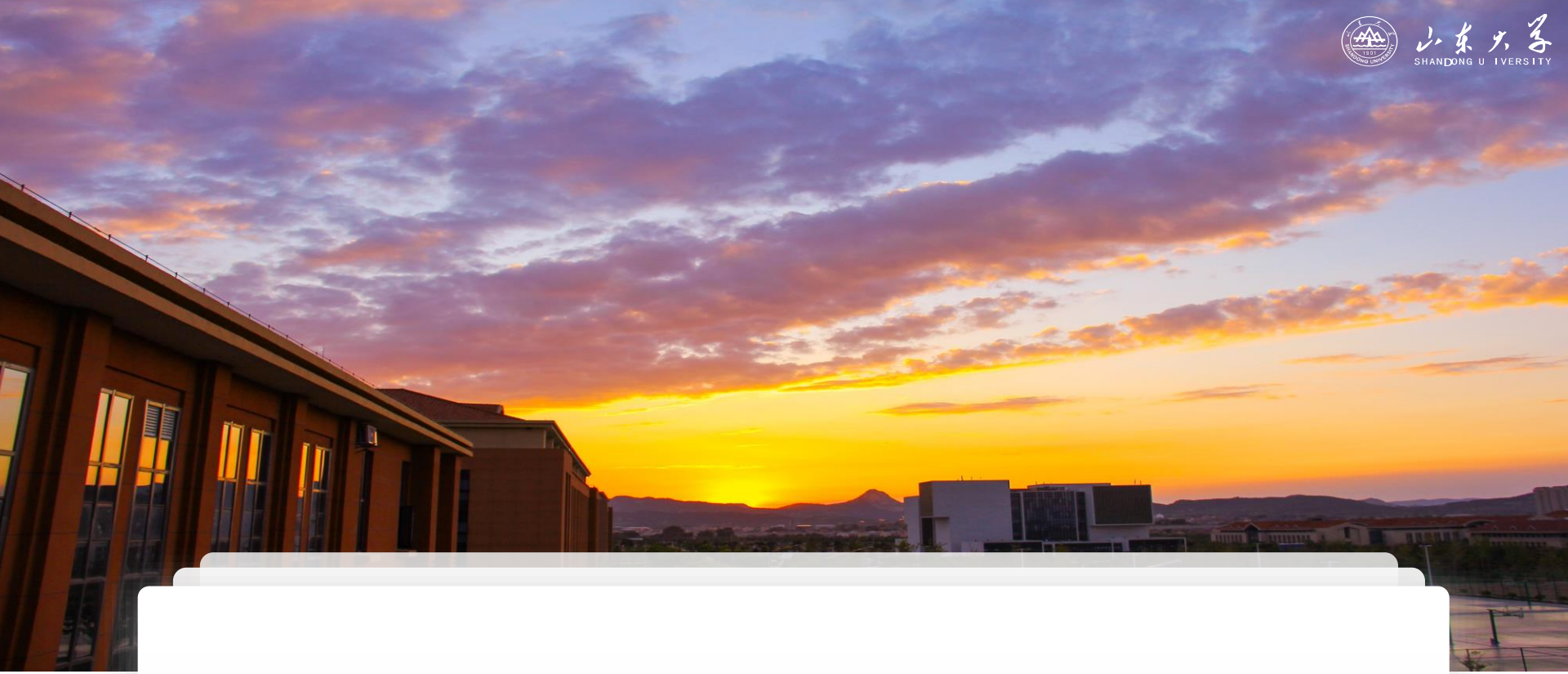
程序设计思维与实践

Thinking and Practice in Programming

数学基础与方法应用 | 内容负责：袁胜利



1 数 学 基 础

Prefix sum and Difference

取模运算

- 取模运算(mod)，也即 C/C++ 中的 “%”
- $a \bmod p = b$，b 是 a 除以 p 的余数
- 读作 “ a 模 p 等于 b”
- 为了方便大家观看，就直接用“%”代替 mod 表示

- 任何一个非负整数 a,对于一个确定的模数 p，都可以转换为如下形式

$$a = kp + b$$
$$0 <= b < p$$
$$k \in Z$$

而此时的 b ,也就等于 $a \bmod p$，而 k 就是 $\left\lfloor \frac{a}{p} \right\rfloor$

取模运算

- 取模运算有一些运算性质
- $(a \pm b)\%p = (a\%p \pm b\%p)\%p$

$$a = k_1 p + a_0$$

$$b = k_2 p + b_0$$

$$(a \pm b)\%p = \big((k_1 p + a_0) \pm (k_2 p + b_0)\big)\%p = (a_0 \pm b_0)\%p$$

- $(a \times b)\%p = \big((a\%p) \times (b\%p)\big)\%p$

$$(a \times b)\%p = \big((k_1 p + a_0) \times (k_2 p + b_0)\big)\%p = (a_0 \times b_0)\%p$$

- 注意，$\frac{a}{b}\%p \neq \frac{a\%p}{b\%p}\%p$
- 根据费马小定理，$\frac{1}{a} = a^{p-2}$ • 注意要求p是质数

取模运算

- 有些题目中会涉及到取模运算，这种题目往往会出现直接乘中间过程爆int或者long long的情况（溢出），而取模的结果不会爆int或者long long
- 比如计算 $(10^{15} \times 10^{16})\%(10^9+7)$，如果我们直接计算 $10^{15} \times 10^{16}$，则会爆long long，但是如果使用取模运算的运算规则，则不会出现爆long long的情况。

- 根据计算规则，也就衍生出常用的 C/C++ 写法
- $a \mathrel{+}= b, a\% = p \ \rightarrow a = (a+b)\%p$
- $a \mathrel{*}= b, a\% = p \ \rightarrow a = (a*b)\%p$
- 在编写程序时，一定要注意结果溢出的问题

位运算

- & 按位与
- | 按位或
- ~ 取反
- ^ 按位异或
- > > 右移
- < < 左移

位运算

- 1<<n　计算 2^n
- a<<1　计算 $a \times 2$　　a>>1　计算 $a/2$　(向下取整)
- a<<m　　a>>m
- a&1　　若为真，则 a 为奇数，否则为偶数
- a&(1<<m)
- a　　a^1
- -a=~a+1

快速幂

- 计算 $a^b \bmod p$ 的结果 $0 < a, b, p \leq 10^9$
- 如果直接循环计算，则需要 $O(b)$ 的复杂度，会TLE

- 引入分治的思想

- $$a^b = \begin{cases} \left(a^{\frac{b}{2}}\right)^2, b\text{是偶数} \\ a\left(a^{\left\lfloor\frac{b}{2}\right\rfloor}\right)^2, b\text{是奇数} \end{cases}$$
- 每次可以将 b 除以 2 ，复杂度 $O(\log b)$

快速幂

```
LL qpow(LL a,LL b,LL p)
{
    if(!b)return 1;
    LL now=qpow(a,b/2,p);
    if(b&1)return a*now%p*now%p;
    else now*now%p;
}
```

```
LL qpow(LL a,LL b,LL p)
{
    LL ans=1;
    for(a%=p;b;a=a*a%p,b>>=1)if(b&1)ans=ans*a%p;
    return ans;
}
```

快速幂

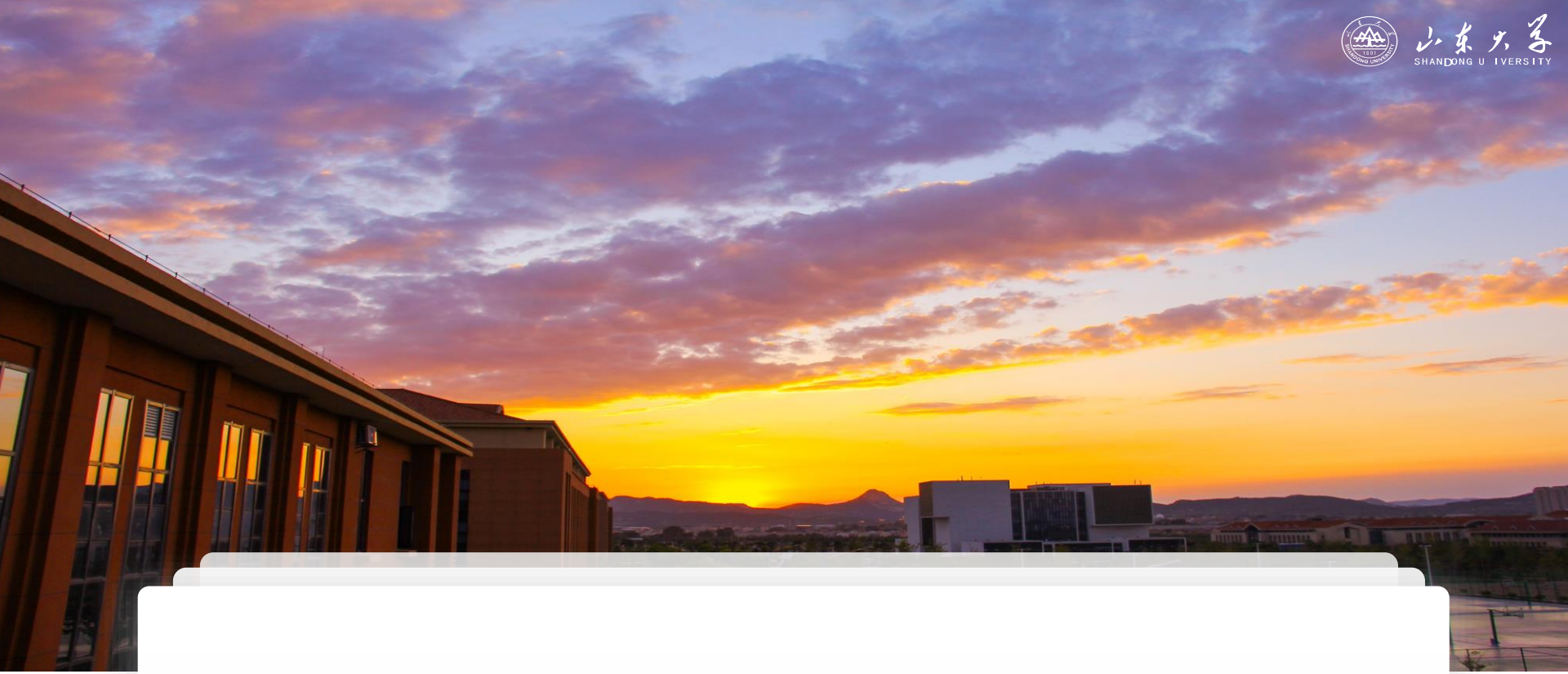
- 计算 $a \times b \bmod p$ 的结果 $0 < a, b, p \leq 10^{18}$
- $(10^{15} \times 10^{16}) \% (10^{17} + 7)$
- 直接计算会爆long long，用取模运算规则计算也还是会爆long long

- 像快速幂那样把乘法展开

快速幂

- 计算 A^b 的结果，A 是一个方阵

- 因为矩阵乘法满足结合律，所以这个也可以像快速幂那样运算



2 前缀和与差分

Prefix sum and Difference

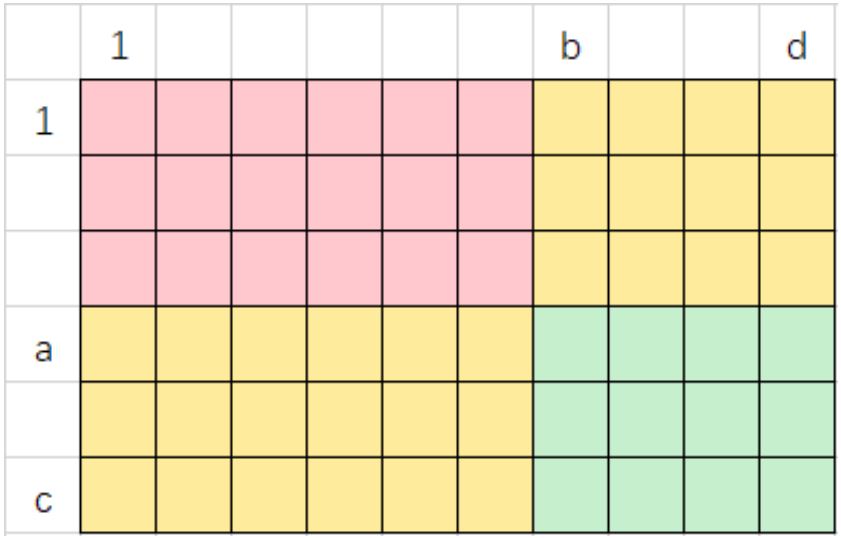
前缀和

- 前缀和作用
  - O(1) 求出一个区域所有元素数值之和
  - 当涉及快速求取某一区域和时，可考虑使用前缀和进行快速计算
  - 即前缀和通常用于优化算法中的某一步骤，进而降低复杂度

- 一维前缀和
  - sum[i] = sum[i-1] + a[i]
  - sum[L, R] = sum[R] – sum[L-1]

二维前缀和

- 二维前缀和涉及基础容斥
- 预处理公式
  - sum[x, y] = sum[x-1, y] + sum[x, y-1] – sum[x-1, y-1]+a[x,y]
- 快速计算区域和
  - 左上角 (a, b)
  - 右下角 (c, d)



  - SUM = sum[c, d] - sum[a-1, d]- sum[c, b-1] + sum[a-1, b-1]

差分

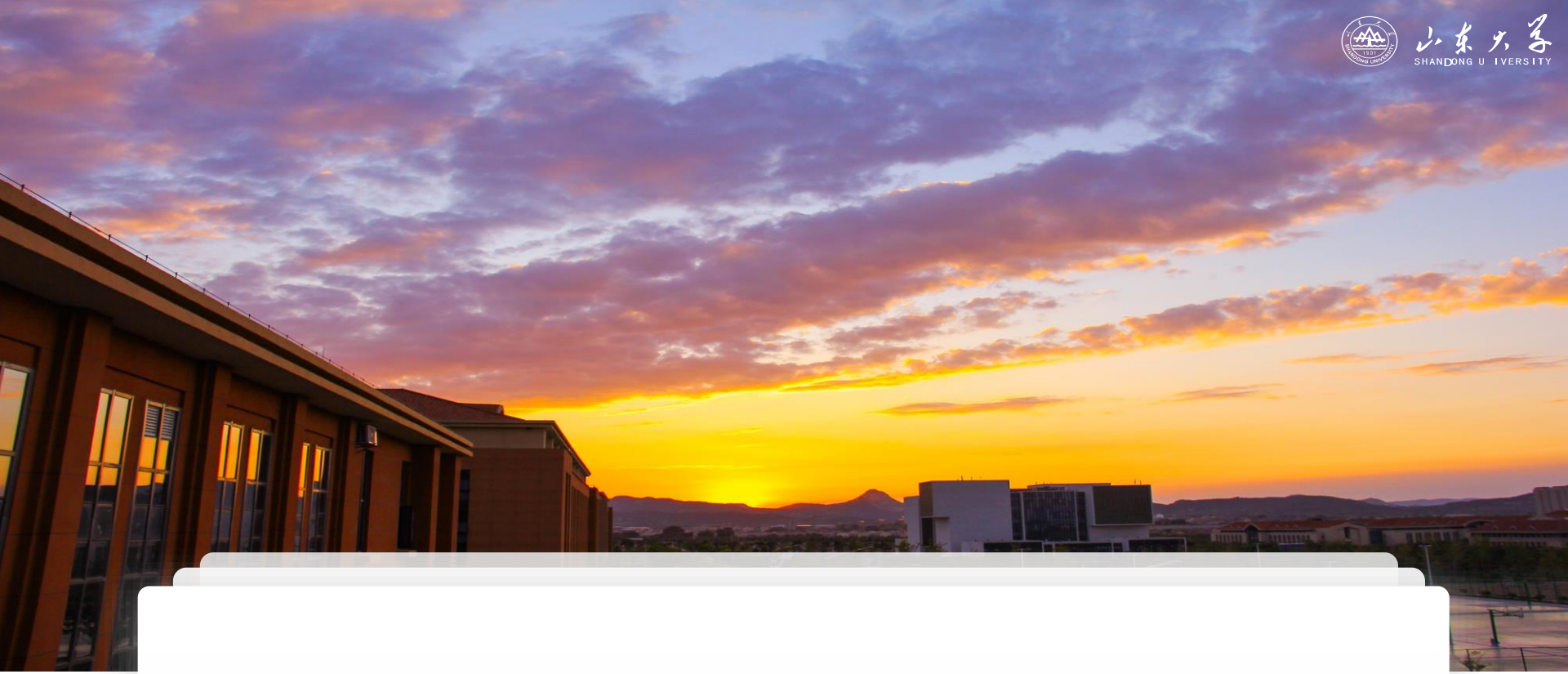
- 差分构造方式
  - 原数组 A，差分数组 B，数组范围 [1，n]
  - B[1] = A[1]
  - B[i] = A[i] - A[i-1]
- 差分特点
  - B 数组前缀和 ⇔ A 数组元素值
    - SUM{B[1~i]} = A[i]
  - A 数组的区间加 ⇔ B 数组的单点修改
    - A[L]~A[R] 均加上 c
    - 等价于 B[L] += c，B[R+1] -= c

3 例 1 讲 解

Example 1

例1讲解

- 题意
  - 长度为 n 的数组，一共 q 次操作，$1 \le n, q \le 10^5$
  - 每次操作给出 L, R，c，表示区间 [L, R] 中各个数均加上 c
  - 求 q 次操作结束后，数组中各个元素值？
- 思路
  - 暴力做法，$O(qn)$，超时
  - 将原数组转变为差分数组，将区间修改转变为单点修改
  - A[L, R] += c ⇔ B[L] += c, B[R+1] -= c
  - B 数组前缀和即为 A 数组最终数值，$O(\mathrm{n} + q)$



4 尺 取 法

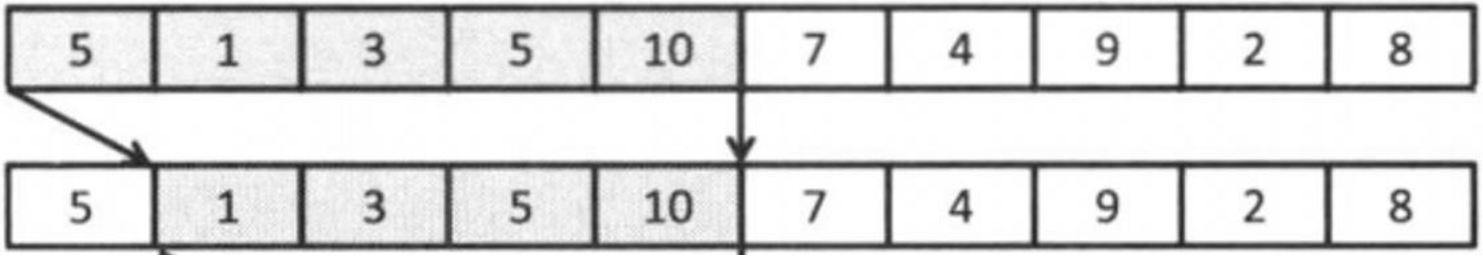
Two Pointers

尺取法

- 概念讲解
  - 尺取法，是双指针的一种，是数组上的一种常见操作
  - 以下述经典例题为例进行讲解
- 题意
  - 长度为 n 的数组，每个数均为正整数
  - 给出正整数 S，要求 O(n) 内求出长度最小的连续区间，使 S ≤ 区间和
- 样例
  - [1 2 3 4 5]，S = 11
  - [1 2 3 4 5]，$11 \leq 3+4+5$，答案为 3

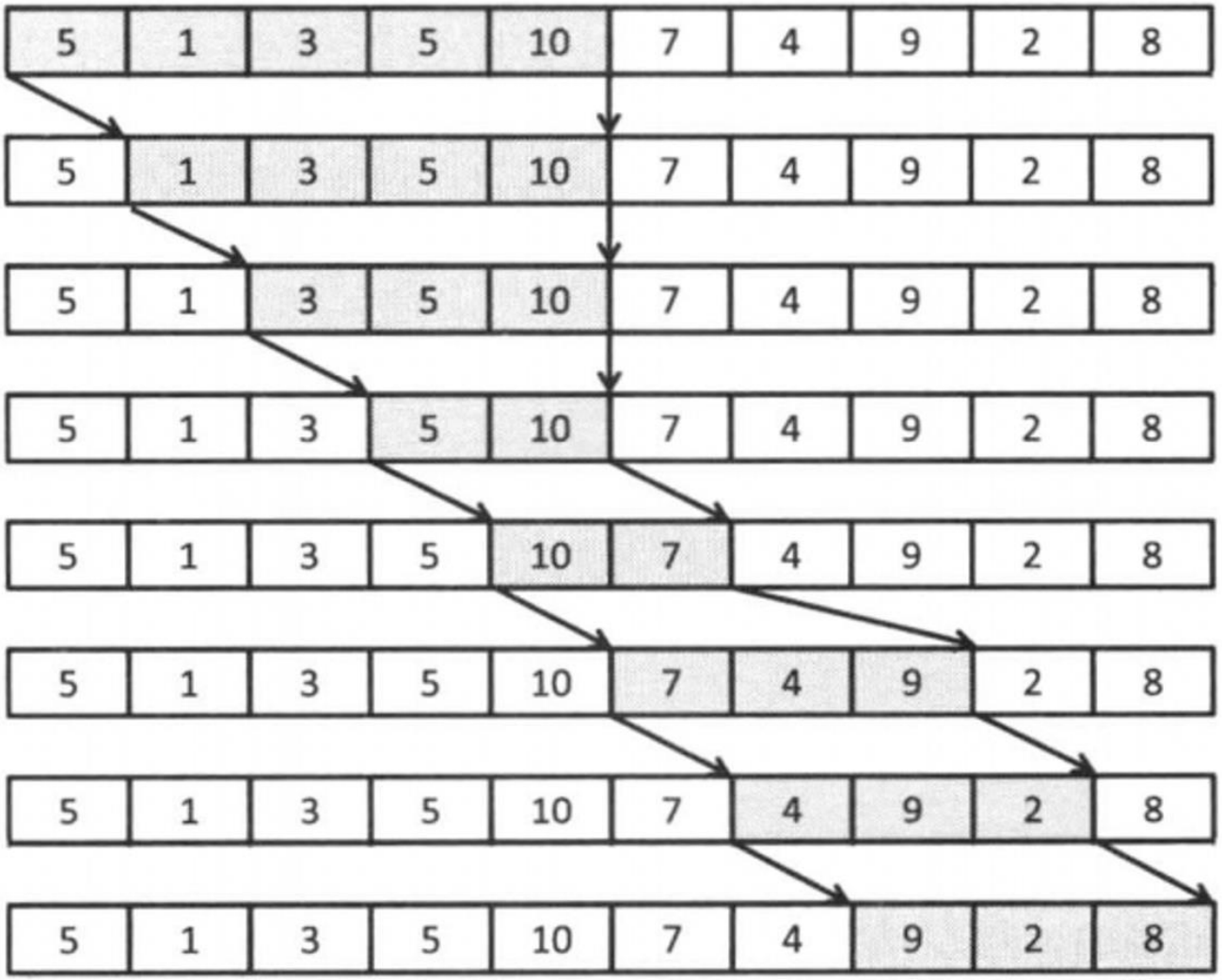
尺取法

- 以 [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8]，S = 15 来例介绍该算法
- 具体流程
  - 维护双指针 L、R，初始 L = R = 1，sum = a[L]
  - 当 sum >= S 时，符合要求，用 (R-L+1) 更新答案，且 L++；若 L = R，则 L++，R++
  - 当 sum < S 时，不符合要求，R++



尺取法

- [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8], S = 15



简要证明

- [5 1 3 5 10 7 4 9 2 8]，S = 15
- 根据算法流程可知
  - 左端点 L 能够遍历到区间中的所有点
  - 对于每个左端点 L 所形成的最终区间 [L,R]
    - sum[L~R] 如果小于 S，则令R右移
    - sum[L~R] 如果大于等于S，此时 sum[L~R] ≥ S，sum[L~(R-1)] < S
- 对于一个左端点 L ，最后找到的一个区间 [L,R] ， R是满足条件的最小值
- 因此答案区间一定会在上述尺取流程中出现

尺取算法总结

- 维护双指针（下标）
  - 尺取法是双指针的一种，即在遍历数组过程中，用两个相同方向进行扫描

- 什么情况下能使用尺取法？
  - 所求解答案为一个连续区间
  - 对于一个左端点 L， [L,n] 的区间是否满足条件是单调的
- 经典例题
  - 长度最小的区间和 ≥ S 的连续区间

5 例 2 讲 解

Example 2

例2讲解

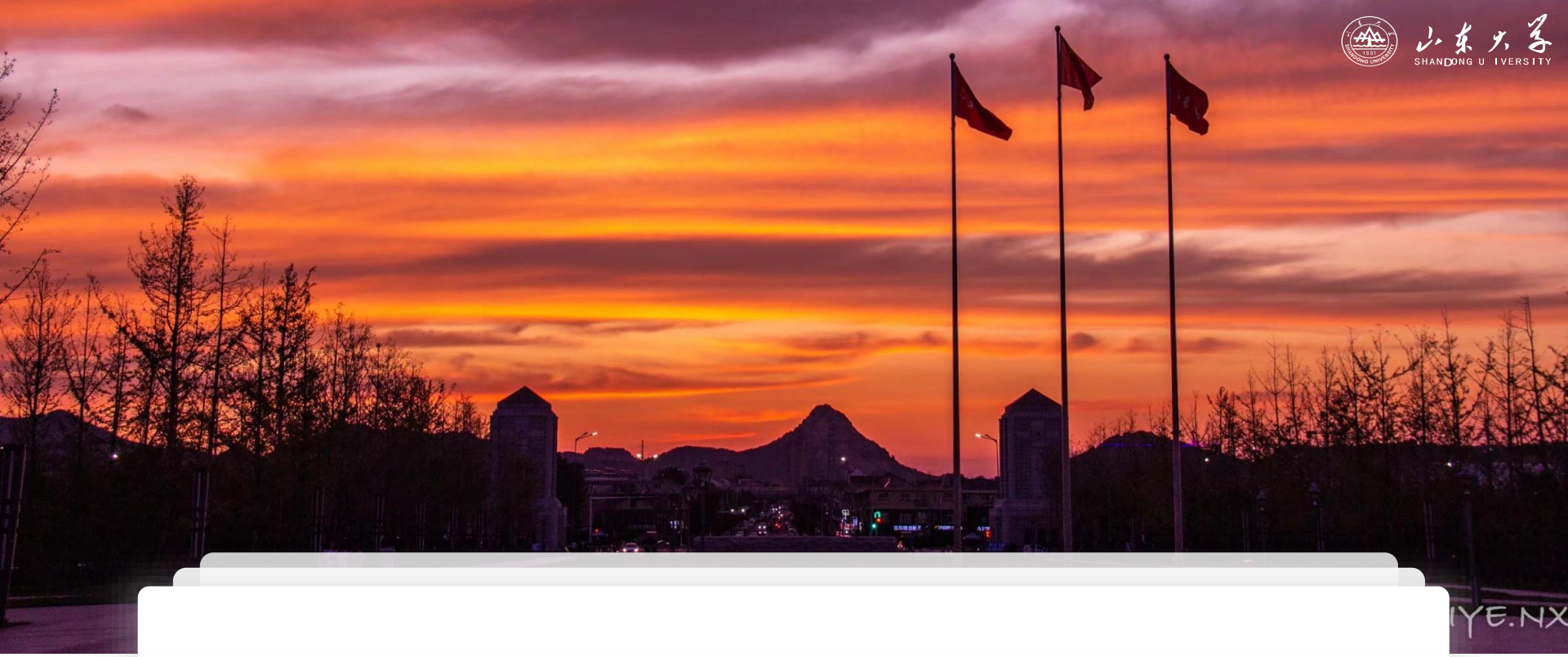
- 题意
  - 一个长度为 n 的字符串 s，其中仅包含 'A'，'B'，'C'，'D' 四种字符（n 为 4 的倍数）
  - 如果四种字符在字符串中出现次数均为 n/4，则其为一个平衡字符串
  - 现可以将 s 中连续的一段替换成任意字符，使其变为一个平衡字符串，问替换子串的最小长度？
- 样例
  - s = "AABC"
  - 转变为 "DABC"，答案为 1

解题思路

- 是否可以用尺取法?
  - 所求解答案为一个连续区间 ✓
  - 对于一个左端点 L， [L,n] 的区间是否满足条件单调 ✓
    - 当前 [L, R] 满足要求，则 L++
    - 当前 [L, R] 不满足要求，则 R++
- 因此可以用尺取法，思考如何判断当前 [L, R] 是否满足要求

解题思路

- 给定 [L, R]，判断是否满足要求？
  - 用 cntA, cntB, cntC, cntD 分别记录在区间 [L, R] 字符 'A', 'B', 'C', 'D' 的个数
  - 用 sumA, sumB, sumC, sumD 表示字符 ‘A’，‘B’，‘C’，‘D’ 的总个数
  - 如果 sumA-cntA>n/4或者sumB-cntB>n/4或者sumC-cntC>n/4或者sumD-cntD>n/4，则不符合条件



6 单 调 栈

Monotone Stack

单调栈

- 单调栈 = 单调 + 栈
- 单调
  - 单调递增 1 2 3 4 5 6 7...
  - 单调递减 7 6 5 4 3 2 1...
  - 单调非减 1 1 2 3 4 4 5...
  - 单调非增 7 7 6 5 4 4 3...
- 栈
  - 一种线性数据结构，支持 push 和 pop 操作
  - 已经在 「数据结构与算法」课程中学习过
  - 满足先进后出 FILO 原则
- 单调栈 = 栈内元素 **自栈顶到栈底** 满足 **单调性**

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作
  - 现有一数组 [10, 3, 7, 4, 12]，从左到右依次入栈。
  - 如果栈为 **空** 或者栈顶元素 **大于** 入栈元素，则入栈。
  - 否则，入栈则会破坏栈内元素的单调性，则需要将不满足条件的栈顶元素全部弹出后，将入栈元素入栈。

- 单调递减栈与之相反

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 []
  - 10 入栈时，栈空，入栈

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [3 10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈;

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [7 10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [4 7 10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [7 10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [10]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [ ]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；栈空，入栈

单调栈

- 模拟单调递增栈的操作 [12]
  - 10 入栈时，栈空，入栈
  - 3 入栈时，栈顶元素 10 大于 3，入栈
  - 7入栈时，栈顶元素 3 小于 7，弹栈；栈顶元素 10 大于 7，入栈
  - 4 入栈时，栈顶元素 7 大于 4，入栈
  - 12 入栈时，栈顶元素 4 小于 12，弹栈；栈顶元素 7 小于 12，弹栈；栈顶元素 10 小于 12，弹栈；栈空，入栈

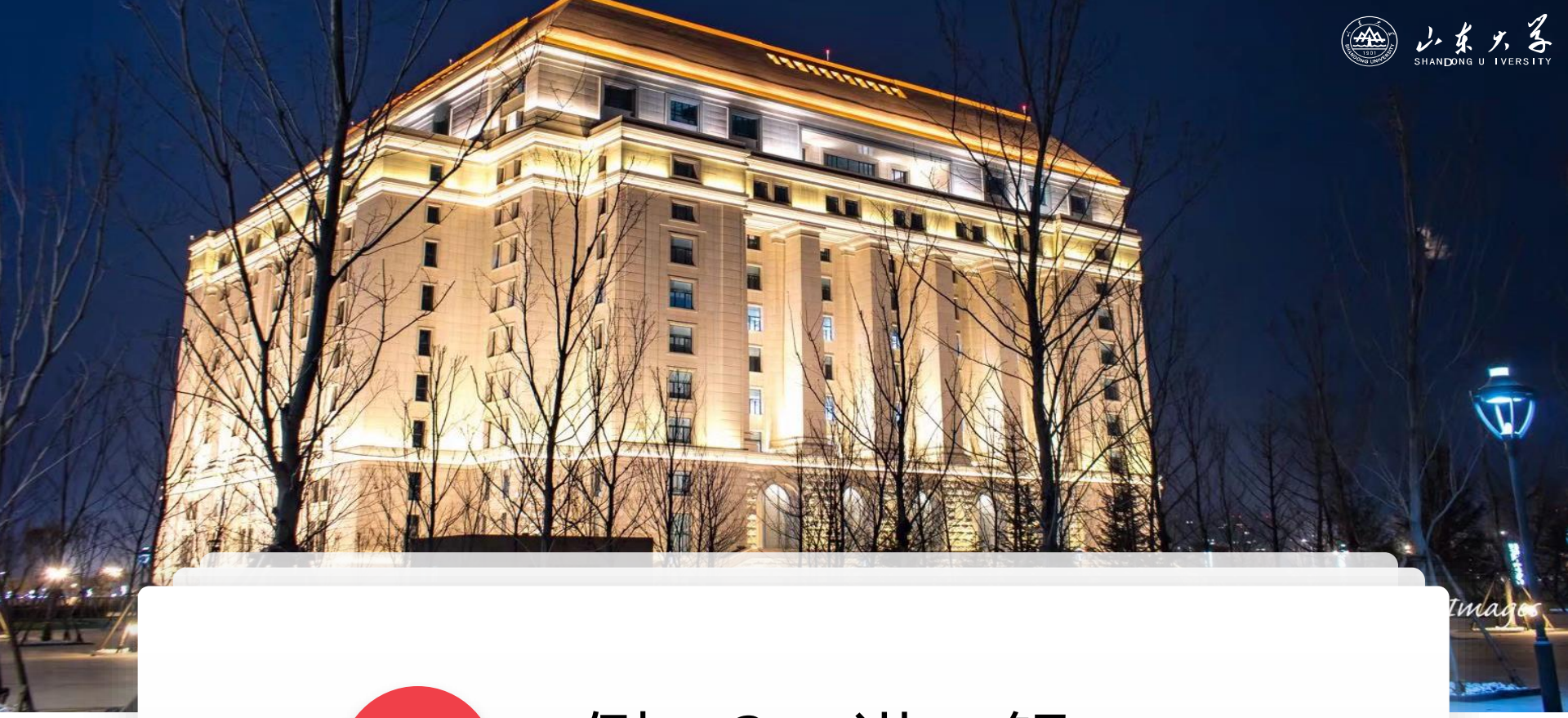
单调栈

- 单调递增栈的伪代码

```
INITIALIZE stack
FOR each element u DO
  WHILE stack.size() > 0 and stack.top() <= u DO
    stack.pop()
  END
  stack.push(u)
END
```

单调栈

- 单调栈的作用
  - 线性的时间复杂度
  - **单调递增栈** 可以找到往左/往右第一个比当前元素 **大** 的元素
  - **单调递减栈** 可以找到往左/往右第一个比当前元素 **小** 的元素
  - 可以求得以当前元素为最值的最大区间



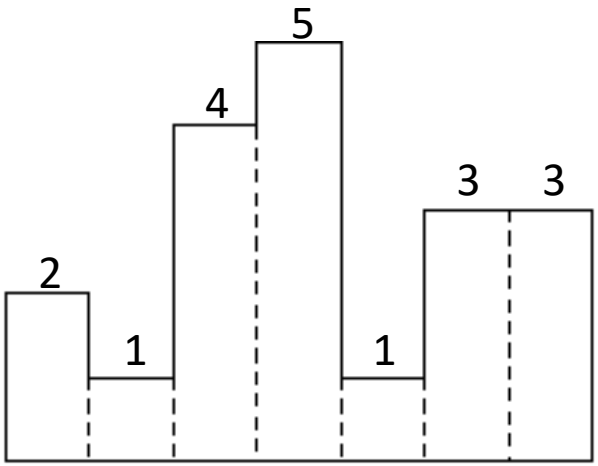
7 例 3 讲 解

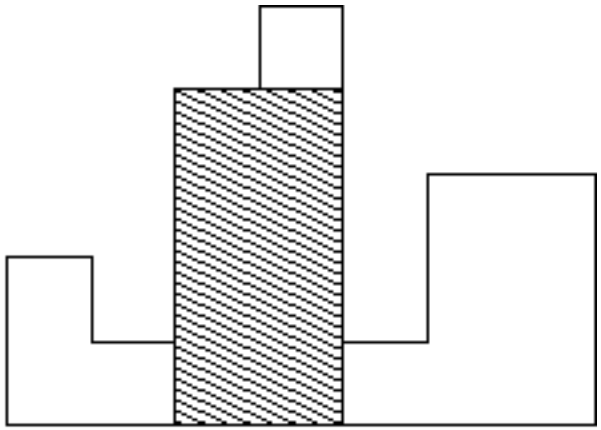
Example 3

例3讲解

- 给一个直方图，求直方图中的最大矩形的面积
- $1 \leq n \leq 100000$

- n=7, a = [2 1 4 5 1 3 3]
- Ans = 8





例3讲解

- 如果确定了一个矩形的左端点为l，右端点为r，那么矩形的高怎么确定？
  - 根据题意，高度不能超过l到r中的最小值
  - 要是整个矩形最大，那么高度就确定为l到r中的最小值
- 同理，如果确定了矩形的高度，那么左端点一定是越靠左，右端点越靠右，这个矩形的面积才可能最大
  - 左端点可以确定为往左数第一个小于此高度的点
  - 右端点可以确定为往右数第一个小于此高度的点
- 两遍单调栈处理出以每个点为高时的左右端点

8 单 调 队 列

Monotone Queue

单调队列

- 单调队列 = 单调 + 队列
- 单调
  - 单调递增 1 2 3 4 5 6 7...
  - 单调递减 7 6 5 4 3 2 1...
  - 单调非减 1 1 2 3 4 4 5...
  - 单调非增 7 7 6 5 4 4 3...
- 队列
  - 一种线性数据结构，支持 push 和 pop 操作
  - 已经在 「数据结构与算法」课程中学习过
  - 满足先进先出 FIFO 原则
- 单调队列 = 队列里的元素满足 **出队** 顺序的 **单调性**

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作
  - 现有一数组 [10, 3, 7, 4, 12]，从左到右依次入队。
  - 如果队列为 **空** 或者队尾元素 **小于** 入队元素，则入队。
  - 否则，入队则会破坏队内元素的单调性，则需要将不满足条件的队尾元素全部出队后，将入队元素入队。

- 单调递减队列与之相反

单调队列

- 单调队列的维护过程与单调栈相似
- 区别在于
  - 单调栈只维护一端(栈顶)，而单调队列可以维护两端(队首和队尾)
  - 单调栈通常维护 **全局** 的单调性，而单调队列通常维护 **局部** 的单调性
  - 单调栈大小没有上限，而单调队列通常有大小限制

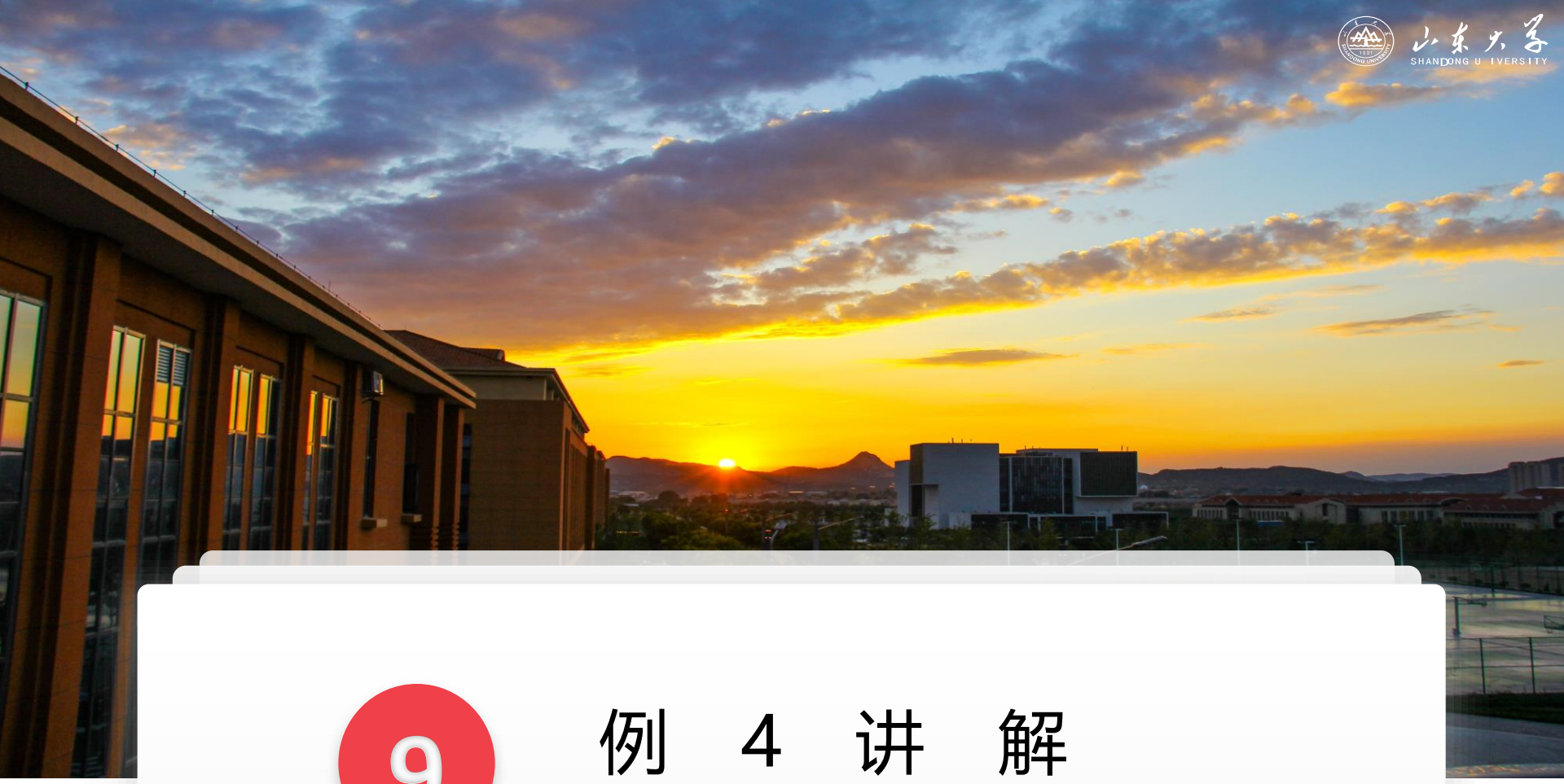
- 由于单调队列 **可以队首出队** 以及 **前面的元素一定比后面的元素先入队** 的性质，使得它可以维护局部的单调性
- 当队首元素不在区间之内则可以出队

- 时间复杂度与单调栈一致

单调队列

- 单调递增队列的伪代码

```
INITIALIZE queue
FOR each element u DO
  WHILE queue.size() > 0 AND queue.front() does not belong to the interval DO
    queue.pop_front()
  END
  WHILE queue.size() > 0 AND queue.back() > u DO
    queue.pop_back()
  END
  queue.push(u)
END
```



9 例 4 讲 解

Example 4

例4讲解

- 小Y 有一个长度为 n 的数列和一个大小为 k 的窗口，窗口可以在数列上来回移动. 现在 小Y 想知道在窗口从左往右滑的时候，每次窗口内数的最大值和最小值分别是多少.
- $1 \leq \mathrm{n} \leq 1000000, 1 \leq k \leq n$

例4讲解

- 例如当数列为 [1 3 -1 -3 5 3 6 7], k=3 时

Window position	Minimum value	Maximum value
[1 3 -1] -3 5 3 6 7	-1	3
1 [3 -1 -3] 5 3 6 7	-3	3
1 3 [-1 -3 5] 3 6 7	-3	5
1 3 -1 [-3 5 3] 6 7	-3	5
1 3 -1 -3 [5 3 6] 7	3	6
1 3 -1 -3 5 [3 6 7]	3	7

例4讲解

- 如果查找全局的最小值，可以使用单调栈，尽管有些多余
- 现在要求查找窗口内的最小值，是一个 **局部** 的概念

- 维护一个单调递增队列，队列中的元素均属于当前窗口
- 当元素不属于当前窗口时，将队首元素弹出即可

- 可以手动模拟一下整个过程

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ ]
  - 1 入队时，队空，入队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [1]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[1 3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[1]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[-1]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[ ]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[-3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[-3 5]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素 5 大于 3，5出队

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[-3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[-3　3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [3]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作 [3 6]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3
  - 7入队时，队尾元素6小于7，入队，并记录当前最小值3

单调队列

- 模拟单调递增队列的操作　　[3 6 7]
  - 1 入队时，队空，入队
  - 3 入队时，队尾元素 1 小于 3，入队
  - -1 入队时，队尾元素 3 大于 -1，3 出队，队尾元素 1 大于 -1，1 出队，队空，-1 入队，并记录当前最小值 -1
  - -3 入队时，队尾元素 -1 大于 -3，-1 出队，队空，入队，并记录当前最小值 -3
  - 5 入队时，队尾元素 -3 小于 5，入队，并记录当前最小值-3
  - 3 入队时，队尾元素5大于3，5 出队，队尾元素 -3 小于 3，3入队，并记录当前最小值 -3
  - 6入队时，队首元素 -3 的下标小于等于 n-k=4 ，-3出队，队尾元素3小于6，入队，并记录当前最小值3
  - 7入队时，队尾元素6小于7，入队，并记录当前最小值3

感谢收听

Thank You For Your Listening