予測誤差法

このセクションでは、予測誤差法という制御理論における重要な手法を学びます。

$$(qw)_{(t)} \coloneqq w_{(t-1)}$$

ここで、qw は遅延オペレータを表し、時刻 t における値を時刻 $t-1$ における値として表現します。

$$G(q) = \frac{b_n q^n + b_{n-1} q^{n-1} + \cdots + b_0}{q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \cdots + a_1 q + a_0}$$

$G(q)$ は伝達関数を表し、システムの入出力関係を示します。分子はシステムの出力を、分母はシステムの入力を表しています。

$$\begin{aligned} y_{(k+n)} &= a_{n-1} y_{(k+n-1)} + \cdots + a_1 y_{(k+1)} + a_0 y_{(k)} \\ &\quad + b_n u_{(k+n)} + \cdots + b_1 u_{(k+1)} + b_0 u_{(k)} + e_{(k)} \end{aligned}$$

この方程式は、時刻 $k+n$ における出力 y が、過去の出力、入力、および誤差 e の関数であることを示しています。

$$Y = X_1 v_1 + X_2 v_2 + e$$

これは、システムの出力 Y が二つの項 $X_1 v_1$ と $X_2 v_2$、及び誤差 e の和であることを示しています。

以下の方程式は、これらのベクトルと行列の定義を示しています。

$$\begin{aligned} Y &\coloneqq \begin{bmatrix} y_{(n)} & y_{(n+1)} & \cdots & y_{(N-1)} & y_{(N)} \end{bmatrix}^\top \\ X_1 &\coloneqq \begin{bmatrix} y_{(n-1)} & \cdots & y_{(1)} & y_{(0)} \\ y_{(n)} & \cdots & y_{(2)} & y_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ y_{(N-2)} & \cdots & y_{(N-n)} & y_{(N-n-1)} \\ y_{(N-1)} & \cdots & y_{(N-n+1)} & y_{(N-n)} \end{bmatrix} \\ v_1 &\coloneqq \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{bmatrix}^\top \\ X_2 &\coloneqq \begin{bmatrix} u_{(n)} & \cdots & u_{(1)} & u_{(0)} \\ u_{(n+1)} & \cdots & u_{(2)} & u_{(1)} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ u_{(N-1)} & \cdots & u_{(N-n)} & u_{(N-n-1)} \\ u_{(N)} & \cdots & u_{(N-n+1)} & u_{(N-n)} \end{bmatrix} \\ v_2 &\coloneqq \begin{bmatrix} b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix}^\top \\ e &\coloneqq \begin{bmatrix} e_{(n)} & e_{(n+1)} & \cdots & e_{(N-1)} & e_{(N)} \end{bmatrix}^\top \end{aligned}$$

$$\arg\ \min_v \sum_{k=n}^{N} e(k)^2 = (X^\top X)^{-1} X^\top Y$$

この方程式は、誤差の二乗和を最小化することで、最適なパラメータ v を見つける方法を示しています。

$$\begin{aligned} v &\coloneqq \begin{bmatrix} v_1^\top & v_2^\top \end{bmatrix}^\top \\ X &\coloneqq \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

本節では、さまざまな同定法の基本である最小二乗同定を学ぶ [1]。

つぎの線形離散時間モデルで記述されているシステムを考える。

$$A(q^{-1}) y_k = q^{-j} B(q^{-1}) u_k + C(q^{-1}) e_k$$

ここで、y_k は出力信号、u_k は入力信号、そして e_k は平均値ゼロの白色雑音である。また、$A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$ および $C(q^{-1})$ は、次式で与えられる多項式である。

$$\begin{aligned} A(q^{-1}) &= 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} + \cdots + a_n q^{-n} \\ B(q^{-1}) &= b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} + \cdots + b_m q^{-m} \\ C(q^{-1}) &= 1 + c_1 q^{-1} + c_2 q^{-2} + \cdots + c_l q^{-1} \end{aligned}$$

ARMA モデルに u_k が付加されたもので CARMA (controlled auto-regressive and moving average) モデルという。また、q^{-j} は、j ステップの長さのむだ時間を表している。

e_k は、システム雑音、観測雑音など観測できない雑音を表している。そこでひとまず、$C(q^{-1}) e_k$ を除いた式が、観測できる入出力信号に対してできるだけ成り立つように多項式 $A(q^{-1})$、$B(q^{-1})$ の係数を決定することを考える。

簡単のため $n = m+1$、$j = 1$ として、書くとつぎのようになる。

$$\begin{aligned} y_n &= -a_1 y_{n-1} - a_2 y_{n-2} - \cdots - a_n y_0 \\ &\quad + b_0 u_m + b_1 u_{m-1} + \cdots + b_m u_0 + e_n \\ y_{n+1} &= -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \cdots - a_n y_1 \\ &\quad + b_0 u_{m+1} + b_1 u_m + \cdots + b_m u_1 + e_{n+1} \\ y_{n+2} &= -a_1 y_{n+1} - a_2 y_n - \cdots - a_n y_2 \\ &\quad + b_0 u_{m+2} + b_1 u_{m+1} + \cdots + b_m u_2 + e_{n+2} \\ &\ \ \vdots \\ y_N &= -a_1 y_{N-1} - a_2 y_{N-2} - \cdots - a_n y_{N-n} \\ &\quad + b_0 u_{N-1} + b_1 u_{N-2} + \cdots + b_m u_{N-m-1} + e_N \end{aligned}$$

評価関数

$$J = \sum_{k=n}^{N} e_k^2$$

を最小にするように係数 a_i, b_i を決定せよ。

連立方程式は、

$$\overline{y} = \Omega \theta + \overline{e}$$

で表せる。ここで、

$$\overline{y} = \begin{bmatrix} y_n & y_{n+1} & y_{n+2} \cdots & y_N \end{bmatrix}^\top$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & b_0 & b_1 & \cdots b_m \end{bmatrix}^\top$$

$$\Omega = \begin{bmatrix} -y_{n-1} & -y_{n-2} & \cdots & -y_0 & u_m & u_{m-1} & \cdots & u_0 \\ -y_n & -y_{n-1} & \cdots & -y_1 & u_{m+1} & u_m & \cdots & u_1 \\ -y_{n+1} & \substack{y \\ n} & \cdots & -y_2 & u_{m+2} & u_{m+1} & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -y_{N-1} & -y_{N-2} & \cdots & -y_{N-n} & u_{N-1} & u_{N-2} & \cdots & u_{N-m-1} \end{bmatrix}$$

$$\overline{e} = \begin{bmatrix} e_n & e_{n+1} & e_{n+2} & \cdots & e_N \end{bmatrix}^\top$$

である。

評価関数を最小にする係数 a_i, b_i の最小二乗推定値 $\hat{\theta}$ は、つぎのように与えられる。

$$\hat{\theta} = (\Omega^\top \Omega)^{-1} \Omega^\top \overline{y}$$

参考文献

[1] 森. 泰親, **演習で学ぶディジタル制御**. 森北出版, 2022.