SRIM Algorithm

作成日　2024 年 9 月 21 日

Computational Steps

To better understand the computational procedure for the SRIM algorithm, the computational steps are summarized as follows:

1. Choose an integer p so that
$$p \geq \frac{n}{m} + 1,$$
where n is the desired order of the system and m is the number of outputs.
2. Compute correlation matrices $\mathcal{R}_{yy}$ of dimension $pm \times pm$, $\mathcal{R}_{yu}$ of dimension $pm \times pr$, and $\mathcal{R}_{uu}$ of dimension $pr \times pr$ (eqs. (14)) with the matrices $Y_p(k)$ of dimension $pm \times N$ and $\mathcal{U}_p(k)$ of dimension $pr \times N$ (eqs. (13)). The integer r is the number of inputs. The index k is the data point used as the starting point for system identification. The integer N must be chosen so that
$$\ell - k - p + 2 \geq N >> \min(pm, pr),$$
where ℓ is the length of the data.
3. Calculate the correlation matrix $\mathcal{R}_{hh}$ of dimension $pm \times pm$ (eqs. (14)), that is,
$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}.$$
4. Factor $\mathcal{R}_{hh}$ with singular-value decomposition for the full decomposition method (eq. (26)) or a portion of $\mathcal{R}_{hh}$ for the partial decomposition method (eq. (31)).
5. Determine the order n of the system by examining the singular values of $\mathcal{R}_{hh}$, and obtain $\mathcal{U}_n$ of dimension $pm \times n$ (eq. (26)) and $\mathcal{U}_o$ of dimension $pm \times n_o$, where $n_o = pm - n$ is the number of truncated small singular values. The integer n_o must satisfy the condition
$$pn_o \geq (m + n)$$
for the full decomposition method. For the partial decomposition method, $\mathcal{U}_n$ is replaced by $\mathcal{U}_n'$ (eq. (31)) and the integer n_o is the sum of m and the number of truncated singular values.
6. Let $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_p$ or $\mathcal{U}_n' = \mathcal{O}_p$. Use equation (8) to determine the state matrix A. The output matrix C is the first m rows of $\mathcal{U}_n$.
7. Compute
$$\mathcal{U}_{o\mathcal{R}} = \mathcal{U}_o^{\top}\mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}$$
(eq. (39)) for the indirect method, and construct $\mathcal{U}_{on}$ and $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ (eqs. (38) and (40)). Determine the input matrix B and the direct transmission matrix D from equation (41) (i.e., the first m rows of $\mathcal{U}_{on}^{\dagger}\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ from D and the last n rows produce B). For the direct method, construct $\mathcal{O}_{p\Gamma}$ and $\mathcal{O}_{pA}$ from equation (53) and solve for matrices B and D by computing $\mathcal{O}_{pA}^{\dagger}\mathcal{O}_{p\Gamma}$. The first m rows of $\mathcal{O}_{pA}^{\dagger}\mathcal{O}_{p\Gamma}$ form matrix D, and the last n rows produce matrix B.
For the output-error minimization method, construct $y_N(0)$ and Φ from equations (64) and solve for matrices B and D by computing $\Phi^{\dagger}y_N(0)$. The first n elements of $\Phi^{\dagger}y_N(0)$ form the initial state vector $x(0)$, the second mr elements give the r column vectors of D, and the last nr elements produce the r column vectors of B.
8. Find the eigenvalues and eigenvectors of the realized state matrix and transform the realized model into model coordinates to compute system damping and frequencies. This step is needed only if modal parameters identification is desired.
9. Calculate mode singular values (ref. 1) to quantify and distinguish the system and noise modes. This step provides a way for model reduction with modal truncation.

The computational steps reduce to the steps for the ERA/DC method (ref. 1) when the output data are the pulse-response-time history. Assume that a pulse is given to excite the system at the time step zero. Let $k = 1$ in step 2. The correlation matrix $\mathcal{R}_{yu}$ and $\mathcal{R}_{uu}$ become null, and $\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy}$ is obtained. Theoretically, the formulation
$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}$$
should not be used for computation of $\mathcal{R}_{hh}$ if $\mathcal{R}_{uu}$ is not invertible. For special cases such as free decay and pulse responses, $\mathcal{R}_{hh}$ reduces to $\mathcal{R}_{yy}$ when the integer k is chosen at the point where the input signal vanishes.

計算手順

SRIM アルゴリズムの計算手順を理解するために、以下に計算手順をまとめます：

1. 次の条件を満たす整数 p を選びます：
$$p \geq \frac{n}{m} + 1,$$
ここで、n はシステムの希望する次数、m は出力の数です。
2. 相関行列 $\mathcal{R}_{yy}$（次元 $pm \times pm$）、$\mathcal{R}_{yu}$（次元 $pm \times pr$）、および $\mathcal{R}_{uu}$（次元 $pr \times pr$）を、行列 $Y_p(k)$（次元 $pm \times N$）および $\mathcal{U}_p(k)$（次元 $pr \times N$）を使用して計算します（式 (13) および (14) 参照）。ここで、r は入力の数、k はシステム識別のためのデータポイントです。また、N は次の条件を満たすように選ぶ必要があります：
$$\ell - k - p + 2 \geq N >> \min(pm, pr),$$
ここで、ℓ はデータの長さです。
3. 相関行列 $\mathcal{R}_{hh}$（次元 $pm \times pm$）を次のように計算します（式 (14) 参照）：
$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}.$$
4. 完全分解法（式 (26) 参照）または部分分解法（式 (31) 参照）のために、特異値分解を用いて $\mathcal{R}_{hh}$ を分解します。
5. システムの次数 n を $\mathcal{R}_{hh}$ の特異値を用いて決定し、$\mathcal{U}_n$（次元 $pm \times n$）および $\mathcal{U}_o$（次元 $pm \times n_o$）を取得します。ここで、$n_o = pm - n$ は切り捨てられた小さな特異値の数です。整数 n_o は、完全分解法において次の条件を満たす必要があります：
$$pn_o \geq (m + n)$$
部分分解法では、$\mathcal{U}_n$ を $\mathcal{U}_n'$（式 (31) 参照）に置き換え、整数 n_o は m と切り捨てられた特異値の数の合計になります。
6. $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_p$ または $\mathcal{U}_n' = \mathcal{O}_p$ とします。式 (8) を用いて状態行列 A を決定します。出力行列 C は $\mathcal{U}_n$ の最初の m 行です。
7. 次の式を用いて
$$\mathcal{U}_{o\mathcal{R}} = \mathcal{U}_o^{\top}\mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}$$
（式 (39) 参照）、間接法のために $\mathcal{U}_{on}$ および $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$（式 (38) および (40) 参照）を構築します。式 (41) を用いて入力行列 B および直接伝達行列 D を決定します（すなわち、D は $\mathcal{U}_{on}^{\dagger}\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ の最初の m 行、B は最後の n 行で生成されます）。直接法では、$\mathcal{O}_{p\Gamma}$ および $\mathcal{O}_{pA}$ を式 (53) から構築し、$\mathcal{O}_{pA}^{\dagger}\mathcal{O}_{p\Gamma}$ を計算して行列 B および D を解きます。$\mathcal{O}_{pA}^{\dagger}\mathcal{O}_{p\Gamma}$ の最初の m 行は行列 D を形成し、最後の n 行は行列 B を生成します。
出力誤差最小化法では、式 (64) から $y_N(0)$ および Φ を構築し、$\Phi^{\dagger}y_N(0)$ を計算して行列 B および D を解きます。$\Phi^{\dagger}y_N(0)$ の最初の n 要素は初期状態ベクトル $x(0)$ を形成し、次の mr 要素は D の r 列ベクトルを与え、最後の nr 要素は B の r 列ベクトルを生成します。
8. 実現された状態行列の固有値および固有ベクトルを求め、モデル座標に変換してシステム減衰と周波数を計算します。この手順は、モーダルパラメータ識別が必要な場合のみ必要です。
9. モード特異値（参照文献 1）を計算して、システムとノイズモードを区別し評価します。この手順は、モーダルトランケーションによるモデル削減の方法を提供します。

計算手順は、出力データがパルス応答時系列である場合、ERA/DC 法（参照文献 1）の手順に帰着します。システムが時刻ゼロで励起されるパルスが与えられたと仮定します。ステップ 2 では $k = 1$ とします。相関行列 $\mathcal{R}_{yu}$ および $\mathcal{R}_{uu}$ はゼロになり、$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy}$ が得られます。理論的には、次の式を用いて

$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}$$

$\mathcal{R}_{uu}$ が逆行列を持たない場合、$\mathcal{R}_{hh}$ の計算に使用すべきではありません。自由減衰やパルス応答などの特殊な場合では、入力信号が消える点で整数 k が選ばれると、$\mathcal{R}_{hh}$ は $\mathcal{R}_{yy}$ に帰着します。

Algorithm 1 SRIM Algorithm Computational Procedure

Input: Desired system order n, number of outputs m, number of inputs r, data length ℓ

Output: State-space matrices A, B, C, D

1: Choose an integer p such that
$$p \geq \frac{n}{m} + 1$$
2: Compute correlation matrices $\mathcal{R}_{yy}$, $\mathcal{R}_{yu}$, and $\mathcal{R}_{uu}$ using $Y_p(k)$ and $\mathcal{U}_p(k)$ with N satisfying
$$\ell - k - p + 2 \geq N \gg \min(pm, pr)$$
3: Calculate
$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}$$
4: Factor $\mathcal{R}_{hh}$ using Singular Value Decomposition (SVD) for either full or partial decomposition

5: Determine the system order n and obtain $\mathcal{U}_n$ and $\mathcal{U}_o$ where $pn_o \geq (m+n)$ for full decomposition or adjust for partial decomposition

6: Set $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_p$ and use equation (8) to determine the state matrix A and the output matrix C

7: Compute $\mathcal{U}_{o\mathcal{R}}$ and construct $\mathcal{U}_{on}$ and $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$. Determine B and D using equation (41) for indirect or direct methods

8: For output-error minimization, construct $y_N(0)$ and Φ, solve for B, D, and initial state vector $x(0)$

9: Find eigenvalues and eigenvectors of the realized state matrix to compute system damping and frequencies

10: Calculate mode singular values to distinguish system and noise modes for potential model reduction

Algorithm 2 SRIM アルゴリズムの計算手順

Input: 希望するシステム次数 n、出力数 m、入力数 r、データ長 ℓ

Output: 状態空間行列 A、B、C、D

1: 整数 p を選び、次の条件を満たすようにする
$$p \geq \frac{n}{m} + 1$$
2: 相関行列 $\mathcal{R}_{yy}$、$\mathcal{R}_{yu}$、および $\mathcal{R}_{uu}$ を $Y_p(k)$ と $\mathcal{U}_p(k)$ を用いて計算する。ただし N は次の条件を満たす
$$\ell - k - p + 2 \geq N \gg \min(pm, pr)$$
3: 次を計算する
$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^{\top}$$
4: 特異値分解（SVD）を使用して $\mathcal{R}_{hh}$ を全分解または部分分解する

5: システム次数 n を決定し、$pn_o \geq (m+n)$ を満たす $\mathcal{U}_n$ および $\mathcal{U}_o$ を得る。全分解の場合はそのまま、部分分解の場合は調整する

6: $\mathcal{U}_n = \mathcal{O}_p$ と設定し、状態行列 A と出力行列 C を式（8）を用いて求める

7: $\mathcal{U}_{o\mathcal{R}}$ を計算し、$\mathcal{U}_{on}$ および $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ を構成する。間接法または直接法を用いて式（41）で B と D を決定する

8: 出力誤差を最小化するために、$y_N(0)$ と Φ を構成し、B、D、および初期状態ベクトル $x(0)$ を解く

9: 実現した状態行列の固有値と固有ベクトルを求め、システムの減衰と周波数を計算する

10: モード特異値を計算し、システムモードとノイズモードを区別して、モデルの削減を検討する

The colon in place of a subscript denotes the entire corresponding row or column. The state matrix can then be computed by

$$A = \mathcal{O}_p^{\dagger}(1:(p-1)m,:)\mathcal{O}_p(m+1:pm,:) \quad (8)$$

To determine $\mathcal{O}_p$ and $\mathcal{T}_p$, first expand the vector equation (eq. (5)) to a matrix equation as follows:

$$Y_p(k) = \mathcal{O}_p X(k) + \mathcal{T}_p U_p(k) \quad (12)$$

where

$$\begin{aligned}
X(k) &= [x(k) \quad x(k+1) \quad \cdots \quad x(k+N-1)] \\
Y_p(k) &= [y_p(k) \quad y_p(k+1) \quad \cdots \quad y_p(k+N-1)] \\
&= \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(k+p-1) & y(k+p) & \cdots & y(k+p+N-2) \end{bmatrix} \\
U_p(k) &= [u_p(k) \quad u_p(k+1) \quad \cdots \quad u_p(k+N-1)] \\
&= \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \cdots & u(k+N-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \cdots & u(k+N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(k+p-1) & u(k+p) & \cdots & u(k+p+N-2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(13)

The integer N must be sufficiently large so that the rank of $Y_p(k)$ and $U_p(k)$ is at least equal to the rank of $\mathcal{O}_p$. Equation (12) is the key equation used to solve for $\mathcal{Q}_p$ and $\mathcal{T}_p$ and includes the input-and output-data information up to the data point $k+p+N-2$. Because the data matrix $Y_p(k)$ and $U_p(k)$ are the only information given, it is necessary to focus on these two matrices to extract information necessary to determine the system matrices $A, B, C,$ and D.

The following quantities are defined as:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{yy} &= \frac{1}{N} Y_p(k) Y_p^{\top}(k) \\
\mathcal{R}_{yu} &= \frac{1}{N} Y_p(k) U_p^{\top}(k) \\
\mathcal{R}_{uu} &= \frac{1}{N} U_p(k) U_p^{\top}(k) \\
\mathcal{R}_{xx} &= \frac{1}{N} X(k) X^{\top}(k) \\
\mathcal{R}_{yx} &= \frac{1}{N} Y_p(k) X^{\top}(k) \\
\mathcal{R}_{xu} &= \frac{1}{N} X(k) U_p^{\top}(k)
\end{aligned}$$

(14)

where $N = \ell - p$, with ℓ being the data length and p the data shift. The quantities $\mathcal{R}_{yy}$, $\mathcal{R}_{uu}$, and $\mathcal{R}_{xx}$ are symmetric matrices. The square matrices $\mathcal{R}_{yy}$ $(mp \times mp)$, $\mathcal{R}_{uu}$ $(rp \times rp)$, and $\mathcal{R}_{xx}$ $(n \times n)$ are the auto-correlations of the output data y with time shifts, the input data u with time shifts, and the state vector x, respectively. The rectangular matrices $\mathcal{R}_{yu}$ $(mp \times rp)$, $\mathcal{R}_{yx}$ $(mp \times n)$, and $\mathcal{R}_{xu}$ $(n \times rp)$ represent the cross correlations of the output data y and the input data u, the output data y and the state vector x, and the state vector x and input data u, respectively. When the integer N is sufficiently large, the quantities defined in equations (14) approximate expected values in the statistical sense if the input and output data are stationary processes satisfying the ergodic property.

Taking the singular-value decomposition of the symmetric matrix $\mathcal{R}_{hh}$ yields

$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{U}^{\top} = [\mathcal{U}_n \quad \mathcal{U}_o] \begin{bmatrix} \Sigma_n^2 & 0_{n\times n_o} \\ 0_{n_o \times n} & o_{n_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_n^{\top} \\ \mathcal{U}_o^{\top} \end{bmatrix} = \mathcal{U}_n \Sigma_n^2 \mathcal{U}_n^{\top} \quad (26)$$

The integer $n_o = pm - n$ is the number of dependent columns in $\mathcal{R}_{hh}$, $0_{n\times n_o}$ is an $n \times n_o$ zero matrix, and 0_{n_o} is a square-zero matrix of order n_o. The $pm \times n$ matrix $\mathcal{U}_n$ corresponds to the n nonzero singular values in the diagonal matrix Σ_n, and the $pm \times n_o$ matrix $\mathcal{U}_o$ is associated with the n_o zero singular values.

Partial decomposition method. Regardless of which integer p is chosen, the minimum value of n_o must be m (the number of outputs) to make $n < pm$, which will then satisfy the equality constraint in equation (27). There is one way of avoiding any singular-values truncation. Instead of taking the singular-value decomposition of the $pm \times pm$ square matrix $\mathcal{R}_{hh}$, factor only part of the matrix as follows:

$$\mathcal{R}_{hh}(:,1:(p-1)m) = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{V}^\top = [\mathcal{U}_n' \quad \mathcal{U}_o'] \begin{bmatrix} \Sigma_n^2 & 0_{n\times n_0} \\ 0_{n_o'\times n} & 0_{n_o'\times n_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_n^\top \\ \mathcal{V}_o^\top \end{bmatrix} = \mathcal{V}_n\Sigma_n^2\mathcal{V}_n^\top \quad (31)$$

The dimension of $\mathcal{R}_{hh}(:,1:(p-1)m)$ is $pm\times(p-1)m$, meaning there are more rows than columns. The integer n_o indicates the number of zero singular values and also the number of columns of $\mathcal{V}_o$. The integer n_o' is the number of columns of $\mathcal{U}_o'$ that are orthogonal to the columns of $\mathcal{U}_n'$. For noisy data, there are no zero singular values, that is, $n_o = 0$. If no singular values are truncated, $n_o' = m$ is obtained. If some small singular values are truncated, n_o' becomes the sum of m and the number of truncated singular values. Stated differently, there are at least m columns of $\mathcal{U}_o'$ that are orthogonal to the columns of $\mathcal{U}_n'$ in equation (31).

Equations (37) can be rewritten in the following matrix form:

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \mathcal{U}_{on}\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (38)$$

where

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_o^\top\mathcal{T}_p(:,1:r) \\ \mathcal{U}_o^\top\mathcal{T}_p(:,r+1:2r) \\ \mathcal{U}_o^\top\mathcal{T}_p(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_o^\top\mathcal{T}_p(:,(p-1)r+1:pr) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U}_{on} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_o^\top(:,1:m) & \mathcal{U}_o^\top(:,m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-1)m,:) \\ \mathcal{U}_o^\top(:,m+1:2m) & \mathcal{U}_o^\top(:,2m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-2)m,:) \\ \mathcal{U}_o^\top(:,2m+1:3m) & \mathcal{U}_o^\top(:,3m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-3)m,:) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{U}_o^\top(:,(p-1)m+1:pm) & 0_{n_o\times n} \end{bmatrix}$$

The dimension of $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ is $pn_o\times pr$ and the dimension of $\mathcal{U}_{on}$ is $pn_o\times(m+n)$. Let the right side of equation (34) be denoted by

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{R}} = \mathcal{U}_o^\top\mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1} \quad (39)$$

where $\mathcal{U}_{o\mathcal{R}}$ is an $n_o\times pr$ matrix. Equation (38) shows that $\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ is thus given by

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,1:r) \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,r+1:2r) \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,(p-1)r+1:pr) \end{bmatrix} \quad (40)$$

and matrices B and D can be computed by

$$\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \mathcal{U}_{on}^\dagger\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} \quad (41)$$

The first m rows of $\mathcal{U}_{on}^\dagger\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ form the matrix D, and the last n rows produce the matrix B.

Similar to equation (38), equation (52) can be rewritten in the following matrix form:

$$\mathcal{O}_{p\Gamma} = \mathcal{O}_{pA}\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (53)$$

where

$$\mathcal{O}_{p\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_p^\dagger\Gamma(:,1:r) \\ \mathcal{O}_p^\dagger\Gamma(:,r+1:2r) \\ \mathcal{O}_p^\dagger\Gamma(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{O}_p^\dagger\Gamma(:,pr+1:(p+1)r) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{pA} = \begin{bmatrix} -A\mathcal{O}_p^\dagger(:,1:m) & I_n - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-1)m,:) \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,1:m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(m+1:2m,:) & \mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:pm)\mathcal{O}_p(:,1:(p-1)m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,2m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-2)m,:) \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:2m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(2m+1:3m,:) & \mathcal{O}_p^\dagger(:,2m+1:pm)\mathcal{O}_p(:,1:(p-2)m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,3m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-3)m,:) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,(p-1)m+1:pm) & 0_n \end{bmatrix}$$

Here, I_n is an identity matrix of order n and 0_n is a zero matrix of order n. The quantity $\mathcal{O}_{p\Gamma}$ is a $pn\times r$ matrix and $\mathcal{O}_{pA}$ is a $(p+1)n\times(m+n)$ matrix.

Substituting equations (62) into equation (57) yields

$$y_N(0) = \Phi\Theta \quad (63)$$

where

$$\Theta = \begin{bmatrix} x(0) \\ \underline{d} \\ \underline{b} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} C & \underline{\mathcal{U}}_m(0) & 0_{m\times n} \\ CA & \underline{\mathcal{U}}_m(1) & C\underline{\mathcal{U}}_n(0) \\ CA^2 & \underline{\mathcal{U}}_m(2) & CA\underline{\mathcal{U}}(0) + C\underline{\mathcal{U}}_n(1) \\ \vdots & & \\ CA^{N-1} & \underline{\mathcal{U}}_m(N-1) & \sum_{k=0}^{N-2} CA^{N-k-2}\underline{\mathcal{U}}_n(k) \end{bmatrix} \quad (64)$$

The vector size Θ is $(n + mr + nr) \times 1$ and the matrix size Φ is $mN \times (n + mr + nr)$. The unknown vector Θ can then be solved by

$$\Theta = \Phi^{\dagger} y_N(0) \quad (65)$$

where † denotes the pseudo-inverse.

コロンが添字の代わりに使われている場合、対応する行または列全体を示します。状態行列は次のように計算できます。

$$A = \mathcal{O}_p^\dagger(1:(p-1)m,:)\mathcal{O}_p(m+1:pm,:) \quad (8)$$

$\mathcal{O}_p$ および $\mathcal{T}_p$ を決定するために、まずベクトル方程式（式（5））を次のように行列方程式に展開します：

$$Y_p(k) = \mathcal{O}_p X(k) + \mathcal{T}_p U_p(k) \quad (12)$$

ここで

$$\begin{aligned}
X(k) &= [x(k) \quad x(k+1) \quad \cdots \quad x(k+N-1)] \\
Y_p(k) &= [y_p(k) \quad y_p(k+1) \quad \cdots \quad y_p(k+N-1)] \\
&= \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y(k+p-1) & y(k+p) & \cdots & y(k+p+N-2) \end{bmatrix} \\
U_p(k) &= [u_p(k) \quad u_p(k+1) \quad \cdots \quad u_p(k+N-1)] \\
&= \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \cdots & u(k+N-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \cdots & u(k+N) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u(k+p-1) & u(k+p) & \cdots & u(k+p+N-2) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$
(13)

整数 N は十分大きくなければならず、$Y_p(k)$ および $U_p(k)$ の階数が $\mathcal{O}_p$ の階数以上になる必要があります。式（12）は、$\mathcal{Q}_p$ と $\mathcal{T}_p$ を求めるための重要な方程式であり、$k+p+N-2$ までの入力および出力データを含んでいます。データ行列 $Y_p(k)$ と $U_p(k)$ だけが与えられているため、これら 2 つの行列に焦点を当てて、システム行列 A, B, C, D を決定するために必要な情報を抽出する必要があります。

以下の量が定義されます：

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_{yy} &= \frac{1}{N} Y_p(k) Y_p^\top(k) \\
\mathcal{R}_{yu} &= \frac{1}{N} Y_p(k) U_p^\top(k) \\
\mathcal{R}_{uu} &= \frac{1}{N} U_p(k) U_p^\top(k) \\
\mathcal{R}_{xx} &= \frac{1}{N} X(k) X^\top(k) \\
\mathcal{R}_{yx} &= \frac{1}{N} Y_p(k) X^\top(k) \\
\mathcal{R}_{xu} &= \frac{1}{N} X(k) U_p^\top(k)
\end{aligned}$$
(14)

ここで $N = \ell - p$ であり、ℓ はデータの長さ、p はデータシフトです。量 $\mathcal{R}_{yy}$、$\mathcal{R}_{uu}$、および $\mathcal{R}_{xx}$ は対称行列です。正方行列 $\mathcal{R}_{yy}$ $(mp \times mp)$、$\mathcal{R}_{uu}$ $(rp \times rp)$、および $\mathcal{R}_{xx}$ $(n \times n)$ は、時間シフトを伴う出力データ y、入力データ u、および状態ベクトル x の自己相関を表します。長方形の行列 $\mathcal{R}_{yu}$ $(mp \times rp)$、$\mathcal{R}_{yx}$ $(mp \times n)$、および $\mathcal{R}_{xu}$ $(n \times rp)$ は、出力データ y と入力データ u、出力データ y と状態ベクトル x、および状態ベクトル x と入力データ u の間の相互相関を表します。整数 N が十分に大きい場合、式（14）で定義された量は、入力および出力データが定常過程でエルゴード性を満たす場合、統計的な意味で期待値に近似されます。

対称行列 $\mathcal{R}_{hh}$ の特異値分解を行うと次のようになります：

$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{U}^\top = [\mathcal{U}_n \quad \mathcal{U}_o] \begin{bmatrix} \Sigma_n^2 & 0_{n \times n_o} \\ 0_{n_o \times n} & 0_{n_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{U}_n^\top \\ \mathcal{U}_o^\top \end{bmatrix} = \mathcal{U}_n \Sigma_n^2 \mathcal{U}_n^\top \quad (26)$$

整数 $n_o = pm - n$ は $\mathcal{R}_{hh}$ における従属列の数であり、$0_{n \times n_o}$ は $n \times n_o$ のゼロ行列、0_{n_o} は次数 n_o の正方ゼロ行列です。$pm \times n$ 行列 $\mathcal{U}_n$ は、対角行列 Σ_n の非ゼロ特異値に対応し、$pm \times n_o$ 行列 $\mathcal{U}_o$ はゼロ特異値に関連しています。

部分分解法。整数 p がどの値であっても、n_o の最小値は m（出力の数）である必要があり、これにより $n < pm$ を満たし、式（27）の等式制約が成立します。特異値の切り捨てを避ける唯一の方法は、$pm \times pm$ の正方行列 $\mathcal{R}_{hh}$ の特異値分解を行う代わりに、行列の一部のみを次のように因数分解することです：

$$\mathcal{R}_{hh}(:,1:(p-1)m) = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{V}^\top = [\mathcal{U}_n' \quad \mathcal{U}_o'] \begin{bmatrix} \Sigma_n^2 & 0_{n \times n_0} \\ 0_{n_o' \times n} & 0_{n_o' \times n_o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{V}_n^\top \\ \mathcal{V}_o^\top \end{bmatrix} = \mathcal{V}_n \Sigma_n^2 \mathcal{V}_n^\top \quad (31)$$

$\mathcal{R}_{hh}(:,1:(p-1)m)$ の次元は $pm \times (p-1)m$ であり、行の数が列の数より多くなります。整数 n_o はゼロ特異値の数であり、$\mathcal{V}_o$ の列の数でもあります。整数 n'_o は、$\mathcal{U}'_n$ の列に直交する $\mathcal{U}'_o$ の列の数を表します。ノイズを含むデータの場合、ゼロ特異値は存在せず、すなわち $n_o = 0$ です。特異値が切り捨てられない場合、$n'_o = m$ が得られます。小さな特異値が切り捨てられる場合、n'_o は m と切り捨てられた特異値の数の合計になります。別の言い方をすれば、式 (31) において $\mathcal{U}'_n$ の列に直交する $\mathcal{U}'_o$ の列は少なくとも m 列存在します。

式 (37) は次の行列形式に書き換えることができます：

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \mathcal{U}_{on} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (38)$$

ここで

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_o^\top \mathcal{T}_p(:,1:r) \\ \mathcal{U}_o^\top \mathcal{T}_p(:,r+1:2r) \\ \mathcal{U}_o^\top \mathcal{T}_p(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_o^\top \mathcal{T}_p(:,(p-1)r+1:pr) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{U}_{on} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_o^\top(:,1:m) & \mathcal{U}_o^\top(:,m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-1)m,:) \\ \mathcal{U}_o^\top(:,m+1:2m) & \mathcal{U}_o^\top(:,2m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-2)m,:) \\ \mathcal{U}_o^\top(:,2m+1:3m) & \mathcal{U}_o^\top(:,3m+1:pm)\mathcal{U}_n(1:(p-3)m,:) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{U}_o^\top(:,(p-1)m+1:pm) & 0_{n_o \times n} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ の次元は $pn_o \times pr$ であり、$\mathcal{U}_{on}$ の次元は $pn_o \times (m+n)$ です。式 (34) の右辺を次のように表します：

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{R}} = \mathcal{U}_o^\top \mathcal{R}_{yu} \mathcal{R}_{uu}^{-1} \quad (39)$$

ここで $\mathcal{U}_{o\mathcal{R}}$ は $n_o \times pr$ の行列です。式 (38) により、$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ は次のように与えられます：

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,1:r) \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,r+1:2r) \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:,(p-1)r+1:pr) \end{bmatrix} \quad (40)$$

そして行列 B および D は次の式により計算できます：

$$\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \mathcal{U}_{on}^\dagger \mathcal{U}_{o\mathcal{T}} \quad (41)$$

$\mathcal{U}_{on}^\dagger \mathcal{U}_{o\mathcal{T}}$ の最初の m 行は行列 D を形成し、最後の n 行が行列 B を生成します。

式 (38) と同様に、式 (52) も次の行列形式に書き換えることができます：

$$\mathcal{O}_{p\Gamma} = \mathcal{O}_{pA} \begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} \quad (53)$$

ここで

$$\mathcal{O}_{p\Gamma} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_p^\dagger \Gamma(:,1:r) \\ \mathcal{O}_p^\dagger \Gamma(:,r+1:2r) \\ \mathcal{O}_p^\dagger \Gamma(:,2r+1:3r) \\ \vdots \\ \mathcal{O}_p^\dagger \Gamma(:,pr+1:(p+1)r) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{O}_{pA} = \begin{bmatrix} -A\mathcal{O}_p^\dagger(:,1:m) & I_n - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-1)m,:) \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,1:m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(m+1:2m,:) & \mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:pm)\mathcal{O}_p(:,1:(p-1)m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,2m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-2)m,:) \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,m+1:2m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(2m+1:3m,:) & \mathcal{O}_p^\dagger(:,2m+1:pm)\mathcal{O}_p(:,1:(p-2)m) - A\mathcal{O}_p^\dagger(:,3m+1:pm)\mathcal{O}_p(1:(p-3)m,:) \\ \vdots & \vdots \\ \mathcal{O}_p^\dagger(:,(p-1)m+1:pm) & 0_n \end{bmatrix}$$

ここで、I_n は次数 n の単位行列、0_n は次数 n のゼロ行列です。量 $\mathcal{O}_{p\Gamma}$ は $pn \times r$ の行列であり、$\mathcal{O}_{pA}$ は $(p+1)n \times (m+n)$ の行列です。

式 (62) を式 (57) に代入すると次のようになります：

$$y_N(0) = \Phi\Theta \quad (63)$$

ここで

$$\Theta = \begin{bmatrix} x(0) \\ \underline{d} \\ \underline{b} \end{bmatrix} \quad \Phi = \begin{bmatrix} C & \underline{\mathcal{U}}_m(0) & 0_{m\times n} \\ CA & \underline{\mathcal{U}}_m(1) & C\underline{\mathcal{U}}_n(0) \\ CA^2 & \underline{\mathcal{U}}_m(2) & CA\underline{\mathcal{U}}(0) + C\underline{\mathcal{U}}_n(1) \\ \vdots & & \\ CA^{N-1} & \underline{\mathcal{U}}_m(N-1) & \sum_{k=0}^{N-2} CA^{N-k-2}\underline{\mathcal{U}}_n(k) \end{bmatrix} \quad (64)$$

ベクトル Θ の大きさは $(n+mr+nr)\times 1$ であり、行列 Φ の大きさは $mN\times(n+mr+nr)$ です。その後、未知ベクトル Θ は次の式で解けます：

$$\Theta = \Phi^{\dagger} y_N(0) \quad (65)$$

ここで、$\dagger$ は疑似逆行列を表します。

Algorithm 3 SRIM アルゴリズムの計算手順

Input: 系の次数 $n \in \mathbb{N}$, 出力の数 $m \in \mathbb{N}$, 入力の数 $r \in \mathbb{N}$, データの長さ $\ell \in \mathbb{N}$, 実数値データ行列 $Y \in \mathbb{R}^{m\times\ell}$, $U \in \mathbb{R}^{r\times\ell}$

Output: 状態空間行列 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times r}$

1: 整数 p を選択し、次を満たすようにする:

$$p \geq \frac{n}{m} + 1$$

2: データ行列 $Y_p(k)$ と $U_p(k)$ を作成する。$Y_p(k)$ のサイズは $pm \times N$、$U_p(k)$ のサイズは $pr \times N$ となる:

$$Y_p(k) = \begin{bmatrix} y(k) & y(k+1) & \cdots & y(k+N-1) \\ y(k+1) & y(k+2) & \cdots & y(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y(k+p-1) & y(k+p) & \cdots & y(k+p+N-2) \end{bmatrix}$$

同様に、$U_p(k)$ は次の形式を持つ:

$$U_p(k) = \begin{bmatrix} u(k) & u(k+1) & \cdots & u(k+N-1) \\ u(k+1) & u(k+2) & \cdots & u(k+N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(k+p-1) & u(k+p) & \cdots & u(k+p+N-2) \end{bmatrix}$$

3: 相関行列 $\mathcal{R}_{yy}, \mathcal{R}_{yu}, \mathcal{R}_{uu}$ を計算する:

$$\mathcal{R}_{yy} = \frac{1}{N} Y_p(k) Y_p^\top(k) \quad (pm \times pm)$$

$$\mathcal{R}_{yu} = \frac{1}{N} Y_p(k) U_p^\top(k) \quad (pm \times pr)$$

$$\mathcal{R}_{uu} = \frac{1}{N} U_p(k) U_p^\top(k) \quad (pr \times pr)$$

4: 相関行列 $\mathcal{R}_{hh}$ を以下の式で計算する:

$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{R}_{yy} - \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}\mathcal{R}_{yu}^\top \quad (pm \times pm)$$

5: 特異値分解（SVD）を用いて $\mathcal{R}_{hh}$ を次のように分解する:

$$\mathcal{R}_{hh} = \mathcal{U}\Sigma^2\mathcal{U}^\top$$

ここで、$\mathcal{U}$ のサイズは $pm \times pm$ であり、n 個の特異値に対応する部分を抽出して、$\mathcal{U}_n$ のサイズは $pm \times n$ となる。

6: 観測行列 $\mathcal{O}_p$ を次のように定義し、状態行列 A を計算する:

$$\mathcal{O}_p = \mathcal{U}_n \quad (pm \times n)$$

$$A = \mathcal{O}_p^\dagger(1:(p-1)m, :)\mathcal{O}_p(m+1:pm, :) \quad (n \times n)$$

7: $\mathcal{U}_{o\mathcal{R}} = \mathcal{U}_o^\top \mathcal{R}_{yu}\mathcal{R}_{uu}^{-1}$ を計算し、B と D を次の式で求める:

$$\mathcal{U}_{o\mathcal{T}} = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:, 1:r) \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:, r+1:2r) \\ \vdots \\ \mathcal{U}_{o\mathcal{R}}(:, (p-1)r+1:pr) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} D \\ B \end{bmatrix} = \mathcal{U}_{on}^\dagger \mathcal{U}_{o\mathcal{T}} \quad (D\text{: } m \times r,\ B\text{: } n \times r)$$

資料に不足している情報の特定と整理

不足している情報の特定

資料には以下の情報が不足しています。

- **システムの具体的な構成要素**: 使用されているアルゴリズムや計算手順が説明されていますが、システム全体の構成要素や関係性についての詳細が欠けています。
- **データの性質に関する詳細**: 解析対象となるデータの具体的な特徴（例えば、データのサンプル数やサンプリング間隔、ノイズの特性）についての情報が不足しています。
- **計算精度と誤差の見積もり**: 計算の結果として得られる値の精度や、誤差の見積もりに関する説明が欠如しています。
- **アルゴリズムの適用範囲と限界**: SRIM アルゴリズムが適用できる条件や、その限界についての説明が不足しています。

不足している情報の整理

不足している情報は次のように整理されます。

- **システム構成**: システム全体のフローや各構成要素間の関係を図示し、明示的に説明する必要があります。
- **データ特性**: 使用されるデータの具体的な特性について、データのソースや収集方法、統計的性質を記述する必要があります。
- **計算精度と誤差**: 計算結果の精度や、誤差の分析方法、計算上の不確実性を評価するための基準を明示する必要があります。
- **アルゴリズムの適用範囲**: アルゴリズムが適用できる具体的な状況や、使用できない場合の制約条件を記述する必要があります。

不足している情報を得るためにすべきこと

不足している情報を得るためには、以下の対応を行う必要があります。

- **システム構成の詳細調査**: システムの全体像を把握するために、各構成要素について詳細な情報を集め、それらの関連性を分析する。
- **データの詳細な分析**: 解析に使用されるデータの性質を明確にするため、データの収集方法や統計的な特性について追加の調査を行う。
- **誤差分析と計算精度の検証**: 計算の精度を向上させるため、誤差の原因を特定し、誤差を最小限に抑えるための対策を講じる。
- **アルゴリズムの制約条件の明示**: アルゴリズムが適用できる条件とその限界について、理論的な根拠に基づいた説明を追加する。

[1]

参考文献

[1] J. Jer-Nan, “State-space system realization with input-and output-data correlation,” 1997.