Если функция дифференцируема то она непрерывна. Значение функции в точке совпадает с пределом

Функция дифференцируема <=> по определению ее приращение можно представить в виде $\Delta y = A * \Delta x + \alpha(\Delta x) * \Delta x$.

Теорема 1

Дано: дифференцируемые функции $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для $f(x)$. $F_1 - F_2 = \text{обозн} = \varphi(x)$

Тогда $\varphi(x) = const$ (на отрезке [a,b] при F1, F2 [a,b]->R)

Доказательство.

$\varphi(x)$ дифференцируема как разность дифференцируемых функций.

$\varphi'(x) = (F_1 - F_2)' = F_1' - F_2' = f(x) - f(x) = 0$ Для любого $x \in [a, b]$

По теореме Лагранжа о среднем. Рассмотрим отрезок от a до x:

$\exists\ \xi \in [a, x]$, такой, что: $\varphi'(\xi)(x - a) = \varphi(a) - \varphi(x) =>$ так как $\varphi'(\xi) = 0$

$\varphi(a) - \varphi(x) = 0;\ \varphi(a) = \varphi(x)$ Для любого $x \in [a, b]$,то есть $\varphi(x) = const$, ч. т. д.

Теорема 2 (свойства неопределенного интеграла)

Дано: $\int f(x)dx = F(x) + C$

Свойство 1) $\int dF(x) = F(x) + C$

Доказательство: $d\big(F(x)\big) = F'(x)dx = f(x)dx => \int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$, ч. т. д.

Свойство 2) $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

Доказательство: $d(\int f(x)dx) = (\int f(x)dx)'dx = (F(x) + C)'dx = \big(F(x)\big)'dx = f(x)dx$

Свойство 3) ЛИНЕЙНОСТЬ

а) $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx, k \in R$

б) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Доказательство

а) Левая часть. $(\int kf(x)dx)'$ = по2св-ву= $kf(x)$

Правая часть. $(k\int f(x)dx)'$ =по св-вам производных = $k(\int f(x)dx)' = kf(x)$

Замечаем, что левая и правая части – это первообразные одной функции. ч. т. д.

б) Левая часть. $(\int (f(x) + g(x))dx)'$ = по2св-ву = $f(x) + g(x)$

Правая часть. $(\int f(x)dx + \int g(x)dx)'$ =$(\int f(x)dx)'$+$(\int f(x)dx)'$ = по2св-ву = $f(x) + g(x)$

Замечаем, что левая и правая части – это первообразные одной функции. ч. т. д.

Инвариантность интеграла

Теорема 3 О методе подстановки

Дано: $f(x)$ – дифф-ма, $x = \varphi(t)$ – обратима и дифф-ма на отрезке [a, b]

Тогда: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство;

Левая часть: $(\int f(x)dx)' = \text{по2св} - \text{ву} = f(x)$

Правая часть: $\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right)_x' = (\text{опр. дифф}) = \frac{d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)}{dx} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{d(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt)}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \text{по2св} - \text{ву} = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot \frac{dt}{dx} = (dx = x'(t)dt = \varphi'(t)dt) = f(\varphi(t))\varphi'(t) \cdot \frac{dt}{\varphi'(t)dt} = f(\varphi(t)) = f(x)$

Теорема 4 Об интегрировании по частям

Дано: $u = u(x), v = v(x)$ имеют непрерывные производные.

Тогда: $\int udv = uv - \int vdu$ $(\int u(x)v'(x)dx = uv - \int v \cdot u'dx)$

Доказательство:

Запишем первообразную для uv: $\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'v + v'u$

По определению интеграла $\int (u'v + v'u)\, dx = uv + c$

По свойству линейности: $\int v \cdot u'\, dx + \int u \cdot v'\, dx = uv + c$

$$\int v \cdot du + \int u \cdot dv = uv + c \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu, \qquad \text{ч. т. д.}$$

Теорема 5 Линейность определенных интегралов

Свойство:

$$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$$

Доказательство:

По определению:

$\int_a^b \left(\lambda f(x) + \mu g(x)\right)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\left(\lambda f(\xi_i) + \mu g(\xi_i)\right)\Delta x_i =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} (\sum\left(\lambda f(\xi_i)\right)\Delta x_i + \sum\left(\mu g(\xi_i)\right)\Delta x_i)$ = по свойствам пределов = $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\left(\lambda f(\xi_i)\right)\Delta x_i +$

$+ \lim\limits_{n\to\infty} \sum\left(\mu g(\xi_i)\right)\Delta x_i$ = $\lambda \lim\limits_{n\to\infty} \sum\left(f(\xi_i)\right)\Delta x_i + \mu \lim\limits_{n\to\infty} \sum\left(g(\xi_i)\right)\Delta x_i$ = по определениям определенных интегралов = $\lambda \int_a^b f(x)dx + \mu \int_a^b g(x)dx$, ч. т. д.

Теорема 6 Аддитивность определенных интегралов

Свойство:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Доказательство

1. ЛЧ->ПЧ

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i$ = сумму можно раскидать на то, что слева от с, и то, что справа от с в два разных предела (по свойствам предела) и дальше представить все по определению интеграла = правая часть.

2. ПЧ -> ЛЧ

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i \ [a,c] + \lim_{n\to\infty} \sum g(\xi_i)\Delta x_i \ [c,b]$$

Пределы складываем, и получаем по определению интеграл = левая часть, ч. т. д.

Теорема 7 Оценка определенного интеграла

Если m, M – наименьшее и наибольшее значение функции f(x) на [a,b]

Тогда: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$

Доказательство:

Теорема Вейерштрасса: Существуют m, M – наименьшее и наибольшее значение функции f(x) на [a,b]:

$m \le f(x) \le M$

Тогда для любого $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$:

$m \le f(\xi_i) \le M \ /\cdot \Delta x_i > 0$

$m\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M\Delta x_i$ /дописываем значок суммы

$\sum m\Delta x_i \le \sum f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum M\Delta x_i$ /предельный переход в неравенствах (его суть в том, что если функция больше или равна другой функции, то и пределы соответственно)

$\lim_{n\to\infty} \sum m\Delta x_i \le \lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i \le \lim_{n\to\infty} \sum M\Delta x_i$ средний предел по определению определенного интеграла, а константные m и M можно вынести сначала из суммы, а потом и из предела

$m \lim_{n\to\infty} \sum \Delta x_i \le \int_a^b f(x)dx \le M \lim_{n\to\infty} \sum M\Delta x_i$ / Вспоминаем, что все Δx_i в сумме составляют отрезок [a,b], его длина = b -a. Это число константно => его можно вынести из-под пределов с обеих сторон. Получаем:

$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ ч. т. д.

Теорема 8 Теорема Лагранжа о среднем для интегралов

Если определен интеграл на отрезке $[a,b]$ (иными словами, f(x) непрерывна на отрезке $[a,b]$)

Тогда: $\exists \xi \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

Доказательство:

По теореме об оценке интегралов имеем:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Как мы знаем, длина отрезка = b-a – величина не отрицательная, значит все части неравенства можно на нее разделить:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Где $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ – некоторое число, обозначим его A: $m \leq A \leq M$

По 2 теореме Больцано-Коши функция на отрезке принимает все значения от наибольшего до наименьшего => $\exists \xi \in (a,b)$: $f(\xi) = A = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

Значит, $\exists \xi \in (a,b)$: $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ ч. т. д.

Теорема 9 О сравнении интегралов

Если $f(x) \leq g(x)$ на всем отрезке $[a,b]$; $f(x), g(x)$ непрерывны на всем отрезке $[a,b]$

Тогда: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

Доказательство:

Докажем, что $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$

Линейность определённого интеграла:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx \geq 0$$

Переходим к определению интеграла через суммы:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\big(g(\xi_i) - f(\xi_i)\big)\Delta x_i$, где $\Delta x_i \geq 0$ и по данным условиям $g(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0$ для любого $\xi \in (a,b)$=> весь предел положительный =>

$$\int\limits_a^b g(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$$

ч. т. д.

Теорема 10 Интеграл и модуль

Если определены интегралы $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$, $\int_a^b |f(x)|dx$

Тогда: $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

Доказательство:

По определению интеграла требуется доказать, что

$\left|\lim\limits_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sum |f(\xi_i)|\Delta x_i$ внесем положительный Δx в модуль

$$\left|\lim_{n\to\infty} \sum f(\xi_i)\Delta x_i\right| \leq \lim_{n\to\infty} \sum |f(\xi_i)\Delta x_i|$$

По аналогии с неравенством треугольника$|a+b| \le |a|+|b|$: $|\sum f(\xi_i)\Delta x_i| \le \sum |f(\xi_i)\Delta x_i|$

Осталось доказать, что $\left|\lim_{n\to\infty}\sigma_n\right| = \lim_{n\to\infty}|\sigma_n|$

Mem: Если $\exists \lim_{n\to\infty}\sigma_n = A,$ то A – предел всякой подпоследовательности из σ_n.

Выделим две подпоследовательности из $|\sigma_n|$:

1. $|\sigma_k|$, $\sigma_k < 0$, при этом $|\sigma_k|$ = - σ_k
2. $|\sigma_l|$, $\sigma_l < 0$, при этом $|\sigma_l|$ = σ_l

Тогда:

$$A = \lim_{l\to\infty}|\sigma_l| = \lim_{l\to\infty}\sigma_l = \left|\lim_{l\to\infty}\sigma_l\right|$$

$$A = \lim_{k\to\infty}|\sigma_k| = \lim_{k\to\infty}(-\sigma_k) = -\lim_{k\to\infty}\sigma_k = |\lim_{k\to\infty}\sigma_k|$$

Итак:

$$\left.\begin{matrix}\lim_{l\to\infty}|\sigma_l| = \left|\lim_{l\to\infty}\sigma_l\right| \\ \lim_{k\to\infty}|\sigma_k| = |\lim_{k\to\infty}\sigma_k|\end{matrix}\right\} => \lim_{n\to\infty}|\sigma_n| = A = \left|\lim_{n\to\infty}\sigma_n\right|$$

ч. т. д.

Теорема 11 Теорема Барроу

Если f(x) непрерывна; Определен $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$

Тогда: $\Phi'(x) = f(x)$ т. е. $\Phi(x)$ – первообразная

Доказательство:

По определению производной:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x};$$

$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \ - \ \int_a^x f(t)dt$ по аддитивности интеграла:

$$\Delta\Phi = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

Тогда:

$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$. по теореме Лагранжа $\exists\xi: \in (x, x+\Delta x)$: $\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx = f(\xi)(x - x+\Delta x) = f(\xi)\Delta x$

Получаем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = (\text{при } (\xi\to x)) = f(x)$$

Подытожим результат:

$\Phi'(x) = f(x)$ ч. т. д.

Теорема 12 Формула Ньютона-Лейбница

Если f(x) непрерывна; F(x) – первообразная для f(x);

Тогда: на [a, b] $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

Доказательство:

Определен $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, x \in [a, b]$

По теореме Барроу $\Phi(x)$- первообразная для f(x): $\Phi(x) = F(x) + c$

Найдем значения Ф в точках x=a и x=b:

$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = F(a) + c => c = -F(a)$

$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) + c = F(b) - F(a)$ ч. т. д.

Теорема 13 Замена переменной в определенном интеграле

Если f(x) непрерывна на [a, b] и определен $\int_a^b f(x)dx; x = \varphi(t)$ дифференцируема

на $[a, b]$; $x(\alpha) = a; x(\beta) = b$

Тогда: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Доказательство:

Пусть $F(x) = F(\varphi(t))$ – первообразная для f(x);

$(F(\varphi(t))' = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t) \cdot \varphi'(t) => F(\varphi(t)) -$ первообразная для $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$

Тогда по формуле Ньютона Лейбница:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = F(\varphi(t))|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

ч. т. д.

Теорема 14 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если $\boldsymbol{u}(x), v(x)$ – дифференцируемы на на $[a, b]$;

Тогда: $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$

Доказательство:

$$(uv)' = u'v + v'u; \int_a^b (u'v + v'u)dx = uv|_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b v'udx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu =>$$

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$$

ч. т. д.

Теорема 15 Выражение площади под графиком через интеграл (физический подход)

Построение интегральной суммы, физический подход

1) Дробление отрезка под графиком на равные части – n штук (так как можем разбивать так, как хотим)

2) «Средней» на каждом участке выбираем крайнюю левую точку (так как можем выбрать любую точку на отрезке)

3) Находим площадь элементарной площадки $f(x)dx = ds$ (*1)

4) Предел суммы таких площадок = площадь под графиком

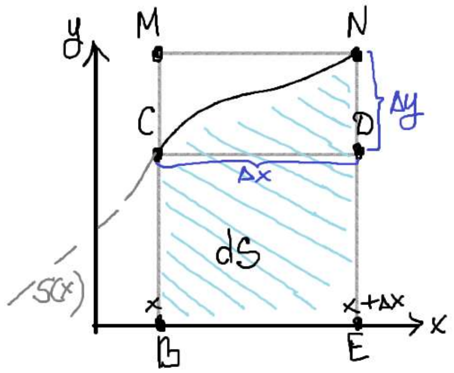
$\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x) = A\Delta x + \alpha(x)\Delta x$

$f(x)dx$ обозначим ds (*1)

Чтобы доказать, что дифференциал S(x) равен площади элементарной площадки, нужно доказать, что: 1) $ds = A\Delta x$ 2) $\Delta s - ds = o(\Delta x)$

1)f(x) непрерывна на промежутке [a,b] => ограничена => для любого x f(x) ∈ R. Обозначим f(x) = A (от выбранной средней точки). Тогда

$ds = f(x)dx = Adx = A\Delta x$



2) $\Delta S - ds = ? = o(x)$

ΔS – вся площадь под графиком между точкой x и точкой x+Δx

ds – площадь BCDE, или же площадь прямоугольника с высотой f(x) и длиной Δx

Нужно доказать, что $S_{CND} = o(\Delta x)$

Очевидно, что: $S_{CND} < S_{CMND}$=> можем доказывать, что $S_{CMND} = o(\Delta x)$

Т.к. f(x) непрерывная, то при $\Delta x \to 0$ Δy также $\to 0$.

$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{S_{CMND}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = o(x)$ ч. т. д.

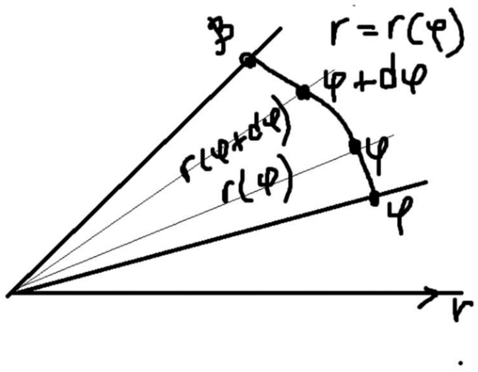
Итак, ds – дифференциал функции f(x) тогда $\int_a^b ds = S(x)|_a^b$

При таком подходе ds и dx принимаются за бесконечно малые, хотя мы делим не на бесконечное множество частей, а на конечное число n. И кстати, множество dx можно рассматривать как некоторую последовательность.

Не связано с доказательством, но по теме: Формула площади, ограниченной двумя графиками:

$$S = \int_a^b (f - g)dx$$

Теорема 16 Выражение площади в полярных координатах



$[\alpha, \beta]$ – угловой отрезок;

φ – переменная интегррирования;

$r = r(\varphi)$

$d\varphi$ – элементарный угол φ

$ds = \frac{r^2 d\varphi}{2}$ – элементарная площадка – площадь сектора радиуса $r(\varphi)$ и угла φ

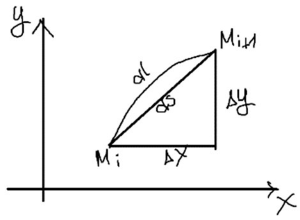
$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} dS = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{r^2}{2} d\varphi}$$

Теорема 17 Вывод формулы длины дуги

Часть 1, декартовые координаты, явное задание

Длина дуги – это сумма маленьких под-дуг. (Важно, чтобы исходная дуга была «спрямляемой» при увеличении масштаба – контрпример: снежинка Коха).

1. Дробление.



Длина элементарной дуги dl примерно равна отрезку, соединяющему концы этой элементарной дуги. Длину этого отрезка можно найти по Пифагору: $ds = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Немного преобразуем это выражение: $ds = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$

2. Выбор средней точки. По теореме Лагранжа: $\exists \xi_i \in (x_i; x_i + \Delta x)$: $\frac{y(x_i + \Delta\ \ ) - y(x_i)}{\Delta x} = y'(\xi)$. Подставим в нашу формулу длины отрезка: $ds = \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2} \cdot \Delta x$

3. Строим интегральную сумму. $\sigma_n = \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2} \cdot \Delta x$

4. Переходим к пределу $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \xi \to x \\ \tau \to 0}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(\xi)\right)^2} \cdot \Delta x = \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ \tau \to 0}} \sum_{i=0}^{n} \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} \cdot \Delta x =$ $= \boxed{\int_a^b \sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx}$, где $\sqrt{1 + \left(y'(x)\right)^2} dx = dl$. Также мы негласно использовали тот факт, что f(x) – непрерывная функция, а потому так как ξ->x то можно после предела остается значение функции в точке.

Часть 2, декартовые координаты, параметрическое задание

Пусть функция задана в виде: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$; $\varphi(t)$ дифф. Тогда:

$$dl = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}dx = \sqrt{1+\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)^2}\varphi'(t)dt = \sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

Часть 3, полярные координаты

Пусть функция задана в виде: $\begin{cases} x = r(\varphi)cos\varphi \\ y = r(\varphi)sin\varphi \end{cases}$; $r(\varphi)$ напоминает, что независимая переменная в полярных координатах – это φ.

Как мы помним, $ds = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Выразим под корневое выражение через новые координаты:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 = (x'd\varphi)^2 + (y'd\varphi)^2 = (r'cos\varphi - rsin\varphi)(d\varphi)^2 +$$

$$+(r'sin\varphi + rcos\varphi)(d\varphi)^2 = ((r'cos\varphi - rsin\varphi)^2 + (r'sin\varphi + rcos\varphi)^2)(d\varphi)^2 =$$

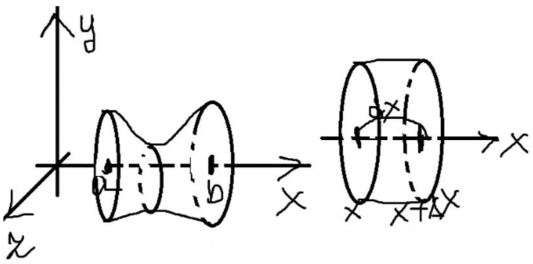
$$= \left(r'^2\cos^2\varphi - 2r'^2cos\varphi sin\varphi + r^2\sin^2\varphi + r'^2\sin^2\varphi + 2r'^2cos\varphi sin\varphi + r^2\cos^2\varphi\right)(d\varphi)^2 =$$

$$= \left(r'^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + r^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\right)(d\varphi)^2 = \left(r'^2 + r^2\right)(d\varphi)^2$$

Итак, длина дуги в полярных координатах: $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(r'^2 + r^2\right)(d\varphi)^2} = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2 + r^2}d\varphi$

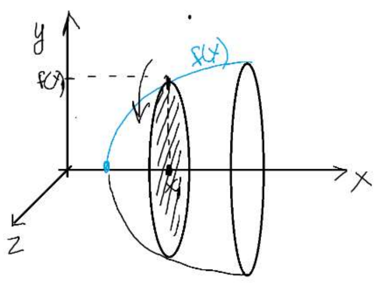
Теорема 18, Вывод формул объемов тел через интеграл Ф1П

Часть 1, Объем тела с известными плоскостями сечения.



Объем вычисляется как сумма всех сечений. Если тело расположено вдоль оси x, то площадь сечения можно считать функцией, зависящей от x. Тогда $V = \int_a^b dV = \int_a^b S(x)dx$

Часть 2, Объем тела вращения



Пусть в плоскости Oxy задана какая-то функция. Вращая ее по оси x, можно получить тело вращения. Его обьем – это сумма кружочков сечений поперек Ox, из которых это тело состоит. Радиус каждого такого кружочка – значение функции f(x) в этой точке. Таким образом $S(x) = \pi r^2 = \pi \cdot \left(f(x)\right)^2$. Подставляем это в формулу из части 1 этого пункта.

Теорема 19. Признак сравнения несобственных интегралов в неравенствах (I)

Если: даны функции $f(x), g(x)$, такие что $0 \le g(x) \le f(x)$; $[a, +\infty) \to R$, а также определен и сходится $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ (на кванторах: $\exists L \in R \quad | \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{w \to +\infty} \int_a^w f(x)$)

Тогда: $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ также сходится

Доказательство:

Рассмотрим функцию $\Phi(w) = \int_a^w g(x)dx$. При увеличении w она монотонно возрастает.

Докажем ограниченность $\Phi(w)$:

$g(x) \leq f(x) =>$ (по свойству сравнения опр. интегралов)

$\int_a^w g(x)dx \leq \int_a^w f(x)dx = L \in R$ (правая функция также монотонно возрастает) => $\int_a^w g(x)dx$ ограничена числом L.

Функция монотонна и ограничена => сходится. (теорема Вейерштрасса)

ч. т. д.

Теорема 20. Признак сравнения несобственных интегралов в неравенствах (II)

Если: даны непрерывные функции $f(x), g(x)$, такие что $0 \leq g(x) \leq f(x)$; $[a, +\infty) \to R$, а также определен и расходится $\int_a^{+\infty} g(x)dx$; определен $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Тогда: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ также расходится

Доказательство:

От противного: предположим, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится, т.е. $\int_a^{+\infty} f(x)dx = L \in R$. Но тогда должен сходиться и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$, что противоречит условию. Значит, предположение неверно и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, ч. т. д.

Теорема 21. Предельный признак сравнения

В этой теореме рассматривался случай, когда обе функции положительны, но теорема также работает и если обе функции отрицательны

Если: определены $f(x), g(x)$, $[0, +\infty) \to R^+$, а также $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0 \ (\in R)$;

Тогда: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ одновременно сходятся или расходятся

В этой теореме рассматривался случай, когда обе функции положительны, но теорема также работает и если обе функции отрицательны

Доказательство:

По определению предела $\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k <=> \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 |\ \forall x > \delta: \left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$

Будем работать с неравенством $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - k\right| < \varepsilon$: Обе функции одного знака, =>

$$-\varepsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - k \leq \varepsilon$$

$$-\varepsilon + k \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq \varepsilon + k$$

$$g(x)(k - \varepsilon) \leq f(x) \leq g(x)(\varepsilon + k)$$

Рассмотрим два случая:

1. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится. Тогда по признаку сравнения в неравенствах : $\int_a^{+\infty} g(x)(\varepsilon + k)$ также расходится. Выносим ненулевую чиселку $(\varepsilon + k)$ из под интеграла, и оставшийся интеграл продолжает расходиться. =>$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно расходятся.
2. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Тогда по признаку сравнения в неравенствах : $\int_a^{+\infty} g(x)(k - \varepsilon)$ также расходится. Выносим ненулевую чиселку $(k - \varepsilon)$ из под интеграла, и оставшийся интеграл продолжает сходиться. =>$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ одновременно сходятся.

Ч.т.д.

Теорема 22. Критерий сходимости Коши

$\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ сходится ⇔ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \ \in R: \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b) \qquad \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$

Доказательство:

$$\boxed{\begin{array}{c} Мет\text{: Критерий Коши — сходимость функции} \\ \exists \lim\limits_{x\to b} f(x) = L \in R <=> \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \ \in R: \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b) \qquad |f(\eta') - f(\eta'')| < \varepsilon \end{array}}$$

Обозначим $\int_a^{\eta} f(x)dx = \varphi(\eta)$

Мы знаем, что $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ сходится, $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx = \lim\limits_{\eta\to b} \int_a^{\eta} f(x)dx = \lim\limits_{x\to b} \varphi(x)$ сходится, ⇔ по критерию Коши для функции:

$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \eta > 0: \forall \eta', \eta'' \ \in (\eta, b) \ |\varphi(\eta') - \varphi(\eta'')| < \varepsilon$

Будем работать с последним неравенством. Подставим обратно интеграл:

$$\left|\int\limits_a^{\eta'} f(x)dx - \int\limits_a^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int\limits_a^{\eta'} f(x)dx + \int\limits_{\eta''}^{a} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\left|\int_{\eta''}^{\eta'} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

Ч.т.д.

Теорема 23. Критерий абсолютной сходимости Коши

$\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ абсолютно сходится ⇔ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \ \in R: \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b) \qquad \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$

Доказательство:

Правая часть $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta \ \in R: \forall \eta', \eta'' \in (\eta, b) \qquad \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$ – это расписанный критерий Коши – показывает сходимость интеграла $\int_a^b |f(x)|dx$. Ну а это в свою очередь по определению значит, что $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ абсолютно сходится, ч. т. д.

Теорема 24. Критерий абсолютной сходимости

$\int_a^{\boxed{b}} |f(x)|dx$ сходится => $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ сходится

Доказательство:

Хотим доказать, что $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ сходится, т. е. что верно $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\eta\ \in R: \forall\eta', \eta'' \in (\eta, b)\qquad \left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon.$

Будем доказывать неравенство из правой части. По свойству интеграла и модуля:

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx$$

Так как правая часть явно больше нуля, можем добавить вокруг нее модуль

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx\right|$$

Так как $\int_a^{\boxed{b}} |f(x)|dx$ сходится, по критерию Коши правая часть < ε

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \left|\int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx\right| < \varepsilon$$

А это значит, что

$$\left|\int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx\right| < \varepsilon$$

То есть, интеграл $\int_a^{\boxed{b}} f(x)dx$ сходится по Критерию Коши, ч. т. д.

Теорема 25. Формула Лейбница для интеграла, зависящего от параметра

Mem: $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)dx\,, \alpha \in [c,d]$ – Интеграл с параметром. $I = \int I'_\alpha\, d\alpha$

Если: $f(x,\alpha)$, непрерывна по $a \le x \le b; c \le \alpha \le d; \exists\frac{\partial F}{\partial\alpha}$ непрерывная на $[c,d]$

Тогда: $I'_\alpha = \left(\int_a^b f(x,\alpha)dx\right)'_\alpha = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}dx$

Операции дифференцирования по α и интегрирования по x менялись местами.

Доказательство:

Распишем производную по определению:

$$I'_\alpha = \frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{I(\alpha + \Delta\alpha) - I(\alpha)}{\Delta\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)dx - \int_a^b f(x, \alpha)dx}{\Delta\alpha} =$$

$$= \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\int_a^b (f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha))dx}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{(f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha))dx}{\Delta\alpha}$$

По теореме Лагранжа: $\exists\ \xi \in (\alpha,\ \alpha + \Delta\alpha): f'(x, \xi) = \frac{(f(x, \alpha+\Delta\alpha) - f(x, \alpha))}{\Delta\alpha} = \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial\alpha}$

Представление функции ее пределом: $\frac{\partial f(x,\xi)}{\partial\alpha} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial\alpha} + \varepsilon$

Подставляем в наш интеграл:

$$I'_\alpha = \int_a^b \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial\alpha} dx + \int_a^b \varepsilon dx = \int_a^b \frac{\partial f(x,\xi)}{\partial\alpha} dx$$

(Приняли без доказательства, что $\int_a^b \varepsilon dx \to 0$)

Ч. т. д.

Теорема 26. Замена переменных в двойном интеграле.

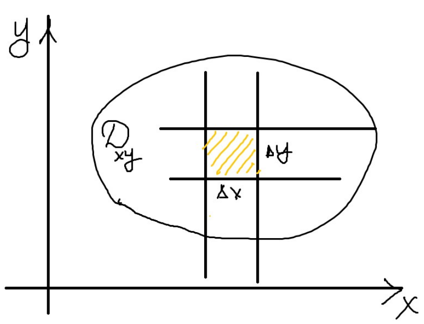
Пусть у нас есть некоторая область D в координатах Oxy. Ее элементарная площадка считается как ΔxΔy.

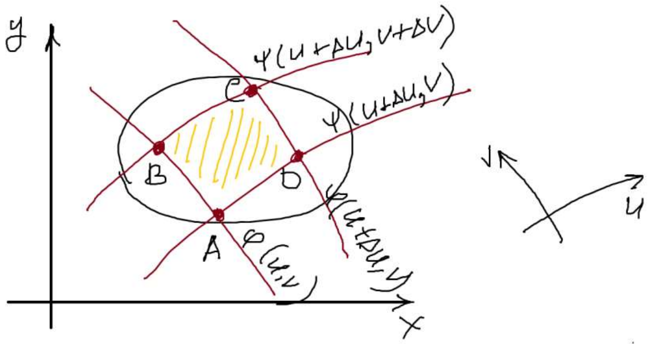
Мы хотим перейти к каким-то другим координатам u и v, при чем:

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}$$

! Новые координатные линии должны сглаживаться, и обе функции φ и ψ дифференцируемы

Функция, которую мы рассматриваем, тоже перейдет к новым координатам: $f(x, y) \to \tilde{f}(u, v)$



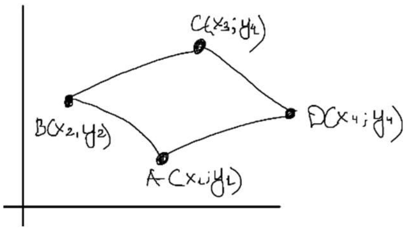


Мы хотим найти площадь элементарной площадки в новых координатах.

Так как новые координатные линии сглаживаемые, а приращение функций бесконечно мало, то элементарную площадку можно рассматривать как параллелограмм. А площадь параллелограмма считается как: перемножить две соседние стороны на синус угла между ними (= векторное произведение).

Итак, запишем площадь новой элементарной площадки

$$d\sigma = S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \vec{k} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \right| = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}$$



$$x_2 - x_1 = \varphi(u, v + \Delta v) - \varphi(u, v) = \Delta_v \varphi$$

$$y_2 - y_1 = \psi(u, v + \Delta v) - \psi(u, v) = \Delta_v \psi$$

$$x_4 - x_1 = \varphi(u + \Delta u, v) - \varphi(u, v) = \Delta_u \varphi$$

$$y_4 - y_1 = \psi(u + \Delta u, v) - \psi(u, v) = \Delta_u \psi$$

Преобразуем это все по теореме Лагранжа (Берем значения в средних точках, которыми становится ξ)

$$\Delta_v \varphi = \frac{\partial \varphi}{dv} \cdot \Delta v; \ \Delta_u \varphi = \frac{\partial \varphi}{du} \cdot \Delta u; \ \Delta_v \psi = \frac{\partial \psi}{dv} \cdot \Delta v; \Delta_u \psi = \frac{\partial \psi}{du} \cdot \Delta u$$

Вернемся к формуле площади и подставим все туда.

$$d\sigma = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{dv} \cdot \Delta v & \frac{\partial \varphi}{du} \cdot \Delta u \\ \frac{\partial \psi}{dv} \cdot \Delta v & \frac{\partial \psi}{du} \cdot \Delta u \end{vmatrix} = \Delta v \Delta u \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{dv} & \frac{\partial \varphi}{du} \\ \frac{\partial \psi}{dv} & \frac{\partial \psi}{du} \end{vmatrix}$$

Вводим обозначение Якобиан (мне лень искать правильный символ Якобиана):

$$d\sigma = \Delta v \Delta u |\mathfrak{J}|$$

Переход к пределу: при $d\sigma \to 0$ $d\sigma = dvdu|\mathfrak{J}|$

Таким образом $|\mathfrak{J}| = \lim\limits_{dudv \to 0} \left| \frac{d\sigma}{ds} \right|$

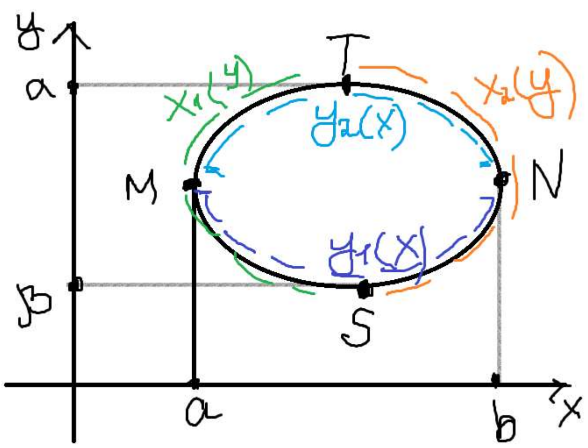
Теорема 27. Формула Грина

Если: C – контур, ограничивающий область D. В области D определены, непрерывны, дифференцируемы функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$

Тогда: $\oint_{C+} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$

Доказательство:

Для удобства доказательства будем работать в области D, правильной в обоих направлениях (если область неправильная, все тоже работает, но пришлось бы ее для доказательства разбивать на «правильные» кусочки).



Часть 1.

$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$ = двойной интеграл, выбираем первое из направлений интегрирования – 0y = $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy$ = дифференцирование + интегрирование = исходник = $\int_a^b \big(P(x,y)\big)|_{y_1}^{y_2} dx$ = NL =

= $\int_a^b \big(P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x)\big)dx$ = $\int_a^b P\big(x, y_2(x)\big)dx - \int_a^b P\big(x, y_1(x)\big)dx = \int_{MTN} P(x,y)dx - \int_{MSN} P(x,y)dx$ = развернем вторую дугу = $\int_{MTN} P(x,y)dx + \int_{NSM} P(x,y)dx = \oint_{C-} P(x,y)dx =$

= $-\oint_{C+} P(x,y)dx.$

Часть 2, Аналогично.

$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$ – двойной интеграл. Выбираем первое из направлений интегрирования Ox. $\int_\alpha^\beta dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$. Интегрирование + дифференцирование = исходник $\int_\alpha^\beta \big(Q(x,y)\big)|_{x_1(y)}^{x_2(y)} dy =$ $NL = \int_\alpha^\beta (Q(x_2(y), y) - Q(x_1(y), y))dy = \int_{TNS} Q(x,y)dy \;-\; \int_{TMS} Q(x,y)dy = \int_{TNS} Q(x,y)dy + \int_{SMT} Q(x,y)dy = \oint_{C+} Q(x,y)dy$

Часть 3. Складываем результаты части 1 и 2 и получаем

$$\oint_{C+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Ч. т. д.

Теорема 28. Теорема о Потенциале

Если: 1) $\overset{\smile}{AB}$ лежит в области D, и для любых точек M и N существует параметризация контура ANBM в виде $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, где φ и ψ – непрерывные дифференцируемые функции **2)** В области D определены, непрерывны и дифференцируемы функции P(x, y) и Q(x,y), т. о. определен $\int_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy$ для любых точек M и N, через которые проходит $\overset{\smile}{AB}$

Тогда: Равносильны следующие математические высказывания:

I) $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути

II) $\oint Pdx + Qdy = 0$

III) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ в любой точке области D – это критерий проверки поля на потенциальность

IV) $\exists\, u(x,y)\colon du = Pdx + Qdy,$ причём $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\,;\ (x_0,y_0) \in D$

Доказательство:

Часть 1. I ⇔ II

=>

$\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути, тогда по определению для любых точек M и N верно

$\int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$ Переносим правый интеграл влево

$\int_{AMB} Pdx + Qdy - \int_{ANB} Pdx + Qdy = 0$ Замечаем, что слева у нас интеграл по замкнутому контуру получился.

$\pm \oint Pdx + Qdy = 0$ (+- потому что от направления обхода результат не изменится – будет ноль)

<=

$\oint Pdx + Qdy = 0$ Разобьем интеграл на две дуги – одна проходит через точку M, а другая – через точку N.

$\int_{AMB} Pdx + Qdy + \int_{BNA} Pdx + Qdy = 0$ Развернем вторую дугу

$\int_{AMB} Pdx + Qdy - \int_{ANB} Pdx + Qdy = 0$ Перенесем правый интеграл за знак равно

$\int_{AMB} Pdx + Qdy = \int_{ANB} Pdx + Qdy$ ⇔интеграл не зависит от пути по определению.

Часть 2. II ⇔ III

=>

Дано: $\oint Pdx + Qdy = 0$. От противного: предположим, что $\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$ в некоторой точке M_0 области D. Возьмем для определенности $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} > 0$. Так как $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывна в области D, то существует такая окрестность точки 0, что в ней всюду $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} > \varepsilon > 0$ (Будем обозначать эту окрестность $\Delta_\delta(M_0)$). Тогда, по свойству сравнения пределов в неравенствах:

$\iint_{\Delta_\delta(M_0)} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy > \iint_{\Delta_\delta(M_0)} \varepsilon dxdy = \varepsilon \cdot \text{площадь}\Delta_\delta(M_0),$ причем $\varepsilon > 0$ и $S\Delta_\delta(M_0)$>0 =>

$\iint_{\Delta_\delta(M_0)} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy > 0$

Но если посчитать это по формуле Грина, получим что $\oint_C Pdx + Qdy > 0$, что противоречит дано. => предположение было неверно.

<=

Дано: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда $\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ => $\iint \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = 0$

А по формуле Грина $\iint \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint Pdx + Qdy = 0$, ч. т. д.

Часть 3. III ⇔ IV

=>

Третье следует из первого, значит можем доказывать, что I => IV. Таким образом, Дано: $\int_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от пути. Хотим доказать, что $\exists u$: $du = Pdx + Qdy$

Введем функцию u: $u = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy$

Итак, докажем, что $\frac{\partial u}{\partial x} = P$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$.

По определению: $\frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x,y)-u(x,y)}{\Delta x}$

$u(x+\Delta x, y) = \int_{A(x_0,y_0)}^{M\prime(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + \int_{M(x,y)}^{M\prime(x+\Delta\ \ ,y)} Pdx = u(x,y) + \int_{M(x,y)}^{M\prime(x+\Delta x,y)} Pdx = \text{По теореме Лагранжа о среднем } \exists\xi \in (x, x+\Delta x): = = u(x,y) + P(\xi,y)\Delta x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} \frac{u(x,y)+P(\xi,y)\Delta x - u(x,y)}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \xi \to x}} P(\xi, y) = P(x,y)$

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q$

Таким образом мы доказали, что $du = Pdx + Qdy$ при $u = \int_{A(x_0,y_0)}^{M(x,y)} Pdx + Qdy$

<=

Дано: $du = Pdx + Qdy$, хотим доказать, что $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$P = \frac{\partial u}{\partial x}$; $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$; $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} =>$ в силу равенства вторых производных $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ ч. т. д.

Теорема 29. Следствие из теоремы о потенциале

Если: $\vec{F}$ – потенциальное векторное поле, причем функция $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ - его потенциал

Тогда: $\int_{AB} Pdx + Qdy = u(B) - u(A)$

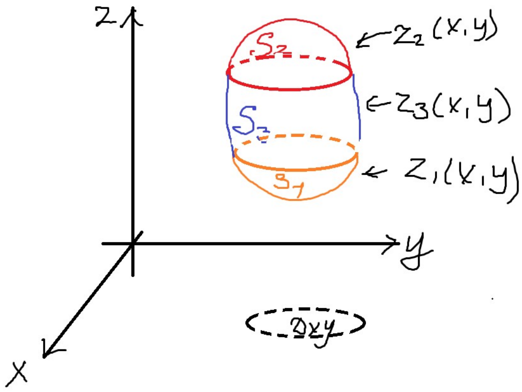
Доказательство:

$\int_{AB} Pdx + Qdy$ – не зависит от пути, а значит (по определению) можем ввести параметризацию $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, тогда можем представить точки A и B в виде $A(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$; $B(\varphi(\beta), \psi(\beta))$

$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt}dt + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}dt = \frac{du}{dt} \cdot dt$ – полная производная.

$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AB} du = \int_\alpha^\beta \frac{du}{dt} \cdot dt = u(t)|_\alpha^\beta = u(\beta) - u(\alpha) = u(\varphi(\beta), \psi(\beta)) - u(\varphi(\alpha), \psi(\alpha)) = u(B) - u(A)$

Теорема 30. Формула Гаусса-Остроградского



Если: $\vec{F}$ – потенциальное векторное поле, причем функция $u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ - его потенциал

Тогда: $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \oiint_{S(\text{внеш})} (Pcos\alpha + Qcos\beta + Rcos\gamma)ds$

Доказательство:

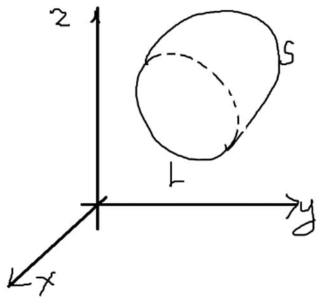
Как и при доказательстве формулы Грина будем искать интегралы от каждого из слагаемых в одной из частей выражения (левой).

$\iiint_T \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz =$ в направлении Oz правильная $= \iint_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{D_{xy}} \big(R(x,y,z_2) - R(x,y,z_1)\big)dxdy =$ перейдем от двойного к поверхностному интегралу. $dxdy = cos\gamma \cdot ds$, где γ — угол между нормалью к поверхности и осью Oz. Для нижней поверхности косинус такого угла отрицателен => $= \iint_{S_1} R(x,y,z)cos\gamma ds + \iint_{S_2} R(x,y,z)cos\gamma ds = \left(\iint_{S_3} = 0\right) = \iint_{S_1(\text{вн})} + \iint_{S_2(\text{вн})} + \iint_{S_3(\text{вн})} = \iint_S R(x,y,z)cos\gamma ds$

Итак, $\iiint_T \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz = \iint_S R(x,y,z)cos\gamma ds$

Аналогично доказывается, что $\iiint_T \left(\frac{\partial P}{\partial x}\right) dxdydz = \iint_S P(x,y,z)cos\alpha ds$ и $\iiint_T \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdydz = \iint_S Q(x,y,z)cos\beta ds$

Теорема 31. Теорема Стокса



Если: поверхность опирается на контур, в поле действия некоторого векторного поля $\vec{F} = (P,Q,R)$, где P, Q, R - дифференцируемые функции переменных x, y, z

Тогда: $\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) cos\gamma\right) ds$

Доказательство:

Выразим $\oint_L P(x,y,z)dx$. Спроектируем поверхность S на Oxy. Проекция контура L – это некоторый контур $К_{xy}$. Итак:

$\oint_L P(x,y,z)dx = \oint_{К_{xy}} P(x,y,z(x,y))dx$ Прибавим внутри интеграла функцию $\tilde{Q}$, тождественную нулю

$= \oint_{К_{xy}} Pdx + \tilde{Q}dy$ Применим формулу Грина, после чего снова воспользуемся тем, что $\tilde{Q} = 0$

$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = -\iint_{D_{xy}} \frac{\partial P\big(x,y,z(x,y)\big)}{\partial y} dxdy = -\iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dy}\right) dxdy$$

Перейдем к поверхностному интегралу

$$-\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cdot cos\gamma+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot cos\gamma\right)d\sigma$$

Введена параметризация $z=z(x,y)=>cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+z'^2_y}};\ cos\beta=\frac{-z'_y}{\sqrt{1+{z'_x}^2+z'^2_y}};\ cos\gamma=\frac{-z'_x}{\sqrt{1+{z'_x}^2+z'^2_y}};$ Вернемся к интегралу.

$$=-\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cdot cos\gamma+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dy}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+{z'_x}^2+z'^2_y}}\right)d\sigma=-\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial y}\cdot cos\gamma-\frac{\partial P}{\partial z}\cdot cos\beta\right)d\sigma=$$
$$\iint_{S^+}\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cdot cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot cos\gamma\right)d\sigma$$

Аналогично:

$$\oint_L Qdx=\iint_{S^+}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cdot cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cdot cos\alpha\right)d\sigma$$

$$\oint_L Rdx=\iint_{S^+}\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cdot cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial z}\cdot cos\beta\right)d\sigma$$

В итоге все суммируем, приводим подобные при косинусах и готово.

Теорема 32. Сходимость Гамма-функции

Гамма функция: $\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\ \ x\neq 0;\alpha>1$

$$\int_{\boxed{0}}^{\boxed{+\infty}}x^{\alpha-1}e^{-x}dx=\int_{\boxed{0}}^{1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx+\int_{1}^{\boxed{+\infty}}x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Часть 1.

$$\int_{\boxed{0}}^{1}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\overset{x<1}{\overset{\sim}{<}}\int_0^1 e^{-x}dx-\text{сходится}$$

Часть 2.

$$\int_{1}^{\boxed{+\infty}}x^{\alpha-1}e^{-x}dx\overset{\alpha-1<m}{\overset{\sim}{<}}\int_1^{+\infty}x^me^{-x}dx=-\int_1^{+\infty}x^m de^{-x}=\text{по частям }[du=de^{-x};v=x^m]$$

$=-(e^{-x}x^m)|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}e^{-x}mx^{m-1}dx=\cdots$ развлекаемся с интегрированием по частям до тех пор, пока степень x не превратится в ноль: $=-(e^{-x}x^m)|_1^{+\infty}+(e^{-x}x^{m-1})|_1^{+\infty}+\cdots+m!\int_1^{+\infty}e^{-x}dx$

Каждое из слагаемых – функций сходится по Лопиталю, а также сходится и последний интеграл.