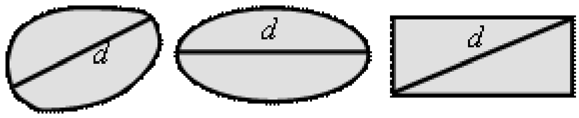
Диаметр плоской фигуры

Диаметр плоской геометрической фигуры — это длина наибольшей хорды этой фигуры, то есть наибольшее расстояние между двумя точками этой фигуры.



Двойной интеграл.

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x,y)$, заданную и непрерывную в замкнутой области $D \subset XOY$.

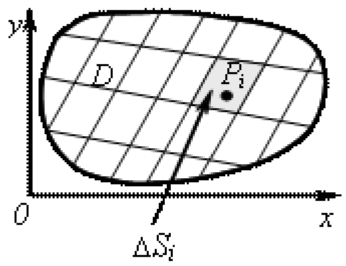


Рис. 1

1. Разобьем область D на n малых элементарных частей произвольным образом. Обозначим через DS_i площадь i-ой части, а через di- диаметр i-части.

   Число λ =max $\{d_i\}$, где i = 1,…,n, назовем ***рангом дробления двумерной области D***.

2. В каждой части разбиения выберем произвольную точку P_i (x_i,y_i) и вычислим значение функции z в ней: $f(x_i, y_i) = f(P_i)$, i = 1, …, n, (*Рис. 1*)

3. Составим сумму парных произведений значений функции $f(P_i)$ на площади DS_i соответствующих частей разбиения:

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \qquad (1)$$

   эта сумма называется ***двумерной интегральной суммой функции f(x,y) в области D*** (двумерной суммой Римана).

4. Вычислим предел интегральной суммы (1) при условии, что ранг разбиения $\lambda \to 0$ Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения области D на элементарные части и от выбора точек Pi в каждой части, то он называется ***двойным интегралом от функции f(x,y) по области D.***

Обозначение и терминология:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot \Delta S_i \qquad (2)$$

D — область интегрирования;
$f(x,y)$ — подынтегральная функция;
$f(x,y)dS$ — подынтегральное выражение;
dS — бесконечно малый элемент области интегрирования (дифференциал площади плоской области).

Краткая формулировка определения двойного интеграла

Двойным интегралом от функции *f (x,y)* по области *D* называется конечный предел двумерной интегральной суммы, вычисленный при стремлении к нулю ранга разбиения, порождающего эту сумму.

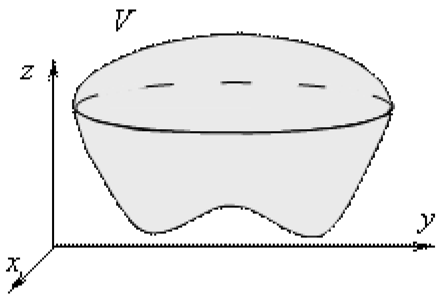
Вычисление двойного интеграла:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$$ - повторный интеграл

При переходе к полярным координатам:
$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, dxdy \sim rdrd\varphi$

Тройной интеграл

Пусть задана область *V* в *XOYZ*, ограниченная замкнутой поверхностью; в области *V* и на ее границе задана функция *f* (*x*,*y*,*z*).



Тройным интегралом от функции f(x, y, z) по области V называется конечный предел трехмерной интегральной суммы при стремлении к нулю ранга разбиения, порождающего эту сумму (если этот предел существует и не зависит ни от способа разбиения области *V* на элементарные части, ни от выбора точек на каждой из этих элементарных частей):

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

здесь *n* – это количество элементарных частей разбиения области *V*;

P_i (x_i,y_i,z_i) – произвольно выбранная точка на каждой элементарной части, $i = 1,...,n$;

$\lambda = \max\limits_{i=1,\dots,n}\{d_i\}$ — ранг разбиения;

d_i – диаметр *i*-ой элементарной части.

Вычисление тройного интеграла:

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_a^b dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

1) При переходе к цилиндрическим координатам:
$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z, dxdydz \sim rdrd\varphi dz$

2) При переходе к сферическим

$x = r\sin\theta\cdot\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\cdot\sin\varphi$

$z = z\cos\theta$

$dxdydz \sim r^2\sin\theta drd\varphi d\theta$

Криволинейный интеграл 1 рода.

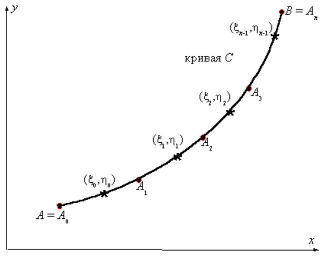
Пусть на плоскости *XOY* заданы

1. Некоторая кривая *C* с граничными точками *A* и *B*;

2. Функция двух переменных *f*(*x*, *y*), определенная, по крайней мере, на кривой *C*.

Проделаем следующую процедуру, которая является стандартной для построения определенного интеграла

1. Разобьем кривую *C* на кусочки точками $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ и точку *A* будем считать точкой A_0, а точку *B* – точкой A_n.



Пусть Δs_i есть длина дуги кривой *C* между точками A_i и A_{i+1}, $\lambda = \max\limits_i \Delta s_i$.

2. На каждом отрезке кривой *C* между точками A_i и A_{i+1} выберем произвольным образом «среднюю точку» с координатами (ξ_i, η_i) и составим интегральную сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i.$$

3. Сделаем предельный переход при $\lambda \to 0$. Если существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$ и он не зависит от способа разбиения кривой *C* на кусочки и от способа выбора средней точки, то он называется криволинейным интегралом первого рода от функции *f*(*x*, *y*) по кривой *C* и обозначается символом

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds.$$

Заметим, что

$$\int\limits_{(AB)} f(x, y)\,ds = \int\limits_{(BA)} f(x, y)\,ds.$$

Вычисление криволинейного интеграла первого рода

Пусть кривая *AB* задана параметрически в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_0 \le t \le T.$$

Тогда формула для вычисления криволинейного интеграла первого рода имеет вид

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds = \int\limits_{t_0}^{T} f(x(t), y(t))\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt.$$

Если кривая задана явно в виде $y = y(x),\ a \le x \le b$, то

$$\int\limits_{(AB)} f(x,y)ds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1 + [y'(x)]^2}dx$$

Криволинейный интеграл второго рода

Пусть на плоскости *xOy* задана дуга M_0M, которая имеет длину, и на ней задана функция f*(x, y)*

Выполним операции:

1) разобьём произвольно дугу M_0M на *n* частей точками $M_0, M_1, \ldots M_n = M$;

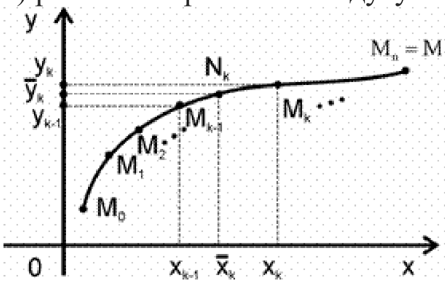


Рис. 1.1

2) в каждой дуге $M_{k-1}M_k$ выберем произвольно некоторую точку $N(\overline{x_k}, \overline{y_k}) \quad (k = 1 \ldots n)$ и вычислим $f(N_k)$;

3) умножим $f(N_k)$;на приращение $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$;

4) составим интегральную сумму:

; $$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta x_k$$

5) найдем предел суммы этой при стремлении к нулю наибольшей из длин частных дуг (максимального диаметра разбиения $\lambda \to 0$). Этот предел (в случае непрерывной функции f*(x,y)*можно доказать, что существует) называется криволинейным интегралом от *f(x,y)* по переменному *x* вдоль кривой M_0M и обозначается через

$$\lim_{n\to\infty, \lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta x_k = \int\limits_{M_0M} f(x,y)dx$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл от *g(x,y)* по переменному *y*:

$$\lim_{n\to\infty, \lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} g(x_k, y_k)\Delta y_k = \int\limits_{M_0M} g(x,y)dy$$

Если на кривой M_0M определены две непрерывные функции *f(x,y)* и *g(x,y)* , то можно ввести составной криволинейный интеграл 2 рода

$$\int_{M_0M} f(x,y)dx + g(x,y)dy$$

Если кривая M_0M задана в пространстве XYZ и на кривой заданы непрерывные функции f(x, y, z),$g(x, y, z)$и $h(x, y, z)$, то поступая подобно плоскому случаю, определяют криволинейные интегралы вдоль кривой M_0M:

$$\int_{M_0M} f(x,y,z)dx + g(x,y,z)dy + h(x,y,z)dz$$

При перемене направления дуги (пути интегрирования) криволинейный интеграл изменит только свой знак:

$$\int_{M_0M} f(x,y)dx = -\int_{MM_0} f(x,y)dx$$

Формула Грина.

Пусть C положительно ориентированная, кусочногладкая замкнутая кривая на плоскости, а D - область,ограниченная кривой C. Если функции$P = P(x,y)$, $Q = Q(x,y)$ определены в области D и имеют непрерывные частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, то

$$\oint_{c+} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

Поверхностный интеграл 1 рода.

Пусть в пространстве переменных x,y,z задана кусочно-гладкая поверхность σ, на которой определена функция f(x,y,z) Разобём поверхность σ на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_i, \ldots \sigma_n$, на каждой из частей σ_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, найдём $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и площадь части σ_i (которую будем обозначать тем же символом $\Delta\sigma_i$, и составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i$.

Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} \sigma_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части σ_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, ни от выбора точек M_i, то функция f(x,y,z) называется интегрируемой по поверхности σ, а значение этого предела называется поверхностным интегралом первого рода, или поверхностным интегралом по площади поверхности, и обозначается $\iint_\sigma f(M) \cdot d\sigma$

Вычисление

$$\iint_{\sigma} f(x,y,z)d\sigma = \iint_{D} f(x.y,z(x,y))\frac{dxdy}{\cos\gamma} = \iint_{G} f(x.y(x,z),z)\frac{dxdz}{\cos\beta} = \iint_{R} f(x(y,z).y,z)\frac{dzdy}{\cos\alpha}$$

Где D,G,R- области на координатных плоскостях ХОУ, XOZ, YOZ, являющиеся соответствующими проекциями поверхности σ на эти плоскости., $\alpha.\beta.\gamma$ - углы, образованные внешней нормалью к поверхности и осями координат.

Поверхностный интеграл 2 рода.

Возьмём в пространстве двустороннюю поверхность σ, состоящую из конечного числа кусков, каждый из которых задан уравнением вида ***z = f(x,y)*** или является цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси ***Oz***.

Пусть ***R(x,y,z)*** - функция, определённая и непрерывная на поверхности σ. Сетью линий разбиваем σ произвольным образом на ***n*** "элементарных" участков $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \ldots, \Delta\sigma_i, \ldots, \Delta\sigma_n$, не имеющих общих внутренних точек.

На каждом участке $\Delta\sigma_i$ произвольным образом выберем точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\ldots,n)$. Пусть $(\Delta\sigma_i)xy$ - площадь проекции участка $\Delta\sigma_i$ на координатную плоскость ***Oxy***, взятая со знаком ***"+"***, если нормаль к поверхности σ в точке $M_i(x_i,y_i,z_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ образует с осью ***Oz*** острый угол, и со знаком ***"–"***, если этот угол тупой. Составим сумму

$$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)(\Delta\sigma_i)_{xy} = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_{i,}, z_i)(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

которую называют интегральной суммой для функции ***R(x,y,z)*** по поверхности σ по переменным ***x, y***. Обозначим λ - наибольший из диаметров d_i $(i = 1, \ldots, n)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_{i,}, z_i)(\Delta\sigma_i)_{xy}$$

не зависящий от способа разбиения поверхности σ на "элементарные" участки $\Delta\sigma_i$ и от выбора точек $M_i \in \Delta\sigma_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, то он называется поверхностным интегралом по выбранной стороне поверхности σ от функции ***R(x,y,z)*** по координатам ***x, y*** (или поверхностным интегралом второго рода) и обозначается

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy$$

Аналогично можно построить поверхностные интегралы по координатам ***x, z*** или ***y, z*** по соответствующей стороне поверхности, т. е.

$$\iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz\,, \qquad \iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz$$

Можно ввести "общий" интеграл по выбранной стороне поверхности от трёх непрерывных функций.:

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy + \iint_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz + \iint_{\sigma} P(x,y,z)dydz$$

Поверхностный интеграл второго рода обладает обычными свойствами интеграла. Заметим лишь, что любой поверхностный интеграл второго рода изменяет знак при

перемене стороны поверхности. Вычисление интеграла как правило, сводят к вычислению двойного интеграла.
Пусть σ - двусторонняя поверхность, заданная уравнением ***z=f(x,y)***, где ***f(x,y)*** непрерывна в области ***D***(***D*** есть проекция поверхности σ на координатную плоскость ***Oxy***), и ***R(x,y,z)*** - непрерывная функция на поверхности σ. Выберем "верхнюю" сторону поверхности σ, тогда знак проекции ($\Delta\sigma_i)_{xy}$ всегда ***"+"***, поэтому

$$\iint_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint_{D} R(x,y,f(x,y))dxdy$$

Поле – часть пр-ва, в $\forall$ точке которой задано значение <u>скалярной</u> и <u>векторной</u> величины.

Градиент скалярного поля – направление наибольшего изменения поля, напрвлен по нормали к поверхности уровня

$$gradU = \nabla \cdot U = \frac{dU}{dx}\vec{i} + \frac{dU}{dy}\vec{j} + \frac{dU}{dz}\vec{k}$$

$$\frac{dU}{de} = gradU \cdot \vec{l}^{\,0}$$

Дивергенция

$$div\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{da_x}{dx} + \frac{da_y}{dy} + \frac{da_z}{dz}$$

Ротор

$rot\vec{a} = \nabla \times \vec{a}$ (векторное произведение)

Оператор Набла: $\vec{\nabla}$

$$\frac{d}{dx}\vec{i} + \frac{d}{dy}\vec{j} + \frac{d}{dz}\vec{k}$$

Оператор Лапласа : Δ

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Уравнение Лапласа: $\Delta U = 0$

Линейный интеграл:

$$\int_{AB} \vec{a}d\vec{r} = \int_{AB} a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

Циркуляция векторного поля - это линейный интеграл, взятый по замкнутому контуру, помещённому в векторное поле.

Поток:

$$\prod_{\sigma}(\vec{a}) = \iint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma$$

Вычисления: $\prod_{\sigma}(a) = \iint_{D_{xy}} \frac{\vec{a} \cdot gradF}{F'_z} dxdy$

$F(x,y,z) = 0$ - уравнение σ

Ф-ла Остроградского-Гаусса:

$$\oiint_{\sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma = \iiint_{V} div\vec{a} dV$$

Ф-ла Стокса:

$$\oint_{\sigma} \vec{a} d\vec{r} = \iint_{\sigma} (rot\vec{a} \cdot \vec{n}^0) d\sigma$$

Потенциальное поле:
Поле $\vec{a}$ потенциальное, если $\exists U : \vec{a} = gradU$;
Поле потенциальное $\Leftrightarrow rot\vec{a} \equiv 0$
Соленоидальное поле
Поле соленоидальное $\Leftrightarrow div\vec{a} = 0$,то есть, в поле нет ни источников, ни стоков, либо они компенсируют друг друга.
Гармоническое поле. Соленоидальное и потенциальное одновременно. Образовано гармонической функцией (удовлетворяющей уравнению Лапласа)