Report for CS 215 Discrete Math 2025 Fall Semester Project

by 成轩宇 12412908

简介

本项目选择伪随机数生成器（Pseudorandom Number Generator, PRNG）作为研究对象。主要研究伪随机数生成器的实现原理以及应用，尤其是在密码学中。

项目已同步至 GitHub，地址为：https://github.com/hhhhcxy/discrete_math_project。
所有代码可在仓库中找到。

一，伪随机数生成器概述

伪随机数生成器（Pseudorandom Number Generator, PRNG）是通常用来生成**不确定的数**的算法，但与真随机数生成器（True Random Number Generator, TRNG）不同。区分这两者的关键在于**不确定性。**

关于不确定性，有三种级别：

1. **伪随机数**（Pseudorandom Numbers）：通过确定性算法生成，虽然看起来随机，但实际上是可预测的。
2. **密码学安全的伪随机数**（Cryptographically Secure Pseudorandom Numbers）：虽然是伪随机数，但设计上难以预测，适用于密码学应用。
3. **真随机数**（True Random Numbers）：完全不可预测，通常依赖于物理现象，如放射性衰变。

若计算机不依赖外部信息源，由于计算机的确定性，无法生成真随机数。因此，伪随机数生成器成为了主要选择。

伪随机数在计算机科学中有广泛应用。包括模拟、密码学、游戏开发等领域。真随机数**依赖于计算机外部的物理现象**，获取成本较高且速度较慢，且多数应用场景并不需要真随机数，因此伪随机数生成器被广泛使用。根据不同的应用需求，采用简单的伪随机数生成器或密码学安全的伪随机数生成器。

二，伪随机数生成器的评估

评估伪随机数生成器的质量主要从以下几个方面考虑：

随机性（均匀分布，独立性）

这是评估伪随机数生成器最基本的标准。理想的伪随机数生成器应生成均匀分布且相互独立的数值序列。

- 均匀分布：卡方拟合度检验（Chi-Squared Goodness of Fit Test）
    - 假设区间被等分为 k 个箱（bins），样本量为 n，期望频数 $E_i = \frac{n}{k}$。
    - 统计量：

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

    其中 O_i 为第 i 箱的观察频数。
  - 自由度为 $k-1$，计算 p-value 并与显著性水平（常取 $\alpha=0.05$）比较。若 p-value < α，拒绝“均匀分布”假设；否则认为“无法拒绝”（视为通过均匀性检验）。

- 独立性：散点图与自相关性分析（Scatter Plots and Autocorrelation）

  - 构造相邻点对 (x_i, x_{i+1})，观察散点图是否出现条纹/结构。
  - 滞后 1 的自相关系数（样本相关系数）：

$$r_1 = \frac{\operatorname{cov}(X_i, X_{i+1})}{\sigma_{X_i}, \sigma_{X_{i+1}}}$$

    其中 cov 为协方差，σ 为样本标准差。$|r_1|$ 越接近 0，线性相关越弱；可结合样本规模设置阈值（如 0.05）进行经验判断。

借助 AI 辅助编写了一个简单的伪随机数生成器评估工具 `prng_evaluator.py`，实现了上述两种随机性检验方法：

> 代码位于（`prng_evaluator/prng_evaluator.py`）
>
> - `test_uniformity`：使用 `np.histogram` 生成 O_i，计算期望频数 $E_i = n/k$，调用 `stats.chisquare` 得到 χ^2 与 p-value，并输出判定结果。
> - `test_independence`：以归一化数据构造 (x_i, x_{i+1})，用 `np.corrcoef` 计算 r_1，并以阈值（默认 0.05）给出通过/不通过提示。

不可预测性

不可预测性是伪随机数生成器（PRNG）与密码学安全伪随机数生成器（CSPRNG）的界限。即便一个序列通过了上述的随机性检验（均匀且独立），如果攻击者能够根据已知的历史序列计算出下一个数值，该生成器在密码学上就是不安全的。

- **下一比特测试（Next-bit Test）**：
  一个PRNG被称为“不可预测的”，是指对于任何**多项式时间** 算法，给定序列的前 k 个比特，预测第 $k+1$ 个比特的成功概率与 $1/2$ 的差异是**可忽略的**。 即：没有算法能比“抛硬币瞎猜”更准确地预测下一个数。

$$P(\text{predict } x_{i+1} | x_1, \dots, x_i) \approx \frac{1}{2}$$

- **前向与后向安全性（Forward & Backward Secrecy）**：

  - **前向安全性**：即使攻击者获取了当前的内部状态，也无法推断出**之前**生成的随机数。
  - **后向安全性**：即使攻击者获取了当前的内部状态，只要系统随后引入了新的熵，攻击者也无法预测**未来**的随机数。

不可重现性

从严格的算法定义上讲，伪随机数生成器是**确定性** 的算法。只要输入**相同的种子**，它必然生成完全相同的序列。因此，伪随机数生成器本质上是可重现的。满足不可重现性的伪随机数生成器，必须依赖于**外部的不可预测熵源**，这是伪随机数生成器与真随机数生成器的区别之一。

三, 常见的伪随机数生成器算法

选取了三种最具代表性的算法进行深入研究：线性同余生成器（代表基础历史算法）、梅森旋转算法（代表现代工业标准）、Blum-Blum-Shub 算法（代表密码学安全算法）。

线性同余生成器（Linear Congruential Generator, LCG）

LCG 是最基本且最著名的伪随机数生成算法之一。它利用线性方程在模运算下来生成序列。

数学原理

递推公式如下：

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \pmod m$$

其中：

- m：模数，$m > 0$。
- a：乘数，$0 < a < m$。
- c：增量，$0 \leq c < m$。
- X_0：种子 (Seed)，$0 \leq X_0 < m$。

Hull-Dobell 定理
LCG 的最大周期为 m。根据该定理，LCG 具有最大周期 m 的充要条件是：

1. c 与 m 互素 ($\gcd(c, m) = 1$)。
2. m 的所有素因子 p 都能整除 $a - 1$。
3. 如果 m 是 4 的倍数，则 $a - 1$ 也是 4 的倍数。

实际使用时，要注意参数的选择是否满足上述条件，以确保生成器具有良好的周期性和随机性。

算法特色与优劣

- **优点**：算法简单，计算速度较快，内存占用极小。
- **缺点**：
  - **晶格结构（Lattice Structure）**：若绘制 (X_n, X_{n+1}) 散点图，就会观察到散点落在几条平行的直线上，具有极强的相关性。这被称为 Marsaglia 效应。
- **适用场景**：对随机性要求不高的简单模拟。

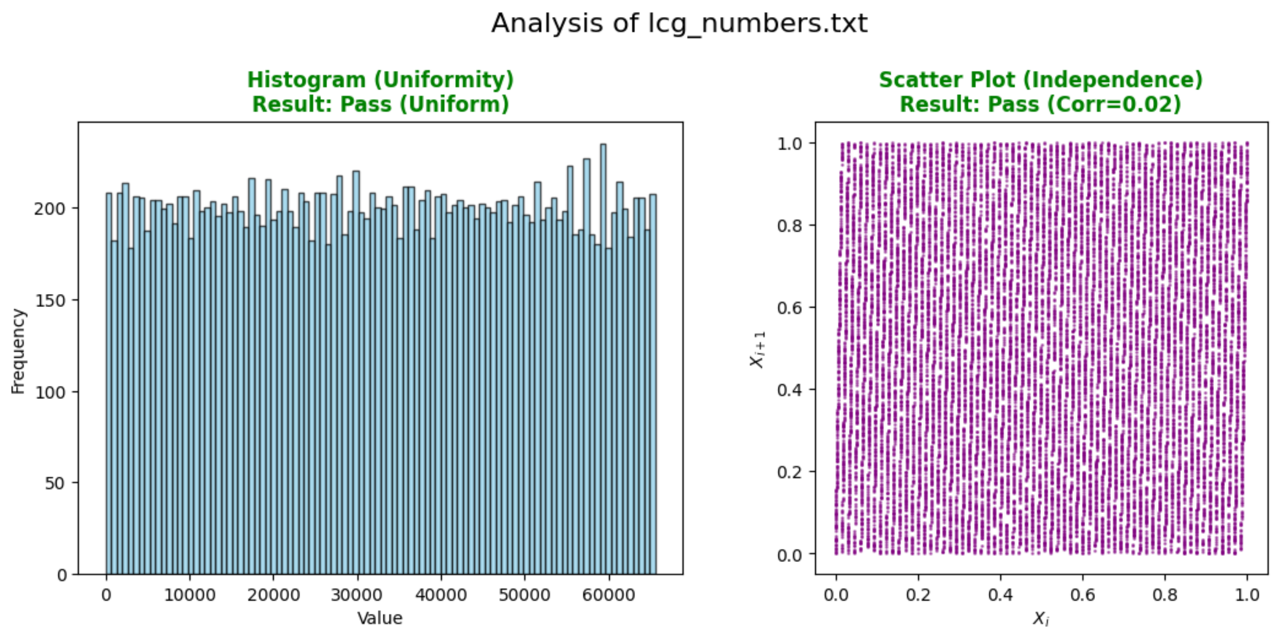
示例

```python
class LCG:
    def __init__(self, seed: int, a: int , c: int , m: int ):
        self.state = seed % m
        self.a = a
        self.c = c
        self.m = m

    def next(self) -> int:
        self.state = (self.a * self.state + self.c) % self.m
        return self.state
```

```
    def generate(self, n: int) -> Iterator[int]:
        for _ in range(n):
            yield self.next()
```

通过选取参数 $m=2^{16}$、$a=65$、$c=1$，可以观察到明显的晶格结构。



梅森旋转算法（Mersenne Twister）

梅森旋转算法（Mersenne Twister, MT）是由松本眞和西村拓士在 1997 年提出的高阶线性反馈移位寄存器（LFSR）算法。

数学原理。

梅森旋转算法基于以下几个关键概念：

- **状态向量**：包含 624 个 32 位字，总共 19968 位，作为算法的内部状态。
- **梅森素数**：周期长度为 $2^{19937}-1$，是一个梅森素数。
- **线性变换**：通过矩阵运算和位操作来更新状态向量。

核心步骤：

1. **初始化**，使用种子初始化状态向量。
2. **扭转变换（Twist）**，通过线性变换更新状态向量。
3. **卷绕变换（Tempering）**，对输出进行非线性变换以提高随机性。

算法特色与优劣

- **优点**：
  - **极长周期**：$2^{19937}-1$，远远超过应用需求。
  - **计算速度快**：仅需位操作和简单的算术运算。
  - **广泛采用**：Python、Ruby、R 等语言的默认伪随机数生成器。
- **缺点**：

- **空间占用大**：需要 624 个 32 位字的内存（2.5 KB），相比 LCG 的占用大。
- **非密码学安全**：已知状态后可以完全恢复内部状态，不适用于密码学。

示例

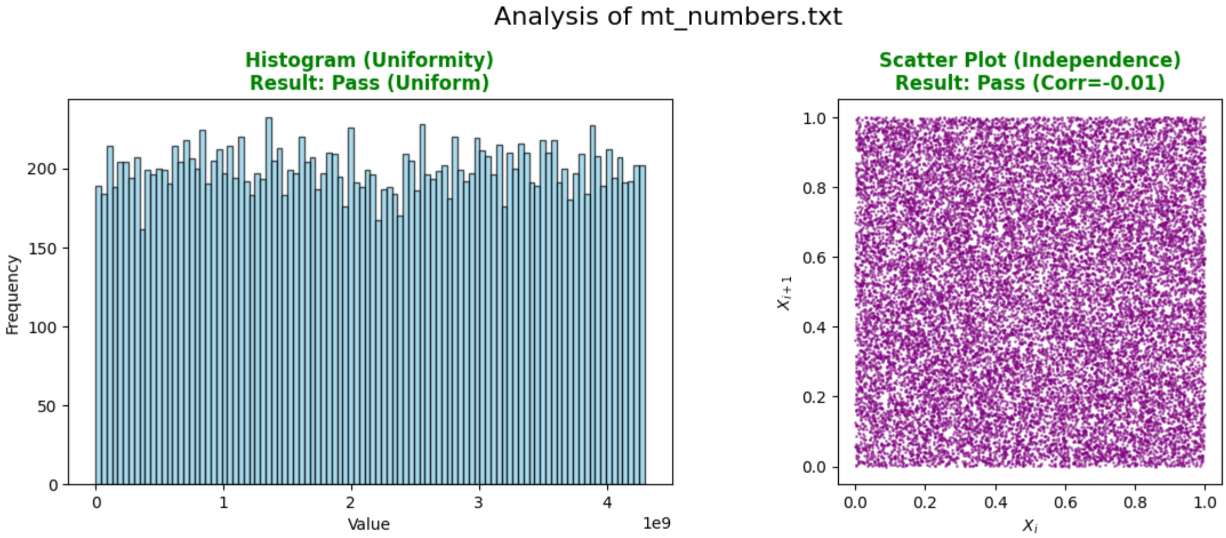
```python
class MersenneTwister:
    def __init__(self, seed: int):
        self.n = 624
        self.m = 397
        self.matrix_a = 0x9908b0df
        self.upper_mask = 0x80000000
        self.lower_mask = 0x7fffffff
        self.mt = [0] * self.n
        self.mti = self.n + 1

        self.mt[0] = seed & 0xffffffff
        for i in range(1, self.n):
            s = 1812433253 * (self.mt[i-1] ^ (self.mt[i-1] >> 30)) + i
            self.mt[i] = s & 0xffffffff

    def _twist(self):
        for i in range(self.n - self.m):
            y = (self.mt[i] & self.upper_mask) | (self.mt[i+1] & self.lower_mask)
            self.mt[i] = self.mt[i+self.m] ^ (y >> 1) ^ (self.matrix_a if y & 1 else 0)
        for i in range(self.n - self.m, self.n - 1):
            y = (self.mt[i] & self.upper_mask) | (self.mt[i+1] & self.lower_mask)
            self.mt[i] = self.mt[i - self.n + self.m] ^ (y >> 1) ^ (self.matrix_a if y & 1 else 0)
        y = (self.mt[self.n-1] & self.upper_mask) | (self.mt[0] & self.lower_mask)
        self.mt[self.n-1] = self.mt[self.m-1] ^ (y >> 1) ^ (self.matrix_a if y & 1 else 0)
        self.mti = 0

    def next(self) -> int:
        if self.mti >= self.n:
            self._twist()
        y = self.mt[self.mti]
        y ^= y >> 11
        y ^= (y << 7) & 0x9d2c5680
        y ^= (y << 15) & 0xefc60000
        y ^= y >> 18
        self.mti += 1
        return y & 0xffffffff
```

梅森旋转算法在散点图中表现出**无明显晶格结构**，自相关系数接近 0，均匀分布性显著优于 LCG。



Blum-Blum-Shub (BBS) 算法

简介与原理概述

Blum-Blum-Shub（BBS）是经典的密码学安全伪随机数生成器（CSPRNG）。核心思想：

- 选取两个满足 p ≡ 3 (mod 4)、q ≡ 3 (mod 4) 的大素数，令 n = p · q（Blum 整数）。
- 选择与 n 互素的种子 x0，递推 x_{i+1} = x_i^2 mod n。
- 通常输出 x_i 的最低有效位（LSB），或累积若干位拼接为 32 位整数。

尽管算法简单，但其安全性建立在著名的困难问题上。

密码学优势

- **不可预测性**：BBS 的安全性基于**整数分解难题**和**二次剩余假设**。
    - **整数分解难题**：给定一个大整数 n，找到其非平凡因数在多项式时间内被认为是困难的。与 RSA 加密的安全性基础相同。
    - **二次剩余假设（Quadratic Residuosity Assumption, QRA）**：给定一个模 n 的数 y（n 为大 Blum 整数，且未知其因数分解），判断 y 是否是二次剩余（存在 x 使 x^2 ≡ y mod n）在多项式时间内被认为是困难的。

为何难以预测下一比特：BBS 的状态更新 $x_{i+1} = x_i^2 \mod n$，本质上将状态隐藏为 n 下的二次剩余。输出只泄露最低有效位（或少量位），而要想预测下一位就等价于在未知 n 因数分解的情况下，对二次剩余进行判定或构造，正是 QRA 认为困难的问题。

算法特色与优劣

- **优点**：
    - 高安全性：基于整数分解难题和二次剩余假设，适用于密码学应用。
- **缺点**：
    - 速度较慢：每位都需要一次模平方运算，生成 32 位整数需多次迭代。
    - 参数生成成本高：需要安全素数与安全种子。在实际密码学应用中必须使用大素数。

示例

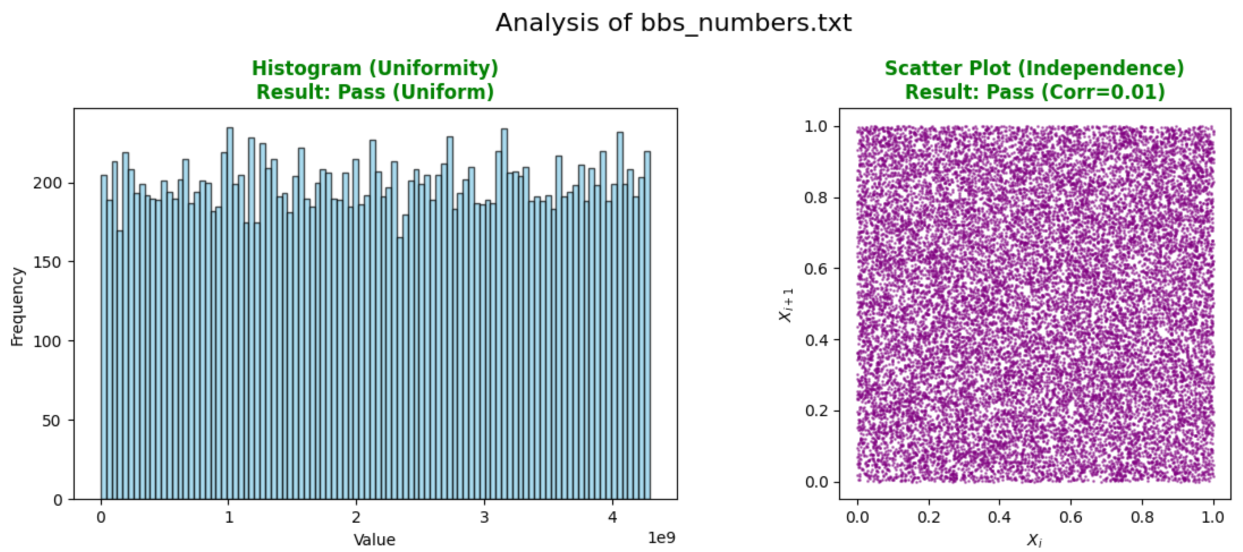
```
class BBS:
    def __init__(self, p: int, q: int, seed: int):
        assert p % 4 == 3 and q % 4 == 3, "p,q 必须满足 ≡ 3 (mod 4)"
        self.n = p * q
        self.x = seed % self.n
        # 若不互素则调整种子
        import math
        if math.gcd(self.x, self.n) != 1:
            self.x = (self.x + 1) % self.n

    def next_bit(self) -> int:
        self.x = pow(self.x, 2, self.n)
        return self.x & 1

    def next_word(self, k: int = 32) -> int:
        v = 0
        for i in range(k):
            v |= (self.next_bit() << i)
        return v

    def generate_words(self, n: int, k: int = 32):
        for _ in range(n):
            yield self.next_word(k)
```

BBS 的生成结果满足均匀分布与独立性要求，且无明显晶格结构。



四，不同编程语言提供的伪随机数生成器

Python

Python 标准库中的 `random` 模块默认使用的是 **梅森旋转算法 (Mersenne Twister, MT19937)**。也提供了 `secrets` 模块，用于生成密码学安全的随机数。

C++

C++ 最简单的 `rand()` 函数在多数实现中是基于 **线性同余生成器 (LCG)** 实现的，质量较差（例如模数较小，32767，生成较大范围随机数时甚至需要手动组合多次调用）。 C++11 引入了 `<random>` 库，提供了多种包括 MT19937 在内的高质量伪随机数生成器。

Java

Java 的标准类 `java.util.Random` 使用的是 **线性同余生成器 (LCG)**。它使用的公式为 $X_{n+1} = (X_n \times 25214903917 + 11) \pmod{2^{48}}$，输出结果时会取高 32 位作为随机数。 但是，Java 也提供了 `java.security.SecureRandom` 等其他常用伪随机数生成器。 如`java.security.SecureRandom` 属于密码学安全的生成器。

五，公钥密码学标准（Public-Key Cryptography Standards, PKCS）

PKCS（由 RSA Laboratories 提出的一系列标准）在多处要求强随机性。核心原则：凡是需要不可预测的值都必须使用密码学安全伪随机数生成器（CSPRNG），禁止使用一般 PRNG（如 LCG/MT）替代。

- PKCS#1： 规定 RSA 加密与签名的标准
    - RSA-OAEP：加密时引入随机“seed”，seed 必须不可预测以确保安全。
    - RSA-PSS：签名时使用随机 salt 增强不可伪造性；salt 必须随机、不可重复、不可预测。
    - 要求：seed/salt 必须由 CSPRNG 产生，长度与哈希函数安全参数一致。
- PKCS#5：对 salt 的使用进行规范
    - 使用随机盐（salt）与迭代计数从口令派生密钥；盐必须唯一且不可预测，防止预计算/彩虹表攻击。
    - 要求：盐长度不低于 64 bit，必须由 CSPRNG 产生。
- PKCS#11：对 Cryptoki API 进行规范
    - 明确定义随机数接口：C_GenerateRandom / C_SeedRandom 等。
    - 要求随机数生成器必须满足 CSPRNG 标准，确保生成的随机数不可预测。

PKCS 标准通过严格要求使用 CSPRNG，确保了公钥密码学操作的安全性，防止因随机数质量不足而导致的潜在攻击。通过执行这些标准，以保障加密系统的整体安全性。

六，总结

伪随机数生成器在计算机科学中是重要的基础工具。从最简单的线性同余生成器，到密码学安全的 Blum-Blum-Shub 算法，不同的生成器适用于不同的应用场景。对于不同的需求，应选择合适的伪随机数生成器。若对安全性无要求，则简单的生成器拥有更快的速度和更低的资源消耗。但若涉及密码学应用，则必须使用密码学安全的生成器，遵循 PKCS 等标准，确保系统的整体安全性，切勿因随机数质量不足而引入漏洞。