# 청년 AI 아카데미 22기 알고리즘 실습

그래프





## **Today**

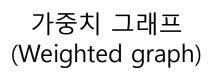
- 그래프 자료구조
  - 인접 행렬 그래프
  - 인접 리스트 그래프
- 그래프 탐색
  - BFS
  - DFS
- 그래프 심화
  - 최단 경로 찾기

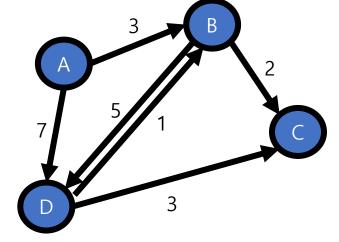


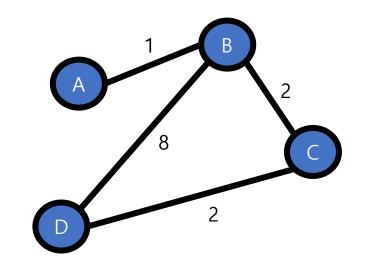
#### 그래프

방향성 그래프 (Directed graph)

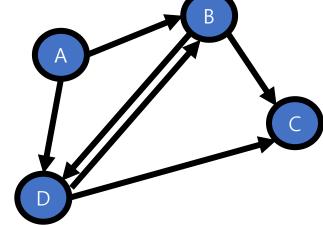
무방향성 그래프 (Undirected graph)

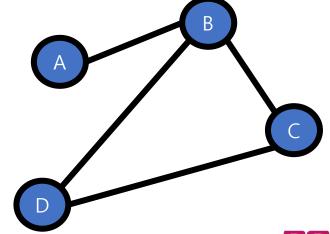




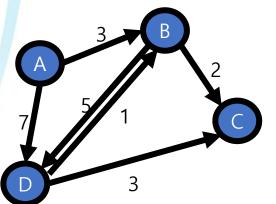


비가중치 그래프 (Unweighted graph)

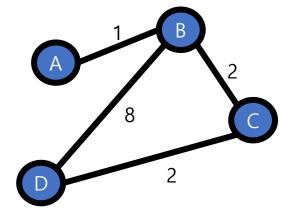




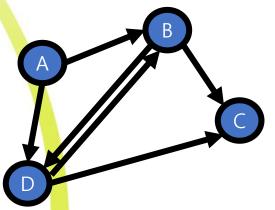
# 그래프 – 인접 행렬



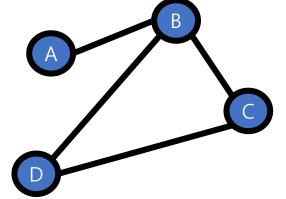
	A	В	C	D
A	0	3	0	7
В	0	0	2	5
С	0	0	0	0
D	0	1	3	0



	A	В	C	D
A	0	1	0	0
В	1	0	2	8
С	0	2	0	2
D	0	8	2	0



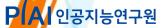
	A	В	C	D
A	0	1	0	1
В	0	0	1	1
С	0	0	0	0
D	0	1	1	0



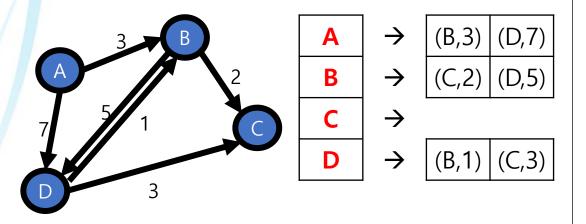
	A	В	С	D
A	0	1	0	0
В	1	0	1	1
C	0	1	0	1
D	0	1	1	0

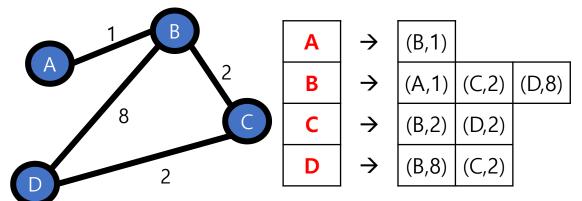
4

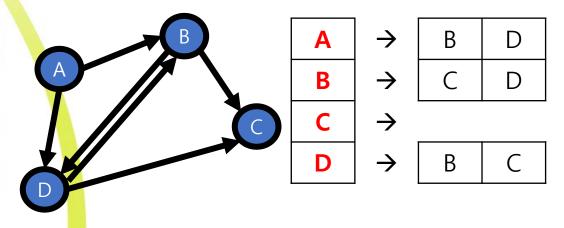


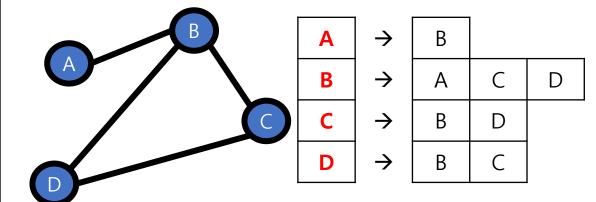


#### 그래프 – 인접 리스트



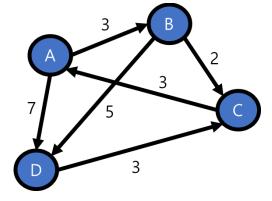






### 인접 행렬 vs 인접 리스트

	A	В	С	D
A	0	3	0	7
В	0	0	2	5
С	3	0	0	0
D	0	0	3	0



Α	В,3	D,7
В	C,2	D,5
С	A,3	
D	C,3	

인접 행렬	목록	인접 리스트
$O( V ^2)$	공간 복잡도	O( V  +  E )
0(1)	두 노드 사이의 간선 확인 시간	$O(\operatorname{outdeg}(v))$
O( V )	한 노드의 모든 간선 확인 시간	O(outdeg(v))

#### 01. 인접 행렬 구현하기

#### 인접 행렬 구현하기

#### 문제 정의

강의 때 배운 내용을 이용하여, 가중치가 있는 방향성 그래프가 주어졌을 때 이를 인접 행렬로 표현하는 프로그램을 작성하세요 방향성 그래프에서 어떤 간선 (u,v,c)의 의미는 u에서 v로 가는 비용이 c인 간선이 있다는 것을 의미합니다.

#### 입력 형식

입력의 첫 줄에 테스트 케이스의 숫자 t가 주어진다.

N = 4, M = 6

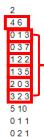
- 각 테스트 케이스마다 입력은 아래와 같다
- 첫 줄에 정점의 개수 N과 간선의 개수 M이 주어진다.  $(N \leq 1,000, M \leq 20,000)$
- ullet 그 다음 M개의 줄에 걸쳐서 방향성 그래프의 간선 (u,v,c)가 공백을 사이에 두고 입력된다.
- ullet u와 v 둘 다 일치하는 간선은 여러 번 입력되지 않으며, u와 v는 항상 0부터 N-1 사이의 정수이고, c는 자연수이다

#### 출력 형식

- 각 테스트 케이스에 대해 입력받은 그래프를 인접 행렬로 표시한 결과를 출력한다.
- 각 테스트 케이스에서 출력하는 i번째 줄의 j번째 숫자는 간선  $\underline{(i,j,c)}$ 가 존재하면 c를 출력하고, 그렇지 않다면 0을 출력한다

#### 입력 예시

Matrix[i][j]=c (방향성 그래프이니 Matrix[j][i]는 업데이트 하지 않음!!)

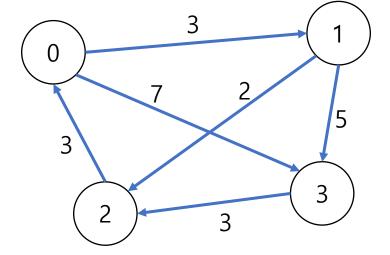


총	M=6개의	edae	input을	받음

#### 출력 예시

0	3	0	7	
0	0	2	5	
3	0	0	0	
0	0	3	0	
0	1	1	0	1
1	0	0	2	1
0	0	0	0	1
0	0	0	0	1
0	1	2	0	0

	0	1	2	3
0	0	3	0	7
1	0	0	2	5
2	3	0	0	0
3	0	0	3	0



#### 01. 인접 행렬 구현하기

#### 인접 행렬 구현하기

#### 문제 정의

강의 때 배운 내용을 이용하여, 가중치가 있는 방향성 그래프가 주어졌을 때 이를 인접 행렬로 표현하는 프로그램을 작성하세요. 방향성 그래프에서 어떤 간선 (u,v,c)의 의미는 u에서 v로 가는 비용이 c인 간선이 있다는 것을 의미합니다.

#### 입력 형식

- 입력의 첫 줄에 테스트 케이스의 숫자 t가 주어진다
- 각 테스트 케이스마다 입력은 아래와 같다
  - 첫 줄에 정점의 개수 N과 간선의 개수 M이 주어진다.  $(N \leq 1,000, M \leq 20,000)$
  - ullet 그 다음 M개의 줄에 걸쳐서 방향성 그래프의 간선 (u,v,c)가 공백을 사이에 두고 입력된다.
  - ullet u와 v 둘 다 일치하는 간선은 여러 번 입력되지 않으며, u와 v는 항상 0부터 N-1 사이의 정수이고, c는 자연수이다

#### 출력 형식

- 각 테스트 케이스에 대해 입력받은 그래프를 인접 행렬로 표시한 결과를 출력한다.
- 각 테스트 케이스에서 출력하는 i번째 줄의 j번째 숫자는 간선 (i,j,c)가 존재하면 c를 출력하고, 그렇지 않다면 0을 출력한다

#### 입력 예시

2	
4 6	
013	
0 3 7	츠려 에 니
122	출력 예시
135	
203	0307
3 2 3	
5 10	0025
011	3000
021	3000
0 4 1 1 0 1	0030
132	
141	01101
2 4 1	10021
3 4 1	
4 1 1	0 0 0 0 1
4 2 2	00001
	01200

```
3 1
7 2
5
3 3 3
```

< 행렬(2차원 배열)을 출력 >

```
for i in range(N):
    print(*Matrix[i])
```



#### 02. 인접 리스트 구현하기

#### 인접 리스트 구현하기

#### 문제 정의

강의 때 배운 내용을 이용하여, 가중치가 없는 무방향성 그래프가 주어졌을 때 이를 인접 리스트로 표현하는 프로그램을 작성하세요.

무방향성 그래프에서 어떤 간선 (u,v)의 의미는 u에서 v로 가는 간선이 있다는 것을 의미하며, v에서 u로 가는 간선 또한 존재함을 의미합니다.

#### 입력 형식 List[u].append(v), List[v].append(u)

- 입력의 첫 줄에 테스트 케이스의 숫자 t가 주어진다.
- 각 테스트 케이스마다 입력은 아래와 같다.
  - 첫 줄에 정점의 개수 N과 간선의 개수 M이 주어진다. (N < 1,000, M < 20,000)
  - ullet 그 다음 M개의 줄에 걸쳐서 무방향성 그래프의 간선 (u,v)가 공백을 사이에 두고 입력된다.
  - u와 v는 항상 0부터 N-1 사이의 정수이고, 두 정점 간 간선은 유일하다.

#### 출력 형식

- 각 테스트 케이스에 대해 입력받은 그래프를 인접 리스트로 표시한 결과를 출력한다.
- 각 테스트 케이스에서 출력하는 i번째 줄은 정점 i에 연결된 정점들의 번호를 오름차순으로 하나씩 공백을 사이에 두고 출력한다.
- 정점 i에 연결된 어떠한 정점도 없다면 해당 줄은 빈 줄로 출력한다

#### 입력 예시

0 1

14

N = 4, M = 4

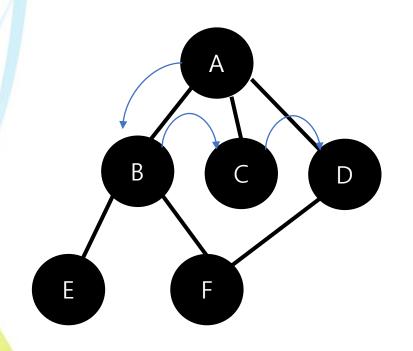
총 M=4개의 edge input을 받음

출력	여	人
----	---	---

014

0	1
2	(3)

0	1, 3
1	0, 2, 3
2	1
3	0, 1



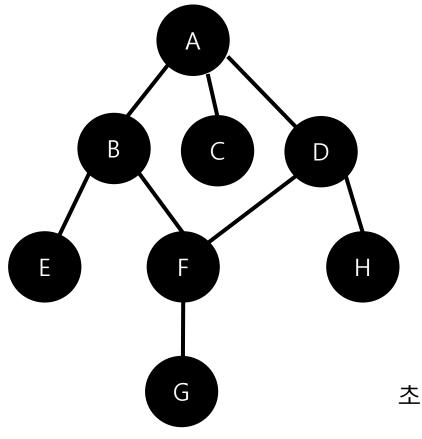
Breadth-first search (BFS) 는 시작 노드에서 인접한 노 드들을 먼저 탐색하는 방법

하나의 경로 (u, v)에 대해서:

- 1. u 노드를 방문
- 2. u 노드와 이웃한 v 방문
- 3. u 노드와 이웃한 v', v"... 차례대로 방문
- 4. u 노드와 이웃한 노드들을 모두 방문했다면 v, v', v"... 노드와 인접한 노드 중 방문하지 않은 이웃 노드들 방문

- 큐를 사용하는 방법



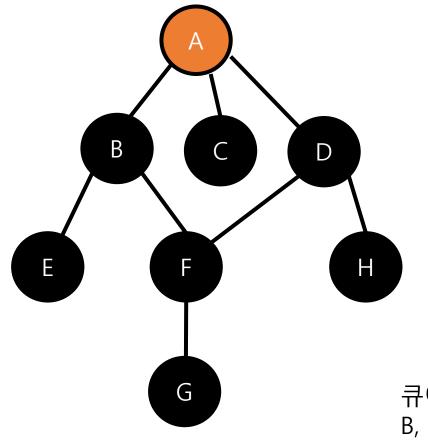


거리	
0	A
1	
2	
3	
결과	

초기 큐에 시작 노드인 A push

큐에서 pop된 A노드를 방문으로 저장



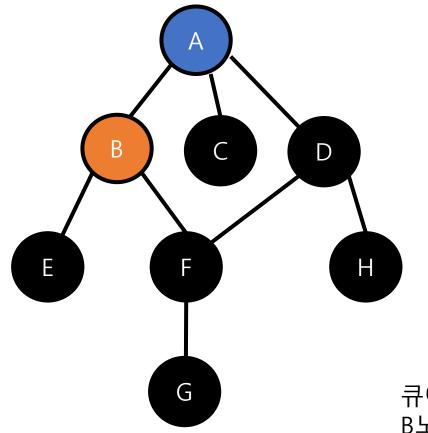


거리	
0	
1	BCD
2	
3	
결과	Α

큐에 A 노드와 인접한 방문하지 않은 노드인 B, C, D push





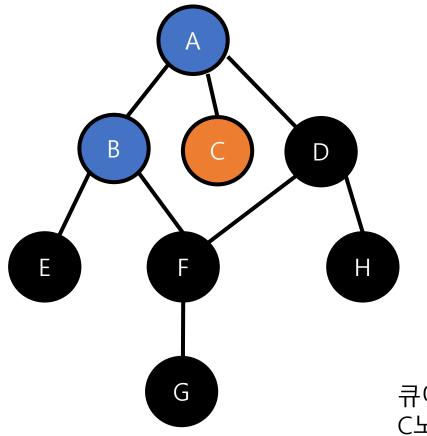


거리	
0	
1	CD
2	E F
3	
결과	A B

큐에서 pop된 B노드 방문 B노드와 이웃한 방문하지 않은 노드인 E, F push







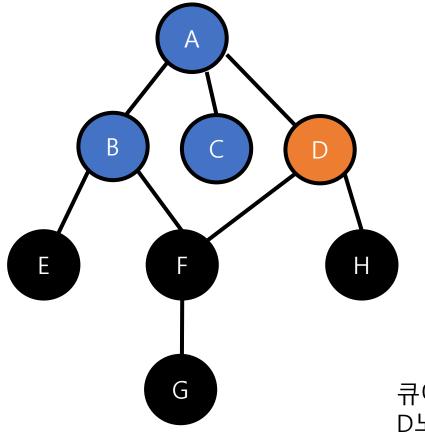
거리	
0	
1	D
2	E F
3	
결과	АВС

큐에서 pop된 C노드 방문 C노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 없음



PAV인공지능연구원





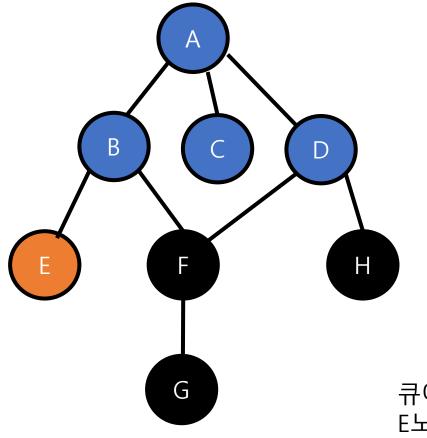
거리	
0	
1	
2	EFFH
3	
결과	ABCD

큐에서 pop된 D노드 방문 D노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 F, H push



PAI인공지능연구원





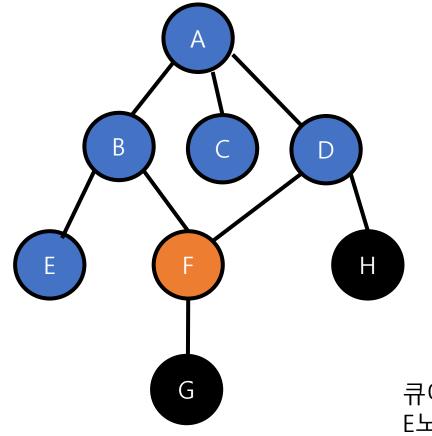
거리	
0	
1	
2	FFH
3	
결과	ABCDE

큐에서 pop된 E 노드 방문 E노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 없음



PAV인공지능연구원





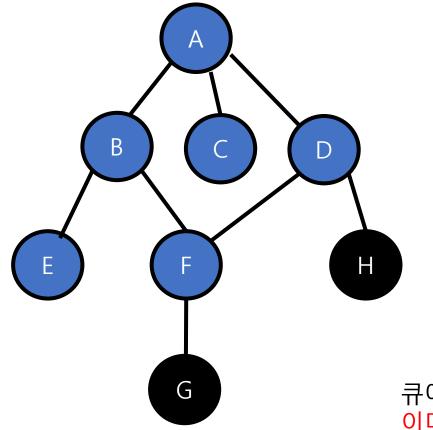
거리	
0	
1	
2	FH
3	G
결과	ABCDEF

큐에서 pop된 F 노드 방문 E노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 G push



PAI인공지능연구원





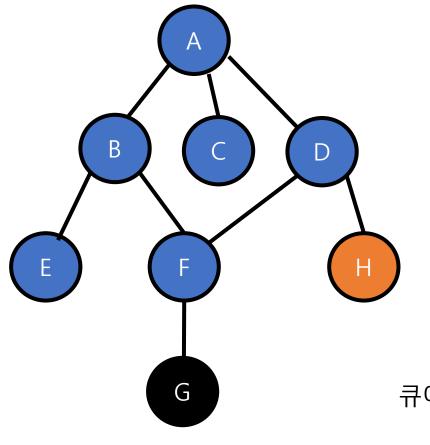
거리	
0	
1	
2	Н
3	G
결과	ABCDEF

큐에서 pop된 F 노드 방문 X! 이미 F노드를 방문하였기 때문



PAV인공지능연구원



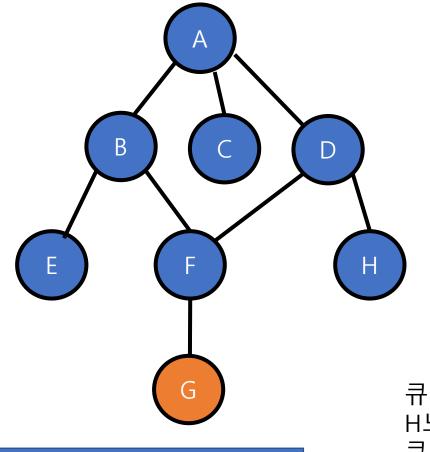


거리	
0	
1	
2	
3	G
결과	ABCDEFH

큐에서 pop된 H 노드 방문



PAI인공지능연구원



PAI인공지능연구원

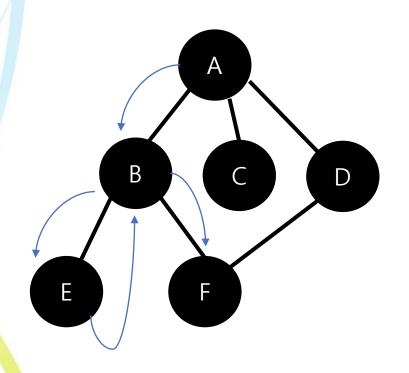
거리	
0	
1	
2	
3	
결과	ABCDEFHG

큐에서 pop된 H 노드 방문 H노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 없음 큐에서 pop된 G 노드 방문 G노드와 이웃한 방문하지 않은 노드 없음

큐에 노드가 없으므로 탐색 종료



#### 04. DFS (깊이 우선 탐색)

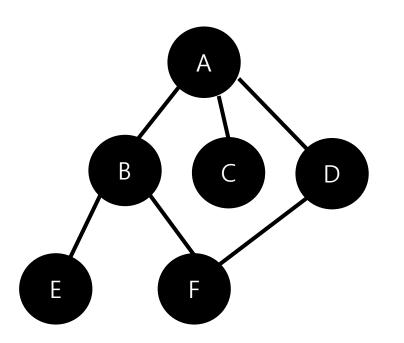


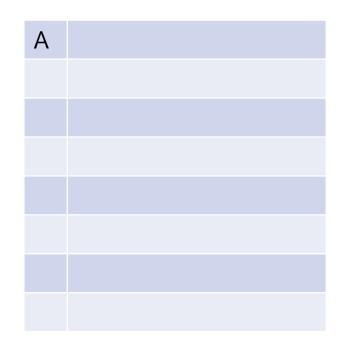
Depth-first search (DFS) 는 시작 노드에서 하나의 분기를 완벽하게 탐색한 후 다음 분기로 넘어가는 방법

하나의 경로 (u, v)에 대해서:

- 1. u 노드를 방문
- 2. u 노드와 연결된 노드 중 v 방문
- 3. v 노드를 시작으로 하는 다른 경로의 노드 방문
- 4. v 노드의 분기를 전부 탐색했다면, 다시 u에 인접 한 노드 중 방문하지 않은 이웃 노드들 방문
- 재귀 함수를 사용하는 방법
- 명시적인 stack을 사용하는 방법





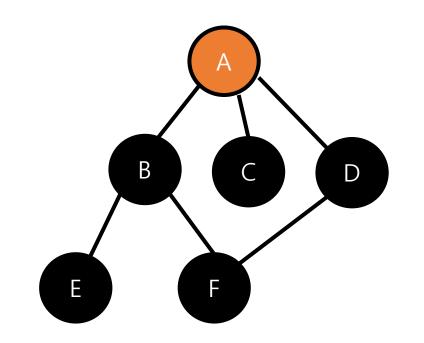


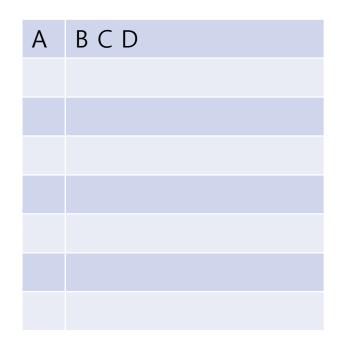
DFS(A)

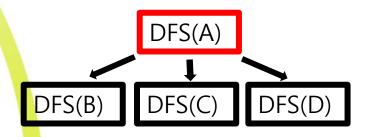
각각의 함수에서 시작 노드를 매개변수로 재귀적인 탐색을 진행한다. 시작 노드: A



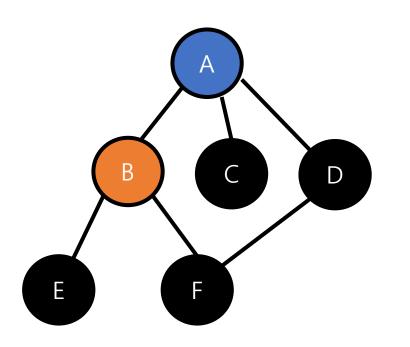




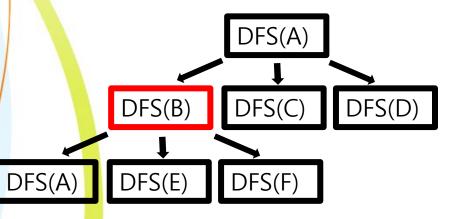




< DFS(A) > A노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출 A노드는 방문했음을 저장

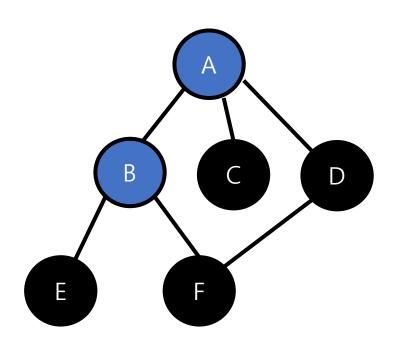


BCD
AEF

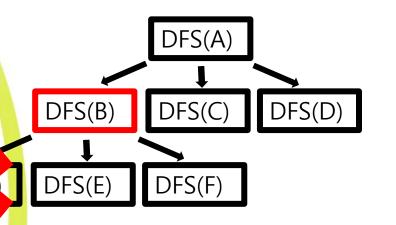


PAI인공지능연구원

< DFS(B) >
B노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출
B노드는 방문했음을 저장

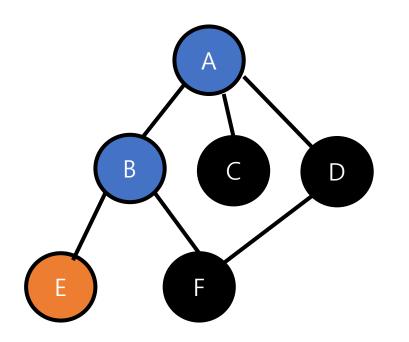


Α	BCD
В	E F

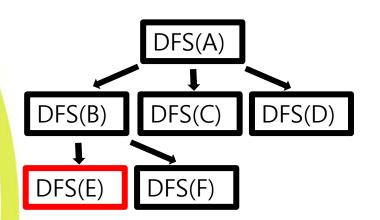


PAV인공지능연구원

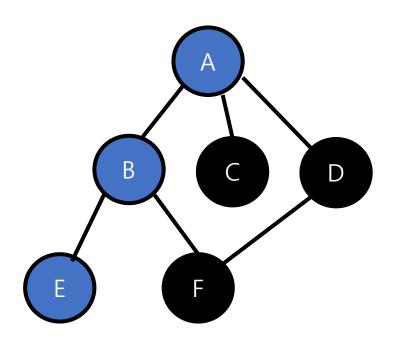
- < DFS(B) >
- → A노드는 방문했으므로 재귀호출을 안함



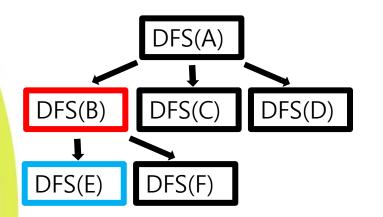
Α	BCD
В	E F
Ε	В



< DFS(E) >
E노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출
E노드는 방문했음을 저장

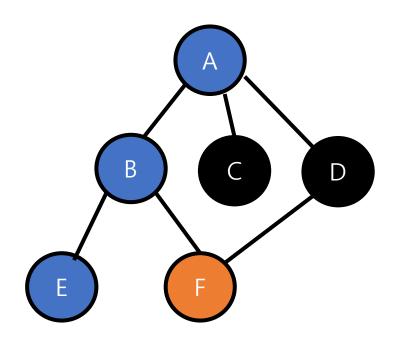


Α	BCD
В	F
Ε	

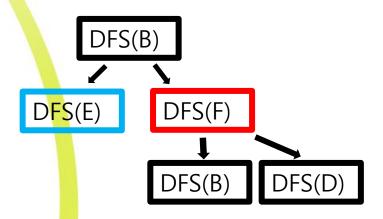


PAI인공지능연구원

< DFS(E) >
E노드에 인접한 방문 되지 않은 노드는 없기
때문에 B노드로 돌아감

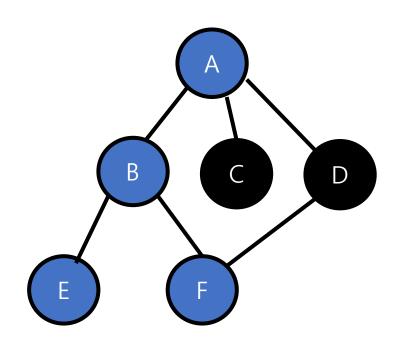


Α	BCD
В	F
Ε	
F	B D

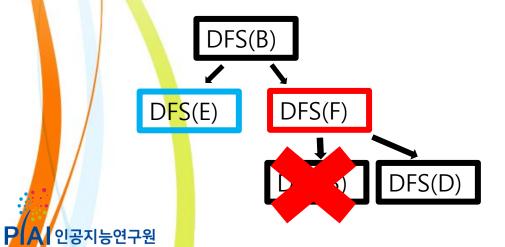


PAV인공지능연구원

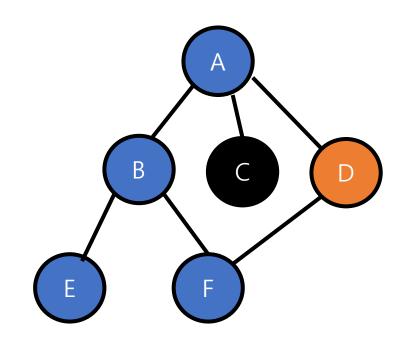
< DFS(F) >
F노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출
F노드는 방문했음을 저장



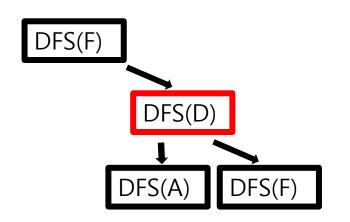
Α	BCD
В	F
Ε	
F	D



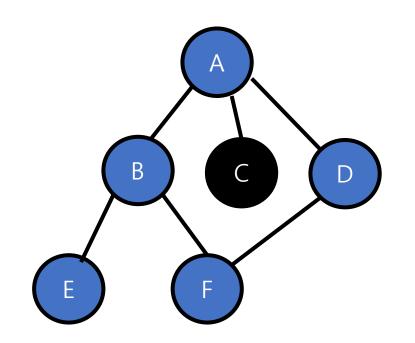
- < DFS(F) >
- → B노드는 방문했으므로 재귀호출을 안함



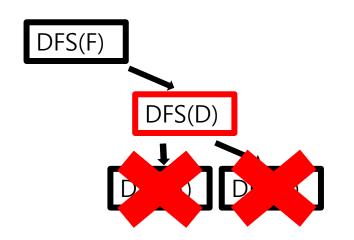
Α	BCD
В	F
Ε	
F	D
D	AF



< DFS(D) > D노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출 D노드는 방문했음을 저장

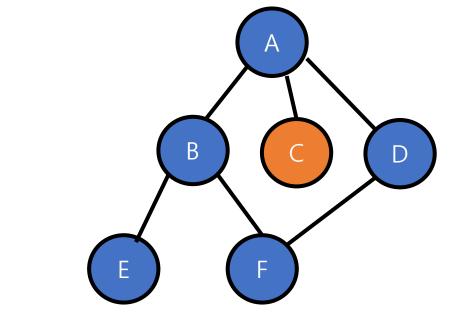


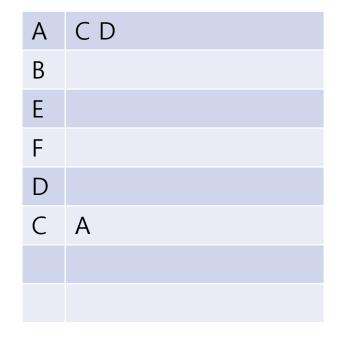
Α	CD
В	
Ε	
F	
D	

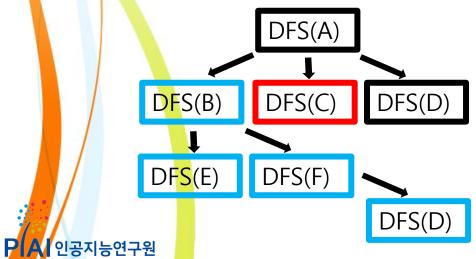


PAI인공지능연구원

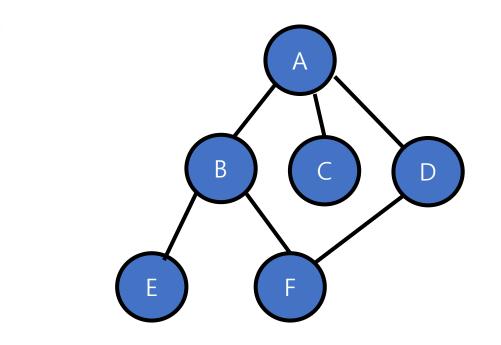
- < DFS(D) >
- → A, F노드는 방문했으므로 재귀호출을 안함 D노드에 인접한 방문 되지 않은 노드는 없기 때문에 F노드로 돌아감



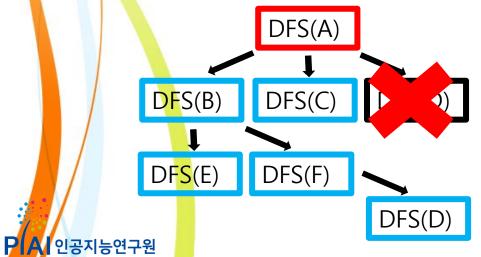




< DFS(C) >
C노드에 인접한 노드들에 대해 재귀호출
C노드는 방문했음을 저장
C노드에 인접한 방문 되지 않은 노드는 없기
때문에 A노드로 돌아감

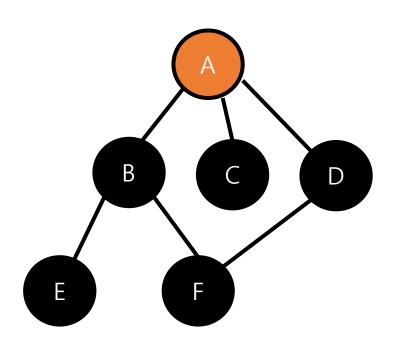


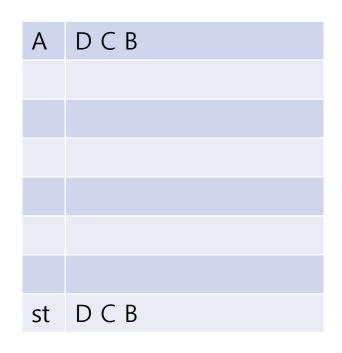
Α	D
В	
Ε	
F	
D	
C	



< DFS(A) > D 노드는 이미 방문 되었음 모든 노드를 방문하였기 때문에 종료

#### 04. DFS (스택)





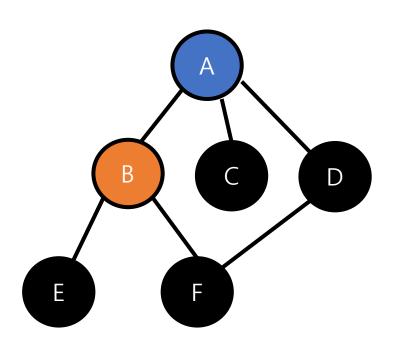
묵시적으로 스택을 통해 구현되는 재귀의 방식을, 직접 스택을 만들어 명시적으로 탐색을 진행

초기 스택에 A노드의 이웃 (D, C, B) 넣음 A노드를 방문으로 저장





#### 04. DFS (스택)



Α	
В	FE
st	DCFE

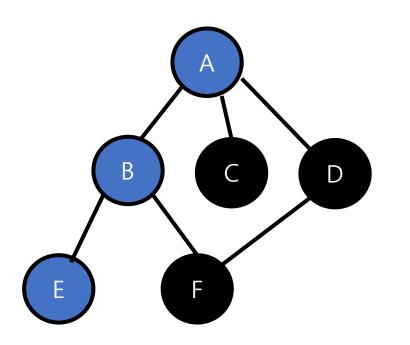
스택에서 pop된 B노드 방문 B노드를 방문으로 저장 B노드와 이웃한 F, E노드 스택에 push

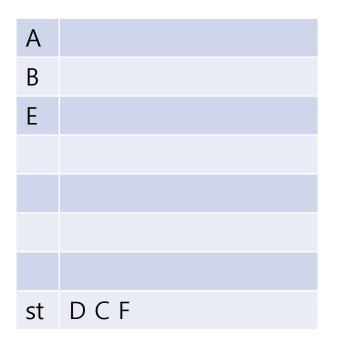
(값이 작은 노드를 먼저 탐색하기 위해 push순서를 변경할 수 있음)



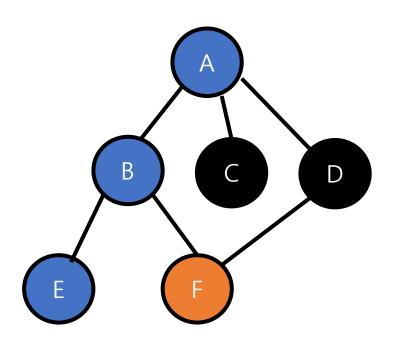


#### 04. DFS (스택)



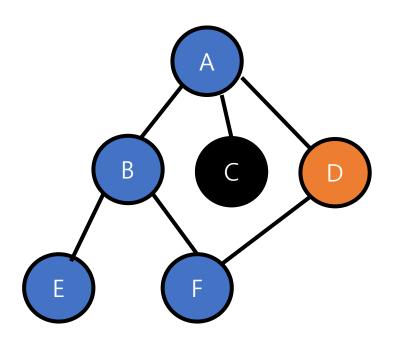


스택에서 pop된 E노드 방문 E노드를 방문으로 저장 E노드와 이웃한 방문 되지 않은 노드 없음



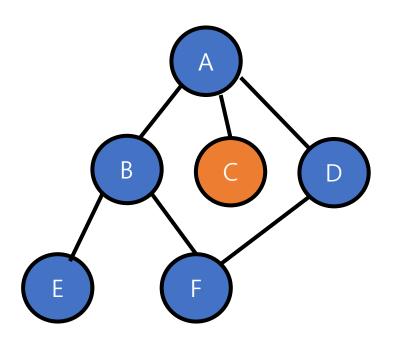
Α	
В	
Е	
F	D
st	DCD

스택에서 pop된 F노드 방문 F노드를 방문으로 저장 F노드와 이웃한 방문 되지 않은 노드 D push



Α	
В	
Ε	
F	
D	
st	DC

스택에서 pop된 D노드 방문 D노드를 방문으로 저장 D노드와 이웃한 방문 되지 않은 node없음

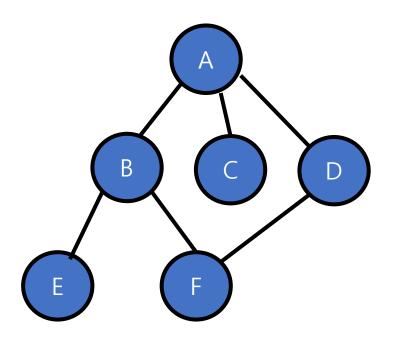


Α	
В	
Ε	
F	
D C	
C	
st	D

스택에서 pop된 C노드 방문 C노드를 방문으로 저장 C노드와 이웃한 방문 되지 않은 node없음





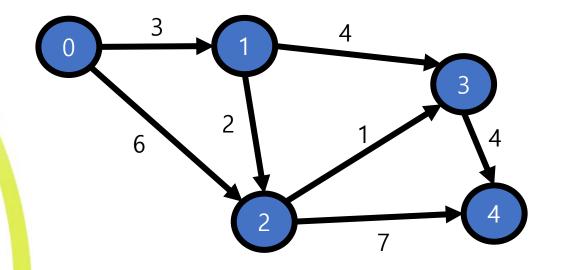


Α	
В	
Ε	
F	
D C	
C	
st	

그 다음 스택에서 pop된 D노드는 방문하였기 때문에, 탐색 종료

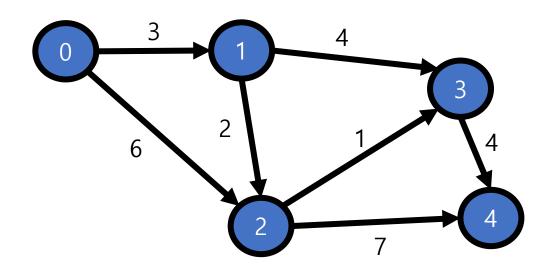


모든 간선의 가중치가 양수일 때, 최단 경로의 거리 값 찾기 ※ 인접 행렬과 인접 리스트 두 형태로 모두 구현이 가능합니다.



0	1	2	3	4
0	3	5	6	10



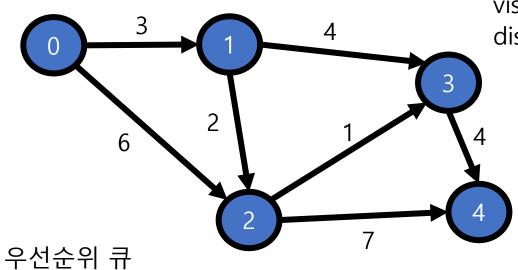


Priority Queue(heapq)를 이용한 구현 vs 배열만 써서 구현  $O(|E|\log|V|)$   $O(|V|^2)$ 

※주의! heapq에는 decreasekey operation이 없습니다.

⇒ 각 정점의 거리가 확정되었는지 체크하고, 이미 확정된 정점이라면 무시!

42



visited=[False, False, False, False, False] dist=[-1, -1, -1, -1]

(0, 0)

hq: 우선순위 큐

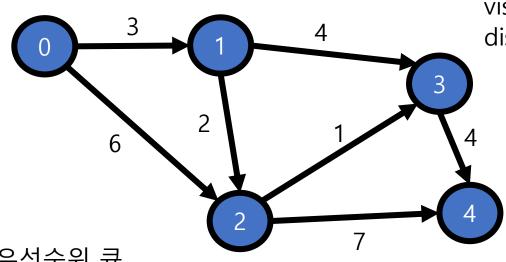
hq에 들어가는 원소: 숫자 튜플 (d, u)

- 0에서 u까지 d인 경로가 존재합니다.
- 우선순위: d 값이 가장 작은 튜플

최초의 hq: (0, 0)

- 0번 정점은 거리 0으로 0번에 도착할 수 있습니다.
- 그리고 이보다 더 좋은 경로는 없습니다. (곧 확정)





visited=[True, False, False, False, False] dist=[0, -1, -1, -1, -1]

우선순위 큐

(3, 1)

(6, 2)

(0, 0)이 pop: 0에서 0으로 가는 최단 경로는 확정

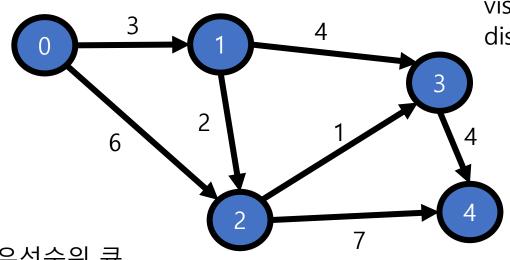
visited[0]을 True로 바꿉니다. (확정 체크)

dist[0]을 0으로 저장: 확정된 최단 경로 길이 저장

0에서 방문할 수 있는 정점들의 정보를 hq에 push합 니다. (0까지 온 경로 + 0과 정점 사이의 간선)







visited=[True, **True**, False, False, False] dist=[0, 3, -1, -1, -1]

우선순위 큐

(5, 2)

(7, 3)

(6, 2)

(3, 1)이 pop: 0에서 1으로 가는 최단 경로는 확정

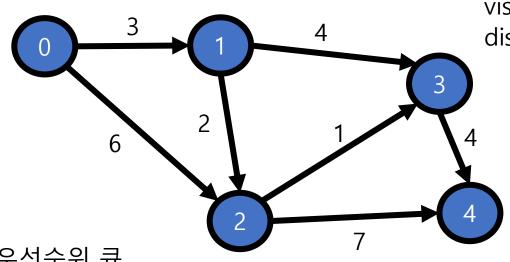
visited[1] = True

dist[1] = 3: 확정된 최단 경로 길이

1에서 방문할 수 있는 정점들의 정보를 hq에 push합 니다. (1까지 온 경로 + 1과 정점 사이의 간선)







visited=[True, True, **True**, False, False] dist=[0, 3, **5**, -1, -1]

우선순위 큐

(6, 3)(7, 3)

PIAI인공지능연구원

(6, 2)

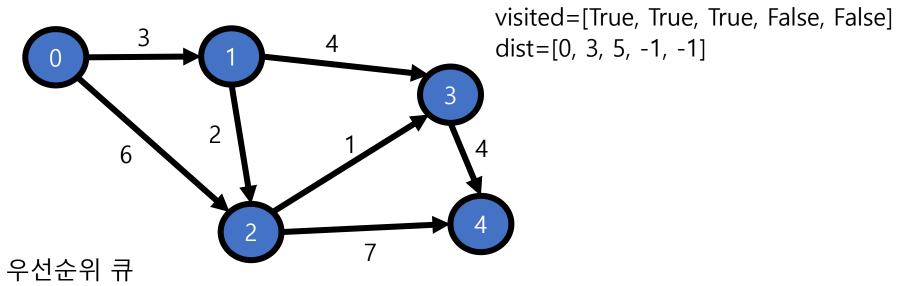
(12, 4)

(5, 2)가 pop: 0에서 2으로 가는 최단 경로는 확정

visited[2] = True

dist[2] = 5: 확정된 최단 경로 길이

2에서 방문할 수 있는 정점들의 정보를 hq에 push합 니다. (2까지 온 경로 + 2와 정점 사이의 간선)



(6, 2)가 pop

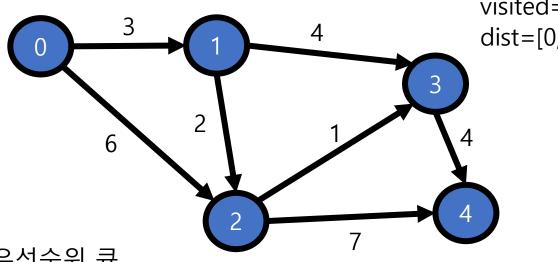
(6, 3)

PAI인공지능연구원

(12, 4)

visited[2]는 이미 True

- 0에서 2로 가는 최단 경로는 이미 확정되었습니다.
- 이후에 나오는 경로가 5보다 작을 리 없음
- 그러므로 무시합니다.



visited=[True, True, True, True, False] dist=[0, 3, 5, 6, -1]

우선순위 큐

(6, 3)이 pop: 0에서 3으로 가는 최단 경로는 확정

(10, 4)

visited[3] = True

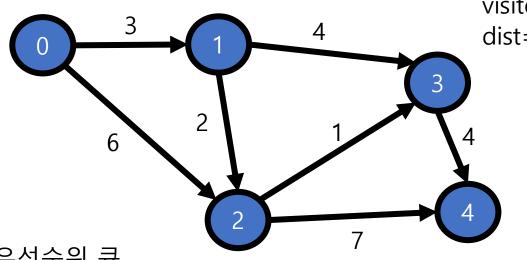
(12, 4)

PIAI인공지능연구원

dist[3] = 6: 확정된 최단 경로 길이

3에서 방문할 수 있는 정점들의 정보를 hq에 push합 니다. (3까지 온 경로 + 3과 정점 사이의 간선)





visited=[True, True, True, True, True] dist=[0, 3, 5, 6, **10**]

우선순위 큐

(10, 4)이 pop: 0에서 4으로 가는 최단 경로는 확정

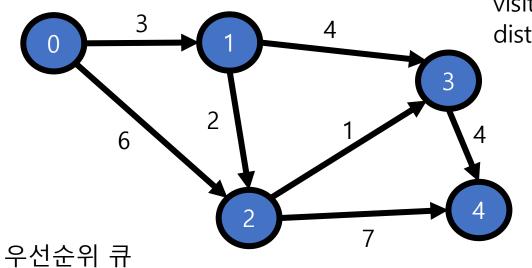
visited[4] = True

dist[4] = 10: 확정된 최단 경로 길이

(12, 4)

PAV인공지능연구원





visited=[True, True, True, True, True] dist=[0, 3, 5, 6, 10]

(12, 4)가 pop

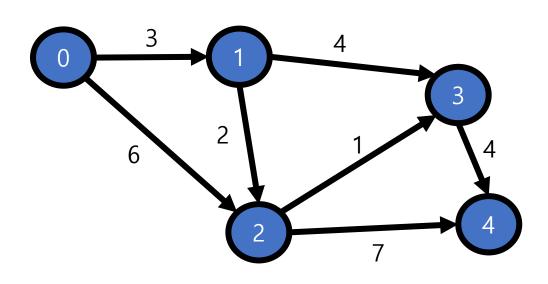
visited[4]는 이미 True

- 0에서 4로 가는 최단 경로는 이미 확정되었습니다.
- 이후에 나오는 경로가 10보다 작을 리 없음
- 그러므로 무시합니다.

hq가 비었으므로 더 이상의 경우는 없습니다.

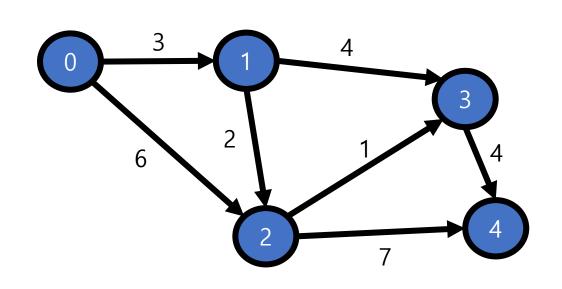






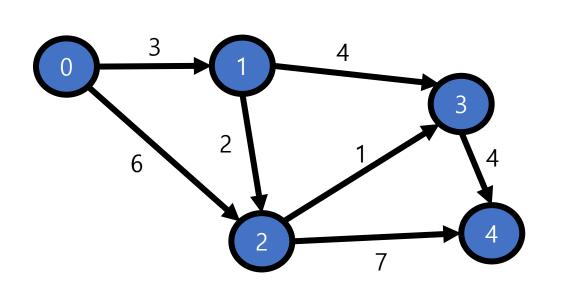
visited=[False, False, False, False, False, False]  $dist=[0, \, \infty, \, \infty, \, \infty, \, \infty]$ 

0	1	2	3	4
0	?	?	?	?



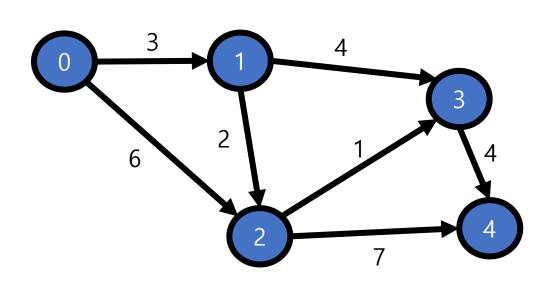
0	1	2	3	4
0	?	?	?	?
0	1	2	3	4
0	3	6	?	?

visited=[True, False, False, False, False, False] dist=[0, 3, 6,  $\infty$ ,  $\infty$ ]



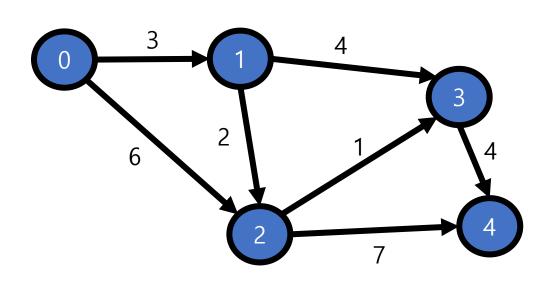
0	1	2	3	4
0	?	?	?	?
0	1	2	3	4
0	3	6	?	?
0	1	2	3	4
0	3	5	7	?

visited=[True, **True**, False, False, False] dist=[0, 3, 5, 7, ∞]



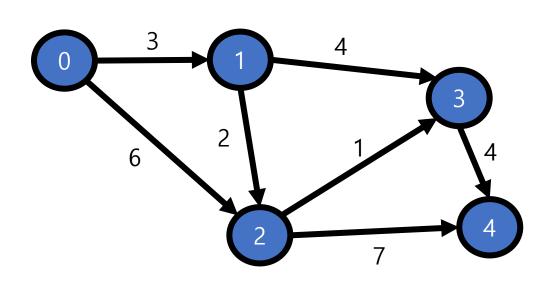
visited=[True, True, True, False, False] dist=[0, 3, 5, 6, 12]

0	1	2	3	4
0	?	?	?	?
0	1	2	3	4
0	3	6	?	?
0	1	2	3	4
0	3	<b>2</b> 5	<b>3</b> 7	?
	_			



visited=[True, True, True, True, False] dist=[0, 3, 5, 6, 10]

0	1	2	3	4
0	?	?	?	?
0	1	2	3	4
0	3	6	?	?
0	1	2	3	4
0	3	5	7	?
0	1	2	3	4
0	3	5	6	12
0	1	2	3	4
0	3	5	6	10

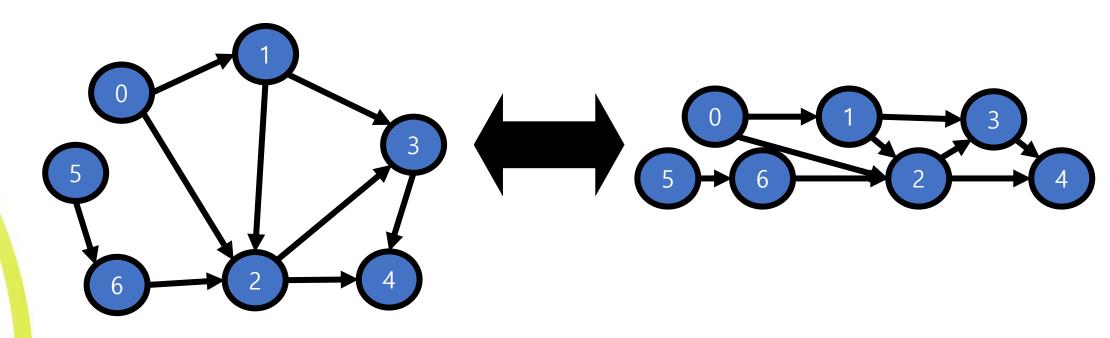


visited=[True, True, True, True, True]
dist=[0, 3, 5, 6, 10]

0	1	2	3	4
0	?	?	?	?
0	1	2	3	4
0	3	6	?	?
0	1	2	3	4
0	3	5	7	?
0	1	2	3	4
0	3	5	6	12
0	1	2	3	4
0	3	5	6	10
0	1	2	3	4
0	3	5	6	10

비선형(Non-linear) 자료 구조인 그래프의 선형(Linear)화 DAG(Directed Acyclic Graph)

- 방향성 그래프
- 사이클이 없음

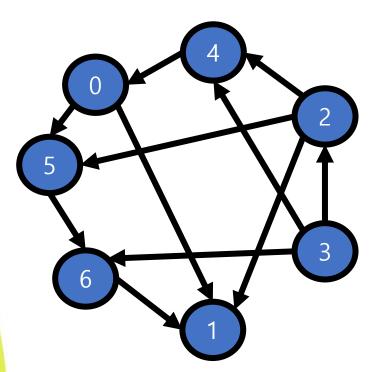


위상 정렬 결과를 출력하는 프로그램을 작성합니다.

Hint1 : Queue!

PAO인공지능연구원

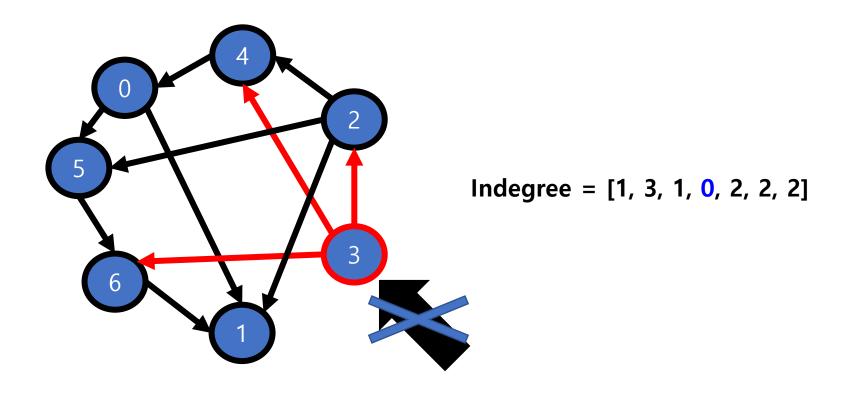
Hint2 : 간선을 직접 없애는 것도 좋지만, 정점으로 들어오는 간선의 숫자만 잘 조정한다면?



DFS	3214056	
BFS	3 2 4 6 1 5 0	O(V+E)
Topological Sort	3 2 4 0 5 6 1	

Indegree = [1, 3, 1, 0, 2, 2, 2]

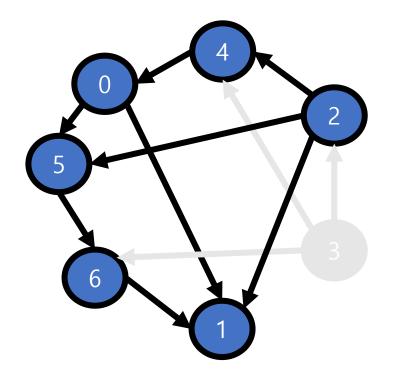






PAI인공지능연구원

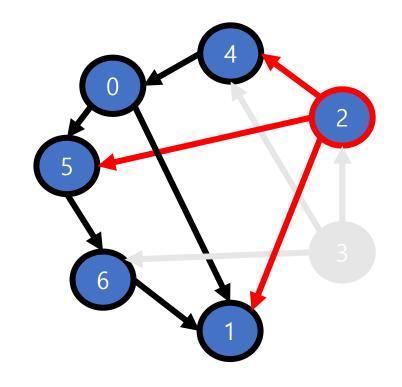




Indegree = [1, 3, 0, 0, 1, 2, 1]



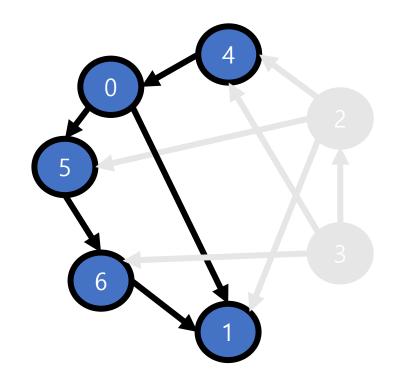




Indegree = [1, 3, 0, 0, 1, 2, 1]

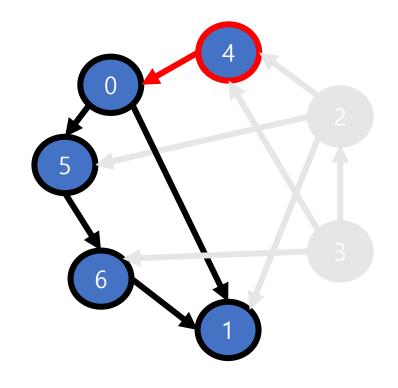






Indegree = [1, 2, 0, 0, 0, 1, 1]

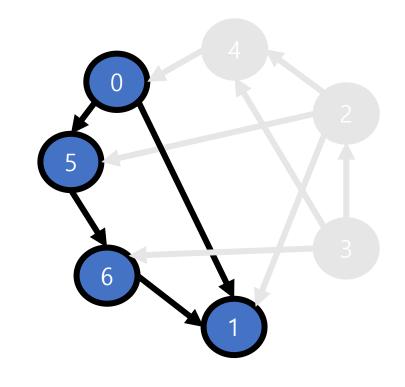




Indegree = [1, 2, 0, 0, 0, 1, 1]





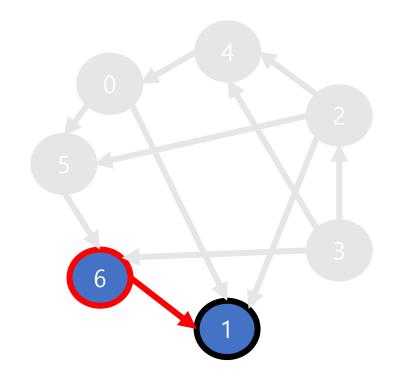


Indegree = [0, 2, 0, 0, 0, 1, 1]



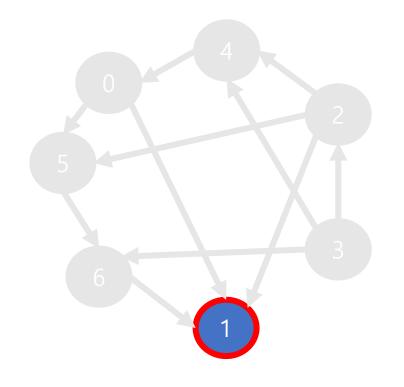






Indegree = [0, 1, 0, 0, 0, 0, 0]



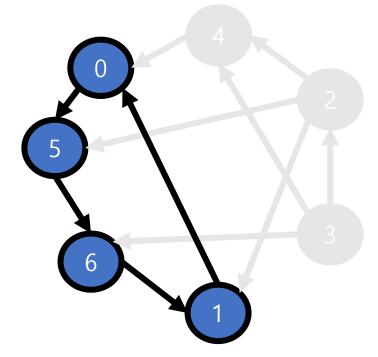


Indegree = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]



PAO인공지능연구원





Indegree = [1, 1, 0, 0, 0, 1, 1]



위상 정렬 불가 판별: 모든 정점을 탐색을 안 했는데, indegree가 0인 정점이 더 이상 없다! - Queue를 통한 판별! (indegree가 0인 정점들을 Queue에 넣고, pop할 때 Queue가 비면?)





67