

方法精讲-数量 2

主讲教师：牟立志

授课时间：2018.05.25



粉笔公考·官方微信

方法精讲-数量2（笔记）

第四节 工程问题

【拓展】(2016 联考) 木匠加工 2 张桌子和 4 张凳子共需要 10 个小时, 加工 4 张桌子和 8 张椅子需要 22 个小时。问如果他加工桌子、凳子和椅子各 10 张, 共需要多少小时?

- A. 47.5
B. 50
C. 52.5
D. 55

【解析】拓展. 问需要多少时间, 设加工桌子的时间为 x , 加工凳子的时间为 y , 加工椅子的时间为 z , 列方程: $2x+4y=10$ ①, $4x+8z=12$ ②, 求 $10*(x+y+z)$, 两个方程, 三个未知数, 为不定方程, 时间不一定为整数, 可以用赋零法, 设 $x=0$, 则可以代入①、②式, 求出 y 和 z . 解得 $10*(x+y+z)=52.5$ 。【选 C】

课前测验

1. (2015 黑龙江) 某项工程, 甲工程队单独施工需要 30 天完成, 乙施工队单独施工需要 25 天完成, 甲队单独施工了 4 天后改由两队一起施工, 期间甲队休息了若干天, 最后整个工程共耗时 19 天完成, 问甲队中途休息了几天?

- A. 1
B. 3
C. 5
D. 7

【解析】1. 正确率为 70%，不是特别高，工程问题不是难题，是必须拿分的题目，做错的同学今天认真听课，看错在哪里。【选 D】

2. (2017 北京) 小张将带领三位专家到当地 B 单位调研, 距离 B 单位 1.44 千米处设有地铁站出口。调研工作于上午 9 点开始, 他们需提前 10 分钟到达 B 单位, 则小张应通知专家最晚几点一起从地铁站出口出发, 步行前往 B 单位? (假设小张和专家的步行速度均为 1.2 米/秒)

【解析】2. 正确率较高为 85%，看着很难，其实是纸老虎，小学生、初中生

就可以做出来，做错的同学也不要灰心。【选 B】

【注意】工程问题，小学时经常设单位 1，虽然不知道为什么，但是能算出来答案。工程问题不难，几乎每年都考，做题有套路，考试时需要拿到分数。

【知识点】工程问题：

1. 三量关系：总量=效率*时间。效率=总量/时间。时间=总量/效率。

2. 切入点：（1）给定完工时间型。

（2）给定效率比例型。

（3）给定具体效率型。

3. 工程问题核心思想：准确找到切入点。找到切入点后，工程问题解题就变得很简单。

【知识点】给定完工时间型：

1. 赋总量（时间的公倍数）。

2. 算效率：效率=总量/时间。

3. 根据题意完成工作。

4. 例子：搬一车砖，涛哥需要 3 天，志哥需要 2 天，现两人合作，需要多少天？只给了完工时间，即给定完工时间型的工程问题。解题三步走：（1）赋总量。总量可以赋值 1、100……，为了方便计算，一般赋值为时间的公倍数，本题为 2、3 的公倍数 6。（2）求效率。涛哥效率=6/3=2，志哥效率=6/2=3。（3）完成工作。合作时间=总量/效率和=6/（2+3）=1.2 天。

例 1（2017 广东）现有一批零件，甲师傅单独加工需要 4 小时，乙师傅单独加工需要 6 小时。两人一起加工这批零件的 50%需要多少个小时？（ ）

A. 0.6

B. 1

C. 1.2

D. 1.5

【解析】例 1. 判断题型：工程问题。核心思想是找对切入点。题目给定完工时间。解题三步走：（1）赋总量。赋值总量为时间的最小公倍数（短除法），4

和 6 的公倍数为 12。(2) 求效率。甲师傅效率= $12/4=3$ ，乙师傅效率= $12/6=2$ 。(3) 做题。加工 50% 的时间 $t = \text{总量}/\text{效率和} = 12*50\% / (3+2) = 1.2$ 小时。【选 C】

【注意】赋值总量为 1 也行，但是效率会出现分数，会使计算变复杂。

例 2 (2015 黑龙江) 某项工程，甲工程队单独施工需要 30 天完成，乙施工队单独施工需要 25 天完成，甲队单独施工了 4 天后改由两队一起施工，期间甲队休息了若干天，最后整个工程共耗时 19 天完成，问甲队中途休息了几天？()

- A. 1
B. 3
C. 5
D. 7

【解析】例 2. 方法一：甲工程、乙工程，工程问题，找到切入点。题目给定完工时间，即给定完工时间型工程问题。解题三步走：(1) 赋值总量为时间的公倍数。短除法，30 和 25 可以约 5，剩余 6 和 5，不能再约分，则最小公倍数为 $5*6*5=150$ 。(2) 求效率。甲效率= $150/30=5$ ，乙效率= $150/25=6$ 。(3) 做题。过程较复杂，透过现象看本质，整个工程一定是有一部分是甲做的，一部分是乙做的，设甲中途休息 x 天，则工作天数为 $19-x$ ，乙工作天数为 $19-4=15$ 天。列式： $150=5*(19-x) + (19-4)*6$ ，解得 $x=7$ 。

方法二：设甲不休息，甲效率为 5，则工作量为 $5*19$ 。乙不休息，乙工作效率为 6，工作量为 $15*6$ ，则工作量为 $5*19+15*6=185$ ，多出的工作量为 $185-150=35$ ，是甲不休息这段时间做的，则甲休息天数= $35/5=7$ 。【选 D】

例 3 (2017 国考) 工厂有 5 条效率不同的生产线。某个生产项目如果任选 3 条生产线一起加工，最快需要 6 天整，最慢需要 12 天整；5 条生产线一起加工，则需要 5 天整。问如果所有生产线的产能都扩大一倍，任选 2 条生产线一起加工最多需要多少天完成？()

- A. 11
B. 13
C. 15
D. 30

【解析】例 3. 方法一：判断题型，题目是有关生产线工作的问题，即工程问题，重点在于找到切入点。给定完工时间型工程问题，解题三步走：(1) 赋值总量为时间的公倍数。6、12 的公倍数为 12，12 和 5 的公倍数为 60，则只需要

赋值总量为 60。(2) 求效率。最快三条生产线效率 $=60/6=10$ 。假设 5 条生产线效率 $a>b>c>d>e$, 则 $a+b+c=10$ ①, 最慢三条生产线效率 $=60/12=5=c+d+e$ ②, 五条生产线一起加工效率 $=60/5=12=a+b+c+d+e$ ③。(3) 求解。求时间最大, $t=\text{总量}/\text{效率}=60/\text{效率}$, 则需要效率最慢, 即求 $d+e$ 。③-①, 求得 $d+e=12-10=2$ 。产能扩大一倍, 即效率扩大一倍, 时间 $t=60/(2*2)=15$ 天。

方法二: D 项和 C 项是 2 倍关系, 对应题目中“产能扩大一倍”。题目有坑, 以坑治坑。总量不变, 总量=效率*时间, 因为效率扩大两倍, 则时间是原来的一半, 选项中 C、D 项是二倍的关系, 时间是产能扩大前的一半, 猜 C 项。【选 C】

【知识点】给定效率比例型:

1. 赋效率 (满足比例即可)。
2. 算总量: 效率*时间=总量。
3. 根据题意完成工作。

4. 例子: 搬一堆砖, 涛哥和志哥的效率比为 2: 1, 合作 3 天完成, 现在涛哥先干 2 天, 然后再交给志哥做, 问志哥需要做多少天? 题目不仅出现时间, 还出现效率比, 给定效率比例型工程问题, 解题三步走: (1) 赋值效率为对应比例, 即涛哥效率为 2, 志哥效率为 1。(2) 算总量。总量=效率*时间 $=(2+1)*3=9$ 。(3) 做题。涛哥工作量 $=2*2=4$, 剩余工作量 $=9-4=5$, 则志哥需要工作 $5/1=5$ 天。

例 4 (2016 江苏) 甲、乙、丙三人共同完成一项工程, 他们的工作效率之比是 5: 4: 6。先由甲、乙两人合作 6 天, 再由乙单独做 9 天, 完成全部工程的 60%, 若剩下的工程由丙单独完成, 则丙所需要的天数是 ()。

- | | |
|-------|-------|
| A. 9 | B. 11 |
| C. 10 | D. 15 |

【解析】例 4. 判断题型: 工程问题。找切入点, 题目给定效率比, 解题三步走: (1) 赋值效率为对应比值。即甲效率 5, 乙效率 4, 丙效率 6。(2) 求总量。总量 $*60\%=(5+4)*6+4*9=90$, 解得总量 $=90/60\%=150$ 。(3) 解题。时间 $t=\text{总量}/\text{效率}=\text{剩余工程量}/\text{丙效率}=(150-90)/6=10$ 天。【选 C】

【注意】给定效率比例型工程问题。切入点: 给定效率比例。1. 赋效率。2.

求总量。3. 再做题。

例 5（2017 北京）某检修工作由李和王二人负责，两人如一同工作 4 天，剩下工作量李需要 6 天，或王需要 3 天完成。现李和王共同工作了 5 天，则剩下的工作李单独检修还需几天完成？（ ）

- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5

【解析】例 5. 工程问题，找切入点。根据“剩下工作量李需要 6 天，或王需要 3 天完成”，可得关系：剩下的工作量=李的效率*6=王的效率*3，即效率比李：王=3：6=1：2，给定效率比例型。（1）赋效率：赋值李的效率为 1，王的效率为 2。（2）求总量：工作总量=（1+2）*4+1*6=18。（3）再做题：李单独做的时间=合作 5 天后剩余工作量/李的效率=〔18-（1+2）*5〕/1=3 天。【选 B】

【答案汇总】1-5：CDCCB

例 6（2017 联考）某件刺绣产品，需要效率相当的三名绣工 8 天才能完成；绣品完成 50%时，一人有事提前离开，绣品由剩下的两人继续完成；绣品完成 75%时，又有一人离开，绣品由最后剩下的那个人做完。那么，完成该件绣品一共用了（ ）。

- A. 10 天
B. 11 天
C. 12 天
D. 13 天

【解析】例 6. 工程问题，找准切入点：已知完工时间，效率比未明确给出。根据“效率相当的三名绣工”，可知绣工的效率比为 1：1：1，给定效率比例型。（1）赋效率：赋值三人效率分别为 1、1、1。（2）求总量：（1+1+1）*8=24。（3）再做题：①绣品完成 50%时，工作量为 50%*24=12，用时 12/3=4 天；②绣品完成 75%时，该阶段工作量为（75%-50%）*24=6，用时 6/2=3 天；③绣品完成时，该阶段工作量为（1-75%）*24=6，用时 6/1=6 天。总用时 4+3+6=13 天。【选 D】

【注意】找准切入点：

1. 给定完工时间型，除了完工时间，其他均未给出，如例 1、例 2，直接三

步走：赋总量（时间的公倍数），算效率，再做题。

2. 给定效率比例型，工程问题三量关系：总量=效率*时间。题目中有可能给时间，也会给比例，考虑用比例去做，如：

（1）例 4，给出了时间，也直接给了效率比。

（2）例 5，效率比隐含在题目当中，可以转化为比例。

（3）例 6，给出“效率相当”，即效率比为 1: 1: 1。“效率相当”是近两年的考试趋势，若效率以人头数来表示，默认为每个人的效率一样；若效率不一样，则本题无法做。

【知识点】给定具体效率型：题目中出现“每天搬多少块砖”“每天加工多少个零件”等带有具体单位的条件。

1. 设未知数（设小不设大或者设出现最多的）。根据三量关系：总量=效率*时间，若给出了具体效率，给了时间，总量一定可以表示出来。

2. 根据工作过程列方程。

例 7（2018 浙江）某蛋糕店接到 300 个蛋糕的订单。已知老板一天能做 30 个蛋糕，店员小红一天只能做 10 个。蛋糕制作过程中，老板有一个周末外出，小红请了 8 天假，两人在外时间不重叠。问制作这批蛋糕一共花了多少天？（ ）

A. 11

B. 12

C. 13

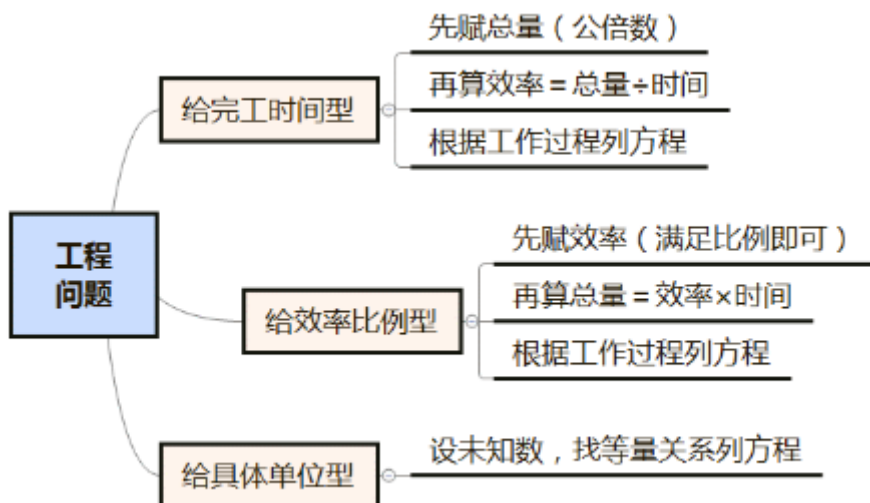
D. 14

【解析】例 7. 工程问题，找准切入点：“老板一天能做 30 个蛋糕，店员小红一天只能做 10 个”，给了具体单位，即给定具体效率型。

方法一：设未知数，根据工作过程列方程。设制作这批蛋糕一共花 x 天，周末默认为双休，即 2 天。根据题意列式：300=老板做的+小红做的= $(x-2)*30+(x-8)*10$ ，解得 $x=11$ ，对应 A 项。

方法二：用盈亏思想做。总共做 300 个，如果老板不休息，则老板多做 $30*2=60$ 个；小红不休息，则多做 $10*8=80$ 个；设做的天数为 t ，则 $300+60+80=(30+10)*t$ ，解得 $t=11$ ，对应 A 项。【选 A】

【答案汇总】6-7: DA



【知识点】工程问题

1. 给完工时间型:

- (1) 先赋总量 (公倍数)。
- (2) 再算效率=总量/时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

2. 给效率比例型:

- (1) 先赋效率 (满足比例即可)。
- (2) 再算总量=效率*时间。
- (3) 根据工作过程列方程。

3. 给具体单位型: 设未知数, 找等量关系列方程。

第五节 行程问题

一、基础行程

【知识点】行程问题: 与工程问题类似, 从三量关系说起。

1. 行程问题三量关系: 路程=速度*时间。 $v=S/t$, $t=S/v$ 。行程问题的题型比工程问题要多、复杂。

2. 考场策略: 工程问题是必须要拿分的, 行程问题有一部分简单题目可以拿分, 难题可以放弃。但是注意学习的时候需要把所有内容, 简单、难题都

学习到。

3. 题型：基本行程 ($S=vt$; \bar{v})；相对行程（追及、多次相遇、流水行船）；比例行程（路程一定，时间和速度成反比；时间一定，速度和路程成正比等）。

4. 行程问题核心思想：找对题型，对应公式和方法。

例 1 (2017 北京) 小张将带领三位专家到当地 B 单位调研，距离 B 单位 1.44 千米处设有地铁站出口。调研工作于上午 9 点开始，他们需提前 10 分钟到达 B 单位，则小张应通知专家最晚几点一起从地铁站出口出发，步行前往 B 单位？（假设小张和专家的步行速度均为 1.2 米/秒）（ ）

A. 8 点 26 分

B. 8 点 30 分

C. 8 点 36 分

D. 8 点 40 分

【解析】例 1. 本题做了课前测验，本身是简单题目，但是看着繁琐，很多同学被吓到了，正确率不是很高，做数学题目不要害怕。

分析题目：从地铁到单位，调研工作 9 点开始，需提前 10 分钟到达，即最晚 8 点 50 分要到达 B 单位。问的是需要几点从地铁出发，弄清楚时间如何推算。只要求出从地铁到 B 点所需时间即可，时间=路程/速度，已知路程为 1.44 千米即 1440 米，速度为 1.2 米/秒，所以从地铁口到 B 单位所需时间为 $1440/1.2=1200$ 秒=20 分，从 8 点 50 分往前推 20 分钟，最晚出发时间为 8 点 30 分。【选 B】

【知识点】等距离平均速度公式：

1. 公式： $\bar{v}=2v_1v_2/(v_1+v_2)$ ；

2. 适用于：等距离往返、上下坡。

(1) 从甲地到乙地，去的速度为 v_1 ，回来速度为 v_2 ，直接利用公式。

(2) 走一个单程距离，有上下坡，上下坡距离相等，可以用这个公式。

(3) 走单程距离，往返。有上下坡，上下坡距离不等，设上坡距离为 L_1 ，下坡距离为 L_2 ，往返过程中，距离均为 L_1+L_2 ，距离相等，可以用等距离平均速度公式。

3. 例子：假设有 100 米，前 50 米的速度为 6m/s，后 50 米的速度为 10m/s，

整个路程的平均速度为多少？

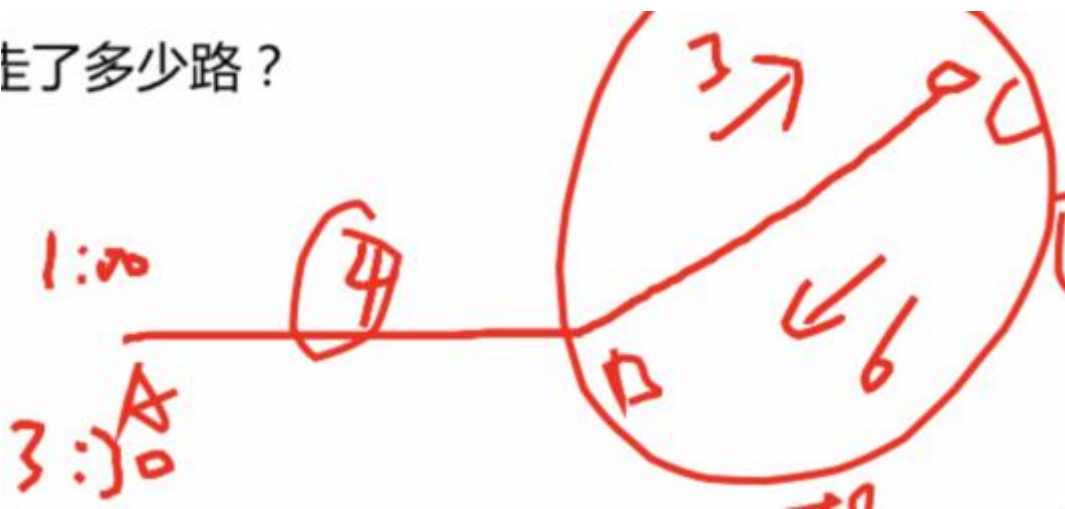
答：平均速度=总路程/总时间=100/（50/6+50/10）=2/（1/6+1/10）
=16/60=7.5m/s。

例 2（2016 云南事业单位）李大夫去山里给一位病人出诊，他下午 1 点离开诊所，先走了一段平路，然后爬上了半山腰，给那里的病人看病。半小时后，他沿原路下山回到诊所，下午 3 点半回到诊所。已知他在平路步行的速度是每小时 4 千米，上山每小时 3 千米，下山每小时 6 千米。请问李大夫出诊时共走了多少路？（ ）

- A. 5 千米 B. 8 千米
C. 10 千米 D. 16 千米

【解析】例 2. 读题以后，很多同学对于题目说的内容没有印象，因此行程问题需要边画图边分析。如图所示，画图以后找好切入点， $S_{\text{总}} = \bar{v} \cdot t$ 。根据题意，运动的时间为 2 小时，有往返想到等距离平均速度公式， $\bar{v} = 2v_1v_2 / (v_1 + v_2)$ 。上下坡往返距离相同，上下坡平均速度 $= 2 \times 3 \times 6 / (3 + 6) = 4$ 千米/小时，即 BC 段平均速度为 4 千米/小时。已知 AB 段平均速度也为 4 千米/小时，说明整体的平均速度也为 4 千米/小时，那么 $S_{\text{总}} = 4 \times 2 = 8$ 千米。【选 B】

走了多少路？



【注意】小技巧：出现上下坡，往往与平坡的速度相同，可以直接把上下坡的平均速度看成与平坡速度相同，即上下坡往返平均速度为 4 千米/小时，整个路程的速度也是 4 千米/小时，那么总路程=4*2=8 千米。

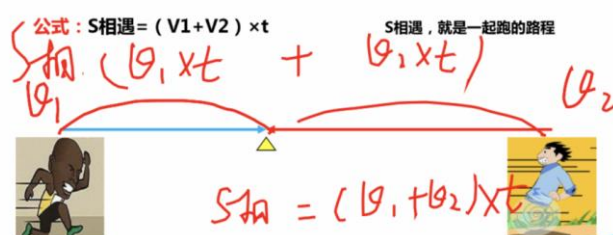
【答案汇总】1-2: BB

二、相对行程

【知识点】1. 直线相遇：老师和博尔特相约见面，博尔特和老师同时从各自家相向而行，在路上相遇，即直线相遇问题。两人相向而行， $S_{\text{相遇}} = v_1 \cdot t + v_2 \cdot t = (v_1 + v_2) \cdot t$ ， $S_{\text{相遇}}$ 就是一起跑的路程。

直线相遇

环境：两人同时相向而行

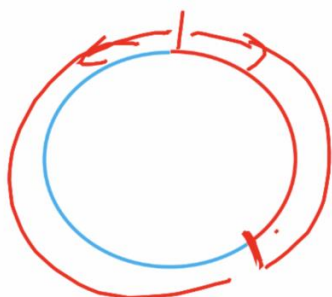


2. 环形相遇（同点出发）：两人在同一点出发，公式： $S_{\text{相遇}} = (v_1 + v_2) \cdot t$ ；相遇 1 次， $S_{\text{相遇}} = 1$ 圈；相遇 N 次， $S_{\text{相遇}} = N$ 圈。

环形相遇（同点出发）

公式： $S_{\text{相遇}} = (v_1 + v_2) \cdot t$

相遇 1 次， $S_{\text{相遇}} = 1$ 圈
相遇 N 次， $S_{\text{相遇}} = N$ 圈



3. 直线追及：两人同时同向而行。公式： $S_{\text{追及}} = v_1 \cdot t - v_2 \cdot t = (v_1 - v_2) \cdot t$ ， $S_{\text{追及}}$ 就是多跑的路程也就是刚开始相差的距离，原始的距离差。

直线追及

环境：两人同时同向而行

公式： $S_{\text{追及}} = (V_1 - V_2) \times t$

$S_{\text{追及}}$ ，就是多跑的距离



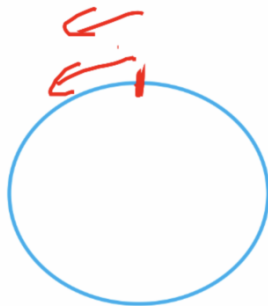
4. 环形追及（同点出发）：假设你跑的慢，老师跑的快，在某一点追上了你，老师跑的路程比你跑的路程多了一圈。 $S_{\text{追及}} = (v_1 - v_2) \times t$ ，追上 1 次， $S_{\text{追及}} = 1$ 圈；追上 N 次， $S_{\text{追及}} = N$ 圈。

环形追及（同点出发）

公式： $S_{\text{相遇}} = (V_1 - V_2) \times t$

追上 1 次， $S_{\text{追及}} = 1$ 圈

追上 N 次， $S_{\text{追及}} = N$ 圈



例 1（2017 吉林）两个人带着宠物狗玩游戏，两人相距 200 米，并以相同速度 1 米/秒相向而行，与此同时，宠物狗以 3 米/秒的速度，在两人之间折返跑，当两人相距 60 米时，那么宠物狗总共跑的距离为（ ）。

A. 270 米

B. 240 米

C. 210 米

D. 300 米

【解析】例 1. 行程问题，边画图边分析，甲乙两人相距 200 米， $S_{\text{狗}} = V_{\text{狗}} \times t$ ，狗走了多少个折返跑无法求出，需要转化思维，人和狗所走的时间是一样， $t_{\text{人}} = t_{\text{狗}}$ 。 $1 \times t_{\text{人}} + 60 + 1 \times t_{\text{人}} = 200$ ，化简 $2t_{\text{人}} = 140$ ，解得 $t_{\text{人}} = 70$ ，那么 $t_{\text{狗}} = 70$ ， $S_{\text{狗}} = 3 \times 70 = 210$ 。

【选 C】

- A. 270米
B. 240米
C. 210米
D. 300米

$$1 \times t_A + 60 + 1 \times t_A = 200$$

$$2t_A = 140$$

$$t_A = 70 = t_{\text{狗}}$$

$$S = 3 \times 70 = 210$$

【改】(2017 吉林) 两个人带着宠物狗玩游戏，两人相距 200 米，并以相同速度 1 米/秒相向而行，与此同时，宠物狗以 3 米/秒的速度，在两人之间折返跑，当两人相遇时，那么宠物狗总共跑的距离为 ()。

- A. 270 米
B. 240 米
C. 210 米
D. 300 米

【解析】改. 与前面例题思想相同， $S_{\text{狗}} = 3 \times t_{\text{狗}}$ ，人的时间和狗的时间相同， $t_{\text{狗}} = t_{\text{人}}$ 。根据题意， $t_{\text{人}} = 200 / (1+1) = 100\text{s}$ ，那么 $S_{\text{狗}} = 3 \times 100 = 300$ 米。【选 D】

那么宠物狗总共跑的距离为：

$$t = \frac{200}{(1+1)} = 100$$

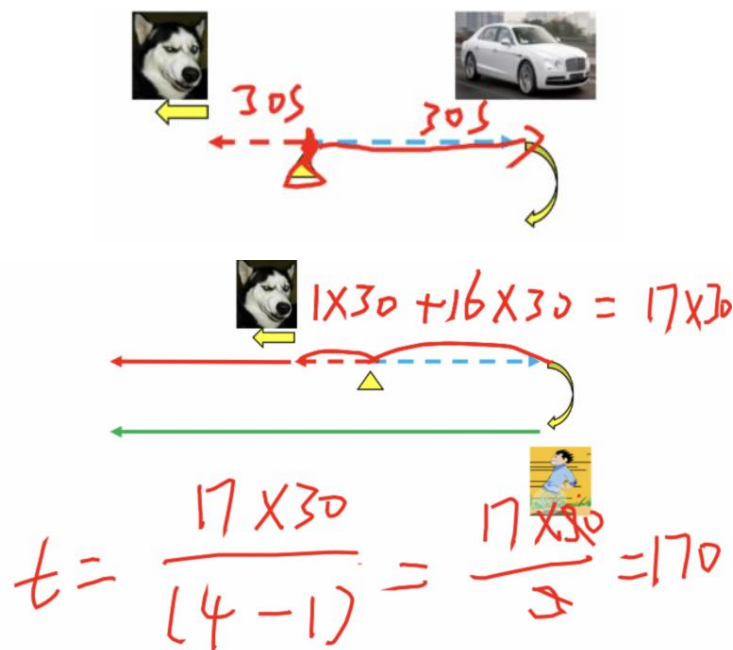
$$3 \times 100 = 300$$

例 2 (2016 河南) 某人走失了一只小狗，于是开车沿路寻找，突然发现小狗沿路边往反方向走，车继续行 30 秒后，他下车去追小狗，如果他的速度比小狗快 3 倍比车慢 3/4，问追上小狗需要多长时间？ ()

- A. 165 秒
B. 170 秒
C. 180 秒
D. 195 秒

【解析】例 2. 稍微难一些，属于人狗殊途的问题，过程复杂，比较乱，不要害怕，先梳理思路，如图所示。人去找狗，在某一点发现狗往反向跑，这时车向前又走了 30 秒，这个时候狗还在反向往前走。因此 30 秒后，狗向前走了 30

秒，车也向前走了 30 秒，此时人下车去追狗，在这一点追上小狗。抓住本质，行程问题关键点对应好方法，追及问题。 $S_{\text{追及}} = (v_1 - v_2) * t$ ，那么 $t = S_{\text{追及}} / (v_1 - v_2)$ 。 $S_{\text{追及}}$ 由车和狗各走 30 秒的距离构成，已知人的速度比小狗快 3 倍比车慢 $3/4$ ，假设狗的速度为 1，快 3 倍表示多 3 倍，相当于是 4 倍，那么人的速度为 4；人比车慢 $4/3$ ，相等于人是车的 $1/4$ ，因此车的速度为 16。 $S_{\text{追及}} = S_{\text{狗}} + S_{\text{人}} = 1 * 30 + 16 * 30 = 17 * 30$ ，此时人追狗，那么 $t = S_{\text{追及}} / (v_1 - v_2) = 17 * 30 / (4 - 1) = 17 * 30 / 3 = 170$ 秒。【选 B】



例 3 (2017 广东) 老林和小陈绕着周长为 720 米的小花园匀速散步，**小陈比老林速度快**。若两人同时从某一起点同向出发，则每隔 18 分钟相遇一次；若两人同时从某一起点相反方向出发，则每隔 6 分钟相遇一次。由此可知，小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟？ ()

当看到 A 比 B 快，又有 $A+B$ ，可以优先考虑最大最小排除

- A. 6
B. 9
C. 15
D. 18

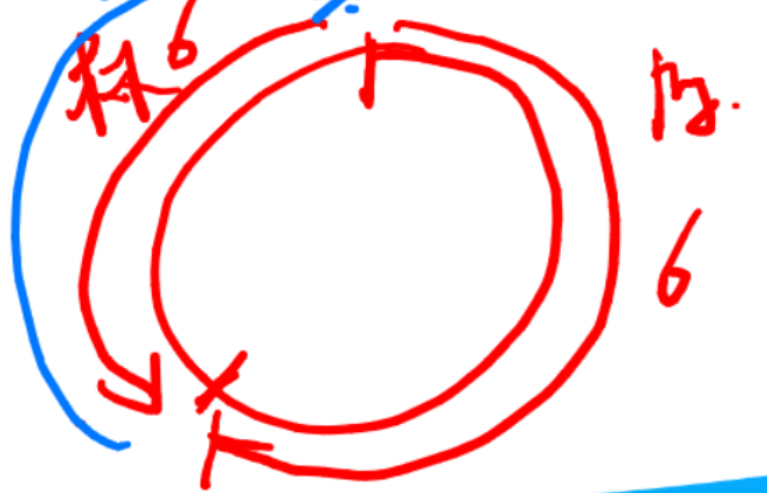
【解析】例 3. 方法一：本题有坑点，此处的相遇是广义的，分为两种，一种是面对面相遇，一种是从背后遇到。看方向，两人同向出发是追及，反向出发是相遇。行程问题需要识别好题型，对应好公式、方法。环形相遇： $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) * T$ ，相遇一次，相遇路程是 1 圈，环形追及： $S_{\text{追及}} = (V_1 - V_2) * T$ ，追上一次，追

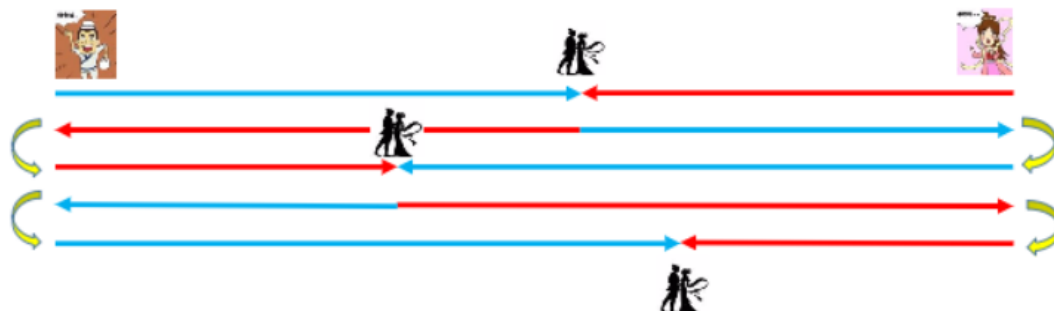
及路程等于 1 圈，小陈跑得快一些，小陈追老林，“每隔 18 分钟相遇一次”即一圈，为 720 米， $720 = (V_{\text{陈}} - V_{\text{林}}) * 18$ ， $V_{\text{陈}} - V_{\text{林}} = 40$ ①，同理，“若两人同时从某一起点相反方向出发，则每隔 6 分钟相遇一次”： $720 = (V_{\text{陈}} + V_{\text{林}}) * 6$ ， $V_{\text{陈}} + V_{\text{林}} = 120$ ②，①+②： $2V_{\text{陈}} = 160$ ， $V_{\text{陈}} = 80$ ，求时间 t ， $t = S/V = 720/V_{\text{陈}} = 720/80 = 9$ 。

方法二：猜题方法，两人 6 分钟相遇一次，说明这一圈让小陈单独走，所用时间一定大于 6 分钟，排除 A 项。假设两人速度相同，在 6 分钟时，小陈走半圈，而小陈实际比老林快，说明如果老林用 6 分钟，则小陈用时小于 6 分钟。 $t = 6 + 6 < 12$ ，排除 C、D 项。【选 B】



老林速度快。若两人同时从某一起点同向出发，则每隔 18 分钟相遇一次；若两人同时从某一起点相反方向出发，则每隔 6 分钟相遇一次。已知，小陈绕小花园散步一圈需要多少分钟？





【知识点】多次相遇（两端出发）：两人异地恋，见面就吵架，吵完架后两人各自往前走，走到彼此的出发点后发现没吵够，又往回走，相遇后两人继续吵架，吵完又继续往前走，走到彼此出发点后又觉得没吵够，又往回走，是多次相遇。假设单倍的全程为 S 。

1. 两端出发相遇：

- (1) 第 1 次相遇，共走 $1S$ 。
- (2) 第 2 次相遇，共走 $3S$ 。
- (3) 第 3 次相遇，共走 $5S$ 。
- (4) 第 n 次相遇，共走 $(2n-1)S$ 。

2. 多次相遇（两端出发）：

- (1) 公式： $S_{\text{总}} = (2n-1)S_{\text{全长}}$ 。
- (2) $S_{\text{总}}$ 为运动过程中，两人所走的路程和 $= (V_{\text{甲}} + V_{\text{乙}}) * T$ 。
- (2) n 为相遇次数，相遇一次， $n=1$ ；相遇两次， $n=2$ ；相遇十次， $n=10$ 。
- (3) $S_{\text{全长}}$ 为从 A 到 B 的距离。

例 4（2015 河北）某高校两校区相距 2760 米，甲、乙两同学从各自校区同时出发到对方校区，甲的速度为每分钟 70 米，乙的速度为每分钟 110 米，在路上两人第一次相遇后继续行进，到达对方校区后马上返回。那么两人从出发到第二次相遇需要多少分钟？（ ）

- A. 32
- B. 46
- C. 61
- D. 64

【解析】例 4. 行程问题，关键是找对题型，出现“第二次相遇”，不止一次，是多次相遇问题，仅有一个公式： $S_{\text{总}} = (2n-1)S_{\text{全长}}$ ，第二次相遇，走了 3 倍的

全程， $t = S_{\text{总}} / (V_1 + V_2) = 3 \times 2760 / (70 + 110) = 46$ 。【选 B】

【知识点】流水行船：船在水中走，水有速度，船也有速度。

1. 如果顺水： $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ 。

2. 如果逆水，有阻力： $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ 。

3. 已知 $V_{\text{顺}}$ 、 $V_{\text{逆}}$ ：

(1) $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ ， $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ ，将两式相加，得 $V_{\text{船}} = (V_{\text{顺}} + V_{\text{逆}}) / 2$ 。

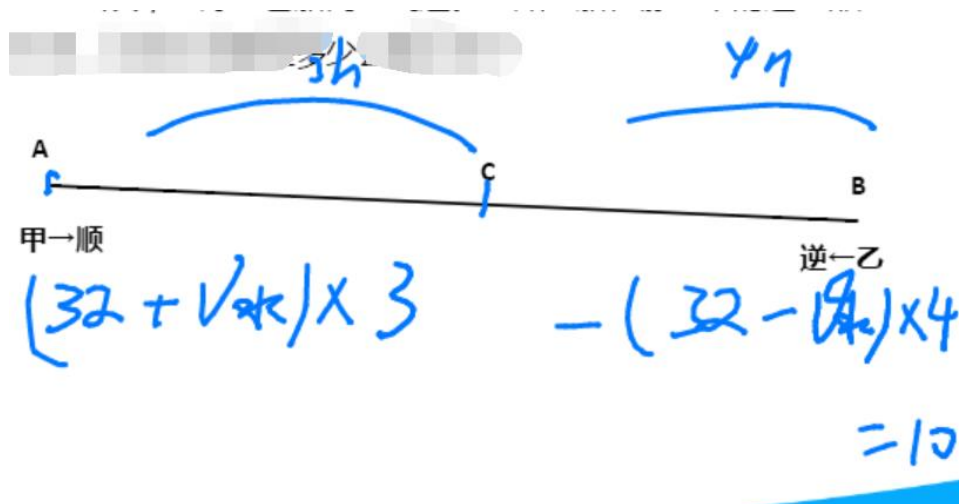
(2) $V_{\text{顺}} = V_{\text{船}} + V_{\text{水}}$ ， $V_{\text{逆}} = V_{\text{船}} - V_{\text{水}}$ ，将两式相减，得 $V_{\text{水}} = (V_{\text{顺}} - V_{\text{逆}}) / 2$ 。

4. 注意：静水速度=船速、漂流速度=水速。比如把瓶子放河里，瓶子本身没有速度，水给了瓶子速度，所以漂流速度=水速。

例 5（2017 山东）有 A、B 两家工厂分别建在河流的上游和下游，甲、乙两船分别从 A、B 港口出发前往两地中间的 C 港口。C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里。乙船出发后经过 4 小时到达 C 港，甲船在乙船出发后 1 小时出发，正好与乙船同时到达。已知两船在静水中的速度都是 32 公里/小时，问河水流速是多少公里/小时？（ ）

- A. 4
- B. 5
- C. 6
- D. 7

【解析】例 5. 行程问题作图分析，乙船出发 4 小时，甲在乙出发 1 小时后同时达到，所以甲走了 3 小时。两船在静水中的速度都是 32 公里/小时，AC 段是顺水的过程， $V_{\text{甲}} = 32 + V_{\text{水}}$ ，BC 段是逆水的过程， $V_{\text{乙}} = 32 - V_{\text{水}}$ 。根据“C 港与 A 厂的距离比其与 B 厂的距离远 10 公里”，得到： $AC - BC = (32 + V_{\text{水}}) \times 3 - (32 - V_{\text{水}}) \times 4 = 10$ ，解得 $V_{\text{水}} = 6$ 。【选 C】



【答案汇总】1-5: CBBBC

三、比例行程

【知识点】比例行程:

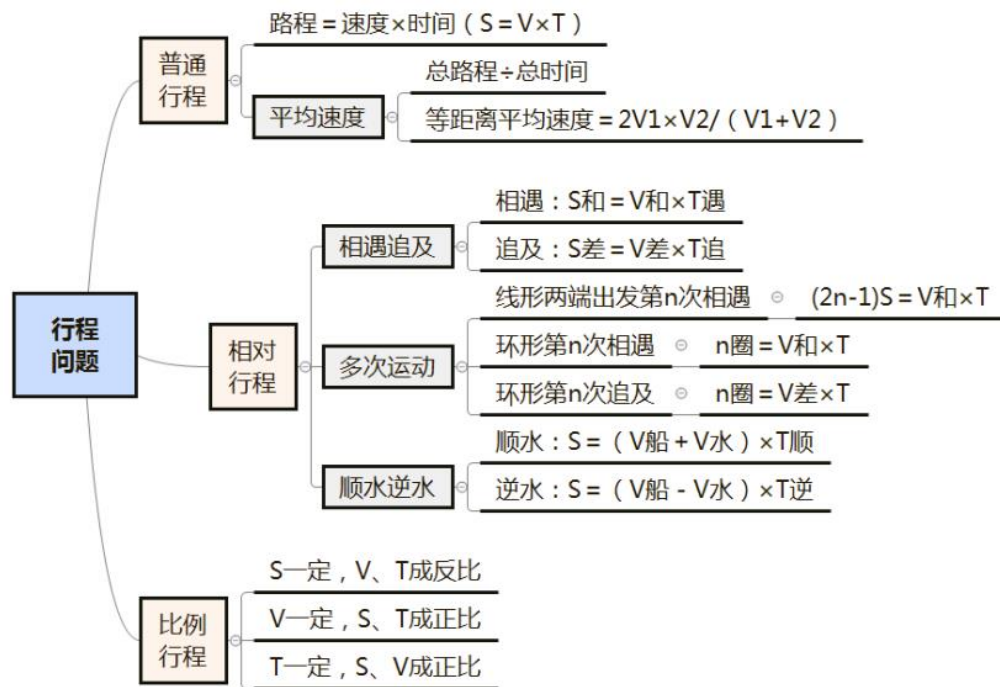
1. 从三量关系入手，路程=速度*时间。
2. 路程一定，速度与时间成反比。比如跑 100 米，速度越快用时越短。
3. 速度一定，路程与时间成正比。比如速度都是 100 米每秒，时间越长路程越长。
4. 时间一定，路程与速度成正比。比如跑 100 小时，速度越快跑得越远。
5. 举例：（1）跑 100 米， $t_{甲} : t_{乙} = 3 : 4$ ，那么 $v_{甲} : v_{乙} = 4 : 3$ 。
（2）跑 100 米，如果 $v_{甲} : v_{乙} : v_{丙} = 3 : 4 : 5$ ；那么 $t_{甲} : t_{乙} : t_{丙} = (100/3) : (100/4) : (100/5) = (1/3) : (1/4) : (1/5)$ 。
6. 方法：确定不变量，找比例。

例 6（2017 新疆）已知一形状为正六边形的跑道，边长为 150 米，甲乙两人分别从两个相对的顶点同时出发，沿跑道相向匀速前进。两人第一次相遇时乙比甲多跑了 50 米，则甲乙两人跑步的速度之比是（ ）。

- A. 3 : 5 B. 4 : 5
- C. 5 : 3 D. 5 : 4

【解析】例 6. 问速度比，速度=路程/时间，但是题目没有给出时间，所以

不可以用公式求，可以使用比例行程解题。问 $V_{甲}/V_{乙}$ ，利用比例行程解题，需要找到一个不变量，题中时间不变，时间一定，路程与速度成正比。总长为 $150 \times 3 = 450$ 米，由于两人第一次相遇时乙比甲多跑了 50 米，因此 $甲 + 乙 = 450$ ， $甲 - 乙 = 50$ ，解得甲跑了 200 米，乙跑了 250 米，当时间一定时，速度和距离成正比，可知 $V_{甲} : V_{乙} = S_{甲} : S_{乙} = 200 : 250 = 4 : 5$ 。【选 B】



【小结】行程问题：

1. 普通行程：

(1) 路程 = 速度 × 时间。

(2) 平均速度：

① 总距离 / 总时间。

② 等距离上下坡、往返， $v = 2V_1 \times V_2 / (V_1 + V_2)$ 。

2. 相对行程：

(1) 相遇追及：

① 相遇： $S_{和} = V_{和} \times T_{遇}$ 。

② 追及： $S_{差} = V_{差} \times T_{追}$ 。

(2) 多次运动：

①线形第 n 次相遇: $(2n-1)S = V_{\text{和}} \cdot T$ 。

②环形第 n 次相遇: $n_{\text{圈}} = V_{\text{和}} \cdot T$ 。

③环形第 n 次追及: $n_{\text{圈}} = V_{\text{差}} \cdot T$ 。

(3) 顺水逆水:

①顺水: $S = (v_{\text{船}} + v_{\text{水}}) \cdot T_{\text{顺}}$ 。

②逆水: $S = (v_{\text{船}} - v_{\text{水}}) \cdot T_{\text{逆}}$ 。

3. 比例行程:

(1) S 一定, V 与 T 成反比。

(2) V (T) 一定, S 与 T (V) 成正比。

课后检测

1. (2016 山东) 三个工程队完成一项工程, 每天两队工作、一队轮休, 最后耗时 13 天整完成了这项工程。问如果不轮休, 三个工程队一起工作, 将在第几天内完成这项工程?

A. 6 天

B. 7 天

C. 8 天

D. 9 天

【解析】1. 确定题型是工程问题, 关键在于找对切入点: 给完工时间、给效率比、给具体值。本题给了三个工程队, 两两工作, 一队轮休, 默认效率相等, 否则无法做题。(1) 赋值效率为 1: 1: 1。(2) 求总量: 根据“每天两队工作、一队轮休”可知, 每天的效率是 $1+1=2$, 赋值总量为 $2 \times 13=26$ 。(3) 若三队不轮休, 一起工作, 总效率为 3, 完成工程的时间需要 $26/3 \approx 8.7$ 天, 说明 8 天无法完成, 则将在第 9 天完成这项工程。【选 D】

2. (2018 联考) 甲、乙、丙、丁四人同时同地出发, 绕一椭圆形环湖栈道行走。甲顺时针行走, 其余三人逆时针行走。已知乙的行走速度为 60 米/分钟, 丙的速度为 48 米/分钟。甲在出发 6、7、8 分钟时分别与乙、丙、丁三人相遇, 求丁的行走速度是多少?

A. 31 米/分钟

B. 36 米/分钟

C. 39 米/分钟

D. 42 米/分钟

【解析】2. 错误思维：6、7、8 是等差数列，看到 48、60 相差 12，直接想到 36。这样简单的加减法思维是不对的，行程问题的公式涉及到乘法，所以不可以存在这种投机的思想。

正确思路：判断题型为环形相遇问题，已知公式： $S_{\text{相遇}} = (V_1 + V_2) * T$ ，相遇一次， $S_{\text{相遇}} = \text{一圈}$ 。得到： $S_{\text{一圈}} = (V_{\text{甲}} + 60) * 6 = (V_{\text{甲}} + 48) * 7$ ，解方程得 $V_{\text{甲}} = 24$ 米/分钟。代入其中任意一边可以得到一圈的距离。同理，甲与乙相遇，甲与丁相遇时的路程也相等， $(24 + 60) * 6 = (24 + V_{\text{丁}}) * 8$ ，解得 $V_{\text{丁}} = 39$ 米/分钟。【选 C】

【注意】

1. 难题别人都不学，但是我们选择攻克。万事开头难，不要有畏难心理和抵触心理，第一遍不会很正常，多听几遍，听懂了会很有成就感。既然总有人会赢，为什么不是我呢？只要有答案就可以做出来。要相信自己，舍我其谁，前提是付出辛苦和努力。

2. 坚持听课，遇到不懂的问题：

- (1) 听回放。
- (2) 课前答疑。
- (3) 可以去微博和老师互动。老师的微博是@粉笔牟立志。

【答案汇总】第四节：1-5：CDCCB；6-7：DA；

第五节：基础行程：1-2：BB；相对行程：1-5：CBBBC；6：B

遇见不一样的自己

come to meet a different you