# 予測誤差法

　このセクションでは、予測誤差法という制御理論における重要な手法を学びます。

$$(qw)_{(t)} \coloneqq w_{(t-1)}$$

ここで、$qw$ は遅延オペレータを表し、時刻 $t$ における値を時刻 $t-1$ における値として表現します。

$$G(q) = \frac{b_n q^n + b_{n-1} q^{n-1} + \cdots + b_0}{q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0}$$

$G(q)$ は伝達関数を表し、システムの入出力関係を示します。分子はシステムの出力を、分母はシステムの入力を表しています。

$$\begin{aligned} y_{(k+n)} &= a_{n-1} y_{(k+n-1)} + \cdots + a_1 y_{(k+1)} + a_0 y_{(k)} \\ &\quad + b_n u_{(k+n)} + \cdots + b_1 u_{(k+1)} + b_0 u_{(k)} + e_{(k)} \end{aligned}$$

この方程式は、時刻 $k+n$ における出力 $y$ が、過去の出力、入力、および誤差 $e$ の関数であることを示しています。

$$Y = X_1 v_1 + X_2 v_2 + e$$

これは、システムの出力 $Y$ が二つの項 $X_1 v_1$ と $X_2 v_2$、及び誤差 $e$ の和であることを示しています。

　以下の方程式は、これらのベクトルと行列の定義を示しています。

$$\begin{aligned} Y &\coloneqq \begin{bmatrix} y_{(n)} & y_{(n+1)} & \cdots & y_{(N-1)} & y_{(N)} \end{bmatrix}^\top \\ X_1 &\coloneqq \begin{bmatrix} y_{(n-1)} & \cdots & y_{(1)} & y_{(0)} \\ y_{(n)} & \cdots & y_{(2)} & y_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{(N-2)} & \cdots & y_{(N-n)} & y_{(N-n-1)} \\ y_{(N-1)} & \cdots & y_{(N-n+1)} & y_{(N-n)} \end{bmatrix} \\ v_1 &\coloneqq \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}^\top \\ X_2 &\coloneqq \begin{bmatrix} u_{(n)} & \cdots & u_{(1)} & u_{(0)} \\ u_{(n+1)} & \cdots & u_{(2)} & u_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{(N-1)} & \cdots & u_{(N-n)} & u_{(N-n-1)} \\ u_{(N)} & \cdots & u_{(N-n+1)} & u_{(N-n)} \end{bmatrix} \\ v_2 &\coloneqq \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}^\top \\ e &\coloneqq \begin{bmatrix} e_{(n)} & e_{(n+1)} & \cdots & e_{(N-1)} & e_{(N)} \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

$$\arg\min_v \sum_{k=n}^{N} e(k)^2 = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$$

この方程式は、誤差の二乗和を最小化することで、最適なパラメータ $v$ を見つける方法を示しています。

$$\begin{aligned} v &\coloneqq \begin{bmatrix} v_1^\top & v_2^\top \end{bmatrix}^\top \\ X &\coloneqq \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$