Tarea 2 de Matemáticas Discretas *II*

Profra. Nahid Yelene Javier Nol

1. Demuestre que si se seleccionan 151 eneteros de $\{1, 2, 3 \ldots, 300\}$, entonces la selección debe incluir dos enteros x y y tales que $x|y$ o $y|x$.

2. Muestre que si seleccionan cualesquiera 14 enetros del conjunto $S = \{1, 2, 3, \ldots, 25\}$, existen al menos dos enteros en está selección cuya suma es 26.

3. Sea $S = \{3, 7, 11, \ldots, 95, 99, 103\}$. ¿Cuántos elementos de S debemos seleccionar para asegurar que existen al menos dos cuya suma es 110?

4. Si se seleccionan once enteros de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, demuestre que existen al menos dos, x y y, tales que $0 < |\sqrt{x} - \sqrt{y}| < 1$.

5. Sea ABCD un cuadrado con AB=1. Demuestre que si seleccionamos cinco puntos en el interior de este cuadrado, existen al menos dos cuya distancia entre sí es menor que $1/\sqrt{2}$.

6. ¿Cuántos enteros positivos entre 1 y 30 (inclusive) debemos seleccionar para garantizar que dos de ellos, digamos x, y, son tales que su máximo común divisor es mayor que 1?

7. Durante las primeras seis semanas de su último año de escuela, Braulio realiza al menos un resumen diario, pero no más de 60 resúmenes en total. Muestre que hay un periodo de días consecutivos durante los cuales realiza exactamente 23 resúmenes.

8. ¿Cuántas personas es necesario reunir para poder garantizar que haya al menos dos de ellas que nacieron el mismo mes del año?

9. ¿Cuántas personas es necesario reunir para poder garantizar que haya al menos dos de ellas que nacieron el mismo día y mes del año?

10. Del conjunto de números naturales $\{1, 2, ..., 200\}$ seleccionamos 101 números cualesquiera. Pruebe que entre los números seleccionados exis- ten dos tal que uno es divisible por el otro.

11. Dado el conjunto de números naturales $\{1, 2, ..., 2n\}$, ¿cuántos de ellos debemos seleccionar para garantizar que existan siempre dos tal que uno sea divisible por el otro?

12. Pruebe que si seleccionamos $n + 1$ números del conjunto $\{1, 2, ..., 2n\}$, entonces siempre existen dos consecutivos.

13. Pruebe que si seleccionamos $n + 1$ números del conjunto $\{1, 2, ..., 3n\}$, entonces siempre existen dos cuya diferencia es a lo más 2.

14. Pruebe que si seleccionamos $n + 1$ números del conjunto $\{1, 2, ..., kn\}$, $k \geq 2$, entonces siempre existen dos cuya diferencia es a lo más $k - 1$.

15. Se tiene una caja con 100 bolas rojas, 100 bolas azules, 100 bolas verdes y 100 bolas amarillas. ¿Cuál es el menor número de bolas que necesitamos sacar de la caja para garantizar que se tengan fuera al menos 12 bolas del mismo color?

16. Sea cualquier conjunto $\{a_1, a_2, ..., a_{n+1}\}$ de números enteros. Pruebe que existen a_i y a_j $(i \neq j)$ tales que n divide a $a_i - a_j$.