual ao número de integradores do sistema. Dessa forma, as respostas encontradas demonstram que o pêndulo invertido está sendo estabilizado tanto na posição de equilíbrio sem apresentar oscilações permanentes, bem como, no acompanhamento da posição de referência. Cabe ressaltar que, pode-se variar os parâmetros dos ganhos Proporcional e Derivativo conforme a Equação (38) para obter diferentes resultados, ficando a critério do projetista escolher os valores que melhor satisfaçam as respostas transitórias de projeto.

3.2. Sistema de controle regulador

A técnica de controle a ser apresentada a seguir trata do sistema de controle regulador com as ações de controle PID aplicadas na malha de realimentação. Pois, conforme apresentado na Figura 6 o sistema regulador é caracterizado, baseado no princípio da superposição, por uma referência nula, e dessa forma pode ser reformulado conforme a Figura 7. Ambas figuras representam a dinâmica do sistema por diagrama de blocos e o conjunto de equações 42 a 47 regem o comportamento desse sistema.

$$\theta(s) = \frac{LH(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s) \quad (42)$$



$$H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g} \quad (43)$$

$$u(t) = k_1 \theta(t) + k_2 \frac{d\theta(t)}{dt} + k_3 \int \theta(t) dt \quad (44)$$

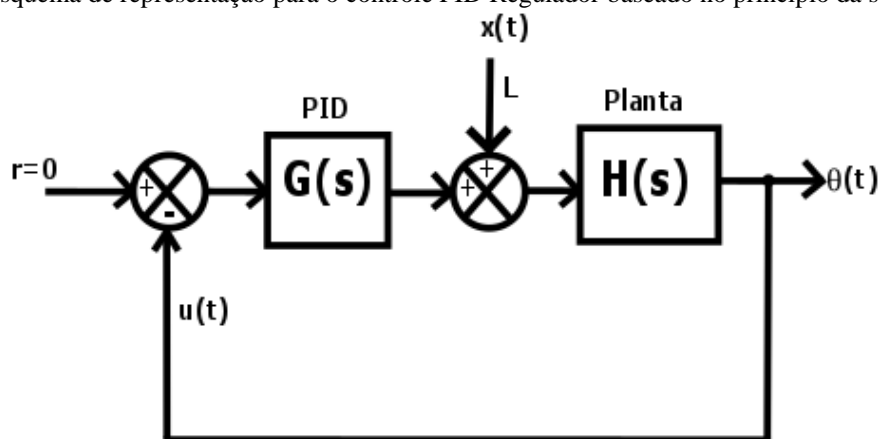
Aplicando a transformada de Laplace a equação 44, obtém-se a equação:

$$U(s) = k_1 \theta(s) + k_2 s \theta(s) + \frac{k_3}{s} \theta(s) \quad (45)$$

O ganho do controlador é dado por:

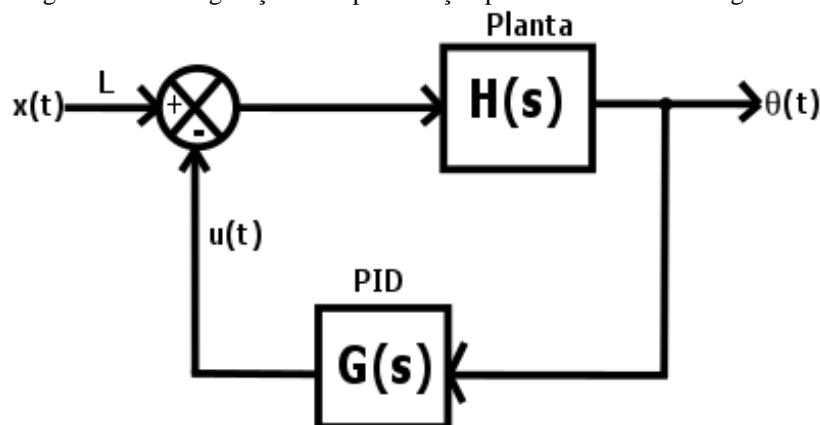
$$G(s) = k_1 + k_2 s + \frac{k_3}{s} \quad (46)$$

Figura 6: Esquema de representação para o controle PID Regulador baseado no princípio da superposição



Fonte: Autoria própria (2017)

Figura 7: Reconfiguração da representação para o controle PID Regulador



Fonte: Autoria própria (2017)

A substituição das Equações (43) e (46) na Equação (42) resulta na seguinte função de transferência de malha fechada:



$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{Ls}{Ls^3 + k_2s^2 + (k_1 - g)s + k_3} = \frac{s}{s^3 + \frac{k_2}{L}s^2 + \frac{(k_1 - g)}{L}s + \frac{k_3}{L}} \quad (47)$$

A equação característica desse sistema, para $g=9,8m/s^2$, é a seguinte:

$$s^3 + \frac{k_2}{L}s^2 + \left(\frac{k_1 - 9,8}{L}\right)s + \frac{k_3}{L} = 0 \quad (48)$$

A escolha do critério de Routh-Hurwitz à análise de estabilidade feita a seguir, ao contrário do que foi realizado de forma bastante didática em (OPPENHEIM, 1987), que utilizou a ferramenta de análise do Lugar das Raízes, se deve ao fato de a análise via lugar das raízes para o nosso caso tornar-se extremamente exaustiva quando da possibilidade de combinação entre os ganhos Proporcional, Integral e Derivativo ter forte influência no traçado das trajetórias dos pólos de malha fechada.

Portanto, desenvolvendo a tabela do critério de estabilidade de Routh Hurwitz baseado na equação característica do sistema (Equação 48) é possível determinar os valores dos ganhos que devem ser aplicados para que o sistema seja assintoticamente estável, conforme a equação:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & \frac{k_1 - 9,8}{L} \\ s^2 & \frac{k_2}{L} & \frac{k_3}{L} \\ s^1 & a & c \\ s^0 & b & \end{array} \quad (49)$$

Sendo

$$a = \frac{(k_1k_2 - 9,8k_2 - k_3L)}{k_2}, \quad b = \frac{k_3}{L}, \quad c = 0 \quad (50)$$

Logo, os limites para os ganhos são:

$$k_1 > 9,8 + \frac{k_3L}{k_2}; \quad 0 < k_2 > \frac{k_3L}{k_1 - 9,8}; \quad 0 < k_3 < k_2(k_1 - 9,8) \quad (51)$$

Portanto, é possível concluir que esse sistema de controle regulador com as ações de controle PID inseridas na malha de realimentação estabilizaria assintoticamente pêndulo invertido sobre o carro desde que os ganhos k_1 , k_2 e k_3 satisfizessem as inequações acima estabelecidas (Equação 51). Dessa forma, para efeitos de simulação, escolhendo valores que respeitem as inequações propostas nesse trabalho conforme a equação:

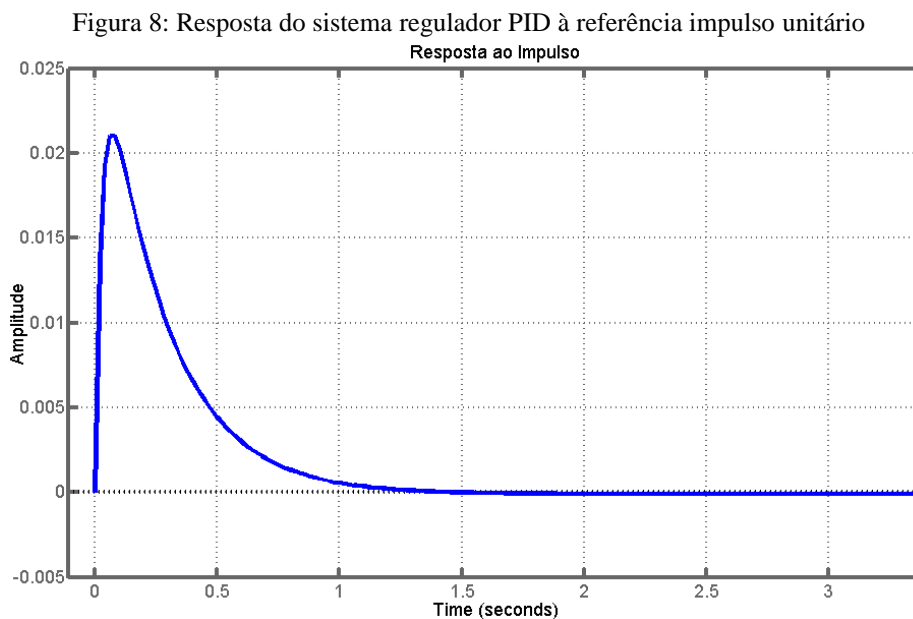
$$k_1 = 150 \quad k_2 = 40 \quad k_3 = 2 \quad L = 1 \quad (52)$$



resulta-se na seguinte função de transferência de malha fechada:

$$\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{s}{s^3 + \frac{k_2}{L}s^2 + \frac{(k_1 - g)}{L}s + \frac{k_3}{L}} = \frac{s}{s^3 + 40s^2 + 140.2s + 2} \quad (53)$$

O resultado de simulação, com uso da plataforma computacional Matlab®, da Equação (53) para uma entrada impulso unitário pode ser visualizado na Figura 8 a seguir:



Fonte: Autoria própria (2017)

Portanto, conclui-se da Figura 8 que é possível projetar um sistema de controle regulador PID que estabiliza assintoticamente o pêndulo invertido sobre o carro. Cabe ressaltar que os valores dos ganhos podem ser alterados caso o projetista queira satisfazer diferentes critérios de resposta transitória de projeto. Neste trabalho as características de resposta transitória não foram foco no projeto dos controladores.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado nos resultados, não é possível descrever a dinâmica do sistema de controle servo PID por espaço de estados considerando uma variável de estado redundante. Isto é, conforme apresentado na bibliografia de controle, para descrever a dinâmica do sistema deve-se considerar como variável de estado apenas as variáveis de saída dos Integradores que compõem o sistema. Dessa forma, ao levar isto em consideração foi possível projetar o controlador PID servo baseado na representação por espaço de estados satisfatoriamente. Já a implementação das ações de controle PID no sistema de controle regulador, como demonstrado, é factível, considerando que o projeto foi desenvolvido baseado na representação do sistema por função de transferência. Cabe ressaltar que estamos desenvolvendo pesquisas que exploram didaticamente o projeto de controladores em modelos variantes do pêndulo invertido, que levem em consideração, por exemplo, perturbações de estado e de saída, não linearidades e imprecisão nos parâmetros.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÅSTRÖM, K. J; FURUTA, K. Swinging Up a Pendulum by Energy Control. Anais: 13th IFAC World Congress. San Francisco: CA, 1996.

BOUBAKER, O. The inverted Pendulum: A fundamental Benchmark in Control Theory and Robotics. Anais: IEEE International Conference on Education and e-Learning Innovations. Sousse: Tunisia, 2012.

DORF, R.; BISHOP, R. H. Sistemas de controle moderno. 8a ed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro: LTC, 2001.

KAFETZIS, I; MOYSIS, L. Inverted Pendulum: A system with innurable applications. Anais: 9th Intenational Week Dedicated to Maths. Thessaloniki: Greece, 2017.

KURDEKAR, V; BORKAR, S. Inverted Pendulum Control: A Brief Overview. International Journal of Modern Engineeering Researcher, v.1, n.5, p.2924-2927, 2013.

LUNDBERG, K. H; BARTON, T. W. History of Inverted-Pendulum Systems. Anais: IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)(PART 1 ed., Vol.8, p.131-135, 2009)

NISE, N. S. Control systems engineering. 6. ed. USA: JohnWiley & Sons, 2011.

OGATA, K. MODERN CONTROL ENGINEERING. 5th ed. Prentice Hall. New Jersey: EUA, 2010.

OPPENHEIM, A. V. *Signals and Systems*. Massachusetts Institute of Technology: MIT OpenCourseWare, 2011. Disponível em: <<https://ocw.mit.edu>>. Acesso em: 3 abr. 2017.

A COMPLEMENTARY STUDY OF PID SERVO AND REGULATOR CONTROL APPLIED TO THE INVERTED PENDULUM SYSTEM

Abstract: *The study of classical systems of control with extension and deepening applied to equally classic plants proposed and discussed in the control literature, enables students to generalize the concepts and skills acquired and to transpose them to new plants in order to reach a real understanding of the control engineering designed. The initiative of theoretical exploration with autonomy in learning, distancing itself from the typically behavioralist of merely attending classes and not asking about variations and speculations referring to the case studies made available in the literature, proves to be a more adequate paradigm for the construction of knowledge, learning of concepts and the inherent competencies of the control engineering professional. More specifically, this paper makes a complementary analysis of the literature, about the servo and regulator PID's control designs to the classic inverted pendulum plant based on state space representations and transfer function.*

Key-words: *Inverted Pendulum, PID control, Regulator system, Servo system, Teaching.*

Organização



UDESC
UNIVERSIDADE
DO ESTADO DE
SANTA CATARINA



Promoção



Associação Brasileira de Educação em Engenharia