Таблица интегралов

1. $\int dU(x) = U(x) + c$
2. $\int U dU = \frac{1}{2} U^2 + c$
3. $\int U^n dU = \frac{1}{n+1} U^{n+1} + c \qquad n \neq -1$
4. $\int U^{-1} dU = \int \frac{dU}{U} = \ln|U| + c$
5. $\int a^U dU = \frac{a^U}{\ln a} + c$
6. $\int e^U dU = e^U + c$
7. $\int cos U dU = \sin U + c$
8. $\int \sin U dU = -\cos U + c$
9. $\int \frac{dU}{\cos^2 U} = tgU + c$
10. $\int \frac{dU}{\sin^2 U} = -ctgU + c$
11. $\int \frac{dU}{U^2 + a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{U}{a} + c = -\frac{1}{a} arcctg \frac{U}{a} + c$
12. $\int \frac{dU}{U^2 - a^2} = -\int \frac{dU}{a^2 - U^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{U-a}{U+a}\right| + c$
13. $\int \frac{dU}{\sqrt{U^2 \pm a^2}} = \ln\left|U + \sqrt{U^2 \pm a^2}\right| + c$
14. $\int \frac{dU}{\sqrt{a^2 - U^2}} = \arcsin \frac{U}{a} + c = -\arccos \frac{U}{a} + c$

Приложение 2

Таблица основных замен в интегралах

1. $dx = d(x \pm b)$
2. $dx = \frac{1}{k} d(kx \pm b)$
3. $xdx = \frac{1}{2} d(x^2)$
4. $x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3)$

5. $x^n dx = \frac{1}{n+1} d\left(x^{n+1}\right)$

6. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$

7. $\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right)$

8. $e^x dx = d\left(e^x\right)$

9. $\cos x dx = d \sin x$

10. $\sin x dx = -d \cos x$

11. $\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx$

12. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -dctgx$

13. $\frac{dx}{x^2+1} = darctgx = -darcctgx$

Приложение 3

Опорный конспект по интегралам

1. **Знать таблицу интегралов.**
2. **Первообразная .**

Функция $y = F(x)$ - первообразная по отношению к функции $y = f(x)$, если $F'(x) = f(x)$

3. **Неопределённый интеграл**.

$\int f(x)dx = F(x) + c$ - это множество всех первообразных функции $y = f(x)$.

$f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, $dx = \Delta x$ -дифференциал переменной интегрирования.

4. **Формула замены переменной**.
   $\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u)du$
5. **Формула интегрирования по частям**

$\int UdV = UV - \int VdU$

6. **Определенный интеграл**:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Проделаем следующие операции:

1. Разбиваем отрезок $[a,b]$ на n непересекающихся частей с длинами Δx_k. Максимальная длина отрезка обозначается λ и называется рангом дробления.
2. Внутри каждого отрезка выбираем точку ξ_k и вычисляем в ней значение функции $f(\xi_k)$.
3. Умножаем значение функции в точке ξ_k на длину данного отрезка. $f(\xi_k)\Delta x_k$
4. Суммируем все полученные произведения. $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$. Эта сумма называется **интегральной суммой Римана.**
5. Переходим к пределу при условии, что $n \to \infty$, $\lambda \to 0$

   $$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

   Если этот предел существует и конечен, то он не зависит от способа разбиения отрезка $[a,b]$, выбора точек ξ_k внутри него и называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$, а сама функция $f(x)$ - интегрируемой на $[a,b]$.

Геометрический смысл: Если подынтегральная функция $f(x) > 0$ в каждой точке отрезка $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади фигуры, отделённой графиком функции $y = f(x)$ от оси OX на отрезке $[a,b]$.

Теорема Барроу:

Если $\Phi'(x) = \int_a^b f(t)dt$ и $f(t)$ непрерывна, то $\Phi'(x) = f(x)$

Ф-ла Ньютона-Лейбница:

$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ где $F(x)$ первообразная

Вычисление площади

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$$

Объем:

1) По площади поперечного сечения
2) Тела вращения

1) $V = \int_a^b S(x)dx$

2) $V = \pi \int_a^b y^2 dx$

Несобственный интеграл I рода:

$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$ Подынтегральная функция непрерывна на всём промежутке интегрирования.

Несобственный интеграл II рода:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

b- точка разрыва подинтегральной функции.

Интегралы сходятся, если пределы существуют и конечны. Расходятся, если пределы равны бесконечности или не существуют.

Знать два признака сравнения.

Интегралы сравнения.

Для интеграла 1 рода $\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$ сходится при $p > 1$ расходится при $p \le 1$

Для интеграла 2 рода $\int_a^b \frac{dx}{(x-b)^p}$ сходится при $p < 1$ расходится при $p \ge 1$