Билеты по линейной алгебре, 1 семестр (2021–2022)

преподаватель: Милованович Е. В.

Оглавление

1) Матрицы. Основные понятия. Виды квадратных матриц. Транспонирование. Линейные операции над матрицами. 3

2) Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Произведение матриц. 4

3) Определители. Основные свойства определителей 5

4) Минор. Алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа (разложение определителя по ряду) 6

5) Невырожденная матрица. Обратная матрица. Ортогональна матрица 6

6) Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре. 8

7) Линейная независимость рядов матрицы. Теорема о ранге матрицы. 9

8) Системы линейных уравнений. Основные понятия. Метод обратной матрицы 10

9) Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера. 11

10) Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. 12

11) Системы линейных однородных уравнений. Необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений. 13

12) Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Теорема о фундаментальной системе решений. Структура общего решения линейной однородной системы. 14

13) Неоднородные системы линейных уравнений. Структура общего решения. 17

14) Векторы. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и координаты в трехмерном пространстве. 18

15) Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Направляющие косинусы. 19

16) Скалярное произведение. Выражение скалярного произведения через координаты. Приложения скалярного произведения 20

17) Векторное произведение. Выражение векторного произведения через координаты. Приложения векторного произведения 21

18) Определение смешанного произведения, его геометрический смысл. Выражение смешанного произведения через координаты. Приложения смешанного произведения. 22

19) n - мерный вектор. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение. Длина. 23

20) Линейное векторное пространство. Примеры. Линейная независимость векторов. 23

21) Базис линейного векторного пространства и координаты вектора. Разложение вектора по системе векторов. Размерность пространства. 25

22) Подпространство линейного пространства 25

23) Переход к новому базису. 25

24) Евклидово пространство. Неравенство Коши- Буняковского. Неравенство треугольника. 27

25) Норма Евклидова пространства. Угол между векторами. 27

26) Ортонормированный базис. Ортогонализация....28
27) Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Связь между линейными операторами в разных базисах....29
28) Ядро, образ, ранг, дефект линейного оператора....30
29) Сопряжённый и самосопряжённый оператор....31
30) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теорема о характеристическом многочлене....31
31) Линейные и квадратичные формы. Матрица квадратичной формы....32
32) Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Теорема Лагранжа....33
33) Метод Якоби. Диагонализация....34
34) Знакоопределённость квадратичных форм. Критерий Сильвестра....35
35) Системы координат на плоскости. Преобразования системы координат. Деление отрезка в данном отношении. Уравнения линий на плоскости....35
36) Уравнение прямой на плоскости, все виды и переход от одного к другому. Основные задачи....37
37) Эллипс. Вывод канонического уравнения и его свойства....40
38) Гипербола. Вывод канонического уравнения и ее свойства....40
39) Парабола. Вывод канонического уравнения и ее свойства....41
40) Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду....42
41) Плоскость в пространстве, все виды уравнений и переход от одного к другому....42
42) Плоскость в пространстве. Основные задачи....43
43) Прямая в пространстве, все виды уравнений и переход от одного к другому. Основные задачи....43
44) Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи....44
45) Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Метод сечений....45

1) Матрицы. Основные понятия. Виды квадратных матриц. Транспонирование. Линейные операции над матрицами.

Матрица – это таблица, образованная из элементов некоторого множества, имеющая m строк и n столбцов

Индексация элементов в матрице. Элемент матрицы обозначается как a_{12} где первая цифра – это номер строки, вторая цифра – номер столбца

Матрица называется квадратной, если количество столбцов в ней равно количеству строк, и прямоугольной в любом другом случае. Порядок квадратной матрицы = количество строк\столбцов.

Квадратная матрица называется треугольной, если все элементы по одну из сторон от (любой) диагонали нули (диагональ занята ненулевыми элементами). Есть верхние треугольные (ненулевые элементы сверху) и нижние треугольные (ненулевые элементы снизу) матрицы.

Прямоугольная матрица называется трапециевидной, если можно обвести все ненулевые элементы так, чтобы фигура, образованная этим контуром образовала трапецию (это проще показать на картинке)

Квадратная матрица называется диагональной, если все элементы, кроме тех, которые находятся на главной диагонали, равны нулю.

Квадратная диагональная матрица называется единичной, если все элементы на главной диагонали равны 1.

Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны 0.

Равные матрицы – матрицы одинаковой размерности, и на одинаковых позициях которых стоят одинаковые элементы

Линейные операции над матрицами (2 штуки)

1) Умножение матрицы на число (выполнимо всегда)

2) Сложение матриц (возможно, только если размерности матриц равны)

Свойства линейных операций (4 + 4 штук)

1) A + B = B + A (коммутативность сложения матриц) (переместительное свойство)

2) (A + B) + C = A + (B + C) (ассоциативность сложения матриц) (сочетательное свойство)

3) A + 0 = A

4) A + (-A) = 0 (Противоположная матрица: (-1)*A)

5) a(bA) = (ab)A (ассоциативность относительно произведения чисел)

6) (a + b)A = aA + bA

7) a(A + B) = aA + aB

8) A*1 = A

Транспонированная матрица – это матрица полученная из исходной заменой каждой строки матрицы соответствующим столбцом исходной матрицы.

Если матрица равна своей транспонированной матрице, то эта матрица называется симметричной

Свойства транспонирования матриц (4)

1) $A^{TT} = A$

2) $(A + B)^T = A^T + B^T$

3) $(aA)^T = aA^T$

4) $(A*B)^T=A^T*B^T$

2) Матрицы. Элементарные преобразования матриц. Произведение матриц.

Элементарные преобразования матриц – это преобразования, которые не меняют ранг матрицы (6 штук) (они верны как для строк, так и для столбцов, пишутся только строки для улучшения читабельности)

1) умножение строки на число не равное нулю

2) прибавление к одной из строк другой строки

3) перестановка строк местами

4) вычеркивание одной из пропорциональных строк

5) вычеркивание нулевой строки

6) транспонирование матрицы

Запоминалка: линейные операции с матрицей-строкой(2) + вычеркивание(2) + разные перестановки(2)

Матрица B называется эквивалентной матрице A, если она может быть получена из матрицы A элементарными преобразованиями. Очевидно (по определению), что ранги эквивалентных матриц равны.

Произведение матриц – это нелинейная операция над матрицами – это матрица такая, что каждый ее элемент является произведением соответствующей строки первой матрицы на соответствующий столбец второй матрицы (проще показать на примере)

Порядок умножения матриц важен! Если A*B = B*A, то такие матрицы называются перестановочными, в общем случае это равенство неверно.

Свойства произведения матриц (4 штуки):

1) AE = EA = A; A*0 = 0*A = 0

2) (A*B)*C = A*(B*C)

3) (A + B)*C = A*C + B*C

4) C*(A+B) = C*A + C*B (да, 3 и 4 похожи)

3) **Определители. Основные свойства определителей.**

Определитель – это числовая характеристика квадратной матрицы, вычисляемая по определенным правилам. Иногда определитель называют детерминантом (показать, как вычисляется определитель для матрицы порядка 2, 3)

Свойства определителей

1) Определитель матрицы не меняется при транспонировании

2) Определитель матрицы меняет знак при перестановке местами двух строк/столбцов

3) Определитель, содержащий нулевую строку (столбец) = 0

4) Определитель, содержащий две одинаковых/пропорциональных строки/столбца равен нулю

5) Общий множитель для элементов одной(!) строки/столбца можно вынести за знак определителя (не путать с умножением(делением) матрицы на число – там множитель выносится из каждого элемента, а не только из элементов одной строки/ряда)

6) Если каждый элемент строки/столбца представить в виде суммы 2х слагаемых, то определитель можно представить в виде суммы двух определителей, равных данному с точностью до этой строки/столбца – в первом из двух определителей она заполнена первыми слагаемыми пар, а во втором случае – вторыми слагаемыми пар

7) К элементам любой строки/столбца можно добавить соответствующие элементы другой строки/столбца, домноженные на произвольное число, определитель не изменится

8) Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали

9) Определитель (A*B) = Определитель A*Определитель B

Запоминалка: 1) Линейные операции (сложение строк, возможно умноженных на какое-то число) + транспонирование – ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ НЕ ИЗМЕНЕН, + возможность вынести множитель (3-)

Перестановка строк местами – МЕНЯЕТСЯ ЗНАК (1)

Вычеркивание – ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ = 0 (2)

Странное свойство про представление в виде суммы (1) Определитель треугольной матрицы (1) Определитель произведения (1)

4) Минор. Алгебраическое дополнение. Теорема Лапласа (разложение определителя по ряду).

Минор Mij – это определитель, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца. (В книжке Arpatenok и других это называется дополнительный минор) (так же стоит заметить, что существует и «минор порядка k», это другое)

Алгебраическое дополнение Aij– это число, которое равно минору Mij, если i+j четное, и минус минору Mij, если i+j нечетное.

Теорема Лапласа – Значение определителя равно сумме попарных произведений элементов любого его ряда на их алгебраические дополнения.

Доказательство для матрицы третьего порядка. По определению (в презентации не уточнялось, какому)

$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$

Тогда $\Delta = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{23}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} =$

$= a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}) - a_{32}(a_{11}a_{23} - a_{13}a_{21}) + a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) =$

$= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$

$= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$ ч. т. д.

Также существует Минор матрицы порядка k – это минор, полученный вычеркиванием из матрицы i строк и i столбцов (в минор попадают элементы, с пересечений вычеркнутых строк и столбцов)

5) Невырожденная матрица. Обратная матрица. Ортогональна матрица

Невырожденная матрица – матрица, определитель которой не равен нулю.

Обратная матрица к матрице A – это матрица, обозначаемая A^{-1}, удовлетворяющая условиям $A * A^{-1} = A^{-1} * A = E$

Свойства обратной матрицы (3)

1) Матрица A и ее обратная матрица A^{-1} квадратные матрицы одного порядка

2) Если обратная матрица существует, то она единственная

3) Если обратная матрица существует, то определитель исходной матрицы не равен нулю (исходная матрица не вырожденная)

Формула для вычисления обратной матрицы: $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{|A|} * S^T}$, где S – матрица, составленная из алгебраических дополнений соответствующих элементов.

S^T – союзная/присоединенная/взаимная матрица

Доказательство справедливости формулы (то есть того, что A * A-1 = E = A * $\frac{1}{|A|} * S^T$

1) матрицы записываются в обычном виде и 2) перемножаются по правилам перемножения матриц. 3)В результате на главной диагонали останутся определители (по теореме Лапласа), а все остальные элементы матриц = 0 (по свойству «произведение элементов какой-либо строки/столбца на алгебраические дополнения другой строки/столбца равно 0»)

Свойство «произведение элементов какой-либо строки/столбца на алгебраические дополнения другой строки/столбца равно 0» (в Arpatenok это называется теорема аннулирования), на занятиях это доказывалось примерно на той же лекции, что теорема Лапласа

Доказательство свойства

1) Записать разложение определителя с элементами а11, а21 и т.д. по первой строке по теореме Лапласа 2)Записать разложение такого же определителя, но с заменой всех элементов первой строки на элементы второй строки, по первой строке. Заметить, что так как определитель содержит равные строки он равен нулю 3) сравнить результат с пунктом 1 и заметить, что свойство доказано.

Какие еще есть способы получения обратной матрицы? – Метод эквивалентных преобразований (похоже на метод Гаусса, так же оперируем только со строками. Справа дописываем единичную матрицу и дальше, как в Гаусса, нужно получить единичную матрицу слева. Справа будет обратная)

Ортогональные векторы – векторы, скалярное произведение которых равно нулю

Ортогональная матрица – матрица A, для которой её обратная матрица A^{-1} совпадает с её транспонированной матрицей A^T.

Свойства ортогональных матриц(3) – все три свойства следуют из определения

1) Определитель ортогональной матрицы равен либо 1, либо -1

Доказательство из А-1 = Ат => Ат * А = Е => Определитель (Ат * А) = 1 => (так как определитель транспонированной матрицы равен определителю самой матрицы) => (Определитель А)2 = 1 => Определитель А = +-1, чтд

2) Строки (столбцы) матрицы попарно ортогональны (то есть сумма попарных произведения двух строк (столбцов)) равна нулю – Доказательство следует из доказательства пункта 3

3) Сумма квадратов элементов любой строки равна 1.

Доказательство пунктов 2 и 3

$$A^T * A = E => \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} {a_{11}}^2 + {a_{21}}^2 + {a_{31}}^2 & a_{11} * a_{12} + a_{21} * a_{22} + a_{31} * a_{32} & a_{11} * a_{13} + a_{21} * a_{23} + a_{31} * a_{33} \\ a_{12} * a_{11} + a_{22} * a_{21} + a_{32} * a_{31} & {a_{12}}^2 + {a_{22}}^2 + {a_{32}}^2 & a_{12} * a_{13} + a_{22} * a_{23} + a_{32} * a_{33} \\ a_{13} * a_{11} + a_{23} * a_{21} + a_{33} * a_{31} & a_{13} * a_{12} + a_{23} * a_{22} + a_{33} * a_{32} & {a_{13}}^2 + {a_{23}}^2 + {a_{33}}^2 \end{bmatrix}$$

Из равенства этой матрицы единичной известны все элементы => свойства 2 и 3 доказаны. Аналогично можно доказать те же свойства для $A * A^T = E$

6) Ранг матрицы. Теорема о базисном миноре.

Минор матрицы порядка k – это минор, полученный вычеркиванием из матрицы k строк и k столбцов (в минор попадают элементы, с пересечений вычеркнутых строк и столбцов) (порядок матрицы = сколько строк/столбцов вычеркнули, чтобы его получить)– нарисовать пример минора

Частные случаи: любой элемент матрицы – это ее минор 1 порядка, минор квадратной матрицы порядка n – это ее определитель

Базисный минор матрицы A – это её минор порядка k, такой, что этот минор не равен нулю, а все миноры более высокого порядка равны нулю. (У матрицы может быть несколько базисных миноров)

Ранг матрицы A – это порядок её базисного минора

Ранг матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда все элементы матрицы нули

Методы нахождения ранга матрицы:

1) Метод окаймляющих миноров. (Если некоторый минор порядка k матрицы не равен нулю, а все его окаймляющие миноры (миноры на один порядок больше, в которые входит исходный минор) равны нулю, то рассматриваемый минор – базисный).

2) Метод эквивалентных преобразований. (С помощью эквивалентных преобразований сводим матрицу к трапециевидному виду, сколько в не осталось строк, такой и ранг матрицы)

Теорема о базисном миноре 1) Строки(столбцы) базисного минора линейно независимы 2) Любой небазисный ряд матрицы можно представить в виде линейной комбинации базисных рядов.

Доказательство теоремы о базисном миноре

1) По свойствам определителя, если бы строки были линейно зависимы, то можно было бы получить нулевую строку и определитель был бы равен нулю

2) Пусть наша матрица выглядит следующим образом - Минор порядка r расположен в левом верхнем углу. рассмотрим определитель только на один порядок больше, чем минор:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} & & \cdots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & & \cdots & a_{2r} & a_{2j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r1} & \cdots & & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{r+1\,1} & a_{r+1\,2} & \cdots & & a_{r+1\,r} & a_{r+1\,j} \end{bmatrix} = 0$$

2.1)Если к базисному минору добавить столбец, который в нем уже есть, то, очевидно, этот столбец можно представить в виде линейной комбинации – равный ему с множителем 1 + остальные * 0

2.2) Разложим определитель по добавленной j-му столбцу:

$$detA = a_{1j} * A_{1j} + \cdots + a_{r+1\,j} * A_{r+1\,j} = 0$$

Но мы знаем, что $A_{r+1\,j}$ – это сам базисный минор, не равный нулю, => на него можно разделить наше выражение.

$$\frac{a_{1j} * A_{1j}}{A_{r+1\,j}} + \cdots + \frac{a_{r\,j} * A_{r\,j}}{A_{r+1\,j}} + a_{r+1\,j} = 0$$

Тогда получаем равенство:

$$a_{r+1\,j} = -\frac{A_{1j}}{A_{r+1\,j}} * a_{1j} - \cdots - \frac{A_{r\,j}}{A_{r+1\,j}} * a_{r\,j}$$

Это равенство значит, что последняя (r+1)я строка является линейной комбинацией других строк, так как нашлись такие числа (подкрашены зеленым), которые стали коэффициентами в этом равенстве.

7) Линейная независимость рядов матрицы. Теорема о ранге матрицы.
(Критерий равенства нулю определителя. – из старой версии билетов)

Линейная комбинация строк/столбцов матрицы – это сумма произведений этих строк на произвольные числа

Тривиальная комбинация – линейная комбинация с нулевыми коэффициентами

Строки/столбцы называются линейно зависимыми, если хотя бы одна из строчек/столбцов является линейной комбинацией других строк/столбцов. (Если есть такие коэффициенты не все равные нулю, что их линейная комбинация с этими коэффициентами равна нулю)

Строки/столбцы являются линейно независимыми, если ни одна из них не является линейной комбинацией других (Если их линейная комбинация равна нулю, только если все коэффициенты равны нулю)

Признак линейно независимости столбцов/строк – ранг матрицы, составленной из них, совпадает с их количеством

Свойства линейно зависимых и линейно независимых строк/столбцов матрицы

1) 2) 3) Если в систему входит нулевой столбец (два равных столбца, два пропорциональных столбца), то эта система столбцов линейно зависима (доказательство через привести пример комбинации)

3) Система из k столбцов линейно зависима, если хотя бы один из столбцов является линейной комбинацией других столбцов

4) Если система столбцов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима 5)Если подсистема системы столбцов линейно зависима, то и вся система линейно зависима

Теорема о ранге матрицы – ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых строк/столбцов матрицы

Критерий равенства нулю определителя Определитель равен нулю тогда и только тогда, когда его строки(столбцы) линейно зависимы.

Доказательство необходимости (ДАНО: ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ РАВЕН НУЛЮ): ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ РАВЕН НУЛЮ => БАЗИСНЫЙ МИНОР ХОТЯ БЫ НА ОДИН ПОРЯДОК НИЖЕ => В ОПРЕДЕЛИТЕЛЕ ПРИСУТСТВУЕТ НЕ БАЗИСНАЯ СТРОКА => ПО ТЕОРЕМЕ О БАЗИСНОМ МИНОРЕ ЭТА СТРОКА ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ БАЗИСНЫХ СТРОК (ДРУГИЕ НЕ БАЗИСНЫЕ СТРОКИ МОЖНО ДОБАВИТЬ В КОМБИНАЦИЮ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ 0)

Доказательство достаточности (ДАНО: СТРОКИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ). СТРОКИ ЛИНЕЙНО ЗАВИСИМЫ => ЕСТЬ СТРОКА, ЯВЛЯЮЩАЯСЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ ОСТАЛЬНЫХ СТРОК => ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО ВЫЧИТАЯ ИЗ ЭТОЙ СТРОКИ ДРУГИЕ СТРОКИ(ВОЗМОЖНО ДОМНОЖЕННЫЕ НА ЧТО-ТО) МОЖНО ПОЛУЧИТЬ НУЛЕВУЮ СТРОКУ => ПО СВОЙСТВУ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ С НУЛЕВОЙ СТРОКОЙ РАВЕН НУЛЮ, ЧТД.

8) Системы линейных уравнений. Основные понятия. Метод обратной матрицы.

Система линейных алгебраических уравнений (Она же линейная система) система из n уравнений, в каждое из которых неизвестные входят в степени не выше первой. Общий вид СЛАУ:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_1 + \dots + a_{1n}x_1 = b_1 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь x1, x2, x3 – неизвестные, a1, a2, a3 – коэффициенты при неизвестных, b1, b2, b3 – свободные члены (правая часть)

Можно отдельно записать матрицу из коэффициентов, отдельно записать матрицу из неизвестных и отдельно – матрицу из свободных членов, тогда A*X=B – матричное уравнение, или же матричная форма записи системы линейных уравнений (пример для системы из трех уравнений с тремя неизвестными):

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$A * X = B$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} * x_1 + a_{12} * x_2 + a_{11} * x_3 \\ a_{21} * x_1 + a_{22} * x_2 + a_{23} * x_3 \\ a_{31} * x_1 + a_{32} * x_2 + a_{33} * x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Другой способ записать систему линейных уравнений с помощью матриц – Расширенная матрица A (– написать для системы выше расширенную матрицу) (матрица A с приписанным к ней справа и отчерченным столбиком свободных членов)

Решение системы – это вектор-столбец, такой что при его подстановке в систему вместо вектора-столбца X каждое из уравнений системы обращается в верное равенство.

Эквивалентными (равносильными) системами уравнений называются системы, если каждое из решений одной системы является решением другой и наоборот.

Система может быть совместной или несовместной. Совместная система – система уравнений, имеющая хотя бы одно решение. Несовместная система – система, не имеющая решений. Совместные системы уравнений бывают определенными и неопределенными. Определенная система уравнений – это совместная система, имеющая единственное решение. Неопределенная система уравнений – это совместная система уравнений, имеющая бесконечное количество решений.

Однородная система уравнений – это система, все свободные члены которой равны нулю. Неоднородная система уравнений – система, не все свободные члены которой равны нулю.

Метод обратной матрицы – это один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод заключается в домножении уравнения (A*X=B) слева (или справа – зависит от порядка A и X) на матрицу, обратную к матрице A.

Тогда получится уравнение вида $E*X = A^{-1}*B$ $(B*A^{-1})$ – то есть для того, чтобы найти x остается только найти произведение $A^{-1}*B$ $(B*A^{-1})$.

9) Решение невырожденных линейных систем. Формулы Крамера.

Определитель системы – это определитель матрицы A, составленной из коэффициентов перед неизвестными.

Система уравнений называется невырожденной, если её определитель не равен нулю. Система уравнений называется вырожденной, если её определитель равен нулю.

Рассмотрим один из способов решения систем линейных алгебраических уравнений – метод Крамера. Им можно пользоваться только для решения невырожденных систем уравнений – так как в нем используется матрица, обратная матрице A, а для вырожденной матрицы A построить обратную невозможно.

Итак, рассмотрим метод получения формул Крамера:

Запишем систему в матричной форме: A*X=B. Домножим матрицу на обратную слева, как в методе решения «обратной матрицей»: $A^{-1}*A*X = A^{-1}*B$. Таким образом $X = A^{-1}*B$.

Запишем это равенство в матричном виде, расписав обратную матрицу по формуле получения обратной матрицы:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{1j} & \dots & A_{nj} \\ A_{1n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_j \\ b_n \end{bmatrix}$$

Матрицы в правой части уравнения можно перемножить, тогда мы получим:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} A_{11} * b_1 + \cdots + A_{n1} * b_n \\ \dots \\ A_{1j} * b_1 + \cdots + A_{nj} * b_n \\ A_{1n} * b_1 + \cdots + A_{nn} * b_n \end{bmatrix}$$

Соответственно,

$$x_j = \frac{1}{\Delta} * (A_{1j} * b_1 + \cdots + A_{nj} * b_n)$$

b1, b2, b3 – это свободные члены системы, получается в скобочках записан определитель исходной матрицы (в которой j столбик заменен столбиком свободных членов) (при разложении по j столбцу):

$$\Delta_j = A_{1j} * b_1 + \dots + A_{nj} * b_n$$

(В этой формуле Определительj (detj) означает как раз определитель исходной матрицы (в которой j столбик заменен столбиком свободных членов)).

Соответственно, все иксы можно представить в виде $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$. Это и есть формулы Крамера.

10) Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли.

Метод Гаусса – один из методов решения систем линейных алгебраических уравнений. Он хорош тем, что с помощью него можно решать в том числе неопределенные системы, а также выяснять, что система не является совместной вовсе.

Перед началом решения нужно записать расширенную матрицу системы. Метод Гаусса состоит из трёх этапов. Первый этап называется прямой ход. В течение этого этапа нужно привести матрицу к ступенчатому виду с помощью эквивалентных преобразований строк, так, чтобы на главной диагонали остались только единицы.

Второй этап – анализ матрицы. 1) Сравним ранги матрицы и расширенной матрицы

Теорема Кронекера-Капелли СЛАУ является совместной тогда и только тогда, когда ранг её матрицы системы равен рангу её расширенной матрицы.

Доказательство необходимости (ДАНО – СИСТЕМА СОВМЕСТНА, ТО ЕСТЬ ТАКИЕ ЧИСЛА, КОТОРЫЕ ЯВЛЯЮТСЯ РЕШЕНИЕМ СИСТЕМЫ (С1, С2... - ЭТО ПЕРЕМЕННЫЕ В ДАННОМ СЛУЧАЕ)):

ТАК КАК СИСТЕМА СОВМЕСТНА, ТО ОНА ИМЕЕТ РЕШЕНИЯ, ТО ЕСТЬ ТАКАЯ СОВОКУПНОСТЬ ЧИСЕЛ C_1, ... C_N, ЧТО

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} * c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} * c_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} * c_n = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}$$

ТО ЕСТЬ, ПОСЛЕДНИЙ СТОЛБИК ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ ПРЕДШЕСТВУЮЩИХ СТОЛБИКОВ, А ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМ ВЫЧИТАЕМ ДРУГИХ СТОЛБИКОВ ИЗ НЕГО МОЖНО СДЕЛАТЬ НУЛЕВОЙ СТОЛБЕЦ => С ПОМОЩЬЮ ЭКВИВАЛЕНТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МОЖНО ВЫЧЕРКНУТЬ НУЛЕВОЙ СТОЛБЕЦ И РАНГ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ НЕ ИЗМЕНИТСЯ => РАНГ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН РАНГУ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ, ЧТД.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ДОСТАТОЧНОСТИ (ДАНО – РАНГ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ РАВЕН РАНГУ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ). РАНГИ РАВНЫ => ЕСТЬ ОБЩИЙ БАЗИСНЫЙ МИНОР, В КОТОРЫЙ НЕ ВХОДИТ СТОЛБЕЦ СВОБОДНЫХ ЧЛЕНОВ ИЗ РАСШИРЕННОЙ МАТРИЦЫ => ЭТОТ СТОЛБЕЦ ЯВЛЯЕТСЯ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИЕЙ БАЗИСНЫХ СТРОК (ПО ТЕОРЕМЕ О БАЗИСНОМ МИНОРЕ), ТО ЕСТЬ ВСЕЙ МАТРИЦЫ А, ДРУГИМИ СЛОВАМИ, ЕСТЬ ТАКИЕ ЧИСЛА С1, ... СN, ЧТО ВЕРНО РАВЕНСТВО

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix} * c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix} * c_2 + \dots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix} * c_n$$

То есть, у системы есть решение (a1..an), чтд.

1) (продолжение) Таким образом, если ранги не совпали, можно завершить решение задачи, записав ответ – Система несовместна.

2) Сравним количество переменных в уравнении и ранг матрицы.

Если ранг матрицы равен количеству переменных, то система имеет единственное решение (определенная) => переходим сразу к третьему этапу решения.

Если ранг матрицы меньше числа переменных, то система имеет бесконечно много решений (неопределенная) и нужно выбрать базисные и свободные переменные. Для этого выбираем любой базисный минор системы, и переменные, на которых он построен, берем за базисные, остальные переменные становятся свободными. (Другими словами, берем любые переменные, которые нравятся, в количестве = ранг матрицы, они будут базисными, остальные – свободными).

Доказательство необходимости (дано: система имеет бесконечно много решений). Очевидно, что ранг матрицы не может превышать количество переменных, то есть r<=n. Предположим, что r=n, тогда базисный минор размера n*n отличен от нуля, а значит можно найти решение по формулам Крамера, и это будет единственное решение. => Если решений несколько, то r<n.

Доказательство достаточности (дано: r<n). Будем считать, что минор находится в левом верхнем углу матрицы (в противном случае можно поменять строки\столбцы местами). Итак, в системе присутствуют не принадлежащие базису строки, значит матрица без них эквивалентна исходной, оставим только базисные строки:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r + a_{1r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_{1n} * x_n = b_1 \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r + a_{rr+1} * x_{r+1} + \cdots + a_{rn} * x_n = b_r \end{cases}$$

Слагаемые из небазисных столбцов можно перенести в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r = b_1 - a_{1r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_{1n} * x_n \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r = b_r - a_{rr+1} * x_{r+1} - \cdots - a_{rn} * x_n \end{cases}$$

Теперь, если подставить на место Xr+1…Xn (свободные переменные) какие-нибудь числа, то система будет иметь единственное решение. Так как вариантов, какие можно подставить числа на место свободных переменных бесконечно много, то и решений система будет бесконечно много, чтд.

Третий этап – обратный ход. На этом этапе можно вернуться к обычным уравнениям и продолжить решать систему в таком виде, поочередно подставляя находимые переменные, а можно продолжить работать с матрицей – теперь нужно получить над главной диагональю как можно больше нулей, и после этого уже вернуться к уравнениям. После этого этапа решения остается только записать полученный ответ.

11) Системы линейных однородных уравнений. Необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений.

Однородная система уравнений – система, все свободные члены которой равны нулю. (написать пример однородной системы)

Свойства однородной системы:

1) Очевидно, что у однородной системы есть как минимум одно решение – когда все переменные равны нулю.

2) Если же есть хотя бы одно решение кроме нулевого, то система имеет бесконечно много решений.

3) Любая линейная комбинация решений системы будет являться решением системы.

Необходимое и достаточное условие существования ненулевых решений: Однородная система имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа переменных.

Доказательство необходимости (Дано: существуют ненулевые решения): Значит, существуют такие числа $C_1, C_2, \ldots C_n$, не все равные нулю, что верно равенство

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} * c_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} * c_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \cdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} * c_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Линейная комбинация столбцов матрицы системы равна нулю => базисный минор меньше наименьшего из чисел – количество уравнений и количества неизвестных, то есть r<n ч.т.д.

Доказательство достаточности (Дано: r<n). Тогда запишем эквивалентную исходной матрице – матрицу с вычеркнутыми небазисными строчками.

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r + a_{1r+1} * x_{r+1} + \cdots + a_{1n} * x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r + a_{rr+1} * x_{r+1} + \cdots + a_{rn} * x_n = 0 \end{cases}$$

Слагаемые из небазисных столбцов можно перенести в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r = -a_{1r+1} * x_{r+1} - \cdots - a_{1n} * x_n \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r = -a_{rr+1} * x_{r+1} - \cdots - a_{rn} * x_n \end{cases}$$

Теперь, если подставить на место Xr+1…Xn (свободные переменные) какие-нибудь числа, то система будет иметь единственное решение. Так как вариантов, какие можно подставить числа на место свободных переменных бесконечно много, то и решений система будет бесконечно много, чтд.

12) Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Теорема о фундаментальной системе решений. Структура общего решения линейной однородной системы.

Фундаментальная система решений системы уравнений – это совокупность максимального числа возможных линейно независимых векторов-решений системы.

Аналогично можно дать определение Фундаментальной системы решений однородной системы уравнений – это совокупность решений x1, x2, … xn, таких, что они 1)линейно независимы 2) Любое решение системы представимо в виде линейной комбинации x1, x2, … xn, где не все коэффициенты равны нулю.

Общее решение однородной системы – это решение вида X = c1x1 + c2x2 + … + cnxn, где x1…xn – фундаментальная система решений, а c1…cn – произвольные постоянные.

Теорема о фундаментальной системе решений Если ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, то количество решений в фундаментальной системе решений равно n – r (n – количество переменных, r – ранг матрицы системы)

Доказательство

1) Пусть базисный минор находится слева сверху как и в нескольких предыдущих доказательствах, запишем систему, состоящую только из базисных строк, эквивалентную данной:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r + a_{1r+1} * x_{r+1} + \cdots + \ a_{1n} * x_n = 0 \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r + a_{rr+1} * x_{r+1} + \cdots + \ a_{rn} * x_n = 0 \end{cases}$$

Слагаемые из небазисных столбцов можно перенести в правую часть:

$$\begin{cases} a_{11} * x_1 + \cdots + a_{1r} * x_r = -\, a_{1r+1} * x_{r+1} - \cdots - \ a_{1n} * x_n \\ \cdots \\ a_{r1} * x_1 + \cdots + a_{rr} * x_r = -\, a_{rr+1} * x_{r+1} - \cdots - \ a_{rn} * x_n \end{cases}$$

2) Пусть переменные, оказавшиеся в левой части, будут «базисными», тогда переменные из правой части – «свободные». Если придать свободным переменным какие-либо значение, то найти базисные переменные станет возможно одним единственным способом. Будем придавать свободным переменным поочередно следующие значения:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots., \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

3) Подставив эти наборы в исходную систему уравнений, найдем некоторые решения относительно базисных переменных

$$\begin{bmatrix} (x_1)_1 \\ (x_2)_1 \\ \cdots \\ (x_r)_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (x_1)_2 \\ (x_2)_2 \\ \cdots \\ (x_r)_2 \end{bmatrix}, \ldots., \begin{bmatrix} (x_1)_{n-r} \\ (x_2)_{n-r} \\ \cdots \\ (x_r)_{n-r} \end{bmatrix}$$

4) Теперь запишем полные решения исходной системы с учетом свободных переменных

$$\begin{bmatrix} (x_1)_1 \\ (x_2)_1 \\ \cdots \\ (x_r)_1 \\ 1 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} (x_1)_2 \\ (x_2)_2 \\ \cdots \\ (x_r)_2 \\ 0 \\ 1 \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots., \begin{bmatrix} (x_1)_{n-r} \\ (x_2)_{n-r} \\ \cdots \\ (x_r)_{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Заметим, что столбцов – решений получилось n-r, по количеству свободных переменных.

5) Теперь докажем, что данная система векторов решений является фундаментальной системой решений исходной однородной системы, для этого докажем, что она удовлетворяет двум свойствам ФСР: 1)Столбцы – решения линейно независимы 2)Каждое решение системы можно представить в виде линейной комбинации столбцов ФСР.

5.1) Докажем, что система столбцов линейно независима. Возьмем за базисный минор квадратную единичную матрицу – ее определитель не равен нулю (он равен 1) => так как все столбцы, входящие в базисный минор, линейно независимы, то все столбцы – решения линейно независимы, ч.т.д.

5.2) Докажем, что любое решение исходной системы можно представить в виде линейной комбинации найденных векторов решений. Рассмотрим некоторое произвольное решение однородной системы:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Рассмотрим одностолбцовую матрицу Y, составленную следующим образом:

$$Y = X - x_{r+1} * X_1 - x_{r+2} * X_2 \dots - x_n * X_{n-r}$$

Так как в таком виде вообще непонятно что это, запишем в матричном виде:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - x_{r+1} * \begin{bmatrix} (x_1)_1 \\ (x_2)_1 \\ \dots \\ (x_{r-1})_1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - x_{r+2} * \begin{bmatrix} (x_1)_2 \\ (x_2)_2 \\ \dots \\ (x_{r-1})_2 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \dots - x_n * \begin{bmatrix} (x_1)_{n-r} \\ (x_2)_{n-r} \\ \dots \\ (x_{r-1})_{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Заметим, что на данный момент в правой части этого громоздкого выражения совсем нет переменных – за каждым иксом скрывается какое-то конкретное число. За иксами в скобочках – найденные иксы из ФСР, который мы проверяем, а за иксами без скобочек – числа из какого-то конкретного произвольного решения системы, которое мы рассматриваем.

Выполним умножения матриц-столбцов на числа в правой части выражения:

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{r+1} * (x_1)_1 \\ x_{r+1} * (x_2)_1 \\ \dots \\ x_{r+1} * (x_{r-1})_1 \\ x_{r+1} * 1 \\ x_{r+1} * 0 \\ \dots \\ x_{r+1} * 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{r+2} * (x_1)_2 \\ x_{r+2} * (x_2)_2 \\ \dots \\ x_{r+2} * (x_{r-1})_2 \\ x_{r+2} * 0 \\ x_{r+2} * 1 \\ \dots \\ x_{r+2} * 0 \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} x_n * (x_1)_{n-r} \\ x_n * (x_2)_{n-r} \\ \dots \\ x_n * (x_{r-1})_{n-r} \\ x_n * 0 \\ x_n * 1 \\ \dots \\ x_n * 0 \end{bmatrix}$$

Немного упростим

$$Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_{r-1} \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{r+1} * (x_1)_1 \\ x_{r+1} * (x_2)_1 \\ \dots \\ x_{r+1} * (x_{r-1})_1 \\ x_{r+1} \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{r+2} * (x_1)_2 \\ x_{r+2} * (x_2)_2 \\ \dots \\ x_{r+2} * (x_{r-1})_2 \\ 0 \\ x_{r+2} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} x_n * (x_1)_{n-r} \\ x_n * (x_2)_{n-r} \\ \dots \\ x_n * (x_{r-1})_{n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Теперь поочередно вычтем все вычитаемые из первого столбца. Числа, которые получатся в первых r строках обозначим за y1…yr. В нижней части после вычитания, очевидно, останутся только нули.

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y \\ y_r \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Заметим, что Y – линейная комбинация решений системы, а значит, из свойств однородной системы уравнений (а мы решали именно однородную систему) Y также является решением исходной системы. Но, когда все свободные переменные равны нулю, у однородной системы только одно решение. А так как решение только одно – то это точно нулевое решение. Таким образом, Y – нулевой столбец.

Вспомним, откуда мы нашли Y, поставим на место Y ноль, так как Y – нулевой столбец:

$$0 = X - x_{r+1} * X_1 - x_{r+2} * X_2 \dots - x_n * X_{n-r}$$

Выразим отсюда X:

$$X = x_{r+1} * X_1 + x_{r+2} * X_2 \dots + x_n * X_{n-r}$$

Вспоминаем, что за X мы взяли произвольное решение однородной системы и удовлетворенно замечаем, что только что получили, что оно является линейной комбинацией столбцов ФСР, ч.т.д.

13) Неоднородные системы линейных уравнений. Структура общего решения.

Неоднородной системой уравнений называют систему, не все свободные члены которой равны нулю.

Если дана система A*X=B, то соответствующая ей однородная система – система вида A*X = 0.

Свойства решений неоднородной системы

1) Если X – решение однородной системы, а У – решение соответствующей неоднородной, то Z = X + Y – также решение неоднородной системы.

Доказательство: (Дано: A*Y = B и A*X=0 и Z = X + Y). Найдем A*Y + A*X двумя способами. 1)Вынесем A: A(Y+X) **= A*Z** 2) Сложим равенства из дано: A*Y + A*X = B + 0 = B. Таким образом, A*Z=B, то есть **Z – решение неоднородной системы**, ч.т.д.

2)Если Z и Y – решения неоднородной системы, то X = Z – Y – решение однородной системы

Доказательство: (Дано: A*Z = B; A*Y=B; X = Z – Y). Найдем A*Z - A*Y двумя способами: 1) Вынесем A: A*Z - A*Y = A(Z-Y) **= A*X**. 2) A*Z - A*Y = B – B **= 0**. Таким образом, A*X = 0, то есть **X – решение однородной системы**, ч.т.д.

3) Любое решение Z неоднородной системы представимо в виде суммы Y + X, где У – решение соответствующей однородной системы, а X – частное решение неоднородной. (Доказательства в книжке Algebra_i_geometria, откуда эти свойства взяты, нет)

4) Общее решение системы (совокупность всех возможных решений системы) представимо в виде

$Z = Y + c_1X_1 + c_2X_2 + \cdots + c_{n-r}X_{n-r}$

Доказательство: ПО СВОЙСТВУ 3 ВСЯКОЕ РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВИМО В ВИДЕ СУММЫ РЕШЕНИЙ ОДНОРОДНОЙ И НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ, А ЛЮБОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ В СВОЮ ОЧЕРЕДЬ ПРЕДСТАВИМО В ВИДЕ $X = \mathrm{C}_1 * X_1 + \mathrm{C}_2 * X_2 \ldots + \mathrm{C}_n * X_{n-r}$ ПО ТЕОРЕМЕ О ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ

Альтернативы Фредгольма, которые нигде в вопросах не упоминались, но вдруг пригодятся.

Для всяких A*X = B и A^T*Y=0 справедливо одно из следующих утверждений:

1. Система A*X=B имеет решение при любом B тогда и только тогда, когда система A^T*Y=0 имеет только тривиальное (нулевое) решение Y = 0

2. Система A*X=B при некотором B несовместна и тогда система A^T*Y=0 имеет нетривиальное (ненулевое) решение

14) Векторы. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис и координаты в трехмерном пространстве.

Геометрический вектор – это направленный отрезок

Длина вектора – это длина этого отрезка. Также называют «модуль отрезка»

Нулевой вектор – это 1) Вектор, у которого совпадают начало и конец 2) точка

Единичный вектор – вектор длины 1

Орт данного вектора – вектор длины 1, сонаправленный данному

Равные векторы – это векторы, у которых совпадает 1) направление 2)длина

Противоположные векторы – векторы, у которых совпадает длина, но направление противоположно

Свободные векторы – это векторы, для которых не задана точка, из которой они исходят (именно такие векторы рассматриваются в математике в основном)

Коллинеарные векторы – векторы, лежащие на одной или параллельных прямой/ых. 2 вектора являются коллинеарными, если их векторное произведение равно нулю. Признак коллинеарности векторов a и b: существует такое вещественное число α, что a = αb.

Компланарные векторы – векторы, лежащие в одной/параллельных плоскостях. 3 вектора являются компланарными, если их смешанное произведение равно нулю. Признак компланарности двух векторов: три вектора компланарны тогда и только тогда, когда один из них является линейной комбинацией двух других, то есть существуют такие α1 и α2, что c = aα1+ bα2.

Ортогональные векторы = перпендикулярные векторы. Векторы называются ортогональными, если их скалярное произведение равно нулю.

Линейные операции над векторами: 1) Сложение векторов 2) Умножение вектора на число

Линейная комбинация некоторых векторов – это сумма произведений этих векторов на произвольные числа

Линейно зависимые векторы – векторы, для которых существуют такие числа α1, .. αn не все равные нулю, что сумма a1α1+a2α2…+anαn = 0.

Линейно независимые векторы – векторы, линейная комбинация которых равна нулю только если α1 = α2 =… =αn = 0.

Признак линейной независимости векторов. Векторы линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы, составленной из компонент этих векторов равен их числу.

Базисом в трехмерном пространстве является совокупность из любых трех линейно независимых (некомпланарных) векторов. Также, любой вектор пространства можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов и при том единственным способом. Наиболее удобный базис – i j k. Этот базис определяет правую систему координат, так как i j k – правая тройка.

Теорема о координатах вектора в пространстве Координаты вектора в пространстве относительно некоторого базиса определяются единственным образом. (на самом деле в теореме говорится о n-мерном пространстве, но в вопросе спрашивается только про трехмерное пространство).

Доказательство ОТ ПРОТИВНОГО: ПУСТЬ СУЩЕСТВУЕТ ДВА РАЗЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРА X ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРОГО БАЗИСА:

$$\begin{cases} \vec{x} = x_1 * \overrightarrow{e_1} + x_2 * \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n * \overrightarrow{e_n}\ (1) \\ \vec{x} = x'_1 * \overrightarrow{e_1} + x'_2 * \overrightarrow{e_2} + \cdots + x'_n * \overrightarrow{e_n}\ (2) \end{cases}$$

ТОГДА, ВЫЧИТАЯ ПЕРВОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ИЗ ВТОРОГО ПОЛУЧИМ:

$$\overrightarrow{e_1} * (x_1 - x'_1) + \overrightarrow{e_2} * (x_2 - x'_2) + \cdots + \overrightarrow{e_n} * (x_n - x'_n) = 0$$

НО ТАК КАК БАЗИС – ЭТО СОВОКУПНОСТЬ ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫХ ВЕКТОРОВ, ТО ЭТО ЗНАЧИТ, ЧТО ЛИНЕЙНАЯ КОМБИНАЦИЯ $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \dots, \overrightarrow{e_n}$ МОЖЕТ БЫТЬ РАВНА НУЛЮ, ТОЛЬКО ЕСЛИ ВСЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РАВНЫ НУЛЮ, ИЗ ЧЕГО СЛЕДУЕТ, ЧТО ВСЕ КООРДИНАТЫ x_i И x'_i СОВПАЛИ, ТО ЕСТЬ, КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ОТНОСИТЕЛЬНО НЕКОТОРОГО БАЗИСА ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ ЕДИНСТВЕННЫМ СПОСОБОМ, Ч.Т.Д.

15) Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Направляющие косинусы.

Начать можно с определений по векторам в целом (билет 15)

Ось – это прямая, для которой задано ее направление (одно из двух)

Проекция точки M на ось l – это основание перпендикуляра MM1, опущенного из точки M на ось l.

Обозначим через точки A1 и B1 проекции точек начала и конца вектора на ось l. Тогда проекцией вектора AB на ось l называется положительное число = длине вектора A1B1, если A1B1 сонаправлен l, и отрицательное число = длине вектора A1B1, если направление A1B1 противоположно направлению l. В этом случае сам A1B1 – это компонента

$ПР_u\vec{a} = |\vec{a}| * \cos\varphi$, где φ – угол между вектором и осью, на которую он проецируется. $0 < \varphi < \pi$

Все линейные операции над векторами приводят к соответствующим операциям над их проекциями на произвольную ось:

1) $ПР_u\vec{a} + \vec{b} = ПР_u\vec{a} + ПР_u\vec{b}$

2) $ПР_u(\lambda\vec{a}) = \lambda * ПР_u\vec{a}$

Разложение вектора по ортам координатных осей $\vec{a} = a_x * \vec{\imath} + a_y * \vec{\jmath} + a_z * \vec{k}$

В этой формуле ax, ay и az – проекции вектора на координатные оси (называют координаты вектора). (Нахождение формулы: отложить вектор а от начала координат, заметить, что а=сумма геометрических проекций на оси (после построения соответствующего параллелепипеда), а векторы это направление (I, j, k) * длина (самой проекции), чтд.) – Подробно об этом в книжке Письменного, стр 44.

Из прошлого же доказательства следует формула длины вектора в пространстве (по теоремам Пифагора дважды, или по формуле диагонали параллелепипеда)

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Направляющие косинусы – это числа cosα, cosβ, cosγ такие, что α, β, γ – это углы между векторами и осями, на которые они проецируются.

По свойству (формуле) проекции векторов очевидны равенства:

$\overrightarrow{a_x} = |\vec{a}| * cos\alpha \quad \overrightarrow{a_y} = |\vec{a}| * cos\beta \quad \overrightarrow{a_z} = |\vec{a}| * cos\gamma$

- Как найти направляющие косинусы? Из этих равенств очевидным образом можно выразить сами направляющие векторы: направляющий вектор угла к оси равен длине исходного вектора разделенную на проекцию этого вектора на данную ось.

Если подставить $\overrightarrow{a_x}$, $\overrightarrow{a_y}$ и $\overrightarrow{a_z}$ из равенства выше в формулу длины вектора, возвести обе части равенства в квадрат, а затем разделить обе части на неравную 0 длину вектора в квадрате, останется равенство

$$cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

16) Скалярное произведение. Выражение скалярного произведения через координаты. Приложения скалярного произведения.

Начать можно с определений по векторам в целом (билет 15)

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – Это ЧИСЛО, находимое по формуле

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * cos\alpha$$

Если заметить, что $ПР_b\vec{a} = |\vec{b}| * \cos\varphi$ и наоборот $ПР_a\vec{b} = |\vec{a}| * \cos\varphi$, то формулу скалярного произведения можно также представить в виде

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{b}| * ПР_b\vec{a} = |\vec{a}| * ПР_a\vec{b}$$

Скалярное произведение через координаты

$\vec{a} * \vec{b} = a_z b_z + a_z b_z + a_z b_z$

Выражается из почленного перемножения векторов, записанных в стандартной форме разложения по ортам координатных осей (подробнее – Письменный, стр 49)

Необходимое и достаточное условие ортогональности 2х векторов 2 ненулевых вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно 0.

Доказательство необходимости (дано: векторы ортогональны) => косинус угла между ними = 0 => их скалярное произведение равно 0, чтд.

Доказательство достаточности (дано: скалярное произведение равно 0) => так как векторы не нулевые =>единственный множитель в формуле, который может быть равен нулю это косинус угла между ними => угол между ними равен 90 градусов, чтд.

Доказательство через координаты ниже

Приложения скалярного произведения (3)

1) Угол между векторами (выражается напрямую из формулы скалярного произведения)

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} \text{или} = \frac{a_z b_z + a_z b_z + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Отсюда же условие перпендикулярности (то есть равенства нулю косинуса угла между углами) двух векторов через координаты – оно выполняется только когда числитель равен нулю, то есть скалярное произведение равно нулю

2) Проекция вектора по заданному направлению (на другой вектор) (также из формулы, но из другой)

$$\text{ПР}_b\vec{a} = \frac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ или } = \frac{a_z b_z + a_z b_z + a_z b_z}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

3) Работа постоянной силы (A = A * S * cosα)

17) Векторное произведение. Выражение векторного произведения через координаты. Приложения векторного произведения.

Начать можно с определений по векторам в целом (билет 15)

Векторное произведение векторов a и b это вектор c, удовлетворяющий трем условиям:

1) c перпендикулярен и a и b

2) Длина вектора c находится по формуле $|\vec{a}| * |\vec{b}| * \sin\alpha$

3) Векторы a, b, c образуют правую тройку

Тройка векторов a,b,c называется правой, если с конца вектора c кратчайший поворот от a к b виден против часовой стрелки.

Так как i j k правая тройка, они перпендикулярны между собой, их длины = 1, то =>

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

(Это потребуется при выражении векторного произведения через координаты)

Свойства векторного произведения (4) – a и b - векторы

1) a×b = -b×a

2)альфа*(a×b) = альфа*a × b = a × альфа*b

3) (a + b) ×c = a×c + a×b

4) a×a=0

Векторное произведение через координаты

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Выражается из почленного векторного перемножения векторов, записанных в стандартной форме разложения по ортам координатных осей (подробнее – Письменный, стр 53)

Приложения векторного произведения:

Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух векторов – Их векторное произведение равно 0.

Геометрический смысл: Площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b.

Физический смысл: (Нахождение линейной скорости вращения), Момент силы относительно точки O – это вектор $\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}$

18) Определение смешанного произведения, его геометрический смысл. Выражение смешанного произведения через координаты. Приложения смешанного произведения.

Начать можно с определений по векторам в целом (билет 15)

Смешанное произведение векторов a, b, c – это число, находимое по формуле: (a×b)*c. Это число еще иногда называют векторно-скалярным произведением.

Свойства смешанного произведения:

1) векторы в смешанном произведении можно переставлять по кругу, значение не изменится (так как не изменится не свойство тройки – левая/правая, ни длина векторов)

2) смешанное произведение не меняется, если поменять операции скалярного и векторного произведений местами (приоритет остается у векторного произведения): $(\vec{a} \times \vec{b}) * \vec{c} = \vec{a} * (\vec{b} \times \vec{c})$

3) Если переставлять векторы не по кругу, а поменять два соседа местами, то смешанное произведение поменяет знак (так как если тройка была правой в следствие такой операции она станет левой и наоборот)

Смешанное произведение через координаты

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

(да, это такое обозначение смешанного произведения)

Выводится из почленно перемноженных координатной формы записи векторного произведения a на b и координатной формы вектора c (подробнее – Письменный, стр 56)

Приложения смешанного произведения:

Геометрический смысл: Объем параллелепипеда, построенного на трех данных векторах, также объем треугольной пирамиды (объем пар-педа разделить на 6)

Необходимое и достаточное условие компланарности трех векторов 3 вектора компланарны тогда и только тогда, когда их смешанное произведение равно нулю

Доказательство необходимости (дано: (a×b)*c = 0). Предположим, что векторы не компланарны. Тогда должно быть можно построить параллелепипед на этих векторах с объемом = 0, что невозможно => предположение неверно, векторы компланарны.

Доказательство достаточности (дано: векторы компланарны). Тогда (a×b) перпендикулярен вектору c (по правилам нахождения векторного произведения), а значит скалярное произведение (a×b)*c = 0, чтд.

Определение ориентации тройки векторов в пространстве: если смешанное произведение больше нуля, то тройка правая, если меньше нуля – левая.

19) n - мерный вектор. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение. Длина.

Начать можно с определений по векторам в целом (билет 15)

Линейные операции над векторами: сложение векторов (возможно только на векторах одинаковой размерности!), умножение вектора на число

Скалярное произведение для nмерного вектора вычисляется по формуле аналогичной скалярному произведению для 2\3мерных векторов; в координатной форме только будет больше буковок проекций.

Длина вектора также вычисляется аналогично (корень из суммы квадратов всех координат)

20) Линейное векторное пространство. Примеры. Линейная независимость векторов.

Линейное пространство – это множество элементов произвольной природы x, y, z ..., для которых:

1) Определена операция сложения x + y результат которой попадает в это же линейное пространство

2) Определена операция умножения элемента на число, результат которой попадает в это же линейное пространство

3)Верны следующие аксиомы линейного пространства:

1) $x + y = y + x$

2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

3) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$

4) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

5) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$

6) Существует нулевой элемент, такой что $0*x = x$ для любого элемента этого линейного пространства

7) $x*1=1*x=x$ для любого элемента этого линейного пространства

8) Для каждого элемента существует только один противоположный элемент, такой что $x + (-x) = 0$

Векторное пространство – синоним линейного пространства. Какими бы по природе ни были элементы линейного пространства (числа, матрицы, функции и т.п.) эти элементы в рамках пространства можно называть векторами.

Вещественное линейное пространство – это пространство, на котором операция умножения на число определена только для вещественных чисел. Аналогично определяется Комплексное линейное пространство.

Конкретное линейное пространство – пространство, для которого известна природа его элементов.

Примеры линейных пространств: 1) вещественные числа (по отношению операции умножения на вещественное число) 2) матрицы 3) векторы 4) многочлены n-го порядка

По аналогии с тем, как давалось определение линейно зависимых и линейно независимых векторов вне линейных пространств, можно дать им определении и в этих пространствах.

Система векторов (>1 штуки) называется линейно зависимой, если их линейная комбинация может быть равна нулю не только, если все коэффициенты = нулю (тождественно утверждению – нулевой вектор разложим (единственным образом) по этим векторам). Векторы называются линейно независимыми, только если их линейная комбинация равна нулю только тогда, когда все коэффициенты равны нулю.

- Как определить, являются ли векторы линейно независимыми? Составить матрицу из этих векторов. Если ранг матрицы равен количеству векторов, то векторы линейно независимы. Подробно в билете 15

Изоморфизм нескольких линейных пространств: если между x1 из L1 и x2 из L2 можно установить взаимно однозначное соответствие (аналогично для сумм двух элементов/ произведений элементов на одно и то же число)

Пространство с базисом I j k называют геометрическим (координатным) пространством

21) Базис линейного векторного пространства и координаты вектора. Разложение вектора по системе векторов. Размерность пространства.

Базис линейного пространства – это любая совокупность n независимых векторов e1, e2, … en, таких что любой вектор x рассматриваемого линейного пространства можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов.

Коэффициенты линейной комбинации называют координатами (компонентами) вектора в этом базисе.

Разложение вектора по системе векторов. Говорят, что вектор $\vec{b}$ разлагается по системе векторов $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3}\dots$ (выражается через систему векторов $\overrightarrow{a_1},\ \overrightarrow{a_2},\ \overrightarrow{a_3}\dots$), если существуют такие числа $b_1, b_2, b_3 \dots$ что выполняется равенство

$\vec{b} = b_1 *\ \overrightarrow{a_1} + b_2 * \overrightarrow{a_2} + \dots + b_n * \overrightarrow{a_n}$. Факт: Любой вектор разложим по диагональной единичной системе векторов той же размерности, что и исходный вектор.

Размерность пространства – это максимальное количество линейно независимых векторов, которые могут в нем быть/число базисных векторов в этом пространстве. Например, в трехмерном пространстве – это три, в двумерном – два.

22) Подпространство линейного пространства

Подпространством линейного пространства называют пространство, содержащие только элементы исходного пространства, и такое что оно остается линейным пространством (то есть выполняются аксиомы линейных пространств и результаты операций сложения элементов/ умножения элементов на число попадают в исходное пространство).

Свойства линейного подпространства

1) Размерность подпространства ≤ размерности исходного пространства.

2) Любой базис подпространства можно дополнить векторами так, чтобы новая совокупность вектором оказалась базисом исходного пространства

Линейная оболочка для некоторой системы векторов из линейного пространства – это множество всех их возможных линейных комбинаций. По свойствам линейных пространств такое множество является подмножеством исходного линейного пространства.

23) Переход к новому базису.

Вывод «формул» перехода:

Пусть дано два базиса: $e1 \dots e3$ и $E1 \dots E3$ (рассматриваем пример на трехмерном пространстве, но аналогичные рассуждения можно применить к сколь угодно мерному пространству)

Пусть есть некий вектор X, тогда его можно разложить по обоим базисам:

(1) $X = x1e1 + x2e2 + x3e3$

(2) $X = x'1E1 + x'2E2 + x'3E3$

С другой стороны, каждый из векторов E1…E3 можно разложить по первому базису:

(3)

$E1 = \tau11*e1 + \tau21*e2 + \tau31*e3$

$E2 = \tau12*e1 + \tau22*e2 + \tau32*e3$

$E3 = \tau13*e1 + \tau23*e2 + \tau33*e3$

Подставляя каждое из выражений системы (3) в уравнение (2) получим:

$X = x'1(\tau11*e1 + \tau21*e2 + \tau31*e3) + x'2(\tau12*e1 + \tau22*e2 + \tau32*e3) + x'3(\tau13*e1 + \tau23*e2 + \tau33*e3)$

$X = x'1*\tau11*e1 + x'1*\tau21*e2 + x'1*\tau31*e3 + x'2*\tau12*e1 + x'2*\tau22*e2 + x'2*\tau32*e3 + x'3*\tau13*e1 + x'3*\tau23*e2 + x'3*\tau33*e3$

$X = x'1*\tau11*e1 + x'2*\tau12*e1 + x'3*\tau13*e1 + x'1*\tau21*e2 + x'2*\tau22*e2 + x'3*\tau23*e2 + x'1*\tau31*e3 + x'2*\tau32*e3 + x'3*\tau33*e3$

(4) $X = e1(x'1*\tau11 + x'2*\tau12 + x'3*\tau13) + e2(x'1*\tau21 + x'2*\tau22 + x'3*\tau23) + e3(x'1*\tau31 + x'2*\tau32 + x'3*\tau33)$ – это снова разложение вектора X по базису e1…e3. В силу единственности разложения вектора по базису из (1) и (4) получим систему:

(5)

$x1 = x'1*\tau11 + x'2*\tau12 + x'3*\tau13$

$x2 = x'1*\tau21 + x'2*\tau22 + x'3*\tau23$

$x3 = x'1*\tau31 + x'2*\tau32 + x'3*\tau33$

Эту систему можно переписать в матричном виде:

$$X = \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix};\ \mathrm{T} = \begin{bmatrix} \tau11 & \tau12 & \tau13 \\ \tau21 & \tau22 & \tau23 \\ \tau31 & \tau32 & \tau33 \end{bmatrix};\ X' = \begin{bmatrix} x'1 \\ x'2 \\ x'3 \end{bmatrix}$$

$X = T * X'$

Здесь матрица T называется матрицей перехода от базиса e1…e3 к базису E1…E3, ее столбцы – это столбцы координат базиса, в который нужно перенести вектор.

Далее систему можно решать любым известным способом решения СЛАУ

24) Евклидово пространство. Неравенство Коши- Буняковского. Неравенство треугольника.

Евклидово пространство – это вещественное линейное векторное пространство, на котором для любых двух векторов x и y определена операция скалярного умножения, и для этой операции выполняются следующие свойства (x, y, c – векторы, α – число):

1) (x, y) = (y, x)

2) (x + y, c) = xc + yc

3) α(x,y)= (αx, y)

Неравенство Коши-Буняковского

$|(\vec{x} * \vec{y})| \leq |\vec{x}| * |\vec{y}|$

Доказательство:

Очевидно, что $|(\overline{\alpha x - \vec{y}} * \overline{\alpha x - \vec{y}})| \geq 0$. В силу свойств скалярного произведения:

$(\alpha x - y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x - y) - (y, \alpha x - y) = (\alpha x, \alpha x) - (\alpha x, y) - (y, \alpha x) + (y, y) =$

$= \alpha^2(x, x) - 2\alpha(x, y) + (y, y) \geq 0$. Дискриминант этого уравнения относительно α ≤ 0 (так значение выражения строго неположительно исходя из условия выражение ≥ 0) => $(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y)$ => $|(\vec{x} * \vec{y})| \leq |\vec{x}| * |\vec{y}|$, ч.т.д.

Неравенство треугольника

$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$

Доказательство. 1) С одной стороны очевидно, что $|(\vec{x} + \vec{y}) * (\vec{x} + \vec{y})| = |\vec{x} + \vec{y}|^2$

2) С другой стороны, по свойствам скалярного произведения это можно расписать как $(\vec{x} + \vec{y}) * (\vec{x} + \vec{y}) = (x, x + y) + (y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) =$

$(x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$ В силу того, что скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины, получим: $= |x|^2 + 2(x, y) + |y|^2$. По неравенству Коши-Буняковского: $|(\vec{x}\vec{y})| \leq |\vec{x}| * |\vec{y}|$ из чего следует, что

$|x|^2 + 2(x, y) + |y|^2 \leq |x|^2 + 2|x| * |y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2$, из чего можно сделать вывод, что

$|\vec{x} + \vec{y}|^2 \leq |x|^2 + 2|x| * |y| + |y|^2$, или, если извлечь корень из одного и другого то

$|\vec{x} + \vec{y}| \leq |\vec{x}| + |\vec{y}|$ ч.т.д.

25) Норма Евклидова пространства. Угол между векторами.

Нормированное линейное пространство – линейное пространство, на котором каждому вектору x из этого пространства поставлено в соответствие некоторое неотрицательное число ||x||, называемое его нормой и выполняются условия

1) ||x|| >= 0 и ||x||=0 только если x = 0

2) ||λx|| = λ||x|| для любого числа λ

3) ||x+y|| <= ||x|| + ||y||

Норма Евклидова пространства – это (чаще всего!) длина вектора, то есть ||x|| = |x|

Норму можно выбрать и другую! Главное – следовать условиям выше!

Угол между векторами в Евклидовом пространстве вычисляется по формуле:

$\cos\alpha = \frac{\vec{a}*\vec{b}}{|\vec{a}|*|\vec{b}|}$ или $= \frac{a_z b_z + a_z b_z + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} * \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$ (получено из формулы скалярного произведения).

26) Ортонормированный базис. Ортогонализация.

Нормированный базис – это базис, все векторы которого имеют единичную длину. Чтобы нормировать любой вектор, надо умножить его на число, обратное его длине.

Ортогональные векторы – векторы, скалярное произведение которых равно нулю.

Ортогональный базис – базис, состоящий из ортогональных друг другу векторов.

Ортонормированный базис – базис, являющийся и нормированным, и ортогональным.

ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ БАЗИСА:

Рассмотрим вывод формул, по которым базис приводится к ортогональному виду. Пусть дан базис $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}$, а в результате мы хотим получить ортогональный базис $\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}$.

1) Как первый вектор возьмем $\vec{f_1}$ просто $\vec{g_1}$

2) Найдем второй вектор. Пусть $\vec{f_2} = \vec{g_2} + \alpha_1 * \vec{g_1}$. Этот вектор точно не нулевой, так как $\vec{g_1}, \vec{g_2}, \vec{g_3}$ линейно не зависимы (так как образуют базис)

Чтобы базис был ортогональным, все его векторы должны быть ортогональны, то есть в нашем случае должно выполняться условие $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$, или иначе – их скалярное произведение должно быть равно нулю. Итак, нужно найти α удовлетворяющее условию ортогональности.

$(\vec{f_1} * \vec{f_2}) = 0$

$\vec{f_1} * (\vec{g_2} + \alpha_1 * \vec{g_1}) = 0$

$\vec{f_1} * \vec{g_1} + \vec{f_1} * \alpha_1 * \vec{g_2} = 0$ Вспомним, что $\vec{f_1} = \vec{g_1} \neq 0$, а скалярное произведение двух равных векторов равно квадрату длины, так как косинус 0 = 1

$\alpha_1 * |\vec{g_1}|^2 = -\vec{g_1} * \vec{g_2}$

$$\alpha_1 = \frac{-\vec{g_1} * \vec{g_2}}{|\vec{g_1}|^2}$$

3) Аналогично найдем третий вектор. Пусть $\vec{f_3} = \vec{g_3} + \beta_1 * \vec{f_1} + \beta_2 * \vec{f_2}$. Чтобы базис был ортогональным, нужно чтобы все векторы были ортогональны. $\vec{f_1} \perp \vec{f_2}$ из пункта 2, теперь потребуем, чтобы $\vec{f_1} \perp \vec{f_3}$ и $\vec{f_2} \perp \vec{f_3}$

1.

$(\overrightarrow{f_1} * \overrightarrow{f_3}) = 0$

$\overrightarrow{f_1} * (\overrightarrow{g_3} + \beta_1 * \overrightarrow{f_1} + \beta_2 * \overrightarrow{f_2}) = 0$

$\overrightarrow{f_1} * \overrightarrow{g_3} + \overrightarrow{f_1} * \beta_1 * \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_1} * \beta_2 * \overrightarrow{f_2} = 0$ (т. к. $\overrightarrow{f_1} \perp \overrightarrow{f_2}$)

$\overrightarrow{f_1} * \overrightarrow{g_3} + \beta_1 * \left|\overrightarrow{f_1}\right|^2 = 0$

$\beta_1 = -\frac{\overrightarrow{f_1} * \overrightarrow{g_3}}{\left|\overrightarrow{f_1}\right|^2}$

2. Аналогично рассуждая:

$\beta_2 = -\frac{\overrightarrow{f_2} * \overrightarrow{g_3}}{\left|\overrightarrow{f_2}\right|^2}$

Далее, чтобы нормировать полученный базис, нужно разделить все его векторы на их длины

27) Линейные операторы. Матрица линейного оператора. Действия с линейными операторами. Связь между линейными операторами в разных базисах

Если в линейном пространстве задан некоторый закон, в соответствие которому каждому элементу x из этого пространства ставится в соответствие некий элемент y из этого же пространства, то этот закон называют оператором и обозначают A: x->y или y=Ax. Так же может быть определен оператор, который ставит в соответствие элементу из одного пространства элемент из другого пространства.

Линейный оператор – это оператор, для которого выполняются условия, что для произвольных x и y из линейного пространства верно:

1) A(x + y) = Ax + Ay

2)A(αx) = αAx

Каждый линейный оператор можно представить в виде матрицы порядка n (где n – размерность пространства) и наоборот.

$Ax = x_1 * A * e_1 + x_2 * A * e_2 + \cdots + x_n * A * e_n$ (В силу линейности оператора)

$y = y_1 * e_1 + y_2 * e_2 + \cdots + y_n * e_n$

Заметим, что каждый $A * e_i$ это некоторый вектор, а значит, каждый из таких векторов можно разложить всё по тому же базису. И если приравнять коэффициенты перед базисными векторами первого и второго уравнений выше, получим:

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

Матрица линейного оператора составляется как раз из этих коэффициентов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

! Матрица линейного оператора зависит от выбора базиса в этом пространстве!

С сайта MathProfi: Если задан какой-либо базис, то линейное преобразование удобнее представить в матричном виде. Как записать оператор в виде матрицы? На этот счёт существует общее правило: чтобы записать матрицу линейного преобразования в -мерном базисе нужно последовательно и строго по порядку применять данный оператор к базисным векторам, а результаты заносить в столбцы матрицы (слева направо).

Невырожденный оператор – оператор, определитель матрицы которой не равен 0.

Действия с линейными операторами

1) Сложение линейных операторов

2) Умножение линейного оператора на число

3) Умножение линейных операторов (это применение двух операторов к элементу строго *последовательно*)

(Доказательства – проверки свойств линейности)

Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах

Пусть дано два базиса: e1 … en и E1 … En.

Пусть T – матрица перехода из первого базиса в другой (матрица, столбцы которой - E1 … En)

Тогда x = T*x' (1) и y=T*y' (2).

В свою очередь y = Ax (3) и y' = Ax' (4).

Умножим (1) слева на матрицу оператора A:

A*x = A*T*x'

Используя выражения (2) и (3):

T*y' = A*T*x'

Умножим слева на матрицу, обратную T:

$y' = T^{-1} * A*T*x'$

Таким образом матрица оператора в новом базисе имеет вид $T^{-1} * A*T$

Матрица оператора A в другом базисе: $B = T^{-1} * A*T$, где T – матрица перехода из одного базиса в другой.

28) Ядро, образ, ранг, дефект линейного оператора

Область значений оператора (Образ пространства) Im(A) – это совокупность всех возможных Ax которые можно получить с помощью этого оператора на этом пространстве.

Ядро оператора Ker(A) – множество всех векторов x линейного пространства, таких что Ax = 0.

Дефект линейного оператора – размерность ядра оператора

Область значение и ядро оператора – это подпространства исходного пространства (очевидно)

Ранг оператора – ранг его матрицы = ранг области значений.

29) Сопряжённый и самосопряжённый оператор.

Сопряженный (некоторому оператору A) оператор A^* это оператор, матрица которого в любом ортонормированном базисе этого пространства является транспонированной матрицей для матрицы оператора A.

Свойства сопряженного оператора

1) $E^* = E$, где E – тождественный оператор, матрица которого – единичная в данном евклидовом пространстве.

2) $(A + B)^* = A^* + B^*$

3) $(A * B)^* = B^* * A^*$

4) Если обратная матрица A^{-1} существует, тогда $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$

Линейный оператор, определённый в евклидовом пространстве, называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряжённым оператором.

Свойства самосопряженного оператора (вытекают из свойств сопряженного оператора и определения самосопряженного оператора - $B^* = B$, $A^* = A$

1) $(A + B)^* = A^* + B^* = A + B$

2) $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1} = A^{-1}$

30) Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Теорема о характеристическом многочлене.

Собственный вектор x линейного оператора – это ненулевой вектор, удовлетворяющий условию: найдется такое число λ, что $Ax = \lambda x$. Число λ здесь называется собственным числом оператора. Собственные числа оператора не зависят от выбора базиса.

Спектр линейного оператора – это множество всех его собственных чисел

Нахождение собственных чисел и собственных векторов.

$Ax = \lambda x$ (определение)

$\lambda x = \lambda Ex$ (домножение на единичную матрицу)

$Ax - \lambda x = 0$; $Ax - \lambda Ex = 0$;

$X(A - \lambda E) = 0$ – матричное уравнение (однородная СЛАУ). Она имеет решения тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных, иными словами когда матрица $(A - \lambda E)$ вырожденная, то есть её определитель равен нулю. Запишем характеристическое уравнение: $|A - \lambda E| = 0$

|A – λE| - характеристический многочлен

(Нулевое решение нас не интересует, так как по определению собственный вектор не является нулевым)

Характеристическое уравнения можно переписать в следующем (координатном) виде:

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Решая это уравнение найдем собственные числа, и дальше уже, пользуясь ими, найдем собственные векторы из уравнения.

Теорема о характеристическом многочлене

Если все корни характеристического уравнения вещественны и различны, то матрица линейного оператора содержит n линейно независимых собственных векторов (ДОКАЗЫВАТЬ НЕ НАДО) Другая формулировка: если собственные векторы отвечают различным собственным числам, то эти векторы линейно независимы

Сумма всех собственных чисел равна сумме элементов на главной диагонали матрицы, а произведение всех собственных чисел равно определителю матрицы оператора.

Свойства собственных векторов линейного оператора:

1) Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же числу, является собственным вектором (из свойств решения однородной системы).

2) Собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, линейно независимы.

Свойства собственных векторов самосопряженного линейного оператора:

1) Собственные числа самосопряженного оператора – вещественные числа

2) Собственные векторы, отвечающие разным собственным числам, ортогональны

Доказательство. Из определения:

$\begin{cases} Ax_1 = \lambda_1 x_1 \\ Ax_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases} => \begin{cases} (Ax_1, x_2) = \lambda_1 (x_1, x_2) \\ (x_1, A\,x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2) \end{cases}$ Но так как левые части равны, складывая, получим что

$(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0 => (x_1, x_2) = 0 =>$ векторы ортогональны, ч.т.д.

3) В базисе из единичных собственных векторов матрица самосопряженного линейного оператора диагональна, причем элементы на главной диагонали – собственные числа.

31) Линейные и квадратичные формы. Матрица квадратичной формы.

Линейная форма – это однородный многочлен первой степени от n переменных.

Квадратичная форма – это однородный многочлен второй степени от n переменных. Пример: $L(x_1, x_2, x_3) = 4\,x_1^2 - 2x_1x_2 + x_1x_3 + \; x_2^2 - 3x_3^2$

Из коэффициентов перед переменными можно построить матрицу, используя как координату строки координату первого множителя в паре, а как координату столбца - второго, при этом симметричные коэффициенты (например, при x1x3, x3x1) соответственно должны быть разделены на два. Таким образом можно получить матрицу квадратичной формы, она будет симметричной относительно главной диагонали, а ее элементы называют коэффициентами квадратичной формы.

Ранг квадратичной формы = ранг матрицы квадратичной формы.

Определитель квадратичной формы = определитель матрицы квадратичной формы.

Невырожденная квадратичная форма – форма, определитель которой не равен нулю.

32) Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Теорема Лагранжа

Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Канонический вид – это когда матрица квадратичной формы - диагональная

Есть несколько способов приведения квадратичной формы к каноническому виду, к примеру – метод с переведом матрицы квадратичной формы в базис из собственных векторов, метод Лагранжа, метод Якоби.

СПОСОБ 1, О КОТОРОМ В БИЛЕТЕ ПОЧЕМУ-ТО НЕ СПРАШИВАЕТСЯ, НО ПО ФАКТУ НАС УЧИЛИ ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ИМЕННО ИМ

1) НАЙТИ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА 2) НАЙТИ СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ 3) ПЕРЕЙТИ В БАЗИС ИЗ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ (СОБСТВЕННЫЕ ВЕКТОРЫ ОРТОГОНАЛЬНЫ ДРУГ ДРУГУ) 4)X' – НОВЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧКИ, ТАК ВОТ X = TX' 5)ИЗБАВЛЯЕМСЯ ОТ ПРОИЗВЕДЕНИЙ 6) СТРОИМ МАТРИЦУ, (У НЕЕ НА ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛИ БУДУТ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА, ЕСЛИ БАЗИС ДО ЭТОГО НОРМИРОВАЛИ), ЧТОБЫ ОПРЕДЕЛИТЬ ПОРЯДОК СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В МНОГОЧЛЕНЕ

! ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТЬ ФОРМЫ ЗАВИСИТ ОТ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ: ЕСЛИ ВСЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫ, ТО ОНА ПОЛОЖИТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕНА, ВСЕ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫ – НЕОТРИЦАТЕЛЬНО ОПРЕДЕЛЕНА, СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА РАЗНЫХ ЗНАКОВ – НЕЗНАКООПРЕДЕЛЕНА И ПР.

МИНУСЫ СПОСОБА: ЧЕМ БОЛЬШЕ РАНГ МАТРИЦЫ, ТЕМ БОЛЕЕ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ МНОГОЧЛЕН ПОЛУЧИТСЯ, ТЕМ СЛОЖНЕЕ БУДЕТ ЕГО РЕШАТЬ, ОСОБЕННО ЕСЛИ СОБСТВЕННЫЕ ЧИСЛА НЕЦЕЛЫЕ.

СПОСОБ 2 – Метод Лагранжа

Если кратко, то весь метод строится на постепенном выделении полных квадратов.

1) Если в данный момент в квадратичной форме есть «квадраты», то тогда обычным способом выделяем полные квадраты – собрав в одну скобку все слагаемые, а которых есть эта переменная и добавив&вычтя то, чего не достает для полного квадрата.

2) Если «квадратов» в данный момент нет, то берем произвольное произведение $x_j x_m$ и производим замену переменных: $x_j = x_j + x_m; x_m = x_j - x_m$ С помощью этого искусственного приема мы получаем квадрат и можем вернуться к шагу 1.

Теорема Лагранжа – любую квадратичную форму можно с помощью выделения полных квадратов привести к каноническому виду. Доказательство = описание алгоритма, как это сделать.

Простенький пример по методу Лагранжа:

$2x_1^2 + x_2^2 - 16x_1x_2 = 2\,(x_1^2 - 8x_1x_2) + x_2^2 = 2\,(x_1^2 - 2 * x_1 * 4x_2 + (4x_2)^2 - (4x_2)^2) + x_2^2 =$

$= 2(x_1 - 4x_2)^2 - 2 * 4\,x_2^2 + x_2^2 = 2(x_1 - 4x_2)^2 - 7\,x_2^2$

Пере назовём переменные и получим квадратичную форму в каноническом виде:

$2y_1^2 - 7\,y_2^2$

33) Метод Якоби. Диагонализация.

Диагонализация – приведение матрицы к диагональному виду

СПОСОБ 3 – Метод Якоби

Угловой минора порядка i – это определитель квадратной матрицы порядка i, взятой из верхнего левого угла матрицы квадратичной формы. Очевидно, что если матрица квадратичной формы имеет порядок n, то у нее n угловых миноров.

Теорема Якоби

Если для матрицы A квадратичной формы в некотором базисе $e_1 \dots e_n$ все её угловые миноры, кроме, возможно, $\underline{\Delta}_n$ отличны от нуля, то существует единственное треугольное преобразование базиса, с помощью которого данная квадратичная форма приводится к каноническому виду. При этом канонические коэффициенты вычисляются по формулам $\lambda_1 = \Delta_1, \lambda_j = \frac{\Delta_j}{\Delta_{j-1}}; 2 \le j \le n$

Простенький пример по методу Якоби: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$

Запишем матрицу квадратичной формы: $\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ -1/2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

$\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = \frac{3}{4};\ \Delta_3 = \frac{1}{4}.\ \lambda_1 = \Delta_1 = 1;\ \lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{3}{4};\ \ \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -\frac{1}{3}$

Итак, канонический вид данной квадратичной формы в треугольном базисе $y_1^2 + \frac{3}{4}y_2^2 - \frac{1}{3}y_3^2$

Замечание: если какой-то из угловых найденных миноров оказался равен нулю, то можно поменять названиями переменные в исходной квадратичной форме, составить новую матрицу и возможно так всё получится.

! Коэффициенты, полученные с помощью метода Якоби, могут как совпадать с коэффициентами их других методов, так и не совпадать, поскольку здесь коэффициенты находятся для углового базиса, а не для базиса из собственных векторов. Часто совпадают, но это не обязательно. Например, не совпадут для примера использования метода Лагранжа.

Треугольное преобразование базиса ($f_1 - f_n$ – треугольный базис):

$$\begin{cases} f_1 = e_1 \\ f_2 = c_{12}e_1 + e_2 \\ f_3 = c_{13} + c_{23}e_2 + e_3 \\ \dots \\ f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + e_n \end{cases}$$

34) Знакоопределённость квадратичных форм. Критерий Сильвестра.

Знакоопределенность квадратичной формы

! Если все переменные равны нулю, то и значение кв формы равно нулю !

1) Положительно определенная квадратичная форма – её значение везде положительно, кроме случая. когда все переменные равны нулю

2) Отрицательно определенная квадратичная форма – её значение везде отрицательно, кроме случая. когда все переменные равны нулю

3) Неположительно определена – её значение на любых наборах переменных неположительно (меньше или равно нулю)

4) Неотрицательно определена – её значение на любых наборах переменных неотрицательно

5) Неопределена – многочлен может принимать как положительное, так и отрицательное значение.

! Знакоопределенность формы зависит от собственных чисел: если все положительны, то она положительно определена, все неотрицательны – неотрицательно определена, собственные числа разных знаков – незнакоопределена и пр.

Теорема Критерий Сильвестера

1. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определена необходимо и достаточно, чтобы все её угловые миноры были положительны

2. Для того, чтобы квадратичная форма была отрицательно определена, необходимо и достаточно, чтобы знаки ее угловых миноров чередовались, причем первый угловой минор был меньше нуля.

35) Системы координат на плоскости. Преобразования системы координат. Деление отрезка в данном отношении. Уравнения линий на плоскости.

Система координат –это способ записи положения точки на плоскости/в пространстве. Чаще всего мы используем прямоугольную систему координат, которую еще называют декартовой. Она задается двумя координатными осями – осью абсцисс и осью координат. Точку их пересечения называют О, или начало координат. На каждой из осей откладывается единичный отрезок, чаще всего для обеих осей берут отрезок одинаковой длины. За координаты точки произвольной точки М принимают координаты вектора ОМ, исходящего из начала координат.

Определение, системы координат, которое нам продиктовали на консультации: Система координат – совокупность числовых прямых, количество которых совпадает с размерностью пространства, имеющих общее начало, направленных вдоль векторов, задающих некоторый базис этого пространства и на которых задан единичный отрезок (масштаб)

Мы проходили только декартову прямоугольную систему координат, поэтому рассказываем только про нее.

Про полярную систему координат понятно написано в книжке Письменного на стр. 59, через нее проще доказываются формулы преобразования координат, когда мы наклоняем координатные оси (это можно и по-другому доказывать, но у меня через полярную систему будет).

Преобразование системы координат из полярной в прямоугольную и обратно:

$$\begin{cases} x = r * \cos\varphi \\ y = r * \sin\varphi \end{cases} \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ tg\,\varphi = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

Расстояние между двумя точками.

$$d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Деление отрезка в заданном отношении. Пусть дан отрезок AB – A(x1, y1), B(x2, y2).

На нем отметили произвольную точку M, не совпадающую с A или B. Тогда можно сказать, что точка M(x, y) делит отрезок AB в каком-то соотношении λ, то есть

$\frac{AM}{MB} = \lambda$. Но так как AM можно представить в виде (x – x1)i + (y – y1)j, а MB (x2 – x)i + (y2 – y)j, то равенство можно переписать в виде:

(x – x1)i + (y – y1)j = λ(x2 – x)i + λ(y2 – y)j, а так как равные векторы имеют равные координаты, можно выразить x и y по-отдельности:

x – x1 = λx2 – λx; x + λx = λx2 + x1; $x = \frac{\lambda x2 + x1}{1 + \lambda}$. Аналогично можно получить $y = \frac{\lambda y2 + y1}{1 + \lambda}$. – формулы деления отрезка в данном отношении.

Преобразования системы координат. Существует основных преобразования: Параллельный перенос осей координат и поворот осей координат.

1) Параллельный перенос. Помогает избавиться от линейных слагаемых вида bx. При этом преобразовании изменяется точка начала координат, направления осей координат остается неизменным.

Для того, чтобы совершить параллельный перенос системы координат нужно заменить X в уравнении линии на (X' + a), а y на (Y' + b), а затем подобрать такие a и b, чтобы коэффициенты перед линейными слагаемыми равнялись нулю.

! Изменение по X будет видно по координате Y и наоборот.

2) Поворот осей координат. Используется, чтобы убрать слагаемые вида xy, то есть произведения нескольких переменных. Обе оси поворачиваются на одинаковый угол, начало координат остается без изменений.

Для того, чтобы выполнить поворот координатных осей нужно заменить x и y:

$$\begin{cases} x = x' * \cos\varphi - y' * \sin\varphi \\ y = y' * \cos\varphi + x' * \sin\varphi \end{cases}$$

ВЫВОД ФОРМУЛ:

1) Сделать рисунок, на котором изображены только две прямоугольные системы координат, одна исходная, другая – уже повернутая на угол фи. Выберем произвольную точку М с координатами (x, y) в первой систему координат. М лежит выше оси Ox’ для наглядности доказательства

2) Введем две полярных системы координат: начало координат не изменяется, а направления оси p совпадают с Ox и Ox’ соответственно.

3) Распишем координаты точки М в одной и в другой системе координат:

$$\begin{cases} x = r * \cos(\varphi + \alpha) \\ y = r * \sin(\varphi + \alpha) \end{cases}; \begin{cases} x' = r * \cos\alpha \\ y' = r * \sin\alpha \end{cases}$$

4) Вспомним формулы суммы синусов и косинусов и, пользуясь ими, перепишем первую систему:

$$\begin{cases} x = r * \cos\alpha * \cos\varphi - r * \sin\alpha * \sin\varphi \\ y = r * \sin\alpha * \cos\varphi + r * \sin\varphi * \cos\alpha \end{cases}$$

5) Подставим x’ и y’, где это возможно (по второй системе пункта 3)

$$\begin{cases} x = x' * \cos\varphi - y' * \sin\varphi \\ y = y' * \cos\varphi + x' * \sin\varphi \end{cases}$$

Для того, чтобы совершить поворот, нужно в уравнение подставить нововыраженные иксы и игреки и затем, приравняв нулю нужные коэффициенты, найти угол фи.

На практике сначала выполняют поворот (если он вообще нужен), а уже потом перенос.

Уравнения линий на плоскости – это уравнения, такие что если в них подставить координаты любой точки этой прямой, оно обратится в верное равенство, а если подставить координаты любой точки, не принадлежащей прямой, то в Неверное равенство.

36) Уравнение прямой на плоскости, все виды и переход от одного к другому. Основные задачи.

Одну и ту же прямую на плоскости можно задать разными уравнениями. Уравнение в каждой конкретной ситуации выбирают в зависимости от задачи (что дано и пр.)

1) Векторное уравнение прямой $(\vec{r} - \vec{r_0})\vec{n} = 0$

Делается рисунок с фиксированной точкой Mo и подвижной точкой M, а также вектором нормали. Уравнение выводится из условия равенства скалярного произведения MoM*n нулю.

2) Уравнение прямой с вектором нормали и заданной точкой.

$(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y = 0$

Векторы из уравнения 1 расписываются в координатной форме.

3) Общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$

В уравнении 2 nx обозначается как A, ny как B, скобки раскрываются и остаточек обозначается за C

4) Параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$

Вернемся к картинке из уравнения один и добавим направляющий вектор Sl (m, n). Запишем очевидное равенство, что существует такой t что MoM = tSl, и дальше выразим t и запишем в координатном виде. Получим сразу и 4е и 5е уравнения.

5) Каноническое уравнение прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$

6) Уравнение прямой, проходящей через 2 заданных точки $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$

Если две точки лежат на прямой, то существует такой направляющий вектор, началом которого является одна точка, а концом – другая. Распишем координаты вектора как разность координат этих точек

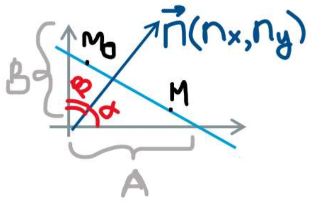
7) Нормальное уравнение прямой cosα*x +cosα*y – p = 0

Альфа и бета – углы наклона нормали к осям, p – расстояние от 0 до прямой

Вспоминаем общее уравнение прямой $Ax + By + C = 0$, в котором $A = n_x, B = n_y, C = -n_x x_0 - n_y y_0$. Разделим обе части уравнения на длину вектора нормали = $\sqrt{A^2 + B^2}$:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y - \frac{n_x x_0 + n_y y_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Обозначим (заметим, что) коэффициент при x – это направляющий косинус α(к оси ox), коэффициент при y - направляющий косинус β (к оси oy), коэффициент при свободном члене – формула расстояния от начала координат до нашей прямой (обозначим p). Итак, уравнение приобрело вид cosα*x +cosα*y – p = 0.



8) Уравнение прямой с угловым коэффициентом y = kx+b

Выводится из общего уравнения прямой. Важно:

1) $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$ – координаты точки пересечения пряммой с осью Oy

2) $b = -\frac{C}{B}$ – длина отрезка, отсекаемого прямой на Oy

9)Уравнение пучка прямых (то есть при изменяющемся k и некой неподвижной точке) $y = y_0 + k(x - x_0)$

Выводится загадочным образом из загадочного $\frac{y - y_0}{x - x_0} = k$.

10) Уравнение в отрезках $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Вспоминаем общее уравнение прямой $Ax + By - C = 0$, Разделим всё на С и перенесём единицу вправо

$\frac{A}{C}x + \frac{B}{C}y = 1; \frac{x}{\frac{C}{A}} + \frac{y}{\frac{C}{B}} = 1;$ Введем обозначения $a = \frac{C}{A}; b = \frac{C}{B}$

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Здесь a и b – отрезки, отсекаемые на соответствующих осях координат

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ

Условие параллельности двух прямых

Прямые параллельны => их направляющие векторы/нормали параллельны/одинаковый угол наклона, то есть:

Если прямые даны в общем виде: A1/A2 = B1/B2

Если в каноническом: m1/m2 = n1/n2

Если в y = kx+b: k1 = k2

Условие перпендикулярности двух прямых

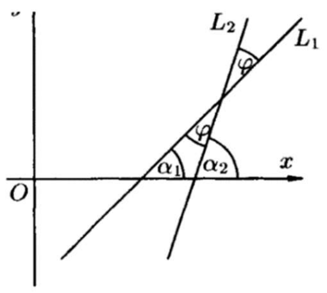
Скалярное произведение вектора M0M и вектора нормали должно быть равно нулю

Если прямые даны в общем виде: A1*A2 + B1*B2 = 0

Если в каноническом: m1*m2 + n1*n2 = 0

Если в y = kx+b: k1 * k2 = -1

Угол между двумя прямыми

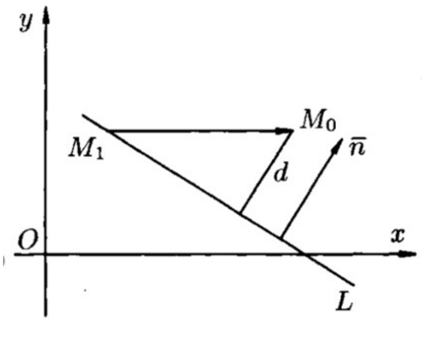


$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1$(внешний угол треугольника) => $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$

$tg\ \varphi = tg\ (\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_2 * tg\alpha_1}$, а т.к. $tg\alpha_2 = k_2;\ tg\alpha_1 = k_1$

$$tg\ \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 * k_1}$$

Расстояние от точки до прямой $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$



Расстояние от точки до прямой равно произведению проекции произвольного вектора с началом на прямой и концом в заданной точке на нормаль данной прямой.

$$d = \text{ПР}_{\vec{n}}\overrightarrow{M_1M_0} = \left|\frac{\overrightarrow{M_1M_0} * \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

А в силу того, что точка M1 принадлежит прямой, то есть верно равенство

$Ax_1 + By_1 + C = 0, \qquad C = -Ax_1 - By_1$:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

37) Эллипс. Вывод канонического уравнения и его свойства.

Эллипс – фигура, образованная из множества точек, таких что сумма расстояний от каждой из них до двух точек-фокусов – постоянная величина.

Обозначим 2c = расстояние между фокусами, 2a – та самая сумма расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов. Точки фокусов соответственно имеют координаты (+-c;0), а точка M (x, y)

Запишем уравнение, согласно словесной характеристике эллипса: $MF_1 + MF_2 = 2a$

Распишем его, зная координаты точек: $\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} + \sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} = 2a$

Переставим немного: $\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} - 2a = -\sqrt{(-c-x)^2 + (y)^2}$

Возведем всё в квадрат: $(c-x)^2 + (y)^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} = (c+x)^2 + (y)^2$

Раскроем скобки, сократим и приведем подобные:

$$c^2 - 2cx + x^2 + (y)^2 + 4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} = c^2 + 2cx + x^2 + (y)^2$$

$$4a^2 - 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} = 4cx$$

Разделим всё на 4 и переставим: $-a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} = cx - a^2$

Возведём всё в квадрат: $a^2\,(c-x)^2 + a^2\,y^2 = c^2x^2 - 2xca^2 + a^2 * a^2$

Раскроем скобки: $a^2c^2 - 2xca^2 + a^2x^2 + a^2\,y^2 = c^2x^2 - 2xca^2 + a^2 * a^2$

Сократим; перенесем все с X и У влево: $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2\,y^2 = a^2 * a^2 - a^2c^2$

Вынесем общий множитель за скобки: $x^2(a^2 - c^2) + a^2\,y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Обозначим $a^2 - c^2 = b^2$: $x^2b^2 + a^2\,y^2 = a^2b^2$

Разделим обе части уравнения на a^2b^2: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение получено.

Свойства:

Фокусные точки находятся из $a^2 - c^2 = b^2$

Эксцентриситет эллипса = c/a = коэффициент сжатия эллипса

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называют директрисами эллипса.

$$\frac{\text{Расстояние от точки эллипса до одного из фокусов } r}{\text{Расстояние от этой точки до соответствующей директриссы } d} = \varepsilon$$

38) Гипербола. Вывод канонического уравнения и ее свойства.

Гипербола – это фигура, состоящая из точек, удовлетворяющих условию, что разность расстояний до двух фокусов – постоянная величина

Обозначим 2c = расстояние между фокусами, 2a – та самая разность расстояний от произвольной точки эллипса до фокусов. Точки фокусов соответственно имеют координаты (+-c;0), а точка M (x, y)

Запишем уравнение, согласно словесной характеристике эллипса: $|MF_1 - MF_2| = 2a$

Распишем его, зная координаты точек: $\sqrt{(c-x)^2 + (-y)^2} - \sqrt{(-c-x)^2 + (-y)^2} = \pm 2a$

Переставим немного: $\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{(-c-x)^2 + (y)^2} \pm 2a$

Возведем всё в квадрат: $(c-x)^2 + (y)^2 = (c+x)^2 + (y)^2 \pm 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} + 4a^2$

Раскроем скобки, сократим и приведем подобные:

$c^2 - 2cx + x^2 + (y)^2 = c^2 + 2cx + x^2 + (y)^2 \pm 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} + 4a^2$

$4xc = \pm 4a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2} + 4a^2$

Разделим всё на 4 и переставим: $xc - a^2 = \pm a\sqrt{(c-x)^2 + (y)^2}$

Возведём всё в квадрат: $c^2x^2 - 2xca^2 + a^2 * a^2 = a^2\,(c-x)^2 + a^2\,y^2$

Раскроем скобки: $c^2x^2 - 2xca^2 + a^2 * a^2 = a^2c^2 - 2xca^2 + a^2x^2 + a^2\,y^2$

Сократим; перенесем все с X и У влево: $a^2x^2 - c^2x^2 + a^2\,y^2 = a^2 * a^2 - a^2c^2$

Умножим на -1 и переставим: $c^2x^2 - a^2x^2 - a^2\,y^2 = a^2c^2 - a^2 * a^2$

Вынесем общий множитель за скобки: $x^2(c^2 - a^2) - a^2\,y^2 = a^2(c^2 - a^2)$

Обозначим $c^2 - a^2 = b^2 : x^2b^2 - a^2\,y^2 = a^2b^2$

Разделим обе части уравнения на a^2b^2: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – каноническое уравнение получено.

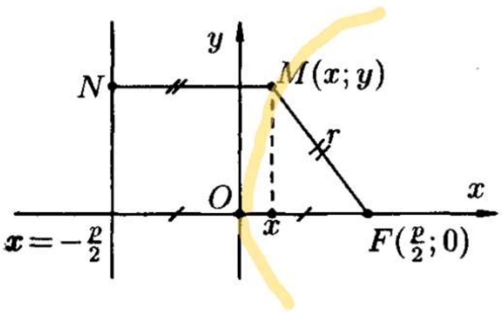
Свойства:

Основной прямоугольник гиперболы (показать), мнимая(не касается ветвей) и действительная (пересекает ветви) оси гиперболы

Асимптоты $y = \pm\frac{b}{a}$

39) Парабола. Вывод канонического уравнения и ее свойства.

Парабола – множество точек, одинаково удаленных от данной точки (фокуса) и данной прямой (директриссы)



Обозначим за p расстояние от фокуса до прямой-директриссы. Тогда координаты точки F (p/2; 0). Пусть M – произвольная точка с координатами (x,y), MN перпендикулярно прямой-директриссе

Запишем уравнение, ориентируясь на словесное описание параболы:

MN = MF

Зная координаты точек, распишем это уравнение:

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2} = \sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+(y-0)^2}$$

Возведём обе части в квадрат: $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 = \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$

Раскроем скобки: $x^2+\frac{2px}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2 =: x^2-\frac{2px}{2}+\left(\frac{p}{2}\right)^2 +y^2$

Сократим и упростим дроби: $px = -px+y^2$

Переставим: $y^2 = 2px$ – каноническое уравнение получено

Свойства:

Фокальный радиус точки M(x,y) – расстояние от нее до фокуса на оси Ox: $r = x+\frac{p}{2}$

40) Общее уравнение кривой второго порядка. Приведение кривой второго порядка к каноническому виду.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ – общее уравнение прямой второго порядка

Приведение ее к каноническому виду = замена координат таким образом, чтобы в уравнении не осталось линейных слагаемых.

Преобразования системы координат. Существует основных преобразования: Параллельный перенос осей координат и поворот осей координат.

1) Параллельный перенос. Помогает избавиться от линейных слагаемых вида bx. При этом преобразовании изменяется точка начала координат, направления осей координат остается неизменным.

Для того, чтобы совершить параллельный перенос системы координат нужно заменить X в уравнении линии на (X' + a), а y на (Y' + b), а затем подобрать такие a и b, чтобы коэффициенты перед линейными слагаемыми равнялись нулю.

! Изменение по X будет видно по координате Y и наоборот.

2) Поворот осей координат. Используется, чтобы убрать слагаемые вида xy, то есть произведения нескольких переменных. Обе оси поворачиваются на одинаковый угол, начало координат остается без изменений.

Для того, чтобы выполнить поворот координатных осей нужно заменить x и y:

$$\begin{cases} x = x' * \cos\varphi - y' * \sin\varphi \\ y = y' * \cos\varphi + x' * \sin\varphi \end{cases}$$

Вывод формул в билете 35

41) Плоскость в пространстве, все виды уравнений и переход от одного к другому.

1) Векторное уравнение плоскости $(\vec{r}-\vec{r_0})\vec{n}=0$

2) Уравнение прямой с вектором нормали и заданной точкой.

$(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z = 0$

Векторы из уравнения 1 расписываются в координатной форме.

3) Общее уравнение прямой $Ax + By + Cz + D = 0$

В уравнении 2 nx обозначается как A, ny как B, скобки раскрываются и остаточек обозначается за C

4) Нормальное уравнение cosα*x +cosα*y + cosγ*z – p = 0

Выводится по аналогии с нормальным уравнением прямой на плоскости, здесь α, β, γ – углы между координатными осями и нормалью

5) Уравнение «в отрезках» $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Выводится по аналогии с уравнением в отрезках прямой на плоскости, здесь a, b, c – отрезки, отсекаемые на соответствующих координатных осях

6) Уравнение, проходящее через три заданных точки.

Пусть даны три точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$, а также рассмотрим произвольную точку этой плоскости M (x,y,z). Необходимо, чтобы все эти точки лежали в одной точке, то есть требуется, чтобы векторы, связывающие эти точки (например, $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_2M_3}, \overrightarrow{M_3M}$) лежали в одной плоскости, ⇔ их смешанное произведение должно быть равно 0 (по необходимому и достаточному условию компланарности векторов). Итак, уравнение через смешанное произведение:

$$\overrightarrow{M_1M_2}(\overrightarrow{M_2M_3} \times \overrightarrow{M_3M}) = \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$$

42) Плоскость в пространстве. Основные задачи.

Взаимное расположение плоскостей.

Пусть дано две плоскости, заданных уравнениями:

$\alpha = A_1x + B_1y + C_1z + D = 0$ и $\beta = A_2x + B_2y + C_2z + D = 0$

Если плоскости параллельны, то это значит, что нормали коллинеарны, то есть координаты пропорциональны: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

Если плоскости перпендикулярны, то это значит, что скалярное произведение нормальных векторов равно нулю $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

Угол между плоскостями находится как угол между его нормалями: $\cos\alpha = \frac{|n_\alpha * n_\beta|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| * |\overrightarrow{n_\beta}|}$

Расстояние от точки Mo до прямой $d = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

43) Прямая в пространстве, все виды уравнений и переход от одного к другому. Основные задачи.

Прямая в пространстве

1) Векторное уравнение (!) $(\vec{r} - \vec{r_0}) = t * \vec{S_l}$

2) Параметрическое уравнение $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

3) Каноническое уравнение прямой $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$

4) Уравнение прямой, проходящей через 2 заданных точки $\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$

5) Общее уравнение прямой в пространстве задается как прямая пересечения двух плоскостей:

$$l: \begin{cases} \alpha: A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ \beta: A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл системы из уравнений плоскостей:

1) Нет решений – плоскости параллельны (или в случае трех и более пплоскостей возможно пересекаются только попарно по параллельным прямым (пример для трех – как карточный домик))

2) Бесконечно много решений – плоскости пересекаются по прямой

3) Единственное решение – плоскости пересекаются в одной точке

Основные задачи

Пусть есть две прямые, заданные каноническими уравнениями:

$l_1: \frac{x - x_0}{m_1} = \frac{y - y_0}{n_1} = \frac{z - z_0}{p_1}$ и $l_2: \frac{x - x_0}{m_2} = \frac{y - y_0}{n_2} = \frac{z - z_0}{p_2}$

Взаиморасположение прямых:

Прямые параллельны, если коллинеарны их направляющие векторы, то есть их координаты пропорциональны:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

Прямые перпендикулярны, если их скалярное произведение их смешанных векторов равно 0:

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Угол между двумя прямыми в пространстве находится как угол между их направляющими векторами:

$$\cos\alpha = \frac{|s_1 * s_2|}{|\vec{s_1}| * |\vec{s_2}|}$$

44) Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи.

Взаиморасположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая параллельна плоскости – тогда направляющий вектор прямой перпендикулярен нормали плоскости: Am+Bn+Cp = 0

Прямая перпендикулярна плоскости – тогда направляющий вектор прямой параллелен нормали плоскости: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$

Угол φ между прямой и плоскостью это угол между прямой и ее проекцией на плоскость. А 90- φ это угол между прямой и нормалью к поверхности.

$\cos(90 - \varphi) = \frac{|n_\alpha * s_l|}{|\overrightarrow{n_\alpha}| * |\overrightarrow{S_l}|} = \sin\varphi$

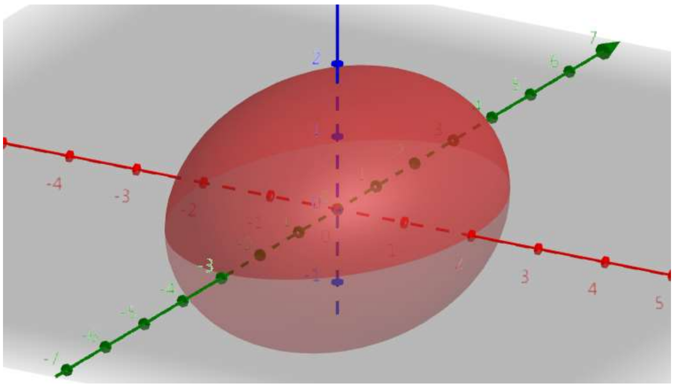
45) Канонические уравнения поверхностей второго порядка. Метод сечений.

! Если в уравнении отсутствует какая-то переменная, то это значит, что фигура вытянута вдоль соответствующей оси

! Если уравнению поверхности не удовлетворяет ни одна точка пространства, то говорят, что уравнение определяет вырожденную, или мнимую, поверхность.

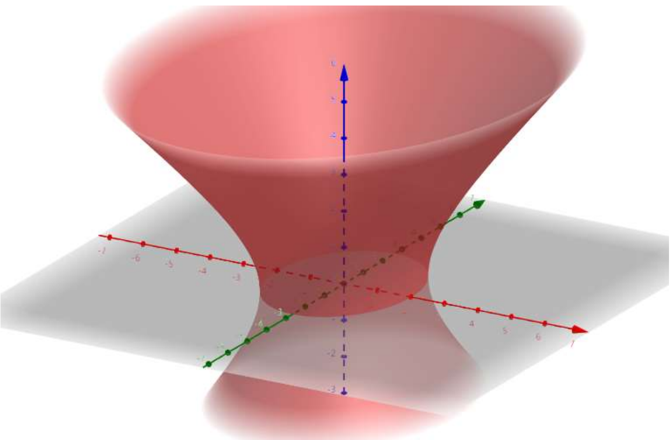
! Пусть дано уравнение $x^2 + y^2 = 4$. Скажете, что это окружность? И будете неправы. Ведь здесь не сказано, это уравнение задано на плоскости или в пространстве (или еще где). На плоскости-то это окружность, в пространстве, к примеру, это бесконечный цилиндр.

ЭЛИПСОИД $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$



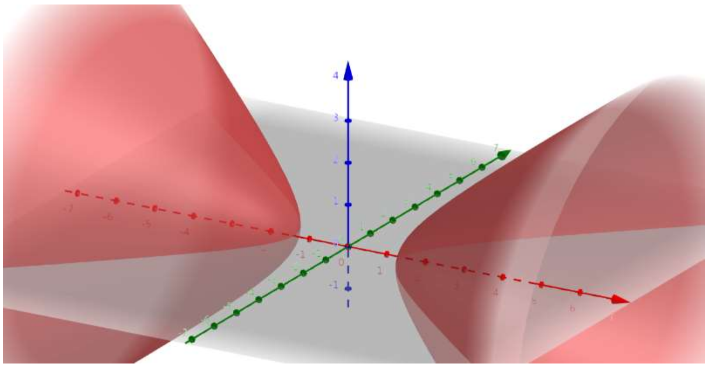
Метод сечений: при поочередном приравнивании x, y, z к нулю будем получать в координатных плоскостях эллипсы

ОДНОПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



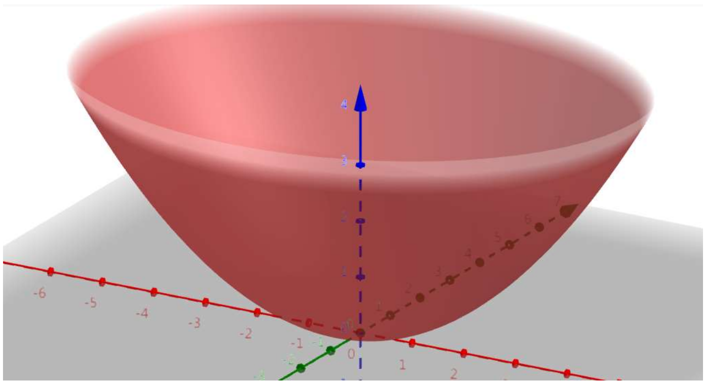
Метод сечений: При z = const получим эллипс в плоскости Oxy, при x=const и y=const получим соответственно гиперболы

ДВУХПОЛОСТНЫЙ ГИПЕРБОЛОИД $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$



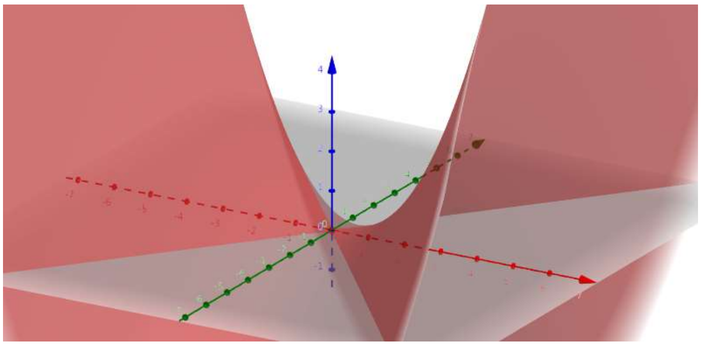
Метод сечений: При x=0 точек нет (тело не пересекает плоскость Ozy), при y=0 / z=0 параболы.

ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$



Метод сечений: при z = 0 – точка = начало координат. При z > 0 эллипс, при z < 0 точек нет. При x=0/y=0 палабола

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ПАРАБОЛОИД $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$



Метод сечений: при x=const перевернутая парабола; при y = 0 парабола; при z = 0 точка, при z=const гипербола.

Цилиндрическая поверхность -поверхность, которую можно получить движением прямой (образующей) параллельно некоторому вектору и всё время перемекающей данную линию (направляющую)