4/10 KUPT

〈미적분 복습〉

① $(e^x)' = e^x$, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(e^{x^2})' = \underbrace{(e^{x^2})}_{\text{겉미분}}\underbrace{(2x)}_{\text{속미분}}$ by chain rule $(\ln(2x+1))' = \left(\frac{1}{2x+1}\right) \times 2$

예제) $\left(e^{(3x^2+6x)}\right)' = \left(e^{(3x^2+6x)}\right) \times (6x+6)$

② $\int e^x\,dx = e^x$

$\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}$

예제) $\int e^{(2x+1)}\,dx = \left(e^{2x+1}\right) \times \frac{1}{2}$

↓ 미분

$e^{2x+1} = \left(e^{2x+1}\right) \cdot 2 \times \frac{1}{2}$

〈pivotal quantity 전에 알아둘 것〉

parameter	estimator
μ	$\bar{X}$
σ^2	S^2
θ	$\hat{\theta}$

〈Random Variable〉

ex) $X_1, X_2, X_3 \cdots X_n \sim exp(\theta)$

↳ Random variable : 아직 모르는 값들. sampling 하기 전

$x_1, x_2, x_3, \cdots x_n$

↳ sampling 후 아는 값들

$\underbrace{E(X), Var(X), Pr[X<3]}_{R.V}$

ex) $\underset{RV}{f_X}(x) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}x} = \underset{RV}{f_X}(a) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}a}$

∴ R.V X가 어떤 분포를 따른다는 것이 중요. $f_X(\ )$ 값은 상관없음 (변수 변환에서 중요)

<분포> pdf & cdf

$\boxed{\text{☆ 지수분포}}$

- $Y \sim exp(\theta)$: RV Y가 평균이 θ 인 지수분포를 따름

$$f_Y(y) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}\cdot y} \quad , 0<y<\infty$$

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = \int_0^y \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}\,dy = \left[-e^{-\frac{1}{\theta}y}\right]_0^y = 1-e^{-\frac{1}{\theta}y}$$

$F_Y(y) = 1-e^{\frac{y}{\theta}}$ 바로 알아야함

since $F_Y(a) = P(Y \le a) = \int_0^a \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}dy = 1-e^{-\frac{1}{\theta}\cdot a}$

$\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y) = f_Y(y) \qquad \frac{\partial}{\partial a}F_Y(a) = f_Y(a)$

$\rightarrow \frac{\partial}{\partial a}(1-e^{-\frac{1}{\theta}a}) = \frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}a} = f_Y(a)$

지수분포 특징

$\int_0^\infty f(y)dy = 1$

$E(Y) = \int_0^\infty y f(y)dy = \int_0^\infty y\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}\,dy \overset{\text{by 부분적분}}{=} \theta$

$E(Y^2) = \int_0^\infty y^2 f(y)dy = \int_0^\infty y^2\cdot\frac{1}{\theta}e^{-\frac{1}{\theta}y}\,dy = \theta^2$

예제) $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{3}x}dx = ?$

$u = -\frac{x}{3}$

$du = -\frac{1}{3}dx$

$dx = -3du$

$-3\int e^u du = -3e^u$

$= -3\times e^{-\frac{x}{3}}$

<변수변환> 가장 중요.

확률론 ⇒ $Y \sim exp(\theta)$ $\quad E(Y), Var(Y)$ 구하기

$\neq$

수리통계학 ⇒ $f_Y(y) = \frac{e^y}{y^\theta}$ 우리가 처음보는 분포

$X = \ln Y$ 변수변환

$X \sim exp(\theta)$: 모르는 분포를 변수변환해서 아는 분포로 만들어야 한다

ex) 지수, 감마, χ^2

⟨CDF method⟩

ex1) $f(x)=1 \quad 0<x<1$: 우리가 이미 아는 pdf

find $E(e^x)$

i) $Y=e^X$

ii) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=F_X(\ln y)$

$F_Y(y)=F_X(\ln y)$

iii) $\frac{\partial}{\partial y}F_Y(y)=\frac{\partial}{\partial y}F_X(\ln y)$

$$f_Y(y)=\underbrace{f_X(\ln y)}_{\text{겉미분}}\cdot\underbrace{\tfrac{1}{y}}_{\text{속미분}}$$ by chain rule

iv) $f_Y(y)=f_X(\ln y)\cdot\frac{1}{y}=1\times\frac{1}{y}$

$f_Y(y)=\frac{1}{y}, \quad e^0<y<e^1$

$E(e^X)=E(Y)=\int_{e^0}^{e^1} y\cdot\frac{1}{y}\,dy=e-1$

ex2) HW#1 8번

$f_Y(y)=3(1-y)^2 \quad 0<y<1$

find pdf of $U=(1-Y)^3$ $=f_U(a)$

i) $U=(1-Y)^3$

ex3) HW#1 1번 order statistics

$X_1,X_2,\cdots,X_n \overset{iid}{\sim} \exp(\beta)$

$f_X(x)=\frac{1}{\beta}e^{-\frac{1}{\beta}x}, \quad x>0$

$Y=\max(X_i)$, Find pdf of Y

i) $F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\max(X_i)\le y)$

$=P(X_1\le y, X_2\le y,\cdots,X_n\le y)$

$=P(X\le y)^n$ since indep.

$=\boxed{F_X(y)^n}$

미분

ii) $f_Y(y)=n(F_X(y))^{n-1}\times f_X(y)$

$=n(1-e^{-y/\beta})^{n-1}\times\frac{1}{\beta}e^{-y/\beta}$

$=\frac{n}{\beta}e^{-\frac{1}{\beta}y}\times\left[1-e^{-\frac{y}{\beta}}\right]^{n-1}, \quad y>0$

$Y\sim\exp(\beta)$ 일때

$F_X(y)=1-e^{-y/\beta}$ 외우기

+ 추가문제

$U=\min(X_i)$ 의 pdf?

$F_U(a)=Pr[U\le a]=Pr[\min(X_i)\le a]$

$=1-P[\min(X_i)>a]$

$=1-P(X_1>a, X_2>a,\cdots,X_n>a)$

$=1-P(X>a)^n$

$=1-[1-F_X(a)]^n$ $\quad F_X(a)=1-e^{-\frac{a}{\beta}}$ 이므로

$f_U(a)=-n(1-F_X(a))^{n-1}\times(-f_X(a))$

$=n(e^{-\frac{a}{\beta}})^{n-1}\times f_X(a)$

$=n(e^{-\frac{a}{\beta}})^{n-1}\times\frac{1}{\beta}e^{-\frac{a}{\beta}}$

<Gamma distribution>

$\alpha=1$ 이면 Gamma 분포가 exp 분포가 된다

$Y \sim Gamma(\alpha, \beta)$

$$f_Y(y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \times y^{\alpha-1} \times e^{-\frac{1}{\beta}y}, \quad x>0$$

$$\underline{\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy} = (\alpha-1)!$$

암기

$$E(Y) = \int_0^\infty y f_Y(y)\, dy = \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} y^\alpha \times e^{-\frac{1}{\beta}y} dy$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \boxed{\int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} y^{(\alpha+1-1)} \times e^{-\frac{1}{\beta}y} dy}$$

$= gamma(\alpha+1, \beta)$, 총면적 $=1$

$$= \frac{\alpha!\,\beta^{\alpha+1}}{(\alpha-1)!\,\beta^\alpha} = \alpha\beta$$

$Y \sim Gamma(1, \beta) = exp(\beta)$

$\therefore exp(\beta) = Gamma(1, \beta)$

Gamma 분포 특징

$Y_i \sim Gamma(\alpha_i, \beta)$ 일 때

$\sum_{i=1}^n Y_i \sim Gamma\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta\right)$ → 감마분포의 합

$c \cdot Y_i \sim Gamma(\alpha, c\beta)$

저번 시험문제! MGF는 두 줄로 해결가능
특징을 이용해서 풀기

$X_i \sim exp(\theta)$ 일 때 $\quad exp(\theta) = gamma(1, \theta)$

$\sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma(n, \theta)$: 지수분포의 합은 감마분포

<χ^2 분포>

$Z \sim N(0,1)$

$U = Z_1^2 + Z_2^2 + \cdots + Z_n^2$ 일 때

$U \sim \chi^2(n)$

$E(U) = n$ 기댓값 = 자유도

$\chi^2(n) \sim Gamma(\frac{n}{2}, 2)$

ex) $\chi^2(4) \sim Gamma(\frac{4}{2}, 2)$

$Gamma(8, 2) \sim \chi^2(16)$

$Gamma(n, 2) \sim \chi^2(2n)$

⟨exp, gamma, χ^2 관계⟩

exp $\longrightarrow$ χ^2

$Y_i \sim exp(\theta) \sim gamma(1, \theta)$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim gamma(n, \theta)$

$\frac{2}{\theta} \sum_{i=1}^{n} Y_i \sim gamma(n, 2) \sim \chi^2(2n)$

→ pivotal에 많이 나온다

θ에 depend하지 않는 분포가 된다.

$exp(2) \sim \chi^2(?)$

$exp(2) \sim gamma(1, 2) \sim \chi^2(2)$

ex) $Y \sim exp(2) \sim \chi^2(?)$

$Y \sim exp(2) \sim gamma(1, 2)$

$\sum_{i=1}^{n} Y_i \sim Gamma(n, 2) \sim \chi^2(2n)$

⟨Confidence Interval⟩

$P(\hat{\theta}_L < \theta < \hat{\theta}_U) = (1-\alpha)$

target parameter

양 끝에는 우리가 아는 sample space 값들로 이루어져야 함!

pivotal method: one useful method for finding CI

- Pivotal quantity 조건.

① pivotal quantity 안에 θ 가 only unknown parameter.
② pivotal quantity의 pdf는 θ에 의존 X

ex) 시험: 특정 분포 Y를 주고
ΣY_i가 pivotal quantity 인지 아닌지 판단

ex) $Y_1, Y_2, \cdots Y_n \sim N(\mu, \sigma^2)$

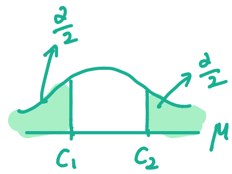
σ^2 : known

Q. $(1-\alpha)$ CI for μ ?

$\hookrightarrow$ target parameter

$P(C_1 < \mu < C_2) = 1-\alpha$

만약 μ의 분포를 알면 pivotal 안쓰고 바로



C_1, C_2 구할 수있다

but μ의 분포를 모르기 때문에

우리가 아는 분포를 도출하는 것 : pivotal quantity

ex) $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$ by CLT $\qquad f_Z(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\hookrightarrow$ Q. pivotal quantity?

① μ only parameter ok

② Not depend on μ ok