گزارش نهایی پروژه درس دینامیک غیرخطی و آشوب
Stability and bifurcation analysis of interacting f(T) cosmology

حسین حاتم‌نیا – ۹۸۱۱۰۱۹۲

زهرا خانبابائی – ۹۹۱۰۹۷۰۹

آریا همتیان – ۹۹۱۰۹۰۷۱

۶ مهر ۱۴۰۲

---

۱ چکیده

معادلات میدان اینشتین معادلات دیفرانسیل مرتبه دو هستند و در نتیجه حل تحلیلی آن‌ها بسیار سخت است. اما با تغییر متغیر می‌توان به معادله‌هایی رسید که بررسی‌شان به طور عددی راحت است. در این مقاله، پایستگی نقاط بحرانی و دوشاخگی‌های این معادلات بررسی شده است که در این گزارش این محاسبات را تکرار خواهیم کرد.

۲ مقدمه و تئوری

با توجه به رصد های انجام شده می‌دانیم که کیهان در حال انبساط تندشونده است. اصولاً تئوری ها دو راه برای اضافه کردن انبساط تندشونده دارند. راه اول این است که فرض کنیم ماده ای با فشار منفی (با نام انرژی تاریک) وجود دارد که منجر به اثر جاذبه منفی می‌شود. راه دوم این است که نظریه گرانش را تغییر دهیم و این مقاله تئوری $f(T)$ را بررسی می‌کند. در تئوری $f(T)$ بجای کانکشن لوی–چویتا از کانکشن Weitzenböck استفاده می‌کنیم که در آن اسکالر پیچش [1] (T) وجود دارد. در شرایط خاص رفتار این مدل مانند تعدادی مدل محبوب انرژی تاریک مانند quintessence خواهد بود.

کنش مدل گرانش $f(T)$ برابر است با

$$A = \frac{1}{2\kappa^2}\int d^4x\Big[\sqrt{-g}(T+f(T))+A_m\Big]$$

که در آن A_m چگالی لاگرانژی مربوط به ماده است و $\kappa^2 = 8\pi G$. متریکی که در نظر میگیریم FLRW تخت است.

$$ds^2 = dx_0^2 - a(t)^2 dx_i^2$$

اگر انرژی تاریک را یک فیلد اسکالر نظر بگیریم و ماده تاریک هم غیر نسبیتی باشد آنگاه معادلات فریدمان برای مدل $f(T)$ به شکل زیر است.

$$H^2 = \frac{1}{2f_T+1}\left(\frac{1}{3}(\rho_\phi+\rho_m) - \frac{f}{6}\right)$$

$$\dot{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{p_\phi+\rho_\phi+\rho_m}{1+f_T+2Tf_{TT}}\right)$$

معادله شاره نیز برای ماده تاریک و انرژی تاریک با در نظر گرفتن برهمکنش‌شان به شکل زیر است.

$$\dot{\rho}_m + 3H\rho_m = Q$$

[1] Torsion

$$\dot{\rho}_\phi + 3H(1+\omega_\phi))\rho_\phi = -Q$$

تابعیت Q از چگالی های ماده و انرژی تاریک بستگی به مدل برهمکنشی دارد. تحول کیهانی حاصل از مدل $f(T)$ باید سازگار با هسته‌زایی اولیه کیهان و تابش زمینه کیهانی باشد یعنی $\frac{f}{T}$ باید در زمان های اولیه به صفر میل کند و در نهایت به فاز دوسیته برسد. ساده ترین گزینه که شرابط مورد نظر را داشته باشد به شکل زیر است.

$$f(T) = \beta(-T)^n \quad , \quad n \ll 1$$

برای سادگی فرض می‌کنیم برهمکنش به شکل $Q = \alpha H \rho_m$ است و تابعیت f به شکل$f(T) = \beta\sqrt{T}$ است. پس معادلات به شکل زیر هستند

$$T = -6H^2 \quad , \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV(\phi)}{d\phi} = -\frac{Q}{\dot{\phi}}$$

حل دقیق و تحلیلی این معادلات بسیار سخت است. پس با تغییر متغیر زیر به معادلاتی می‌رسیم که می‌توان آن ها را بررسی کرد.

$$x = \frac{\dot{\phi}}{\sqrt{6}H} \quad , \quad y = \frac{\sqrt{V(\phi)}}{\sqrt{3}H} \quad , \quad \Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2}$$

که Ω_m پارامتر چگالی ماده تاریک است. با تعریف کردن $\lambda = \frac{V'(\phi)}{V(\phi)}$ معادلات تحول به شکل زیر هستند.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dN} = \frac{1}{2}(\alpha-3)x - \frac{\alpha}{2x}(1-y^2) - \frac{3}{2}xy^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\, y^2 + \frac{3}{2}x^3 \\ \frac{dy}{dN} = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\, xy + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}y^3 \\ \frac{d\Omega_m}{dN} = \alpha\Omega_m + 3x^2\Omega_m - 3y^2\Omega_m \end{cases}$$

متغیر مستقل $N = \ln a$ یا همان پارامتر e-folding است. با استفاده از معادله فریدمان قید زیر بدست می‌آید.

$$x^2 + y^2 + \Omega_m = 1$$

و از طرفی چون $1 > \Omega_m > 0$ سهمی‌گون بالا در محدوده متناهی از فضای فاز وجود دارد. پارامتر چگالی میدان اسکالر، معادله حالت کلی و پارامتر کند شوندگی برحسب این متغیر ها به شکل زیر اند.

$$\Omega_\phi = x^2 + y^2$$

$$\omega_{total} = x^2 - y^2$$

$$q = -1 + \frac{3}{2}(2x^2 + \Omega_m)$$

۳ سنتر منیفولد تئوری (CMT)

سنتر منیفلد تئوری برای بررسی رفتار بلند مدت یک سیستم دینامیکی نزدیک به نقطه تعادل به کار می‌رود به این صورت که فضای فاز را به یک زیرفضای مرکزی و زیرفضای ناپایدار و پایدار تقسیم می‌کنند و رفتارهای آرام و سریع سیستم را حول نقطه ثابت مورد بررسی قرار می‌دهند.
در این روش، ابتدا جملات غیرخطی را از معادله به صورت زیر جدا می‌کنیم:

$$\mathbf{x(t) = Ax(t) + f(x(t))}$$

که در این صورت، جواب معادله‌ی بالا به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{x(x_0, t) = e^{At}x_0}$$

که جملات غیرخطی، همگی در f آمده‌اند. موضوع مورد بررسی، پایداری مقادیر ویژه A زمانی که جملات غیرخطی به آن اضافه می‌شود می‌باشد. می‌دانیم اگر بخش حقیقی مقدار ویژه مثبت باشد، سیستم ناپایدار است و زیرفضای ناپایدار، فضایی است که توسط بردارویژه های مربوط به این مقدارویژه اسپن می‌شود. همینطور در صورتی که مقدارویژه منفی باشد، سیستم پایدار است و زیرفضای پایدار، تمام فضایی است که توسط این بردارویژه اسپن می‌شود. و در آخر، زیرفضای مرکزی تمام فضایی است که بردارویژه‌های آن، مربوط به مقدارویژه‌ای است که بخش حقیقی آن صفر است.

با استفاده از این روش، تلاش می‌کنیم رفتار یک پارامتر را برحسب پارامترهای دیگر مسئله با در نظر گرفتن درجات بالاتر بررسی کنیم و ببینیم اولین مرتبه‌ای که ظاهر می‌شود، چه رفتاری دارد و پایداری و ناپایداری سیستم را بررسی خواهیم کرد. در ابتدا نقطه ثابت را پیدا می‌کنیم. نقطه ثابت مورد بررسی را با یک انتقال به مرکز می‌آوریم. یک پارامتر را برحسب پارامترهای دیگر به صورت زیر می‌نویسیم:

$$Y = aX^2 + bX\Omega_m + c\bar{\Omega}_m^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

که $X, Y, \bar{\Omega}_m$ در آن مختصات‌های جدید هستند که نقاط ثابت به مرکز آورده شده است.

با مشتق گیری از رابطه‌ی بالا و مقایسه‌ی آن با dY/dN، ضرایب ثابت را محاسبه می‌کنیم. در صورتی که نیاز به مراتب بالاتر باشد، آن‌ها را هم در نظر خواهیم گرفت. لازم به ذکر است که در این مقاله، فقط نقاط ثابت غیرهذلولی [۲] (T) (مقادیر ویژه صفر) مورد بحث قرار گرفته اند. ما در پیوست سنتر منیفولد یکی از نقاط را بررسی خواهیم کرد و دیگر نقاط مانند آن راحت به دست آمده‌اند.

۴ بدست آوردن نقاط ثابت

همانطور که می‌دانیم، نقاط ثابت در معادله های زیر صدق می‌کنند:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dN} = \frac{1}{2}(\alpha-3)x - \frac{\alpha}{2x}(1-y^2) - \frac{3}{2}xy^2 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\, y^2 + \frac{3}{2}x^3 = 0 \\ \frac{dy}{dN} = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda\, xy + \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}x^2y - \frac{3}{2}y^3 = 0 \\ \frac{d\Omega_m}{dN} = \alpha\Omega_m + 3x^2\Omega_m - 3y^2\Omega_m = 0 \end{cases}$$

با حل این معادلات نقاط ثابت زیر بدست می‌آید.

نقطه ثابت	x	y	Ω_m	ω_ϕ	Ω_ϕ	ω_{tot}	q
P_1	1	0	0	1	1	1	2
P_2	-1	0	0	1	1	1	2
P_3	$-\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}$	0	$\frac{\lambda^2}{3}-1$	1	$\frac{\lambda^2}{3}-1$	$\frac{\lambda^2}{2}-1$
P_4	$-\frac{\lambda}{\sqrt{6}}$	$-\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}$	0	$\frac{\lambda^2}{3}-1$	1	$\frac{\lambda^2}{3}-1$	$\frac{\lambda^2}{2}-1$
P_5	$\frac{\alpha-3}{\sqrt{6}\lambda}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{3}+\frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}$	$\frac{3-\alpha}{3}(1-\frac{3-\alpha}{\lambda^2})$	$-\frac{\alpha}{\alpha+\frac{(\alpha-3)^2}{\lambda^2}}$	$\frac{(\alpha-3)^2}{3\lambda^2}+\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$	$\frac{1-\alpha}{2}$
P_6	$\frac{\alpha-3}{\sqrt{6}\lambda}$	$-\sqrt{\frac{\alpha}{3}+\frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}$	$\frac{3-\alpha}{3}(1-\frac{3-\alpha}{\lambda^2})$	$-\frac{\alpha}{\alpha+\frac{(\alpha-3)^2}{\lambda^2}}$	$\frac{(\alpha-3)^2}{3\lambda^2}+\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$	$\frac{1-\alpha}{2}$
P_7	$\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$	0	$1+\frac{\alpha}{3}$	1	$-\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$
P_8	$-\sqrt{-\frac{\alpha}{3}}$	0	$1+\frac{\alpha}{3}$	1	$-\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$	$-\frac{\alpha}{3}$

در بخش بعدی پایستگی و دوشاخگی های این نقاط ثابت را در حالات غیرهذلولی با کمک قضیه سنتر منیفولد بررسی می‌کنیم.

۵ بررسی نقاط ثابت

۱.۵ نقطه ثابت P_1

این نقاط ثابت به صورت $(x, y, \Omega_m) = (1, 0, 0)$ است که با تغییر متغیر زیر، این نقطه را به مرکز می‌آوریم:

$$x \to X + 1 \quad , \quad y \to Y \quad , \quad \Omega_m \to \bar{\Omega}_m$$

با این تغییر متغیر معادلات به شکل زیر خواهند شد:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} = (\alpha+3)X - \frac{\alpha-9}{2}X^2 + (\frac{\alpha-3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y^2 - \frac{\alpha+3}{2}XY^2 + \frac{\alpha+3}{2}X^3 + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} = (3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y + (3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)XY + \frac{3}{2}X^2Y - \frac{3}{2}Y^3 \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = (\alpha+3)\bar{\Omega}_m + 3(X^2 + 2X - Y^2)\bar{\Omega}_m \end{cases}$$

[۲] نقاطی که خطی سازی حول نقطه ثابت، تصویر کامل از نوع تحویل سیستم نمی‌دهد.

ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی در مبدا برابر اند با $\lambda_1 = \alpha + 3\,,\ \lambda_2 = \alpha + 3\,,\ \lambda_3 = 3 + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$ پس به ازای $\alpha = -3$ و $\lambda = -\sqrt{6}$ همه ویژه مقدار ها صفر اند.

به ازای $\alpha = -3$ این نقطه غیرهذلولی است پس طبق قضیه سنتر منیفولد داریم

$$Y = aX^2 + bX\bar{\Omega}_m + c\bar{\Omega}_m^2$$

با مشتق گیری بدست می‌آید:

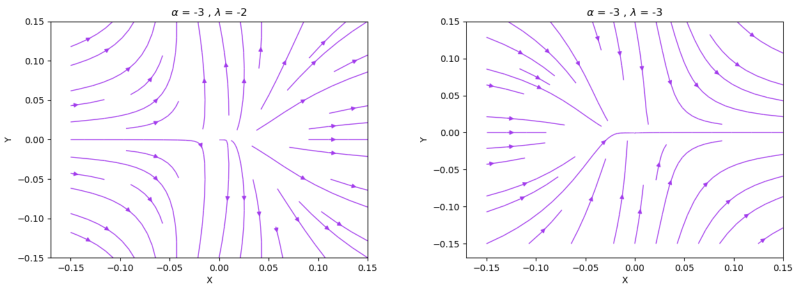
$$\frac{dY}{dN} = \begin{bmatrix} 2aX + b\bar{\Omega}_m & bX + 2c\bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dN} \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} \end{bmatrix}$$

با این معادلات می‌فهمیم که سنتر منیفولد $Y = 0$ است. شارش روی سنتر منیفولد برابر است با:

$$\frac{dX}{dN} = 6X^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = 3(X^2 + 2X)\bar{\Omega}_m + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

اگر در صفحه $Y = 0$ به مختصات شعاعی برویم $(r^2 = X^2 + \bar{\Omega}_m^2)$ آنگاه مشتق شعاع برابر است با $\dot{r} = 6Xr$. پس رفتار وابسته به علامت X است. همچنین اگر به صفحه XY برویم مبدا به ازای $\alpha = -3$ و $\lambda > -\sqrt{6}$ و $\alpha = -3$ و $\lambda < -\sqrt{6}$ زین و گره ای و در کل ناپایدار است و نمودار پیکره فاز آن به صورت زیر است:



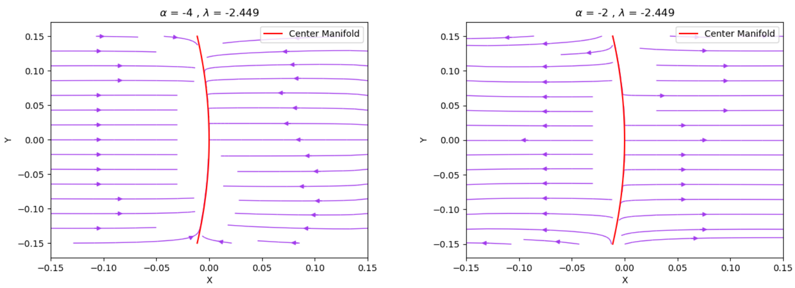
$\alpha = -3, \lambda > -\sqrt{6}$ $\qquad$ $\alpha = -3, \lambda < -\sqrt{6}$

شکل ۱: پیکره فاز در نزدیکی نقطه ثابت P1

همچنین به ازای $\lambda = -\sqrt{6}$ هم این نقطه غیرهذلولی است. طبق CMT توقع داریم که بتوان X و $\bar{\Omega}_m$ را به صورت تابعی از Y بنویسیم. اگر این بستگی را چندجمله ای در نظر بگیریم و با مشتق گیری ضرایب را بدست بیاوریم، سنتر منیفولد بدست می‌آید.

$$X = -\frac{1}{2}Y^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر} \quad , \quad \bar{\Omega}_m = 0$$

و نمودار آن به شکل زیر است:



$\alpha < -3, \lambda = -\sqrt{6}$ $\qquad$ $\alpha > -3, \lambda = -\sqrt{6}$

شکل ۲: سنتر منیفولد در نزدیکی نقطه ثابت P1

شارش روی سنتر منیفولد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dY}{dN} = -\frac{3}{2}Y^3 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

با بررسی نمودار شارش در سه بعد می‌توان دید که مبدا به ازای $\alpha > -3$ و $\lambda = -\sqrt{6}$ زین و گره ای و در کل ناپایدار است و به ازای $\alpha < -3$ و $\lambda = -\sqrt{6}$ گره پایدار است.

۲.۵ نقطه ثابت P_2

این نقاط ثابت به صورت $(x, y, \Omega_m) = (-1, 0, 0)$ است که با تغییر متغیر زیر، این نقطه را به مرکز می‌آوریم:

$$x \to X - 1 \quad , \quad y \to Y \quad , \quad \Omega_m \to \bar{\Omega}_m$$

با این تغییر متغیر معادلات به شکل زیر خواهند شد:

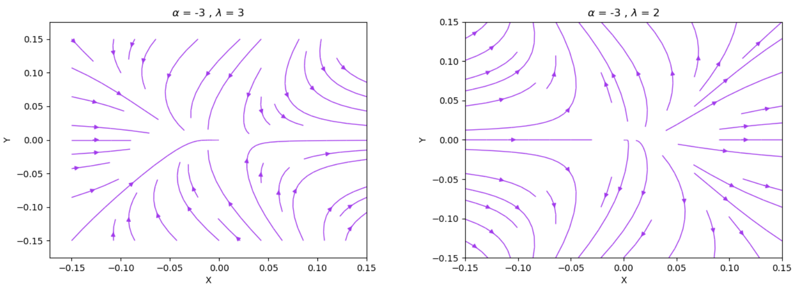
$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} = (\alpha+3)X + \frac{\alpha-9}{2}X^2 + (\frac{\alpha+3}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y^2 - \frac{\alpha+3}{2}XY^2 + \frac{\alpha+3}{2}X^3 + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} = (3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y - (3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)XY + \frac{3}{2}X^2Y - \frac{3}{2}Y^3 \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = (\alpha+3)\bar{\Omega}_m + 3(X^2 - 2X - Y^2)\bar{\Omega}_m \end{cases}$$

ویژه مقادیر ماتریس ژاکوبی در مبدا برابر اند با $\lambda_1 = \alpha + 3\,,\ \lambda_2 = \alpha + 3\,,\ \lambda_3 = 3 - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$ پس به ازای $\alpha = -3$ و $\lambda = \sqrt{6}$ همه ویژه مقدار ها صفر اند.

به ازای $\alpha = -3$ این نقطه غیرهذلولی است پس مانند P_1 طبق CMT یک منیفولد در $Y = 0$ داریم که مشابها با رفتن به دستگاه شعاعی در صفحه $y = 0$ داریم:

$$\dot{r} = -6Xr$$

مشابها اگر به صفحه XY برویم مبدا به ازای $\alpha = -3$ و $\lambda > \sqrt{6}$ و $\alpha = -3$ و $\lambda < \sqrt{6}$ زین و گره ای و در کل ناپایدار است و نمودار آن به صورت زیر بدست می‌آید:



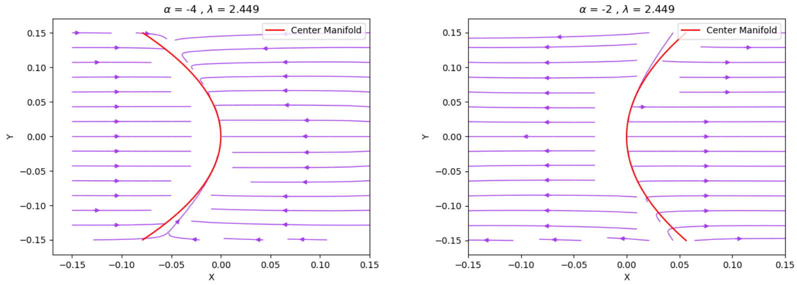
$\alpha = -3, \lambda > \sqrt{6}$ $\qquad$ $\alpha = -3, \lambda < \sqrt{6}$

شکل ۳: پیکره فاز در نزدیکی نقطه ثابت P2

همچنین به ازای $\lambda = \sqrt{6}$ هم این نقطه غیرهذلولی است. طبق CMT توقع داریم که بتوان X و $\bar{\Omega}_m$ را به صورت تابعی از Y بنویسیم. اگر این بستگی را چندجمله ای در نظر بگیریم و با مشتق گیری ضرایب را بدست بیاوریم، سنتر منیفولد مشابه P_1 بدست می‌آید.

$$X = -\frac{1}{2}\frac{\alpha-3}{\alpha+3}Y^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر} \quad , \quad \bar{\Omega}_m = 0$$

و نمودار آن به شکل زیر است:



$\alpha < -3, \lambda = -\sqrt{6}$ $\qquad$ $\alpha > -3, \lambda = \sqrt{6}$

شکل ۴: سنتر منیفولد در نزدیکی نقطه ثابت P2

شارش روی سنتر منیفولد از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\frac{dY}{dN} = -\frac{3}{2}Y^3 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

با بررسی نمودار شارش در سه بعد می‌توان دید که مبدا به ازای $\alpha > -3$ و $\lambda = \sqrt{6}$ زین و گره ای و در کل ناپایدار است و به ازای $\alpha < -3$ و $\lambda = \sqrt{6}$ گره پایدار است.

۳.۵ نقطه ثابت P_3

این نقاط ثابت به صورت $(x, y, \Omega_m) = (-\frac{\lambda}{\sqrt{6}}, \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}, 0)$ است که با تغییر متغیر زیر، این نقطه را به مرکز می‌آوریم:

$$x \to X - \frac{\lambda}{\sqrt{6}} \quad , \quad y \to Y + \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}} \quad , \quad \Omega_m \to \bar{\Omega}_m$$

با این تغییر متغیر معادلات به شکل زیر خواهند شد:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} & = (\lambda^2+\alpha-3)X - \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}(\sqrt{6}\frac{\alpha}{\lambda} + \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y - \sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\lambda}{2})Y^2 \\ & +\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda} - \frac{3\lambda}{2})X^2 - 3\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}(1+\frac{2\alpha}{\lambda^2})XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} & = (\frac{\lambda^2}{2}-3)Y + \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}X^2 - \frac{9}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}Y^2 - \frac{3}{2}Y^3 + \frac{3}{2}X^2Y \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} & = (\lambda^2+\alpha-3)\bar{\Omega}_m + (3X^2 - 3Y^2 - \sqrt{6}\lambda X - 6\sqrt{6-\lambda^2}Y)\bar{\Omega}_m \end{cases}$$

به ازای $\alpha + \lambda^2 = 3$ این نقطه ثابت غیر هذلولی است (اگر $-\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{6}$). با استفاده از روش سنتر منیفولد داریم $Y = aX^2 + bX\bar{\Omega}_m + c\bar{\Omega}_m^2$ که با مشتق گیری از آن بدست می‌آید:

$$\frac{dY}{dN} = \begin{bmatrix} 2aX + b\bar{\Omega}_m & bX + 2c\bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dN} \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} \end{bmatrix}$$

پس سنتر منیفولد این نقطه با ساده سازی که در پیوست آ آمده، برابر است با:

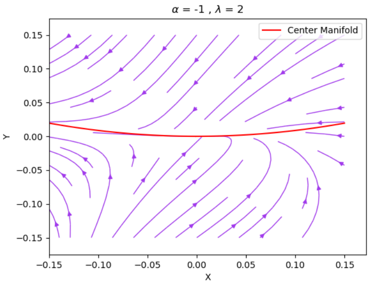
$$Y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}}X^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

شارش روی این منیفولد برابر است با

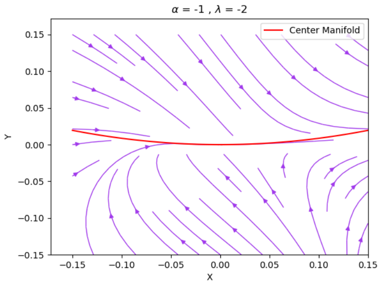
$$\frac{dX}{dN} = -\sqrt{6}\lambda X^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = -\sqrt{6}\lambda X\bar{\Omega}_m - \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{6}}X^4\bar{\Omega}_m + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

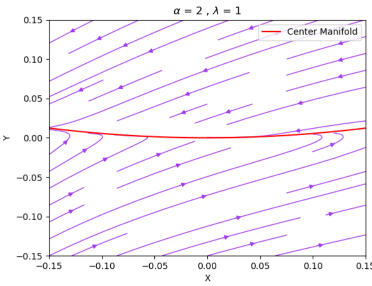
با تعریف کردن $(r^2 = X^2 + \bar{\Omega}_m^2)$ داریم $\dot{r} = -\sqrt{6}\lambda X r$ در نتیجه علامت X و λ تعیین کننده رفتار در نزدیکی این نقطه است. پس زمانی که λ مثبت است نقطه در راستای X پایدار است ولی این خاصیت در راستای Y برعکس است پس اگر میدان برداری را موازی با صفحه XY تصویر کنیم خواهیم دید که مبدا زین و گره ای و ناپایدار است. به ازای $\lambda = \pm\sqrt{6}$ این نقطه مانند P_1 و P_2 است که قبلا بررسی شده است. در نهایت نمودارهای سنتر منیفولد به صورت شکل ۵ به دست می‌آید.



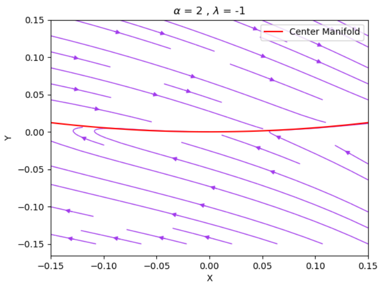
$\alpha+\lambda^2=3, 0<\lambda<\sqrt{6}$



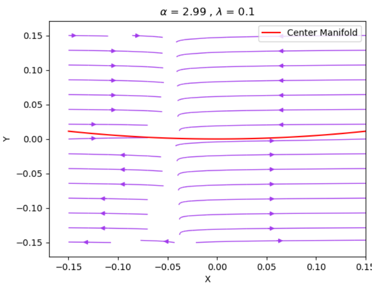
$\alpha+\lambda^2=3, -\sqrt{6}<\lambda<0$



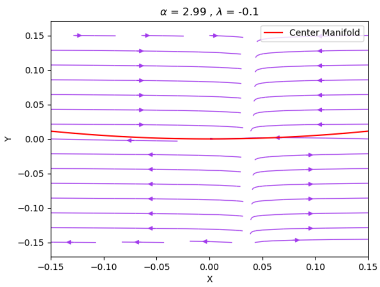
$\alpha+\lambda^2=3, 0<\lambda<\sqrt{6}$



$\alpha+\lambda^2=3, -\sqrt{6}<\lambda<0$



$\alpha+\lambda^2=3, 0<\lambda<\sqrt{6}$



$\alpha+\lambda^2=3, -\sqrt{6}<\lambda<0$

شکل ۵: سنتر منیفولد در نزدیکی نقطه ثابت P3

۴.۵ نقطه ثابت P_4

این نقاط ثابت به صورت $(x,y,\Omega_m)=(-\frac{\lambda}{\sqrt{6}},-\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}},0)$ است که با تغییر متغیر زیر، این نقطه را به مرکز می‌آوریم:

$$x\to X-\frac{\lambda}{\sqrt{6}} \quad , \quad y\to Y-\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}} \quad , \quad \Omega_m\to\bar{\Omega}_m$$

با این تغییر متغیر معادلات به شکل زیر خواهند شد:

$$\begin{cases}\frac{dX}{dN} & =(\lambda^2+\alpha-3)X+\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}(\sqrt{6}\frac{\alpha}{\lambda}+\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y-\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\lambda}{2})Y^2\\ & +\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{3\lambda}{2})X^2+3\sqrt{1+\frac{\lambda^2}{6}}(1+\frac{2\alpha}{\lambda^2})XY+\text{جملات مرتبه بالاتر}\\ \frac{dY}{dN} & =(\frac{\lambda^2}{2}-3)Y-\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}X^2+\frac{9}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}Y^2-\frac{3}{2}Y^3+\frac{3}{2}X^2Y\\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} & =(\lambda^2+\alpha-3)\bar{\Omega}_m+(3X^2-3Y^2-\sqrt{6}\lambda X+6\sqrt{6-\lambda^2}Y)\bar{\Omega}_m\end{cases}$$

به ازای $\alpha+\lambda^2=3$ این نقطه ثابت غیرهذلولی است (اگر $-\sqrt{6}<\lambda<\sqrt{6}$). با استفاده از روش سنتر منیفولد داریم:

$$\frac{dY}{dN}=\begin{bmatrix}2aX+b\bar{\Omega}_m & bX+2c\bar{\Omega}_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{dX}{dN}\\ \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN}\end{bmatrix}$$

پس سنتر منیفولد این نقطه برابر است با:

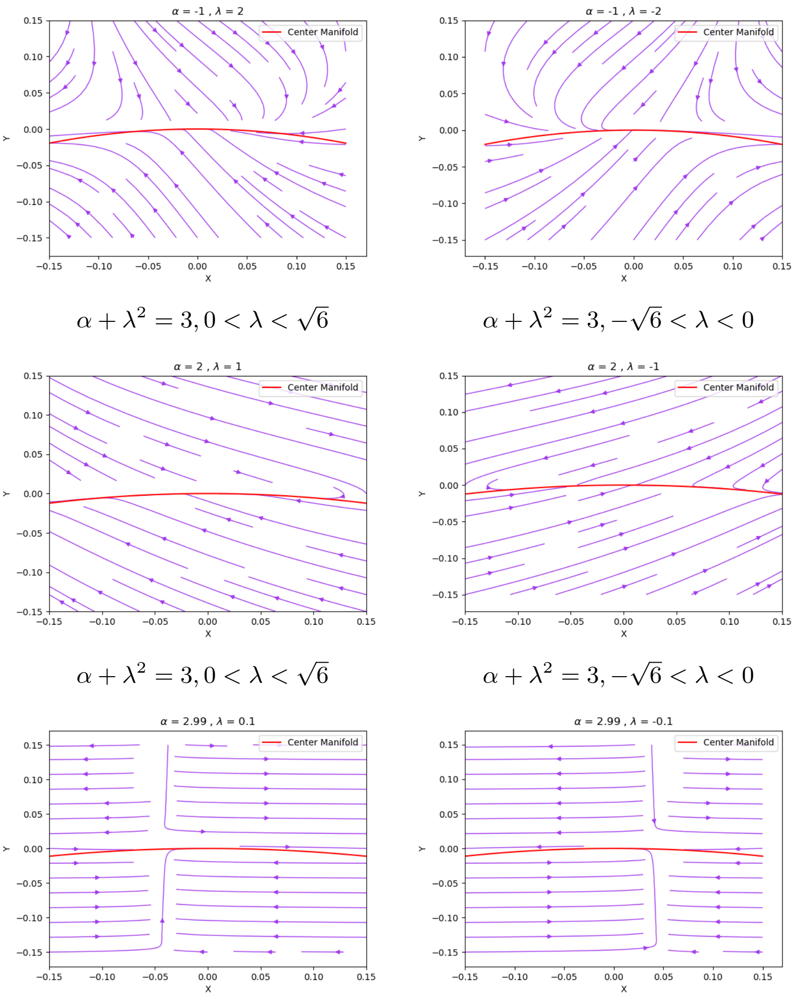
$$Y=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}}X^2+\text{جملات مرتبه بالاتر}$$

شارش روی این منیفولد برابر است با

$$\frac{dX}{dN} = -\sqrt{6}\lambda X^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

$$\frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = -\sqrt{6}\lambda X\bar{\Omega}_m - \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{6}}X^4\bar{\Omega}_m + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

با تعریف کردن $(r^2 = X^2 + \bar{\Omega}_m^2)$ داریم $\dot{r} = -\sqrt{6}\lambda X r$ در نتیجه علامت X و λ تعیین کننده رفتار در نزدیکی این نقطه است و مشابه تحلیلی که برای P_3 کردیم اینجا نیز کار می‌کند. پس اگر میدان برداری را موازی با صفحه XY تصویر کنیم خواهیم دید که مشابه P_3 مبدا زین و گره ای و ناپایدار است. به ازای $\lambda = \pm\sqrt{6}$ این نقطه مانند P_1 و P_2 است که قبلا بررسی شده است. نمودارهای سنتر منیفولد این نقطه در شکل ۶ آورده شده است.



$\alpha + \lambda^2 = 3, 0 < \lambda < \sqrt{6}$ $\alpha + \lambda^2 = 3, -\sqrt{6} < \lambda < 0$

$\alpha + \lambda^2 = 3, 0 < \lambda < \sqrt{6}$ $\alpha + \lambda^2 = 3, -\sqrt{6} < \lambda < 0$

$\alpha + \lambda^2 = 3, 0 < \lambda < \sqrt{6}$ $\alpha + \lambda^2 = 3, -\sqrt{6} < \lambda < 0$

شکل ۶: سنتر منیفولد در نزدیکی نقطه ثابت P4

۵.۵ نقطه ثابت P_5

این نقطه به ازای تمام مقادیر پارامتر ها غیرهذلولی است. این نقطه را با روابط زیر به مبدا مختصات انتقال می‌دهیم.

$$x \to X + \frac{\alpha - 3}{\sqrt{6}\lambda} \quad , \quad y \to Y + \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}} \quad , \quad \Omega_m \to \bar{\Omega}_m + \frac{3-\alpha}{3}\left(1 - \frac{3-\alpha}{\lambda^2}\right)$$

با این تغییر متغیر معادلات دیفرانسیل به فرم زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} = A_1X + A_2Y + A_3X^2 + A_4Y^2 + A_5XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} = B_1X + B_2Y + B_3X^2 + B_4Y^2 + B_5XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = C_1X + C_2Y + C_3X^2 - C_3Y^2 + C_4X\bar{\Omega}_m + C_5Y\bar{\Omega}_m + \text{جملات مرتبه بالاتر} \end{cases}$$

که در آن

$$A1 = 3\lambda^2\frac{\alpha}{(3-\alpha)^2} - (\frac{\lambda\alpha}{\alpha-3})^2 + \frac{(3-\alpha)^2}{2\lambda^2} - \frac{1}{2}(3+\alpha)$$

$$A2 = \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}(\sqrt{6}\frac{\alpha\lambda}{\alpha-3} - \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\alpha-3}{\lambda} - \sqrt{6}\lambda)$$

$$A3 = -3\sqrt{6}\frac{\alpha\lambda^3}{(\alpha-3)^3}(1 - \frac{\alpha}{3} - \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}) + \frac{9}{2}\frac{\alpha-3}{\sqrt{6}\lambda}$$

$$A4 = \sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\alpha\lambda}{\alpha-3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha-3}{\sqrt{6}\lambda} - \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda$$

$$A5 = -2\sqrt{(\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}(\frac{3}{2} + \frac{3\alpha\lambda}{\alpha-3})$$

$$B1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}(\lambda + \alpha - 3)$$

$$B2 = -\frac{(\alpha-3)^2}{2\lambda^2}$$

$$B3 = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{(\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}$$

$$B4 = \sqrt{\frac{3}{2}}(\lambda + \frac{\alpha-3}{\lambda})$$

$$C1 = -\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\alpha-3)^2}{\lambda}(1 + \frac{\alpha-3}{\lambda^2})$$

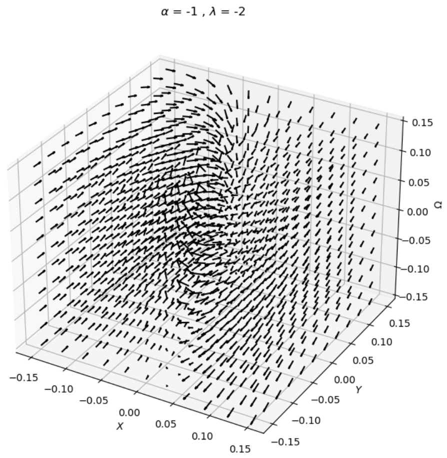
$$C2 = 2(\alpha-3)(1 - \frac{3-\alpha}{\lambda^2})\sqrt{(\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}$$

$$C3 = (3-\alpha)(1 - \frac{3-\alpha}{\lambda^2})$$

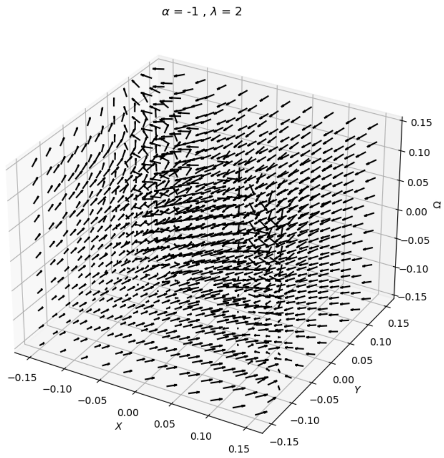
$$C4 = \sqrt{6}\frac{\alpha-3}{\lambda}$$

$$C5 = -6\sqrt{\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}}$$

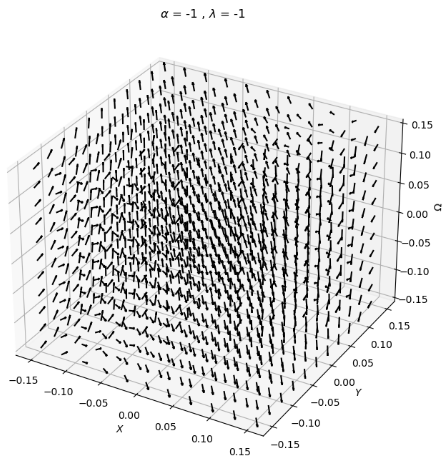
ماتریس ژاکوبی در مبدا برابر است با: $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & 0 \\ B_1 & B_2 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{bmatrix}$ پس یکی از ویژه مقادیر صفر است. در این حالت بررسی سه بعد مهم می‌شود و مانند بخش‌های قبل نمی‌توان نمودار دو بعدی آن را رسم کرد و محاسبه‌ی سنتر منیفولد آن بسیار سخت بود که مقاله اشاره کرده است در شرایطی خاص $Y = 0$ می‌شود که نتوانستیم اثبات کنیم. ولی با رسم نمودار سه بعدی داریم حالت‌های مختلف را می‌توانیم ببینیم که در شکل ۷ تصاویر و تحلیل آن آورده شده است.



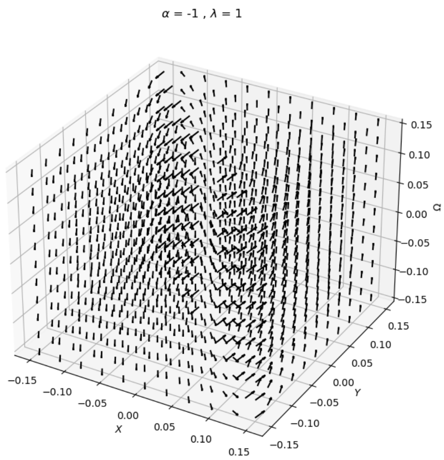
در این حالت یک مارپیچ_ گره پایدار داریم.



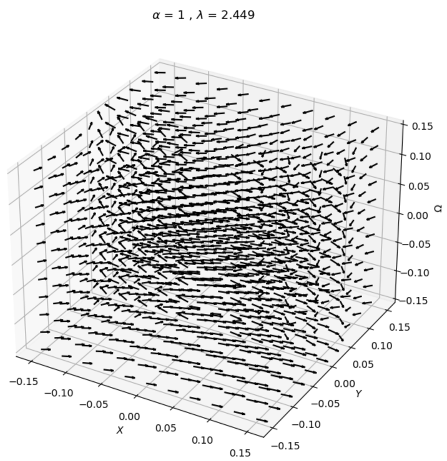
در این حالت نقطه زین و گره ای و ناپایدار است.



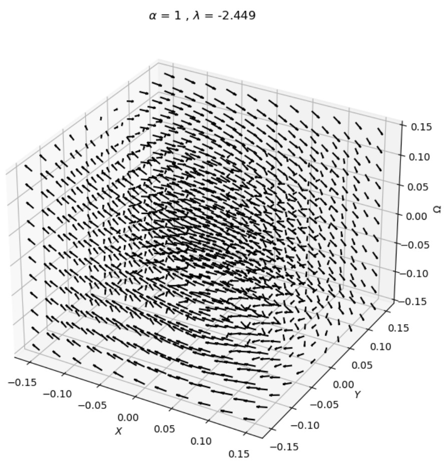
در این حالت نقطه زین و گره ای و ناپایدار است.



این حالت نیز گره_ زین ناپایدار است.



رفتار زین و گره ای و ناپایدار است.



رفتار در یک راستا ناپایدار و در صفحه عمودش مارپیچی است.

شکل ۷: بررسی حالات مختلف نقطه P5

۶.۵ نقطه ثابت P_6

این نقطه به ازای تمام مقادیر پارامتر ها غیرهذلولی است. این نقطه را با روابط زیر به مبدا مختصات انتقال می‌دهیم.

$$x \to X + \frac{\alpha - 3}{\sqrt{6}\lambda} \quad , \quad y \to Y - \sqrt{\frac{\alpha}{3} + \frac{(\alpha-3)^2}{6\lambda^2}} \quad , \quad \Omega_m \to \bar{\Omega}_m + \frac{3-\alpha}{3}(1 - \frac{3-\alpha}{\lambda^2})$$

با این تغییر متغیر معادلات دیفرانسیل به فرم زیر خواهند بود:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} = A_1X - A_2Y + A_3X^2 + A_4Y^2 - A_5XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} = -B_1X + B_2Y - B_3X^2 + 3B_4Y^2 + B_5XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} = C_1X - C_2Y + C_3X^2 - C_3Y^2 + C_4X\bar{\Omega}_m - C_5Y\bar{\Omega}_m + \text{جملات مرتبه بالاتر} \end{cases}$$

ماتریس ژاکوبی در مبدا برابر است با: $\begin{bmatrix} A_1 & -A_2 & 0 \\ -B_1 & B_2 & 0 \\ C_1 & -C_2 & 0 \end{bmatrix}$ پس یکی از ویژه مقادیر صفر است. این نقطه هم مانند نقطه ۵ است ولی حالت پایدار نداریم و همه حالات ناپایدار هستند.

۶ بررسی دوشاخگی‌ها و کاربرد در کیهان‌شناسی

در این بخش با تغییر دادن ضرایب α و λ تغییرات پایداری همهٔ نقاط بحرانی سیستم معادلات بخش تحول در بخش دو را پیدا می‌کنیم. در نقطهٔ بحرانی P_1 دوشاخگی در $\alpha = -3$ اتفاق می‌افتد که برای $\lambda < -\sqrt{6}$، P_1 از گره پایدار به وسیلهٔ زین‌ـ گره‌های غیرهذلولی به نقطهٔ زینی می‌رود و برای $\lambda > -\sqrt{6}$ با زین‌ـ گره‌های غیرهذلولی از گره پایدار به نقطهٔ زینی می‌رسد. تغییر دیگر در $\lambda = -\sqrt{6}$ اتفاق می‌افتد. وقتی که $\alpha < -3$ باشد P_1 از طریق نقاط پایدار غیرهذلولی از گره‌ـ زینی به گره‌ـ پایدار تغییر پیدا می‌کند و تغییر آن برای $\alpha > -3$ از همان طریق و از ناپایدار به زینی می‌باشد. بنابراین $\alpha = -3$ و $\lambda = -\sqrt{6}$ خطوط مقادیر دوشاخگی و P_1 یک نقطهٔ دوشاخگی است.

متغیرهای کیهان‌شناسی مرتب با P_1 هستند: $\Omega_m = 0$، $\Omega_\phi = 1$، $\omega_\phi = 1$، $\omega_{total} = 1$، $q = 2$ و $\dot{H} < 0$. بنابراین جهان باز است و با انبساط کندشوندهٔ میدان اسکالر غالب ادامه پیدا می‌کند. همچنین در این حالت پتانسیل خودتعاملی از بین می‌رود.

در ادامه و به همان ترتیب برای P_2 خطوط $\alpha = -3$ و $\lambda = \sqrt{6}$ خطوط مقادیر دوشاخگی هستند و تغییر فاز برای خط $\alpha = -3$ به اینصورت اتفاق می‌افتد که برای $\lambda < \sqrt{6}$ ، P_2 از طریق زین‌ـ گره‌های غیرهذلولی از گره پایدار به زینی می‌رود و برای $\lambda > \sqrt{6}$ از زین‌ـ گره‌های غیرهذلولی رد می‌شود تا از زین‌ـ گره به گره ناپایدار برسد. تغییر دیگر نیز برای $\lambda = \sqrt{6}$ به اینصورت است که P_2 برای $\alpha < -3$ از طریق گره‌های پایدار غیرهذلولی از زینی به گره ناپایدار رفته و در $\alpha > -3$ از طریق نقاط زینی غیرهذلولی از گره ناپایدار به نقطهٔ زینی می‌رود. تحولات کیهان‌شناسی در P_2 با P_1 یکسان است.

برای نقاط بحرانی P_3 و P_4 هم یک دوشاخگی محلی داریم که در $-\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{6}$ اتفاق می‌افتد. تغییر فاز در اینجا در منحنی $\alpha + \lambda^2 = 0$ اتفاق می‌افتد. P_3 و P_4 از گره پایدار $(\alpha + \lambda^2 < 0)$ به زینی $(\alpha + \lambda^2 > 0)$ توسط منحنی غیرهذلولی $\alpha + \lambda^2 = 0$ تغییر می‌کنند. روی این منحنی P_3 و P_4 زین‌ـ گره اند. بنابراین $\alpha + \lambda < 0$ یک منحنی مقدار دوشاخگی است. یا به طور خاص $(\alpha, \lambda) = (3, 0)$ یک مقدار دوشاخگی ست.

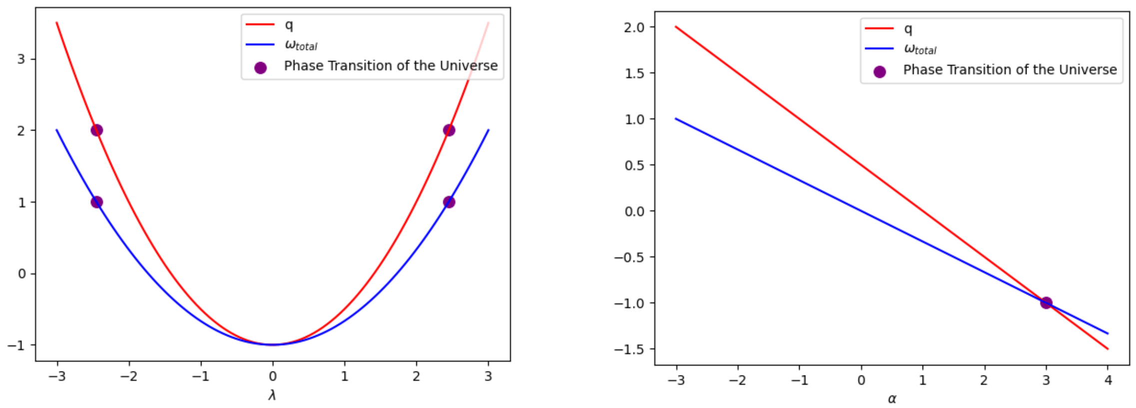
متغیرهای کیهان‌شناسی متناظر با $-\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{6}$ هستند: $-1 \le \omega_\phi < 1$ ، $-1 \le q < 2$ ، $\Omega_m = 0$، $\Omega_\phi = 1$، و برای $\lambda = 0$ نقطهٔ بحرانی P_3 نشانگر دوران انرژی تاریک غالب است که انرژی جنبشی به صفر میل می‌کند. همچنین نمایندهٔ نمای انبساط دی‌ـ سیتر کیهان است.

برای $\lambda < -\sqrt{6}$ یا $\sqrt{6} < \lambda$، داریم $\omega_\phi > 1$ ، $\omega_{total} > 1$ و $q > 2$ که از دیدگاه کیهان‌شناسی امکان‌پذیر نیست. برای $\lambda = \pm\sqrt{6}$ داریم $\omega_\phi = 1$، $\omega_{total} = 1$ ، $q = 2$ و $\Omega_\phi = 1$ که نمایان‌گر انبساط کندشوندهٔ کیهان با یک میدان اسکالر آزاد است. همچنین با ثابت کردن $\alpha = -3$ متوجه می‌شویم که دوشاخگی در $\lambda = \pm\sqrt{6}$ اتفاق می‌افتد. در اینجا P_1 و P_2 مختصات Y یکسان دارند اما پایداری آن‌ها برای $-\sqrt{6} < \lambda$ و $\lambda < \sqrt{6}$ مخالف یکدیگر است به اینصورت که P_1 گره پایدار و P_2 گره ناپایدار می‌باشد وقتی که $\lambda < -\sqrt{6}$ و برعکس آن برای $\lambda > \sqrt{6}$.

وقتی λ را زیاد می‌کنیم تا از منفی رد شود، P_1 ناپایدار شده و دو نقطهٔ پایدار و دو نقطهٔ ناپایدار جدید تشکیل می‌شوند. که می‌توان گفت ترکیبی از دو شاخگی چنگالی فرابحرانی و ترابحرانی است. نقاط ثابت P_1، P_3 و P_4 مثل دوشاخگی چنگالی فرابحرانی و P_1، P_5 و P_6 مثل دوشاخگی چنگالی ترابحرانی رفتار می‌کنند. رفتاری مشابه همین را در $\lambda = \sqrt{6}$ هم مشاهده می‌کنیم.

در P_5 و P_6 ثوابت کیهان‌شناسی به این ترتیب اند که $\omega_{total} = -\frac{\alpha}{3}$ و $q = \frac{1-\alpha}{2}$ در نتیجه برای α نقطهٔ بحرانی نشان‌دهندهٔ دوران غلبهٔ ثابت کیهان‌شناسی با انبساط دی‌ـسیتر نمایی است. برای $-3 < \alpha < 3$ نقطهٔ بحرانی نشان‌دهندهٔ فاز فانتوم کیهان و در $\alpha > 3$ کیهان در حالت تکینگی بیگ‌ـریپ قرار دارد. در $\alpha > 1$ انبساط کیهان تندشونده و در $\alpha < 1$ کندشونده است.

در نهایت با رسم دوشاخگی به وجود آمده داریم:



تغییر فاز در $\alpha = 3$

تغییر فاز در دوشاخگی $\lambda = \pm\sqrt{6}$

شکل ۸: تغییر فاز در کیهان در نقاط دوشاخگی

۷ نتایج

نتایج ما کاملا مشابه مقاله بود. مقاله پس از بررسی سنتر منیفولد نقاطی که نیاز دارد (غیرهذلولی‌ها)، به این نکته می‌پردازد که کیهان باید از یک حالت ناپایدار تحول خود را شروع کرده باشد و سپس به حالتی پایدار رسیده باشد. همینطور با بررسی فضای پارامتر در دوشاخگی‌ها، یک تغییر فاز در کیهان مشاهده می‌شود.

حالت اولیهٔ کیهان یک نقطهٔ ثابت ناپایدار است که از آنجا و با یک اختلال کوچک مسیر تحول کیهان آغاز می‌شود. این حالت اولیه باعث ایجاد یک مسیر منحصربه‌فرد می‌شود به طوری که اگر به اندازهٔ دلخواه نزدیک به یک نقطهٔ بحرانی ناپایدار مسیر را شروع کنیم، می‌توان به اندازهٔ دلخواه نزدیک به یک نقطهٔ بحرانی پایدار متوقف شده و یا به بی‌نهایت برویم. از آن جایی که فضای فاز ما در اینجا ناحیه‌ای متناهی از یک هذلولی‌گون نامتناهی است، می‌توانیم حالتی که به بی‌نهایت می‌رسد را حذف کنیم.

نقاط بحرانی P_1 تا P_4 همانطور که نشان دادیم به ازای مقادیر مشخصی از α و λ نقاط تعادل غیرهذلولی هستند. این مقادیر برای P_1، $\alpha = -3$ یا $\lambda = -\sqrt{6}$ یا هر دو می‌باشد اما از آنجا که میدان برداری نامعین است، نمی‌توان هردوی این مقادیر را همزمان داشت. سپس می‌توان دید که برای $\alpha = -3$ و $\lambda \neq -\sqrt{6}$ نقطهٔ بحرانی P_1 زین‌ـ گره و ناپایدار است؛ اما برای $\lambda = -\sqrt{6}$ در حالتی که $\alpha > -3$، P_1 زین ناپایدار و در $\alpha < -3$ گره پایدار است. هرچند از دید کیهان‌شناسی این نقطه چندان مورد توجه نیست چراکه نشان دهندهٔ بازه‌ای با میدان اسکالر غالب و انبساط کندشونده است و همین برای P_2 هم برقرار است چرا که می‌دانیم P_1 و P_2 از نظر کیهان‌شناسی رفتار یکسانی از خود نشان می‌دهند.

همچنین نقاط P_3 و P_4 از دید کیهان‌شناسی یکسان بوده و هر دوی آن‌ها نشان‌دهندهٔ بازهٔ انرژی تاریک غالب می‌باشند. به طوری که برای $\lambda^2 > 2$ انبساط کندشونده و در $\lambda^2 < 2$ انبساط تندشونده داریم.

نقاط P_5 و P_6 هم غیرهذلولی بوده ولی هیچ قیدی برای متغیرهای α و λ برای آن‌ها وجود ندارد.

با بررسی دوشاخگی‌ها می‌توانیم بین حالت‌های مختلف تحول کیهان با ثابت کیهان‌شناسی و یا میدان اسکالر آزاد متفاوت، تمایز قائل شد. دو حالت ممکن از دو سری شرایط اولیه آغاز می‌شوند. در حالت اول کیهان از انبساط کندشونده با میدان اسکالر آزاد به وجود آمده و در حالت دوم این اتفاق از طریق انبساط نمایی دی‌ـ سیتر در بازه‌ای با ثابت کیهان‌شناسی ثابت افتاده است. از روی بررسی دوشاخگی‌ها به α و λ های مختلف دست پیدا کرده و همچنین دیدیم که تغییر فاز کیهان در مقدار دوشاخگی $\alpha = 3$ یا $\lambda = \pm\sqrt{6}$ رخ می‌دهد.

۸ منابع

[1] S. Mishraa, S. Chakraborty, Stability and bifurcation analysis of interacting f(T) cosmology

[2] Michael Jeffrey Ward Lectures, Centre Manifold Reduction

آ بررسی سنتر منیفولد نقطه ۳

یادآوری می‌کنیم که برای نقطه ۳ شرایط زیر حاکم بودند:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dN} & = (\lambda^2+\alpha-3)X - \sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}(\sqrt{6}\frac{\alpha}{\lambda}+\sqrt{\frac{3}{2}}\lambda)Y - \sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda}+\frac{\lambda}{2})Y^2 \\ & +\sqrt{\frac{3}{2}}(\frac{\alpha}{\lambda}-\frac{3\lambda}{2})X^2 - 3\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}(1+\frac{2\alpha}{\lambda^2})XY + \text{جملات مرتبه بالاتر} \\ \frac{dY}{dN} & = (\frac{\lambda^2}{2}-3)Y + \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}X^2 - \frac{9}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}Y^2 - \frac{3}{2}Y^3 + \frac{3}{2}X^2Y \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} & = (\lambda^2+\alpha-3)\bar{\Omega}_m + (3X^2-3Y^2-\sqrt{6}\lambda X - 6\sqrt{6-\lambda^2}Y)\bar{\Omega}_m \end{cases}$$

همینطور به ازای $\alpha+\lambda^2 = 3$ این نقطه ثابت غیرهذلولی است (اگر $-\sqrt{6} < \lambda < \sqrt{6}$). با استفاده از روش سنتر منیفولد داریم $Y = aX^2 + bX\bar{\Omega}_m + c\bar{\Omega}_m^2$ که با مشتق گیری از آن بدست می‌آید:

$$\frac{dY}{dN} = \begin{bmatrix} 2aX+b\bar{\Omega}_m & bX+2c\bar{\Omega}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dX}{dN} \\ \\ \frac{d\bar{\Omega}_m}{dN} \end{bmatrix}$$

با توجه به این معادلات خواهیم داشت:

$$\frac{dY}{dN} = (2aX+b\bar{\Omega}_m)\frac{dX}{dN} + (bX+2c\bar{\Omega}_m)\frac{d\bar{\Omega}_m}{dN}$$

در رابطه‌ی بالا، کمترین مرتبه توان سوم است. از این جهت متوجه می‌شویم در رابطه‌ی $\frac{dY}{dN}$ که در ابتدا برحسب Y و X داشتیم، جملات مرتبه دوم باید خنثی شوند. پس با جایگذاری Y خواهیم داشت:

$$-(\frac{\lambda^2}{2}-3)a = \frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}$$

در نهایت با ساده کردن، معادله‌ی سنتر منیفولد برابر خواهد بود با:

$$Y = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{6}}}X^2 + \text{جملات مرتبه بالاتر}$$

سنتر منیفولد نقاط دیگر هم همانند همین انجام شده اند که برای طولانی نشدن مقاله از اثبات هرکدام صرف نظر کردیم. باید مشتق را محاسبه کنیم و به مراتب مختلف نگاه کنیم و سعی کنیم ضرایب را پیدا کنیم.

ب اشتباهات مقاله

در این مقاله اشتباهات بسیار زیاد تایپی وجود داشت که بررسی آنها از حوصله ما و شما خارج است. ولی یک اشتباه بزرگ در معادلات داشت. بعد از شیفت دادن نقطه ۴، معادلات را کاملا اشتباه نوشته بود و از این جهت ما همین نقطه را برای گزارش اول استفاده کردیم و آن را درست کردیم و در این گزارش نیز ایرادات کوچک دیگر را برطرف کردیم. البته نتایج نهایی نقطه ۴ در مقاله درست بود!