

پروژه فصلی ۲: بررسی مدار سفر از زمین به مریخ

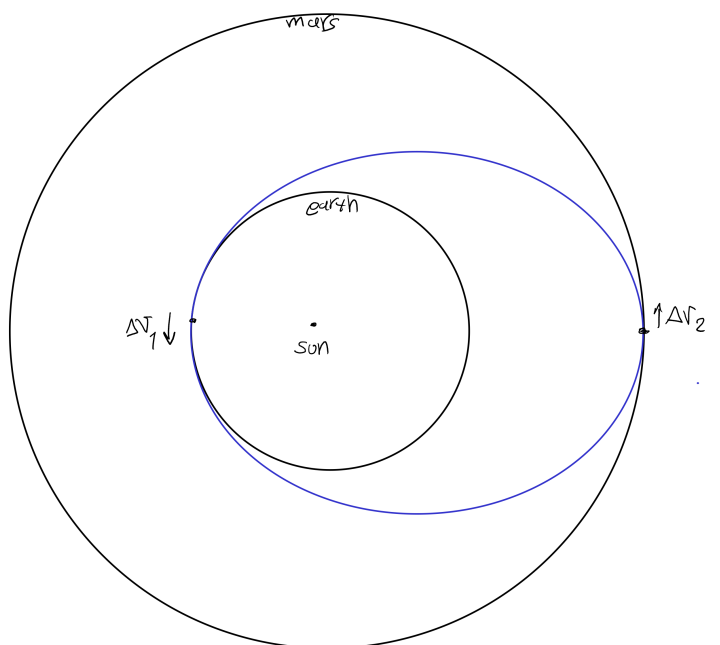
حسین حاتم نیا ۹۸۱۱۰۱۹۲ - ارمیا اعتمادی بروجنی ۹۸۱۰۰۵۹۴

مقدمه

در این پروژه سفر یک فضاییما از زمین به مریخ را بررسی می‌کنیم و مشخصات مداری، زمان سفر و سرعت در هر مرحله را محاسبه می‌کنیم. در ادامه سوخت مورد نیاز و زمانی که لازم است برای پرتاب لازم است را بدست می‌آوریم. نتایج عددی در Python به کمک روش اولیه محاسبه شده و برای نمایش نتایج از Matplotlib و Python استفاده شده.

بررسی اولیه مسئله: مدار هوهمان

برای رفتن از مدار زمین به مدار مریخ یکی از معروف‌ترین مسیرها، "مدار هوهمان" هست. در مدار هوهمان یک مدار بیضی با حضیض در فاصله مدار کوچکتر و اوج در فاصله مدار بزرگتر تشکیل می‌دهیم. این مدار در این دو نقطه به مدار دو سیاره مماس است. پس با اعمال دو مرحله پیش‌رانه و افزایش سرعت می‌توان به کمک مدار هوهمان این سفر را انجام داد. شکل تقریبی مدار و محاسبات اولیه در ادامه آمده‌اند:



$$a = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25 AU \quad (۱)$$

$$e = \frac{1.5 - 1}{1.5 + 1} = 0.2 \quad (۲)$$

$$v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left(\frac{1+e}{1-e} \right)} = 32668 \frac{m}{s} \quad (۳)$$

$$v_E = \sqrt{\frac{GM}{r_E}} = 29821 \frac{m}{s} \quad (۴)$$

$$\Delta v_1 = v_p - v_E = 2846 \frac{m}{s} \quad (۵)$$

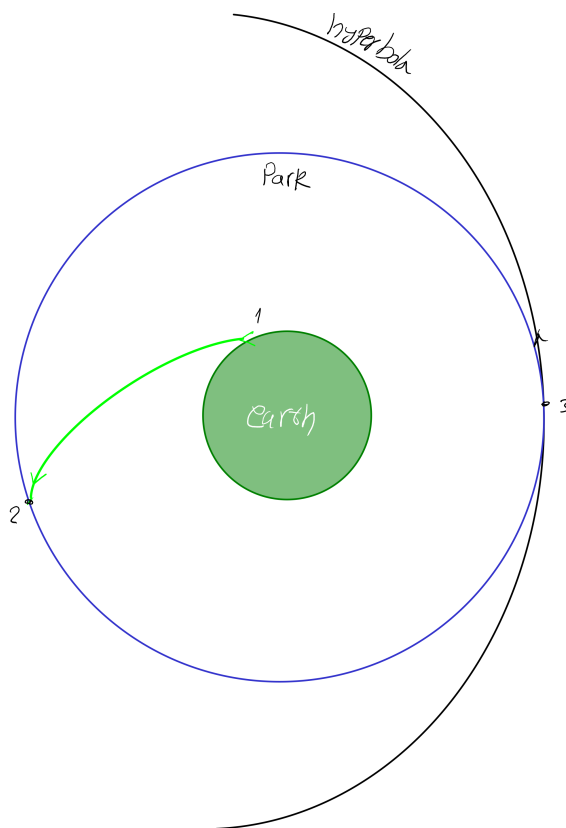
نکته قابل توجه این است که این تغییر سرعت نسبی، بسیار از سرعت فرار زمین کمتر است. در واقع برای سرعت فرار زمین داریم:

$$v_{\text{فرار}} = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = 11174 \frac{m}{s} \quad (۶)$$

پس نمی توانیم مستقیماً از سطح زمین این انتقال مداری را انجام دهیم. برای این کار از "مدار پارک" استفاده می کنیم.

مدار پارک

در بسیاری از ماموریت های فضایی، قبل از ورود به مدار میان سیاره ای، فضاپیما وارد مداری به نام مدار پارک می شود. در ادامه، فضاپیما با یک مدار هذلولوی از مدار پارک خارج شده تا جایی که گرانش زمین در مسئله قابل چشم پوشی باشد. حال مانور هوهمان به طریقی که عقبتر گفته شد قابل انجام است. شکل تقریبی این مدار و محاسبات این مدار در ادامه آمده است (مسیر از سطح زمین به مدار پارک مشابه مدار هوهمان است و نقطه پرتاب در حوضیض بیضی است):



$$R_{park} = 4.22 \times 10^6 m \quad (v)$$

$$a = \frac{R_{park} + R_E}{2} = 2.429 \times 10^7 m \quad (w)$$

$$e = \frac{R_{park} - R_E}{R_{park} + R_E} = 0.737 \quad (x)$$

$$\Delta \tilde{v}_1 = \tilde{v}_p - 0 = 10408 \frac{m}{s} \quad (y)$$

$$\Delta \tilde{v}_2 = \sqrt{\frac{GM_E}{R_{park}}} - \tilde{v}_a = 1576 \frac{m}{s} \quad (z)$$

$$\frac{\Delta E}{m} = \frac{1}{2}(\Delta \tilde{v}_1^2 + \Delta \tilde{v}_2^2) = 5.541 \times 10^7 \frac{J}{Kg} \quad (aa)$$

حال از مدار پارک تغییر سرعت مدار هوهمان را اعمال می کنیم (به کمک مدار هذلولی):

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_1^2 - \frac{GM_E}{R_{park}}) = \frac{1}{2}(v_p - v_E)^2 \quad (ab)$$

$$\Rightarrow \tilde{v}_1 = 5193 \frac{m}{s} \quad (ac)$$

$$\frac{\Delta E}{m} = \frac{1}{2}(\tilde{v}_1 - v_{park})^2 = 2.25 \times 10^6 \frac{J}{Kg} \quad (ad)$$

در انتقال مداری از مدار هوهمان به مدار مریخ به طور مشابه برای انرژی داریم:

$$\frac{E}{m} = 2 \times 10^6 \frac{J}{Kg} \quad (۱۶)$$

برای جرم فضاپیما از تخمین $1 \times 10^4 Kg$ استفاده می‌کنیم که تخمین معقولی است. در این صورت برای انرژی کل داریم:

$$E_{tot} = 5.966 \times 10^{11} J \quad (۱۷)$$

برای این مقدار انرژی، سوخت مورد نیاز به صورت تخمینی برابر $2000 Kg$ است. (این مقدار در مقایسه با سوخت پنج هزار کیلو گرمی فضاپیما ویجر منطقی است)

شبیه سازی

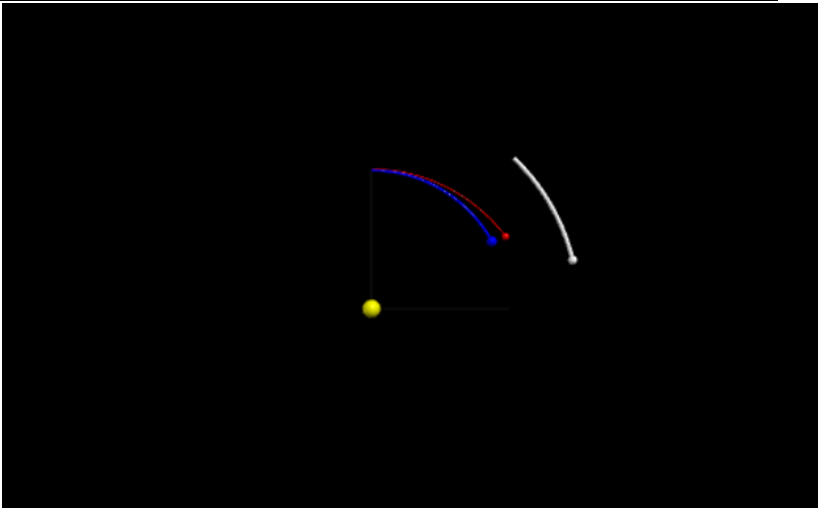
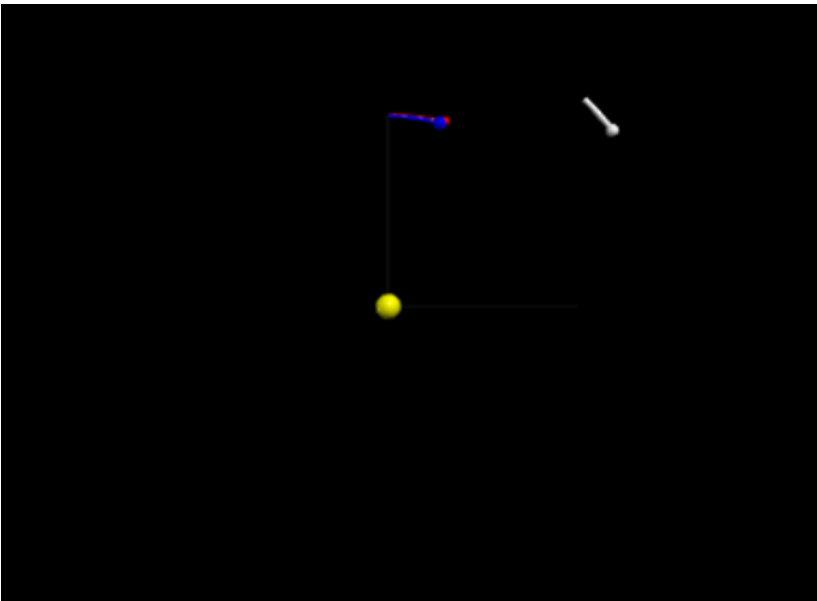
برای شبیه سازی مسئله، هر شی (شامل خورشید، سیارات و فضاپیما) به عنوان یک آبجکت در زبان پایتون ساخته می‌شود. نمونه یک آبجکت در ادامه آمده است:

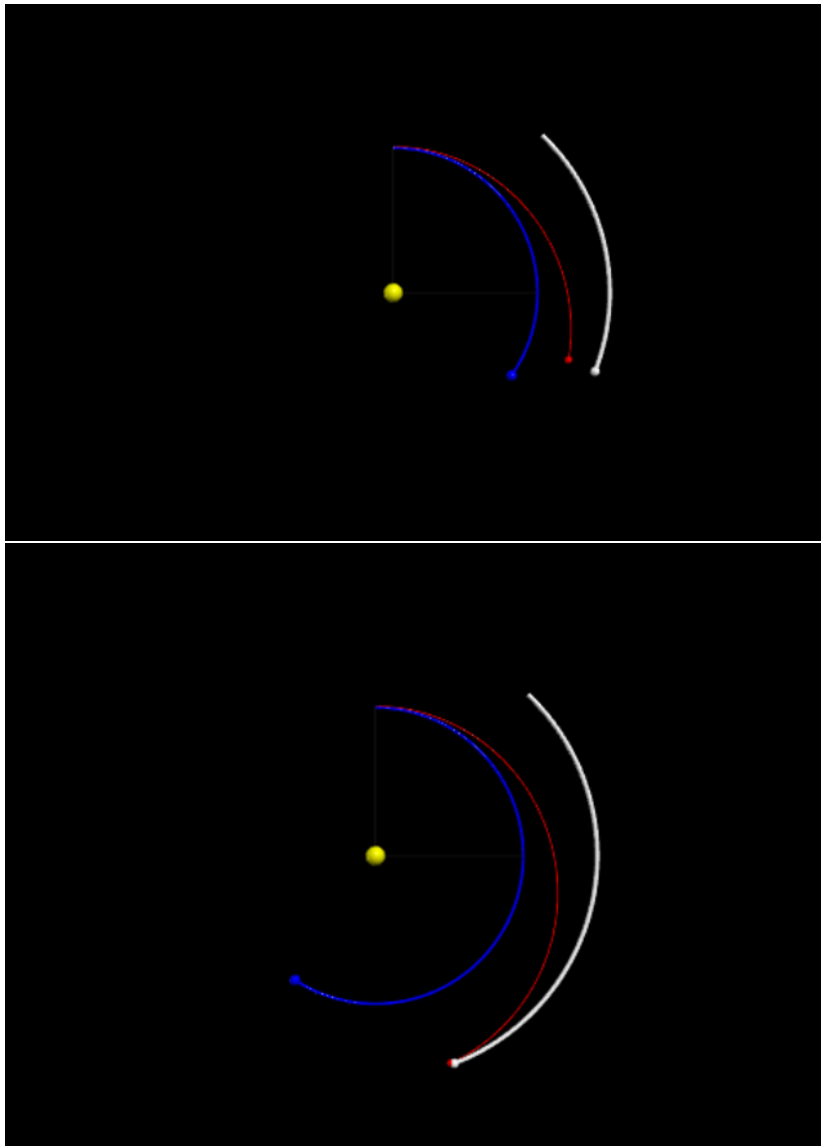
```
59 #earth
60 star= sphere(pos=L*vector(0,1,0), make_trail=True, retain=500, trail_radius=Rsun/6)
61 star.radius = 4*Rsun/7
62 star.mass = 5.97e24
63 star.momentum=vector(sqrt(G*Msun/L),0,0)*star.mass
64 star.color = star.trail_color = star.colors[2 % 6]
65 Stars.append( star)
66 psum = psum + star.momentum
67
68
```

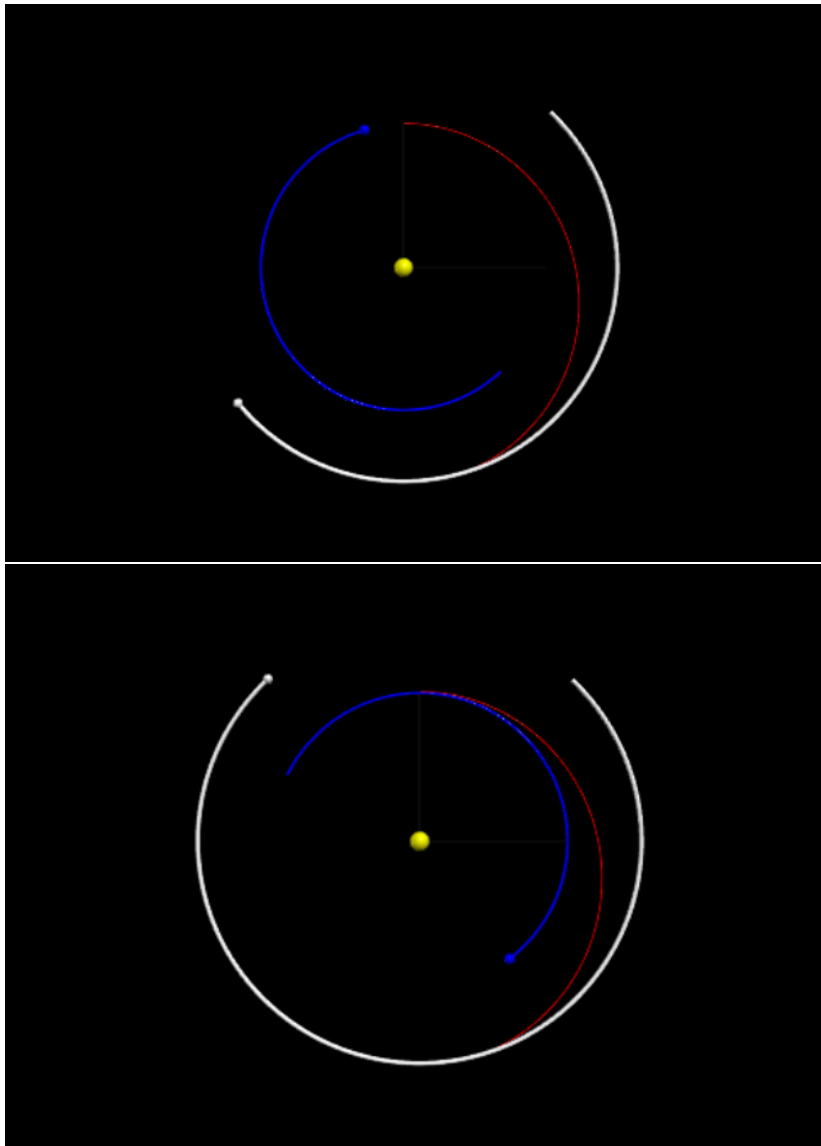
در هر بازه زمانی کوچک تابع computeForces نیروی های وارد بر هر جسم را برای محاسبه می‌کند و با کمک این نیرو، الگوریتم اوایل مسیر جسم را محاسبه می‌کند. (نیروهای مانور فضاپیما نیز در همین تابع قرار دارند):

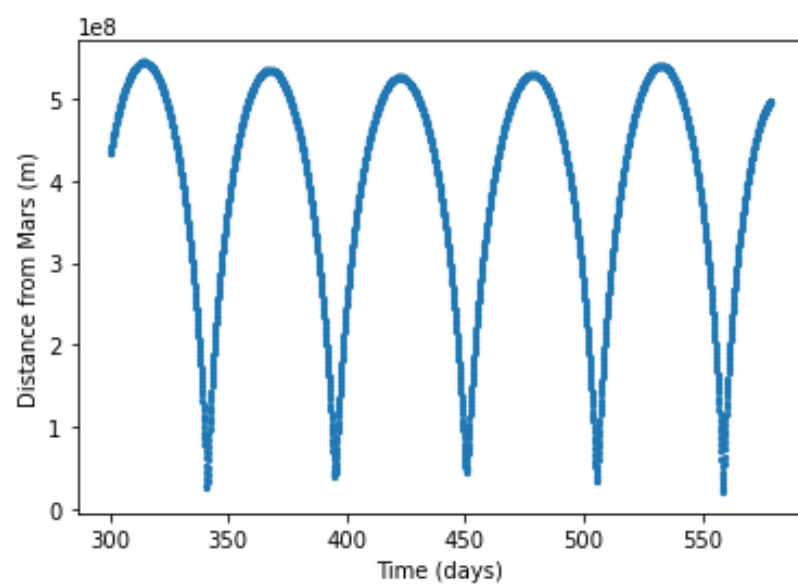
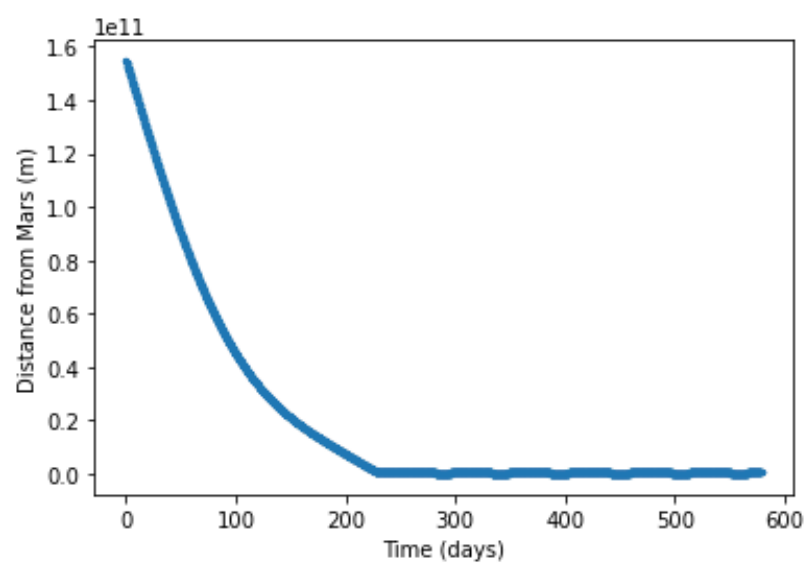
```
93
94 def computeForces():
95     global Stars
96     N = len(Stars)
97     for i in range(N):
98         si = Stars[i]
99         F = vec(0,0,0)
100         pos1 = si.pos
101         m1 = si.mass
102         for j in range(N):
103             if i == j: continue
104             sj = Stars[j]
105             r = sj.pos - pos1
106             F = F + (G*m1*sj.mass*r.hat / mag(r)**2)
107             si.momentum = si.momentum + F*dt
108
```

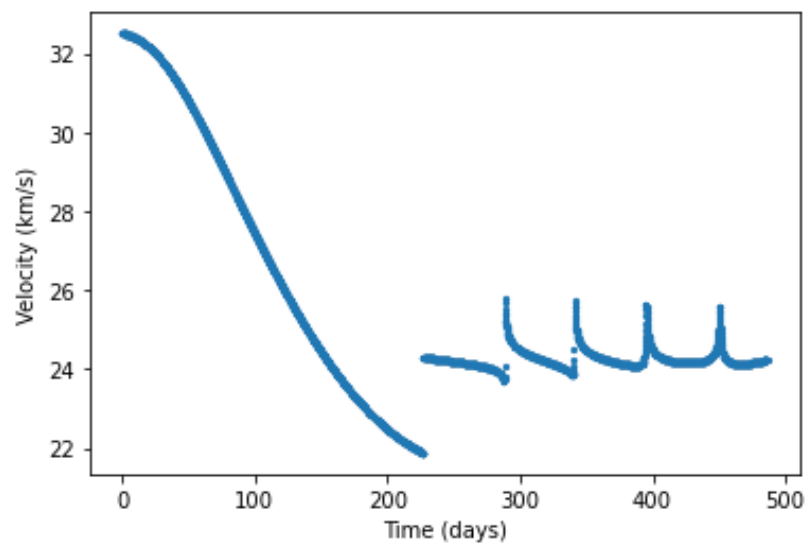
در ادامه نتایج شبیه سازی و نمودارهای سرعت و مکان آورده شده:











جمع بندی

طبق شبیه سازی، این سفر ۲۳۰ روز به طول می‌انجامد. این مقدار کمی از نیم دوره تناوب مدار هوهمان کمتر است که این تفاوت به علت تاثیر گرانشی مریخ است. همچنین زمان مناسب برای سفر مجدد دو سال و ۶۰ روز است. همچنین مشخصات مدار نهایی فضاپیما در ادامه آورده شده:

$$0.9267 = \text{خروج از مرکز} \quad (۱۸)$$

$$2.83 \times 10^8 m = \text{نیم قطر اول} \quad (۱۹)$$

$$\text{دوره تناوب} = ۵۳ \text{ روز و } ۲۸ \text{ دقیقه} \quad (۲۰)$$