



ANÁLISE DA INSERÇÃO DO GANHO PROPORCIONAL NO MÉTODO DE CONTROLE POR SERVOSISTEMA DO TIPO 1 NO SISTEMA DO PÊNDULO INVERTIDO

Héber Hwang Arcolezi¹, Bruno Bassi², Hudson Thiago Formigoni Roanes³, Thiago Garcia de Andrade⁴, Rogério Bastos Quirino⁵

¹ Graduando em Engenharia Elétrica, Universidade do Estado de Mato Grosso, heber_arcolezi2@hotmail.com

² Graduando em Engenharia Elétrica, Universidade do Estado de Mato Grosso, brunobbassi@hotmail.com

³ Graduando em Engenharia Elétrica, Universidade do Estado de Mato Grosso, hudsonvsp@yahoo.com.br

⁴ Graduando em Engenharia Elétrica, Universidade do Estado de Mato Grosso, thiago.ga@yahoo.com.br

⁵ Mestre em Engenharia Elétrica, Universidade Estadual de Campinas, rb_quirino@hotmail.com

Resumo: *Este trabalho tem como objetivo apresentar de maneira clara, didática e menos complexa os resultados e simulações de controle da implementação do ganho proporcional na malha do servossistema do tipo 1 na planta do pêndulo invertido, utilizando das plataformas computacionais Matlab e Simulink e ferramentas matemáticas para modelar o sistema.*

Palavras-chave: alocação de polos; espaço de estados; pêndulo invertido; sistemas de controle

Abstract – *This work aims to present in a clear, didactic and less complex way the results and control simulations of the implementation of proportional gain in the type 1 servosystem's mesh in the plant of the inverted pendulum, using computation platforms such as Matlab and Simulink, besides mathematical tools to model the system.*

Keywords: control system; inverted pendulum; pole allocation; state space;

Introdução

O sistema do pêndulo invertido é uma referência clássica no estudo de técnicas de controle na área de engenharia e controle de processos, pois, é um sistema mecanicamente simples mas também possui características de instabilidade, complexidade e não linearidade em malha aberta. Devido a essas características e por ter propriedades similares a diversos sistemas do dia a dia, que requerem um alto grau de precisão, tornou-se um importante objeto de estudo na área [RIBEIRO, 2007].

Uma breve simulação de controle, na prática, para o sistema do pêndulo invertido é tentar equilibrar uma vassoura pela ponta do cabo sobre a palma da mão, no qual, a técnica de controle é movimentar a base do sistema, a mão, de um lado para o outro com o propósito de produzir uma força que se oponha ao movimento instável da vassoura [DORF; BISHOP, 2001].

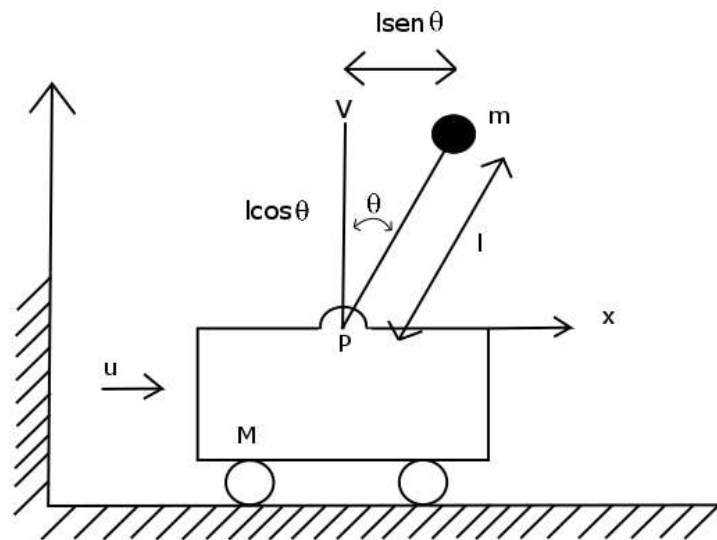
A teoria de controle empregada para resolução do problema do pêndulo invertido pode ser encontrada em diversas bibliografias, artigos, teses, dentre outros. Porém, como de costume, os autores na maioria das vezes apresentam o conteúdo de forma pouco aprofundada e didática. O objetivo da realização desse trabalho é ressaltar prioritariamente as demonstrações e análises da técnica de controle empregada ao controle do pêndulo invertido, bem como, contribuir de forma complementar com o material já existente.



Materiais e Métodos

Considere o pêndulo invertido montado sobre um “carrinho” num plano bidimensional, figura 1. Cabe esclarecer que, o movimento do sistema fica restrito apenas ao plano da página. A haste é completamente instável, pois pode cair para qualquer lado a menos que seja aplicada uma força de controle na base, mais especificamente, no carrinho a qual está acoplada. A modelagem matemática para esse sistema, definindo o ângulo da haste a partir da linha vertical V como θ , é da seguinte forma [OGATA, 2011].

Figura 1 – Pêndulo invertido



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Realizando o somatório das forças no diagrama de corpo livre do carrinho nas direções vertical e horizontal, obtém-se as duas equações governantes para o sistema. Como para esse problema de controle o intuito é manter a haste do pêndulo na posição vertical, a linearização desse sistema é em torno do ponto em que o ângulo é zero, assumindo as seguintes igualdades:

$$\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1, \text{ e } \theta\dot{\theta}^2 = 0$$

Logo, as equações diferenciais que constituem o modelo matemático do pêndulo assumindo o momento de inércia como nulo, são:

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - u \quad (1)$$

$$M\ddot{x} = u - mg\theta \quad (2)$$

A partir dessas duas equações e do objetivo do trabalho que é projetar técnicas de controle no espaço de estados, as variáveis de estado são definidas como posição angular, aceleração da posição angular, posição do carrinho e aceleração do carrinho, respectivamente:

$$x_1 = \theta$$

$$x_2 = \dot{\theta}$$

$$x_3 = x$$

$$x_4 = \dot{x}$$



Em termos de equações vetoriais-matriciais, a representação do sistema do pêndulo invertido no espaço de estados, é da seguinte forma:

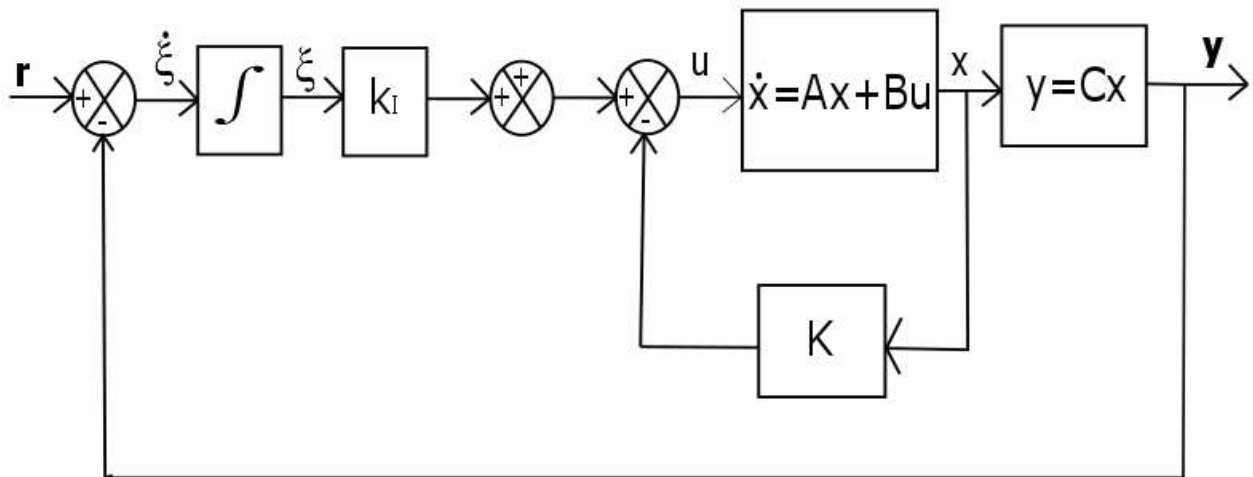
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{M+m}{Ml}g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m}{M}g & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (4)$$

O projeto de sistemas de controle no espaço de estados pode ser feito através do método de alocação de polos. Para aplicação desse método é necessário que todas as variáveis de estado do sistema sejam medidas com êxito e que estejam acessíveis para retroação, ou seja, é requerido que o sistema seja completamente controlável [DORF e BISHOP, 2001].

Como a planta do sistema do pêndulo invertido não possui um integrador, o projeto de um servossistema do tipo 1 como método de controle é baseado no princípio básico de inserção de um integrador no ramo direto entre a planta do sistema e o comparador de erro. O sistema modelado é descrito a seguir pelo diagrama de blocos, figura 2, e um conjunto de equações [OGATA, 2011]:

Figura 2 – Diagrama de blocos do servossistema do tipo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Kx + k_I \xi \\ \dot{\xi} &= r - Cx \end{aligned} \quad (5)$$



Onde,

x = Vetor de estado da planta;

u = Sinal de controle;

y = Sinal de Saída;

ξ = Variável de estado do sistema (Saída do Integrador);

r = Sinal de referência;

A, B, C = Matriz constante.

Por conseguinte, substituindo os valores dos parâmetros assumindo $M=2.0$ kg, $m=0.1$ kg, $l=0,5$ m e $g=9,8$ m/s², temos:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 20.610 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.4905 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad (6)$$

Como apresentado por Ogata (2011), o sistema de controle foi modelado pelo método de alocação de polos para encontrar os valores dos ganhos K e k_I , por substituição direta, a partir dos seguintes polos:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5, \mu_5 = -5$$

O comportamento do sistema e sua resposta à entrada degrau são encontrados a partir da seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_I \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (7)$$

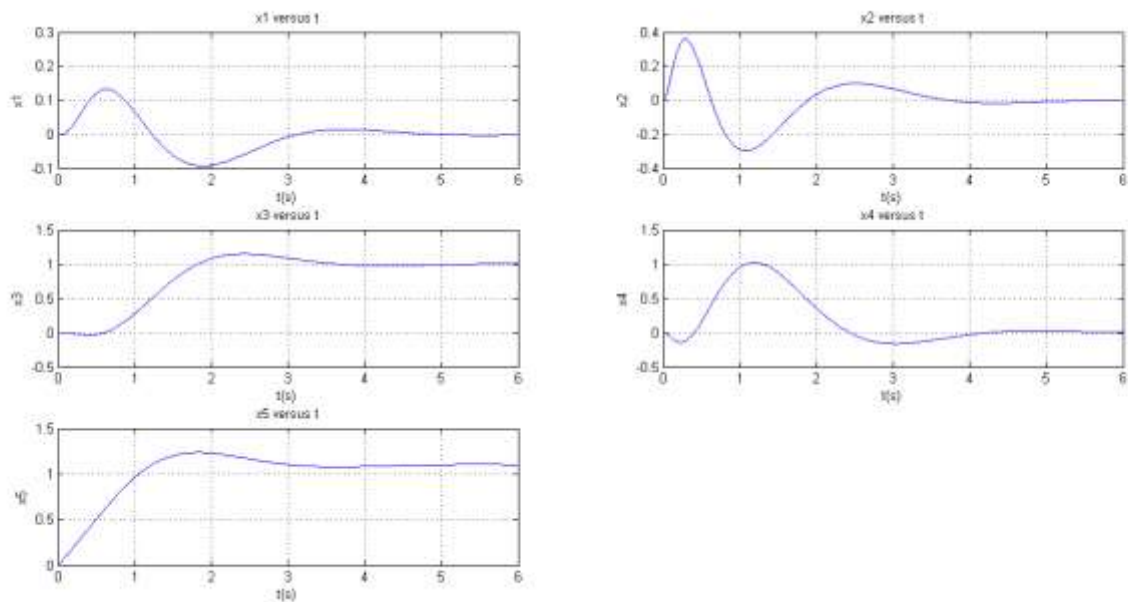
Substituindo os respectivos valores, a matriz resultante é exposta abaixo e o comportamento das saídas do sistema são apresentadas na figura 3:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & -56,0652 & -36,7466 & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & 28,0326 & 18,3733 & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (8)$$

A partir dos gráficos apresentados na figura 3, assumindo o referencial 0 como ponto de origem (posição vertical do pêndulo e posição inicial do móvel), deve-se atentar para os de maior relevância para análise da técnica de controle empregada, nesse caso, x_1 e x_3 que representam as posições do pêndulo e do carrinho respectivamente. Para ambas as saídas verifica-se um tempo de acomodamento em torno de 4 a 5 segundos. Analisando o gráfico da posição do pêndulo verifica-se que ele oscila uma vez para a esquerda e outra para a direita e logo vem a se estabilizar. Para o gráfico da posição do carrinho verifica-se que o sobressinal máximo do sistema é em torno de 15% e o carrinho é levado a uma posição de estabilidade logo em seguida.



Figura 3 – Resposta do servossistema do tipo 1 à entrada degrau



Fonte: OGATA (2011)

Como contribuição complementar e com o objetivo do trabalho que é detalhar o quanto possível a teoria de controle empregada, inicialmente será demonstrada a implementação do ganho Proporcional (P) por meio do diagrama de blocos resultante e das equações que regem o sistema. Após isso, serão utilizadas técnicas matemáticas e de controle em conjunto com as ferramentas computacionais Matlab e Simulink para melhor representação e simulação da técnica de controle aplicada ao sistema do pêndulo invertido. As condições adotadas para esse trabalho assumindo uma entrada degrau unitário, serão:

- Tempo de acomodação máximo de 5 segundos;
- Valor máximo de sobressinal de 16%.

Resultados e Discussão

O esquema de implementação do ganho Proporcional (k_p) na planta do servossistema do tipo 1, figura 4, e as equações que regem o sistema são:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -Kx + k_I \xi + k_P \dot{\xi} \\ \dot{\xi} &= r - Cx\end{aligned}\tag{9}$$

Onde,

x = Vetor de estado planta;

u = Sinal de controle;

y = Sinal de Saída;

ξ = Variável de estado do sistema (Saída do Integrador);

r = Sinal de referência;

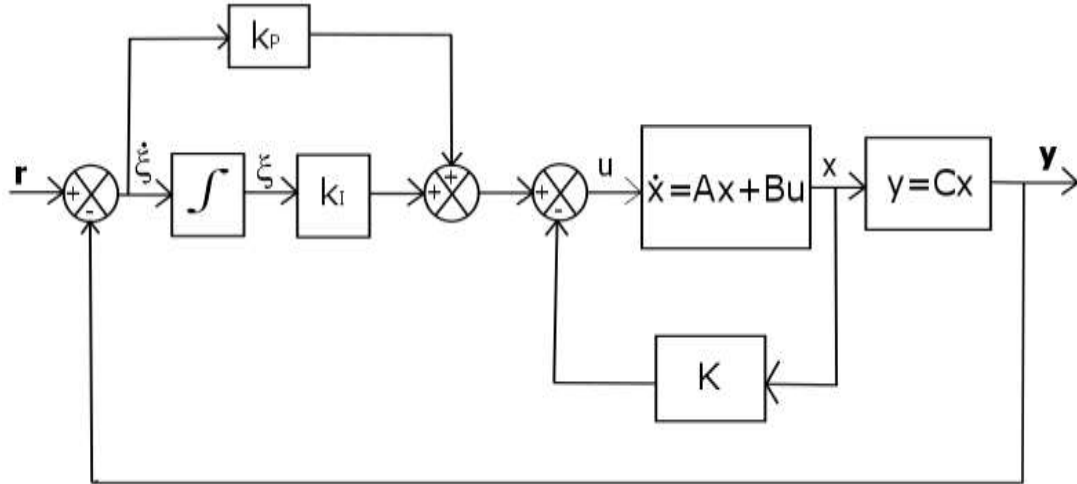


A, B, C = Matriz constante.

Assim, substituindo o sinal u na equação de \dot{x} e realizando as operações matemáticas necessárias encontra-se:

$$\dot{x} = [(A - B(K + k_p C)]x + Bk_I \xi + rBk_p \quad (10)$$

Figura 4 – Esquema de implementação do ganho proporcional na malha do servossistema do tipo 1



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

A função de transferência do sistema foi encontrada através da dedução matemática das equações a seguir aplicando a ferramenta matemática Transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} \dot{X}_a &= A_a X_a + B_a r \\ Y_a &= C_a X_a \end{aligned} \quad (11)$$

Resultando:

$$\frac{Y_a}{r} = C_a (sI - A_a)^{-1} B_a \quad (12)$$

Para determinar os valores dos ganhos K , k_I , k_P , foi utilizado o método de alocação de polos pelo método de substituição direta. Inicialmente foi comprovado que o sistema é de estado completamente controlável para total implementação do método.

A princípio foi definida a primeira equação característica do sistema para possibilitar a aplicação do método de substituição direta, através do seguinte determinante:

$$|sI - Aa| = \begin{vmatrix} s & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -(20,601 + k_1) & s - k_2 & -(k_3 + k_p) & -k_4 & k_I \\ 0 & 0 & s & -1 & 0 \\ (0,4905 + 0,5k_1) & 0,5k_2 & 0,5(k_3 + k_P) & s + 0,5k_4 & -0,5k_I \\ 0 & 0 & 1 & 0 & s \end{vmatrix} \quad (13)$$

Após utilizar o teorema de Laplace, por cofator, foi encontrado o seguinte polinômio de 5ª ordem:



$$s^5 + s^4(-k_2 + 0,5k_4) + s^3(-k_1 + 0,5k_3 + 0,5k_p - 20,610) + s^2(0,5k_l - 9,81k_4) + s[-9,81(k_3 + k_p)] - 9,81k_l$$

A segunda equação foi definida através dos polos escolhidos para alocação:

$$\mu_1 = -1 + j\sqrt{3}, \mu_2 = -1 - j\sqrt{3}, \mu_3 = -5, \mu_4 = -5, \mu_5 = -5$$

Resultando no seguinte polinômio de 5ª ordem:

$$(s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) = s^5 + 17s^4 + 109s^3 + 335s^2 + 550s + 500$$

Compatibilizando os polinômios através da equação abaixo, foi possível encontrar os valores de K, k_l, k_p :

$$|sI - A| = (s - \mu_1)(s - \mu_2)(s - \mu_3)(s - \mu_4)(s - \mu_5) \quad (14)$$

Logo, os valores encontrados foram:

$$k_1 = -157,6336$$

$$k_2 = -35,3733$$

$$k_4 = -36,7466$$

$$k_l = -50,9684$$

Por conseguinte, os ganhos k_1, k_2, k_4, k_l são independentes e os ganhos k_3 e k_p dependem um do valor do outro. Assim, foram testados diversos valores para esses ganhos possibilitando uma melhor compreensão do comportamento do sistema com a inserção do ganho proporcional. Assim, as dinâmicas do sistema são descritas a partir da seguinte equação vetorial-matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B(K + k_p C) & Bk_l \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Bk_p \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (15)$$

Os resultados das simulações para alguns valores de k_p , sendo ξ representado por x_5 , serão apresentados nas imagens a seguir. Realizando o mesmo tipo de análise que anteriormente, deve-se atentar para os gráficos relevantes dos resultados da técnica de controle, x_1 e x_3 , que representam as posições do pêndulo e do móvel respectivamente.

Primeiramente foi testado um valor baixo para o ganho proporcional, sendo $k_p = -10$ e $k_3 = -46,0652$. A matriz resultante e os gráficos das saídas, figura 5, são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & -56,0652 & -36,7466 & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & 28,0326 & 18,3733 & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (16)$$

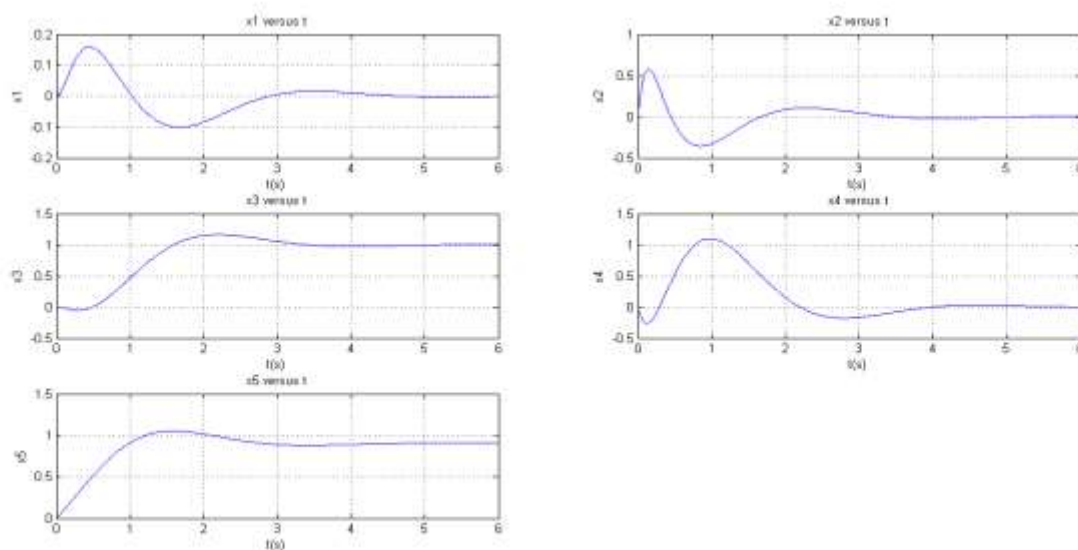
Para esse valor de ganho proporcional no sistema, é notável um leve aumento na amplitude das curvas das saídas tanto no de x_1 quanto no de x_3 . E caso tenha, não muito visível, há pouca alteração no tempo de acomodação do sistema. Portanto, com esses valores de ganho Proporcional inserido no sistema não houve resultados positivos, uma vez que, o aumento da amplitude não é benéfico para o objetivo da técnica de controle.

Assumindo agora um valor intermediário para o ganho proporcional sendo $k_p = -30$ e consequentemente $k_3 = -26,0652$. Os resultados para esses valores dos ganhos são apresentados pela matriz resultante, a seguir, e o resultado de simulação é retratado nos gráficos das saídas na figura 6:



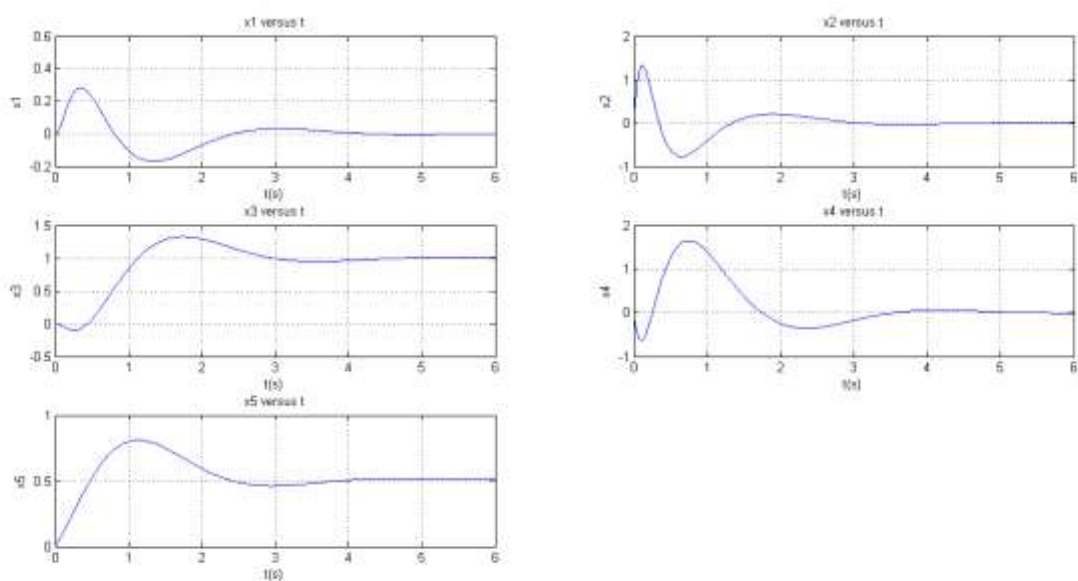
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & -56,0652 & -36,7466 & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & 28,0326 & 18,3733 & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 30 \\ 0 \\ -15 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (17)$$

Figura 5 – Resposta ao degrau para $k_P=-10$



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Figura 6 - Resposta ao degrau para $k_P=-30$



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

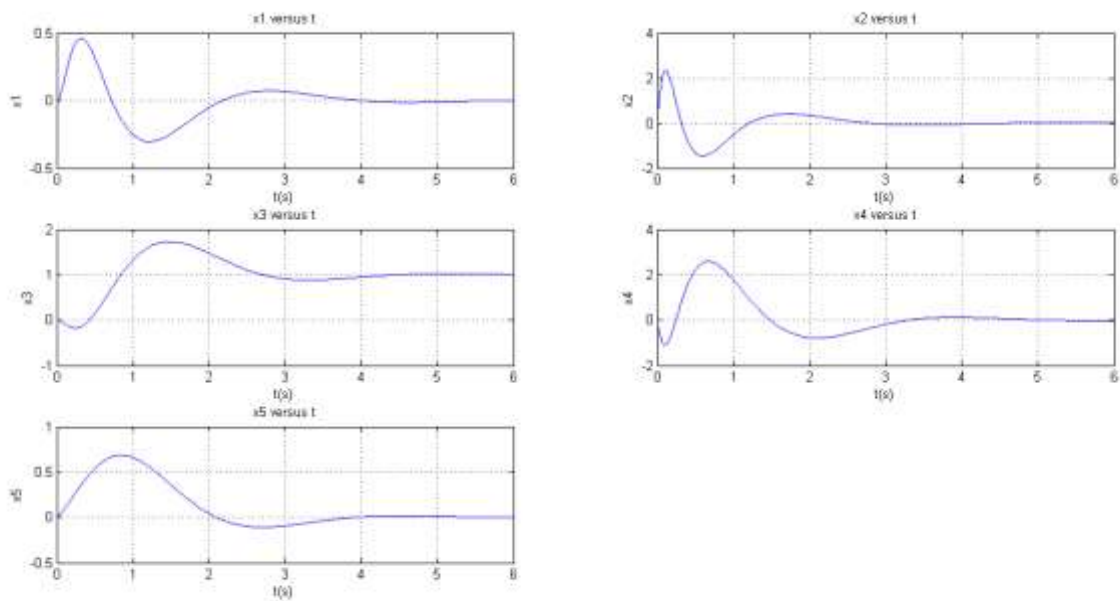


Da mesma maneira que para o valor de ganho Proporcional baixo, as saídas apresentadas por x_1 e x_3 agora apresentaram mais uma vez o mesmo comportamento. A amplitude aumentou consideravelmente e o tempo de acomodação não apresentou redução significativa. Esse aumento de amplitude, como dito anteriormente, não é agradável para nenhuma das respostas, pois, o pêndulo é movido para mais longe da origem e o sobressinal máximo da posição do carrinho é maior e ultrapassa as condições adotadas para o trabalho.

Por fim, simulando o comportamento do sistema para o valor de ganho proporcional no valor máximo $k_P = -56,0652$ e consequentemente $k_3 = 0$. A matriz resultante é apresentada a seguir e os gráficos das saídas, figura 7, agora são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -137,0326 & -35,3733 & -56,0652 & -36,7466 & 50,9684 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 78,3263 & 17,6867 & 28,0326 & 18,3733 & -25,4842 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 56,0652 \\ 0 \\ -28,0326 \\ 1 \end{bmatrix} r \quad (18)$$

Figura 7 – Resposta ao degrau para $k_P = -56,0652$



Fonte: Elaborada pelo autor (2017)

Para essa simulação final, conforme os gráficos de x_1 e x_3 constata-se um grande aumento do valor da amplitude do sistema e pouca, caso tenha, diferença no tempo de acomodação se comparado com o apresentado na figura 3 que não tem o ganho Proporcional. E conforme mencionado anteriormente esse aumento na amplitude não traz benefícios à técnica de controle. Diante disso a condição de sobressinal máximo adotada para o sistema foi ultrapassada, logo, a implementação desse ganho no sistema não demonstrou resultados positivos. Portanto, sugere-se realizar diferentes alocações de polos para modelar o sistema, e/ou, inserir outros tipos de ganhos na malha do sistema.



Conclusão

Conforme observado no desenvolvimento do trabalho, a implementação do ganho proporcional na malha do servossistema do tipo 1 utilizando o espaço de estados obteve um resultado próximo ao esperado e não vantajoso para a alocação de polos realizada. Pois, a amplitude das saídas x_1 e x_3 que são as posições da haste do pêndulo e do carrinho, respectivamente, aumentou a medida que o ganho proporcional k_p foi incrementado. Porém, era esperado também que o tempo de acomodação do sistema viesse a diminuir conforme esse ganho fosse aumentado, mas isso não ocorreu.

Dessa forma, a inserção do ganho proporcional no servossistema do tipo 1 não trouxe acréscimo positivo à técnica de controle para o sistema do pêndulo invertido. Pois, como característica desse ganho já era previsto um aumento na amplitude das respostas com o aumento das oscilações, bem como uma diminuição do tempo de acomodação para o sistema. Mas, conforme os resultados apresentados essa diminuição no tempo de acomodação não foi notada, em valores significativos, para qualquer que fosse o valor de k_p .

Portanto, para futuros trabalhos sugere-se testar a implementação do ganho derivativo k_D na malha do servossistema do tipo 1. Mas para isso, supõe-se que seria necessário uma diferente abordagem para a modelagem do sistema, ou seja, supor diferentes variáveis de estado para suportar uma entrada diferente da degrau ou modelar no domínio da frequência por função de transferência.

Referências Bibliográficas

- CASTRUCCI, P. L.; BITTAR, A.; SALES, R. M. **CONTROLE AUTOMÁTICO**. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.
- DINIZ, I. S. et al. **CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO AUXILIADO POR COMPUTADOR INTEGRANDO PID E SERVOSISTEMA MULTIVARIÁVEL**. In: Brazilian Conference on Dynamics, Control, and Applications (DINCON 2009), 8., 2009, Bauru, SP. Proceeding of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control, and Applications, 2009.
- DORF, R.; BISHOP, R. H. **Sistemas de controle moderno**. 8. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001.
- NISE, N. S. **Engenharia de Sistemas de Controle**. 3. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2002.
- OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Prentice - Hall, 2011.
- RIBEIRO, R. **IMPLEMENTAÇÃO DE UM SISTEMA DE CONTROLE DE UM PÊNDULO INVERTIDO**. Itajubá, MG: UNIFEI, 2007.
- OPPENHEIM, A. V. **Lecture 26, Feedback Example: The Inverted Pendulum** | MIT RES.6.007, 1987. Signals and Systems, Spring 2011. MIT OPENCOURSEWARE.
- VENDRAMINI, G. ; SILVA, P. S.. **Controle de um Pêndulo Invertido sobre Plataforma Móvel Utilizando PID e MFAC**. In: Brazilian Conference on Dynamics, Control and Their Applications (DINCON'10), 9., 2010, Serra Negra, SP. Proceedings of the 8th Brazilian Conference on Dynamics, Control, and Applications, p. 405-414, 2010.