

# 方法精讲-数量 4

主讲教师：牟立志

授课时间：2018.05.28



粉笔公考·官方微信

## 方法精讲-数量 4（笔记）

### 第八节 容斥原理

【注意】今天是数量关系最后一节课程，讲容斥问题和高频的几何问题，数量关系在考试中很有用，最后一天与之前的课程没有什么大的关联，保持初心，掌握知识点，会做题即可。

#### 课前测验

1. （2016 江苏）某班有 40 名学生，一次数学测验共有两道题，答对第一题的有 27 人，答对第二题的有 23 人，两题都答对的有 15 人，则两题都答错的人数是（ ）。

- A. 3
- B. 5
- C. 6
- D. 7

【解析】1. 正确率还不错，上课认真听讲解过程，本道题目不难。

2. （2017 联考）某单位准备扩建一矩形花圃，若将矩形花圃的长和宽各增加 4 米，则新矩形花圃的面积比原来的面积增加了 40 平方米。那么，原矩形花圃的周长是多少？（ ）

- A. 12 米
- B. 24 米
- C. 32 米
- D. 40 米

【解析】2. 几何问题，正确率为 83%，学完以后，这种几何题目是必须要拿分的，做错的同学需要自己反思一下。

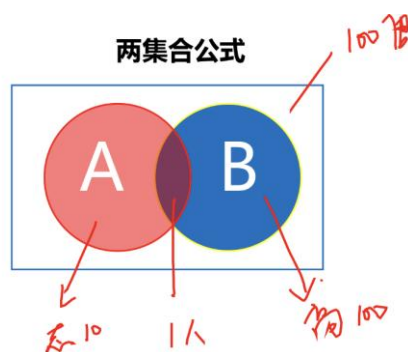
【知识点】容斥问题：集合与集合之间相互包容、排斥的过程，最终的目的是把重复的去掉，把遗漏的补回来（去重补漏）。

- 1. 题型：（1）两集合；（2）三集合；（3）容斥+最值（近两年考的比较多）。
- 2. 方法：（1）公式法；（2）画图法。

### 3. 公式:

(1) 两集合公式: ①例子: 假设咱班同学为一个大整体, 有两个集合 A 和 B, 集合 A 代表喜欢志哥的同学, 有 10 人, 集合 B 代表喜欢高照老师的同学, 有 100 人, 既喜欢志哥又喜欢高照的有 1 人, 其余白色空白部分代表有 100 人喜欢唐宋老师。中间有 1 人重复, 总数=10+100+100-1=209。

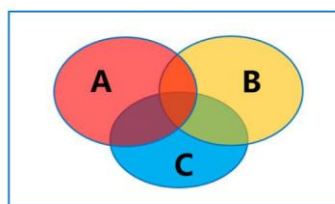
②公式:  $\text{全部} = A + B - A \cap B + \text{都不}$ 。



(2) 三集合标准型公式: ①满足的条件: 给出  $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $A \cap C$  这样的条件 (分别给出两两集合的交集)。

如图, 需要求总体, 其中  $A \cap B$  加了两次, 只要一次, 因此需要减掉一次, 同理  $B \cap C$ 、 $A \cap C$  也需要减掉一次。中间部分  $A \cap B \cap C$ , 在  $A+B+C$  时分别加了一次, 共加了三次, 在减去  $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $A \cap C$  时减掉了三次, 因此需要再加一次。

### 三集合标准型公式



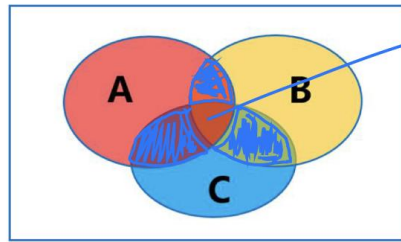
**条件:** 分别给出两两集合的交集

**公式:**  $\text{全部} = A + B + C - A \cap B - A \cap C - B \cap C + A \cap B \cap C + \text{都不}$

②公式:  $\text{全部} = A + B + C - A \cap B - B \cap C - A \cap C + A \cap B \cap C + \text{都不}$ 。

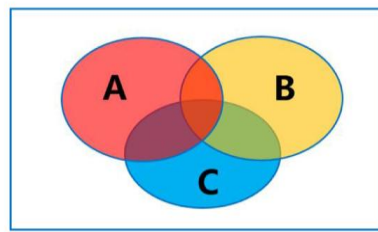
(3) 三集合非标准型公式: ①出现满足两种、满足三种的表述。

### 三集合非标准型公式



如上图，出现两层的部分，涂成蓝色的部分属于满足两种的部分，满足两种表示的是只满足两种的。满足三种表示的是  $A \cap B \cap C$ ，此时利用非标准公式来做题。满足两种一共加了两次，减去一次，满足三种的在  $A+B+C$  时分别加了一次，需要减去两次。

### 三集合非标准型公式



**条件：**统一给出只满足两种

**公式：**全部 =  $A+B+C$  - 两者满足 -  $2 \times$  三者满足 + 都不

②公式：全部 =  $A+B+C$  - 满足两种 -  $2 \times A \cap B \cap C$  (三者都满足) + 都不。

4. 总结：(1) 两集合公式：全部 =  $A+B-A \cap B$  + 都不。

(2) 三集合公式：①标准：给出  $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $A \cap C$  这样的表述 (出现两两集合的交集)，公式：全部 =  $A+B+C-A \cap B-B \cap C-A \cap C+A \cap B \cap C$  + 都不。

②非标准：出现满足两种，满足三种这样的表述，公式：全部 =  $A+B+C$  - 满足两种 -  $2 \times A \cap B \cap C$  (三者都满足) + 都不。

例 1 (2016 江苏) 某班有 40 名学生，一次数学测验共有两道题，答对第一题的有 27 人，答对第二题的有 23 人，两题都答对的有 15 人，则两题都答错的人数是 ( )。

A. 3

B. 5

C. 6

D. 7

【解析】例 1. 有包容重复的，两道题目，两集合问题。两集合容斥问题公式：全部=A+B-A ∩ B+都不满足，设两题都答错的为 x 人，代入数据， $40=27+23-15+x$ ，利用尾数计算，尾数为  $0=5+?$ ，因此两题都错的人数尾数为 5。

【选 B】

【知识点】容斥问题的方法选择：

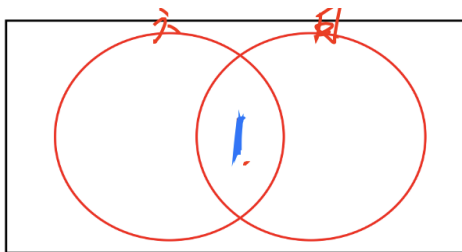
1. 公式法：题目中所给所求都是公式中的一部分，用公式。
2. 画图法：题目中所给所求公式里面没有，公式法用不了，用画图法。
3. 三步走：（1）第一步：画图。
- （2）第二步：标数字，从里往外标，保证每部分都是一层。
- （3）第三步：列式计算，尾数法。

例 2 (2014 国考) 工厂组织职工参加周末公益活动，有 80% 的职工报名参加，报名参加周六活动的人数与报名参加周日活动的人数比为 2:1，两天的活动都报名参加的为只报名参加周日活动的人数的 50%，问未报名参加活动的人数是只报名参加周六活动的人数的（ ）。

- |        |        |
|--------|--------|
| A. 20% | B. 30% |
| C. 40% | D. 50% |

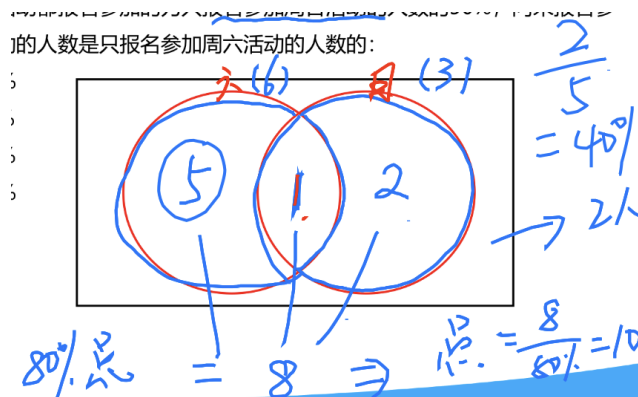
【解析】例 2. 有相互交叉重叠的部分，容斥问题，分成周六和周日，两集合容斥问题，出现只报名参加周六的人数，不能用公式法。采用画图法，三步走：

（1）第一步：画图；如图所示。



（2）第二步：标数字，从里往外标，从交集开始标数字，题目未给出数值，赋值。假设两天都参加人数为 1 人，则只参加周日活动为 2 人，那么周日参加总人数为  $2+1=3$  人，已知报名参加周六活动的人数与报名参加周日活动的人数比为 2:1，则周六参加人数为  $3*2=6$  人，只参加周六活动为  $6-1=5$  人。

(3) 第三步：列式计算，报名参加活动的总人数为  $5+1+2=8$  人。80%的职工报名参加活动，总人数  $=8/80\%=10$  人，则未报名参加活动的有  $10-8=2$  人，未报名参加活动的人数/只报名参加周六活动的人数  $=2/5=40\%$ 。【选 C】



**例 3 (2015 陕西)** 针对 100 名旅游爱好者进行调查发现，28 人喜欢泰山，30 人喜欢华山，42 人喜欢黄山，8 人既喜欢黄山又喜欢华山，10 人既喜欢泰山又喜欢黄山，5 人既喜欢华山又喜欢泰山，3 人喜欢这三个景点，则不喜欢这三个景点中任何一个的有多少人？（ ）

- |       |       |
|-------|-------|
| A. 20 | B. 18 |
| C. 17 | D. 15 |
| E. 14 | F. 13 |
| G. 12 | H. 10 |

**【解析】**例 3. 有交叉重叠，容斥问题，有三个山，三集合容斥问题。根据题干表述“8 人既喜欢黄山又喜欢华山，10 人既喜欢泰山又喜欢黄山，5 人既喜欢华山又喜欢泰山”，说明给了两两交集的部分，用标准型公式，全部  $= A+B+C-A \cap B-B \cap C-A \cap C+A \cap B \cap C+$  都不。设都不喜欢的为  $x$  人，代入数据， $100=28+30+42-8-10-5+3+x$ ，观察选项中有尾数相同的，而且数据不大，计算量比较小，不考虑尾数法，直接计算，解得  $x=20$ 。【选 A】

**【注意】**1. 出现“既……又……”表述，用标准型公式。

2. 观察选项中有尾数相同的，而且数据不大，计算量比较小，不考虑尾数法，如果数据比较大，不好计算，先利用尾数判断，判断不出来再计算。

**例 4 (2017 大连事业单位)** 100 位医务人员中，有 75 人懂法语，83 人懂英

语，65 人懂日语，懂三种语言的有 50 人，三种语言都不懂的有 10 人，那么懂两种语言的有（ ）人。

- A. 88  
B. 86  
C. 38  
D. 33  
E. 90

【解析】例 4. 有交叉重叠，容斥问题，有三种语言，问的是满足两种语言的人数，题中给出总数和懂三种语言的人数，用三集合非标准公式。总数=A+B+C-满足两个条件-2\*满足三个条件+都不满足，设懂两种语言的人数为 x 人，代入数据， $100=75+83+65-x-2*50+10$ 。尾数为  $0=3-x$ ，x 的尾数为 3，观察选项，只有 D 项满足。【选 D】

【注意】1. 两两交集和两者满足的区别： $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $A \cap C$  与  $A \cap B \cap C$  是有交集的，两两满足和三者满足之间是独立的。

2. 男人一般喜欢三种东西，金钱、权利、美女，假设志哥既喜欢金钱又喜欢权利，那么志哥有可能也喜欢美女。如果说志哥只喜欢金钱和权利，说明志哥不喜欢美女。

3. 出现“既……又……”表述，一般都是标准型公式，没有出现“既……又……”表述，一般都是非标准型的。

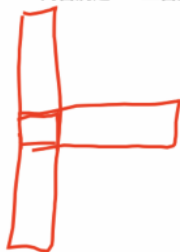
例 5（2017 江苏）某单位有 72 名职工，为丰富业余生活，拟举办书法、乒乓球和围棋培训班，要求每个职工至少参加一个班。已知三个班报名人数分别为 36、20、28，则同时报名三个班的职工数至多是（ ）。

- A. 6 人  
B. 12 人  
C. 16 人  
D. 20 人

【解析】例 5. 有交叉有重叠，容斥问题，出现三个班，三集合容斥问题。判断用标准型公式还是非标准型公式，观察题干，没有给出两两交集或者“既……又……”这种表述，当题干中缺少大量数据时，采用非标准型公式（原因：可以保证少设未知数）。三集合非标准公式：全部=A+B+C-满足两个条件-2\*满足三个条件+都不。设满足两个条件的为 x 人，满足三个条件的为 y 人，“每个职工至少参加一个班”则都不参加的人数为 0。代入数据： $72=36+20+28-x-2*y=72$ ，化简

为  $x+2y=12$ ，两个未知数一个方程，不定方程，要求  $y$  的最大值，保证  $y$  最大，那么  $2y$  也要最大， $x+2y=12$  为一个定值，那么  $x$  一定要最小， $x$  最小为 0， $2y=12$ ，解得  $y=6$ 。【选 A】

非标：全部 =  $A+B+C$  - 两者满足 -  $2 \times$  三者满足 + 都不



【注意】1. 集合是一个抽象的概念，没有要求必须为圆形。

2. 如果用标准型公式来做，设的未知数比较多，而且两两满足和三者满足之间是独立的， $A \cap B$ 、 $B \cap C$ 、 $A \cap C$  与  $A \cap B \cap C$  是有交集的，不好分析。

【答案汇总】1-5: BCADA



【小结】容斥原理：

1. 公式：（1）两集合： $A+B-AB=\text{总数}-\text{都不}$ ；

（2）三集合：①标准型： $A+B+C-AB-AC-BC+ABC=\text{总数}-\text{都不}$ （出现既……又……）；

②非标准型： $A+B+C-\text{满足两项}-\text{满足三项} \times 2 = \text{总数}-\text{都不}$ ；

③作为拓展：满足一项+满足两项+满足三项=总数-都不。如图所示，标红色部分表示只满足一种的情况，标蓝色部分表示只满足两种的情况，标黑色的部分表示满足三种的情况，相加就是总数-都不的情况。





2. 画图：（1）画圈圈，标数据。（2）从里到外，注意去重。

【改】100 位医务人员中，懂两种语言的有 33 人，三种语言都不懂的有 10 人，那么只懂一种语言的有（ ）。

- A. 7
- B. 8
- C. 9
- D. 10

【解析】改. 加一个条件：三种都懂的有 50 人。题目中给了满足两种、满足三种、三种都不满足，求只懂一种，可以画图或采用公式。设只懂一种语言的有  $x$  人，列式： $100=x+33+50+10$ ，解得  $x=7$ 。【选 A】

## 第九节 高频几何问题

### 一、公式类

【知识点】高频几何问题：几何问题知识点非常多，本节课只讲高频考点。题型分为公式类、结论类、技巧类。

【知识点】公式类：

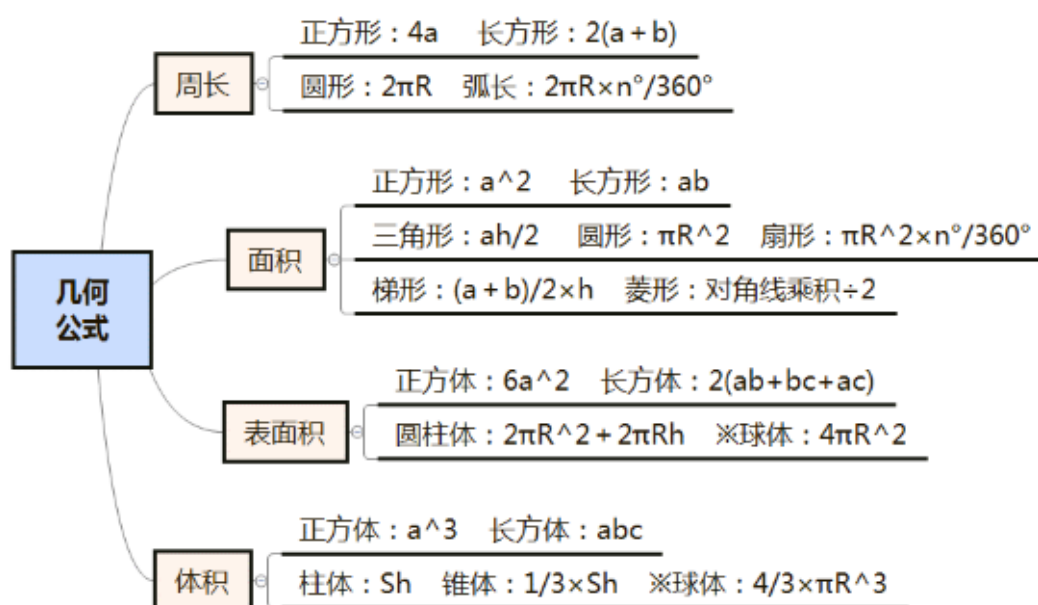
1. 规则图形，记公式。

2. 不规则图形，如图，问面积是多少。不规则图形通过割补平移的方式可以转化成多个规则图形组合的形式，图中不规则图形的面积=正方形面积-四分之一圆的面积。

记公式 → 记



### 3. 勾股定理。



### 【知识点】

1. 周长: 正方形:  $4a$ ; 长方形:  $2(a+b)$ ; 圆形:  $2\pi R$ ; 弧长:  $2\pi R \times n^\circ / 360^\circ$ 。

2. 面积: 正方形:  $a^2$ ; 长方形:  $ab$ ; 三角形:  $1/2 \times ah$ ; 圆形:  $\pi R^2$ ; 扇形:  $\pi R^2 \times n^\circ / 360^\circ$ ; 梯形:  $(a+b)/2 \times h$ ; 菱形 (四条边都相等的平行四边形): 对角线乘积  $\div 2$ 。菱形的应用例子: 正方形的对角线是 18, 正方形是特殊的菱形, 正方形的对角线相等, 故面积为  $18 \times 18 / 2$ 。

3. 表面积: 正方体:  $6a^2$ ; 长方体:  $2(ab+bc+ac)$ ; 圆柱体: 两个底面 + 一个侧面, 侧面是一个长方形, 宽是高, 长是圆的周长, 故面积为  $2\pi R^2 + 2\pi Rh$ ; 球体:  $4\pi R^2$ 。

4. 体积：正方体： $a^3$ ；长方体： $abc$ ；柱体： $Sh$ ；锥体： $\frac{1}{3}Sh$ ；球体： $\frac{4}{3}\pi R^3$ 。

5. 勾股定理：

(1) 考点： $a^2+b^2=c^2$ 、特殊角三角形三边关系。

(2) 结论 1：常考勾股数：3、4、5；6、8、10；5、12、13，其中 6、8、10；5、12、13 比较特殊，周长=面积。如果题目说直角三角形的周长=面积，考查的即为 6、8、10；5、12、13 这两组特殊的勾股数。

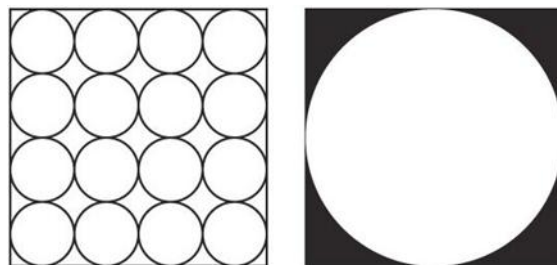
(3)  $30^\circ$  所对的直角边是斜边的一半。例如  $30^\circ$  所对的边为 200，则斜边为 400，另一直角边为  $200\sqrt{3}$ 。

例 1（2017 联考）某单位准备扩建一矩形花圃，若将矩形花圃的长和宽各增加 4 米，则新矩形花圃的面积比原来的面积增加了 40 平方米。那么，原矩形花圃的周长是多少？（ ）

- A. 12 米                      B. 24 米  
C. 32 米                      D. 40 米

【解析】例 1. 几何问题问周长，考查公式。矩形是规则图形，因此题目简单，一定要做。假设长为  $a$ 、宽为  $b$ ，长、宽都加上 4，即为  $a+4$ 、 $b+4$ 。列式： $(a+4) * (b+4) - ab = 40$ ，化简： $ab+4a+4b+16-ab=40$ ， $4(a+b)=24$ ，解得  $a+b=6$ ，原来的周长= $2(a+b)=2*6=12$ 。【选 A】

例 2（2018 北京）本题图中，左边的图形每个小圆的面积为  $\pi$ ，那么右边图形中阴影部分面积为（ ）。



- A.  $8\pi$                               B.  $64 - 16\pi$   
C.  $4\pi + 8$                       D. 20

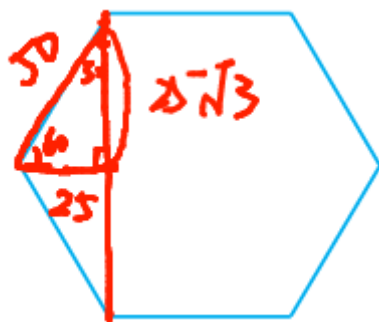
【解析】例 2. 不规则图形，根据割补平移转化为规则图形，用正方形面积-圆的面积。根据“左边的图形每个小圆的面积为  $\pi$ ”结合圆的面积为  $\pi r^2$  可得左边图形中小圆的半径为 1，则直径为 2，正方形的边长有 4 个直径，故正方形的边长为 8，右边圆的半径为 4。列式： $S_{\text{正方形}} - S_{\text{圆形}} = 64 - 16\pi$ 。【选 B】

【注意】做几何问题要多观察图形和选项的形状，正方形-圆形= $a^2 - \pi r^2$ ，一个数减去带  $\pi$  的数，排除 A、C、D 项。

例 3（2016 联考）老王围着边长为 50 米的正六边形的草地跑步，他从某个角点出发，跑了 500 米之后，与出发点相距多远？（ ）

- A.  $50(\sqrt{3}-1)$  米                      B.  $50\sqrt{3}$  米  
C.  $50(\sqrt{2}-1)$                       D.  $50\sqrt{2}$  米

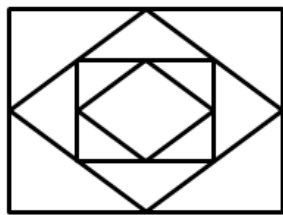
【解析】例 3. 方法一：读题画图。正六边形有六条边，每个内角都相等，都为  $720^\circ / 6 = 120^\circ$ 。老王跑了  $500 / 50 = 10$  条边，一圈是 6 条边，跑完一圈又跑了 4 条边。如图，求两个点的距离，边长为 50，根据图中的三角形作垂线，由“直角三角形  $30^\circ$  所对的边是斜边的一半”可知一条直角边为 25，另一条直角边为  $25\sqrt{3}$ ，故距离为  $25\sqrt{3} \times 2 = 50\sqrt{3}$ 。



方法二：根据“等腰三角形， $120^\circ$  所对的边长是腰的  $\sqrt{3}$  倍”可知结果一定有  $\sqrt{3}$ ，排除 C、D 项。A 项  $\sqrt{3}-1=0$ 。几，再乘以 50 一定小于 50，而所求一定大于







- A. 3  
B. 6  
C. 12  
D. 24

【解析】例 2. 有的同学可能会通过画辅助线，找到最里侧菱形的对角线长度，再算面积，这种方法也可以，但是做题速度慢。直接使用结论，外面大长方形面积为  $8 \times 6 = 48$ 。连一次各边中点，面积变成原来的一半为 24；再连一次各边中点，面积变成 24 的一半为 12；最后连一次各边中点，面积变成 12 的一半为 6。

【选 B】

【注意】结论：

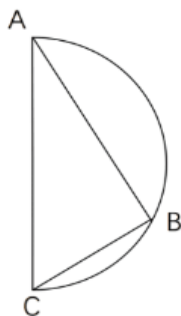
1. 连接任意四边形各边中点，里面面积变为原来的二分之一。如图，通过做辅助线，可以发现里侧的面积和外侧的面积相等，即面积变为原来的二分之一。



2. 连接任意三角形各边中点，里面面积变为原来的四分之一。



例 3（2017 联考）如图所示，甲和乙在面积为  $54\pi$  平方米的半圆形游泳池内游泳，他们分别从位置 A 和 B 同时出发，沿直线同时游到位置 C。若甲的速度为乙的 2 倍，则原来甲、乙两人相距（ ）。



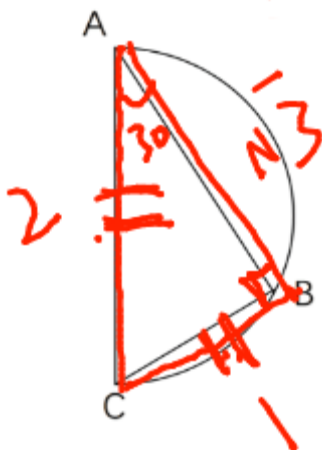
A.  $9\sqrt{2}$  米

B. 15 米

C.  $9\sqrt{3}$  米

D. 18 米

【解析】例 3. 甲从 A 点出发，乙从 B 点出发，同时游到 C 点，问 AB 的长度。图形为半圆，说明 AC 是圆的直径，直径所对的圆周角是直角，则  $\triangle ABC$  为直角三角形。两人同时游到 C 点，说明时间相同，则速度和路程成正比，则  $V_{甲}/V_{乙} = 2/1 = S_{甲}/S_{乙}$ ，即  $AC/BC = 2/1$ ，直角边是斜边的一半，说明  $\angle A = 30^\circ$ ， $\triangle ABC$  三边之比为  $1:2:\sqrt{3}$ 。 $S_{半圆} = 1/2 * S_{圆} = 1/2 * \pi r^2 = 54\pi$ ， $r^2 = 108$ ，则  $r = 6\sqrt{3}$ ，直径  $AC = 12\sqrt{3}$ ， $BC = 12\sqrt{3} * 1/2 = 6\sqrt{3}$ ，则  $AB = 6\sqrt{3} * \sqrt{3} = 18$ 。【选 D】

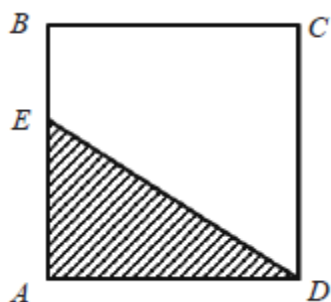


【注意】结论：由圆上一点和圆的直径所组成的三角形一定是直角三角形。

例 4（2016 联考）如下图，正方形 ABCD 边长为 10 厘米，一只小蚂蚁 E 从 A



点出发匀速移动，沿边 AB, BC, CD 前往 D 点。问哪个图形能反映三角形 AED 的面积与时间的关系？（ ）



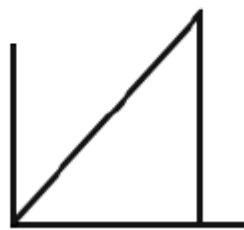
A



B



C



D

【解析】例 4. 公考中出现函数图像的题目都很简单。小蚂蚁从 A 到 B 移动时，形成的三角形为  $\triangle ADE$ ，随着时间推移，底边 AD 不变，高 AE 一直在增加，则  $\triangle ADE$  的面积一直在上升；小蚂蚁从 B 到 C 移动时，三角形同底等高，面积不变，观察选项，只有 A 项符合。【选 A】

【答案汇总】1-4: CBDA

### 三、技巧类

【知识点】技巧类：

1. 相似三角形：找相似比和面积比。

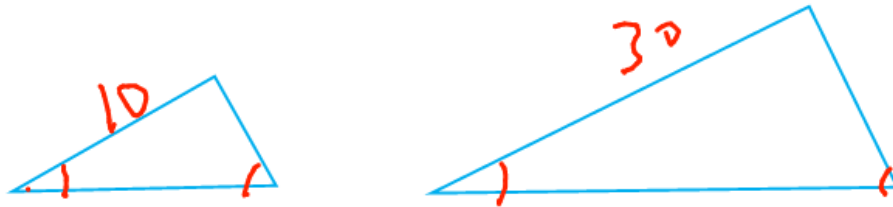
(1) 判定：两个角相等，则三角形相似。

(2) 结论：

①对应边成比例。假设有两个三角形，两个角相等，则两个三角形相似，

两条对应边分别为 10 和 30，则其他对应边的比例也是 1:3。

②面积之比=边长之比的平方。假设有两个三角形相似，两条对应边分别为 10 和 30，边长之比为 10:30=1:3，则面积之比为 1:9。

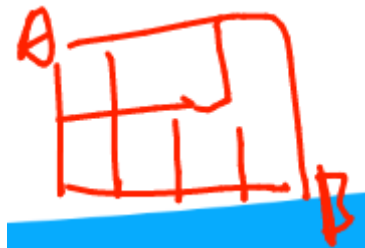


2. 最短路径：严格意义上来讲有三种题型。

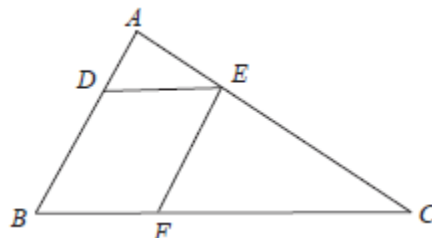
(1) 点到点（高频）。

(2) 点到面（冷门）。

(3) 描点法：比如给出一个图，从 A 点到 B 点，只能从左到右或从上到下走，不能走回头路，问最短走多远？



例 1（2017 河南）一块三角形农田 ABC（如下图所示）被 DE、EF 两条道路分成三块。已知  $BD=2AD$ ， $CE=2AE$ ， $CF=2BF$ ，则三角形 ADE、三角形 CEF 和四边形 BDEF 的面积之比为（ ）。



A. 1:3:3

B. 1:3:4

C. 1:4:4

D. 1:4:5

【解析】例 1. 方法一：已知  $AD/DB=1/2$ ， $AE/EC=1/2$ ，则  $DE \parallel BC$ 。同理，

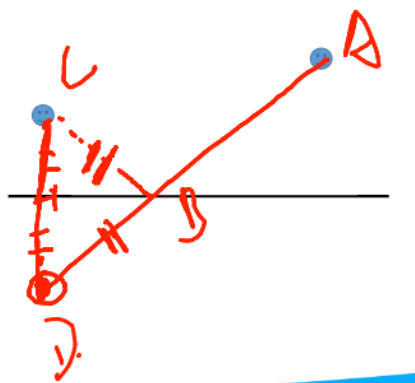
$BF/FC=1/2$ ,  $AE/EC=1/2$ , 则  $AB \parallel EF$ 。题目给边长的关系, 问面积之比, 面积之比=边长之比的平方。根据  $DE \parallel BC$ , 可知  $\triangle ADE \sim \triangle ABC \sim \triangle EFC$ ,  $\triangle ADE$  和  $\triangle ABC$  的边长之比为  $1:3$ , 则面积之比为  $1:9$ , 假设  $\triangle ADE$  为  $1$  份, 则  $\triangle ABC$  为  $9$  份。同理,  $\triangle EFC$  和  $\triangle ADE$  的边长之比为  $1:2$ , 面积之比为  $1:4$ , 则  $\triangle EFC$  为  $4$  份。四边形  $BDEF$  为  $9-1-4=4$  份, 可知  $\triangle ADE$ 、 $\triangle CEF$  和四边形  $BDEF$  的面积之比为  $1:4:4$ 。

方法二: 抓住特点, 在计算出  $\triangle ADE$  为  $1$  份、 $\triangle ABC$  为  $9$  份的时候, 会发现  $\triangle ADE$ 、 $\triangle CEF$  和四边形  $BDEF$  加在一起是  $9$  份, 只有  $C$  项满足条件。【选  $C$ 】

【知识点】最短路径:

1. 点到点直接连: 两点之间线段最短。

2. 点到线做对称: 如图, 找到其中一个点 ( $C$  点) 关于这条线的对称点 ( $D$  点), 再连接  $AD$ ,  $\triangle BCD$  被分成两个全等三角形, 则  $BC=BD$ , 因此  $AB+BC=AB+BD$ ,  $A$  点和  $D$  点在一条直线上, 则  $AD$  就是最短距离。



例 2 (2017 吉林) 悟空与二郎神在离地面  $1$  米的空中决斗, 两人相距  $2$  米, 悟空想用分身直接偷袭二郎神, 为了不引起对方的警觉, 分身必须在地面反弹一次再进行攻击, 则分身到达二郎神的位置所走的最短距离为 ( )。

A.  $2\sqrt{2}$  米

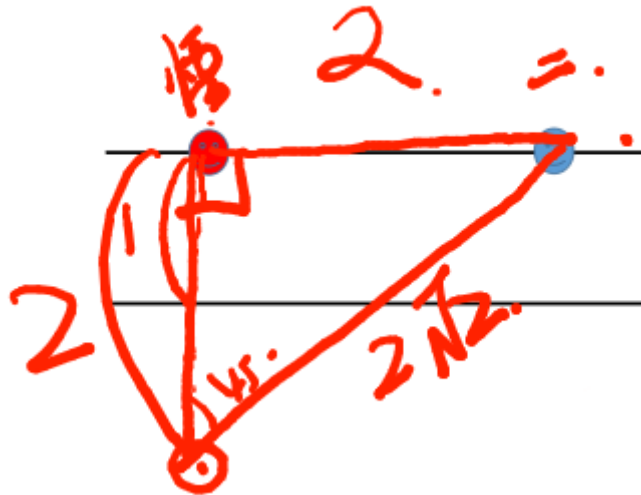
B.  $\sqrt{3}$  米

C.  $\sqrt{2}$  米

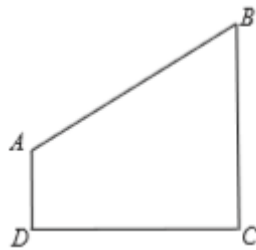
D.  $2\sqrt{3}$  米

【解析】例 2. 求点和线之间最短路径, 做对称。做悟空关于地面的对称,

对称点和二郎神连接为最短路径。悟空和二郎神距离为  $2m$ ，悟空到地面为  $1m$ ，到镜像点为  $2m$ ，因此悟空、二郎神和对称点构成了等腰直角三角形，三边长度之比为  $1:1:\sqrt{2}$ ，则对称点到二郎神距离即最短距离为  $2\sqrt{2}m$ 。【选 A】



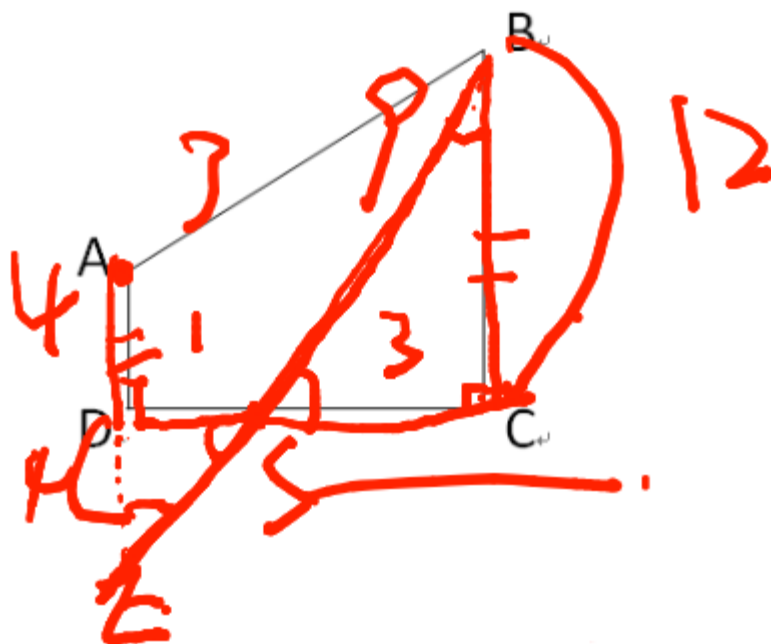
例 3（2017 江苏）某市规划建设 4 个小区，分别位于直角梯形 ABCD 的 4 个顶点处（如图）， $AD=4$  千米， $CD=BC=12$  千米。欲在 CD 上选一点 S 建幼儿园，使其与 4 个小区的直线距离之和为最小，则 S 与 C 的距离是（ ）。



- A. 3 千米
- B. 4 千米
- C. 6 千米
- D. 9 千米

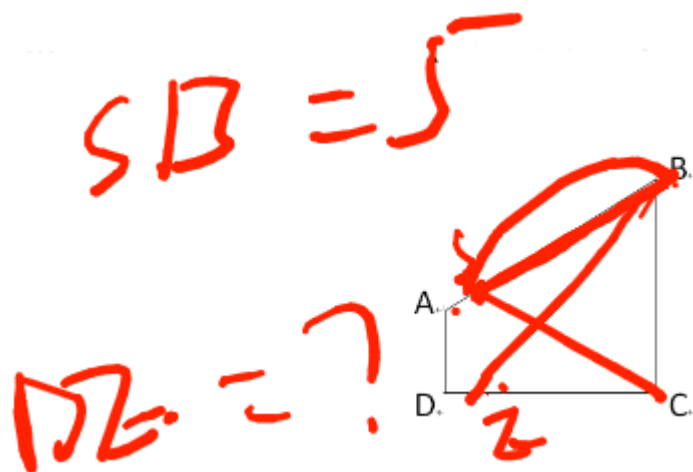
【解析】例 3. 方法一：在 CD 上找一个点 S，连接 AS、BS、CS、DS，其中  $CS+DS$  为定值，即 CD，无论 S 点怎么移动，它到 C、D 点的距离之和都是一定的，因此无需考虑 CS、DS，只需考虑  $AS+BS$  距离最短。找对称，关于 CD 做 A 的对称点 E，连接 BE 为最短距离。求边长 SC，放入三角形中分析。AD、BC 垂直于 CD，则  $AD \parallel BC$ ，对顶角和内错角相等，则  $\triangle DSE \sim \triangle CSB$ ，对应边成比例，

$DS/SC=DE/BC=4/12=1/3$ ，DS 对应 1 份，SC 对应 3 份，CD 总共 4 份对应 12，则 1 份对应 3，SC=9。

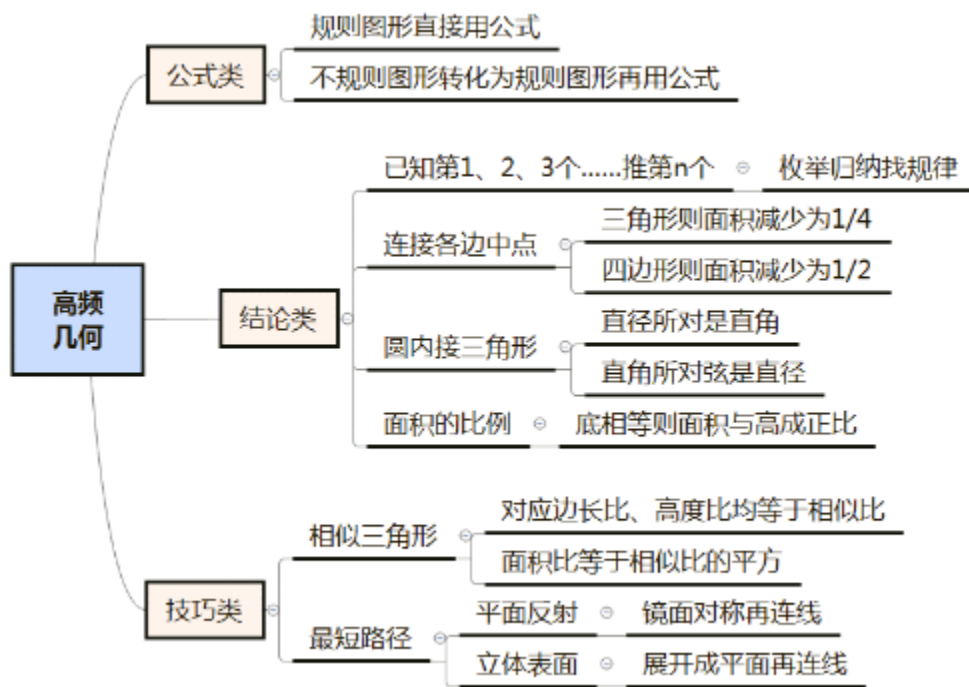


方法二：用尺子量。试卷给的图一定是标准的，如果不标准可以自己用尺子画。【选 D】

【注意】拓展：已知  $SB=5$ ，求 DE。图形中的比例与真实比例是一样的，因此可以在图中量出 SB 和 DE 的长度，则  $SB/DE=5/x$ ，解出 x 即 DE 的大概长度。



【答案汇总】1-3: CAD



【小结】高频几何：

1. 公式类（熟记公式、常用的勾股数）：

- （1）规则图形直接用公式。
- （2）不规则图形转化为规则图形再用公式。

2. 结论类：

- （1）已知第 1、2、3 个……推第 n 个：枚举归纳找规律。
- （2）连接各边中点：①三角形则面积减少为  $1/4$ ；②四边形则面积减少为  $1/2$ 。
- （3）圆内接三角形：①直径所对是直角；②直角所对弦是直径。
- （4）面积的比例：底相等则面积与高成正比。

3. 技巧类：

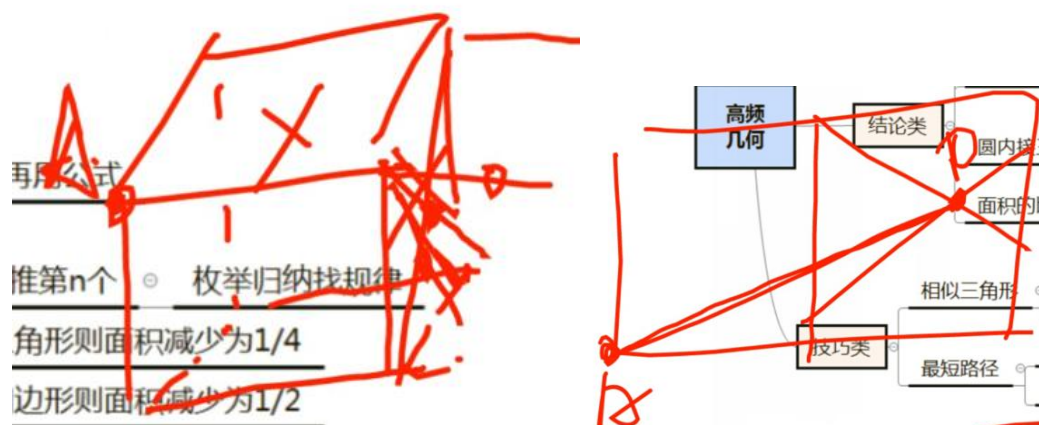
（1）相似三角形：

- ①对应边长比、高度比均等于相似比。
- ②面积比等于相似比的平方。

（2）最短路径：

- ①平面反射：镜面对称再连线。
- ②立体表面：展开成平面再连线。比如：一个正方体，右侧面上有一个点 O，问从 A 点到 O 点的最短路径是多少。两个点不在一个平面，可以将右侧面向上展

开，使两个点在同一个平面上，此时连接两点为最短路径。



【答案汇总】容斥原理：1-5：BCADA

高频几何问题：公式类：1-4：ABBA；结论类：1-4：CBDA；技巧类：1-3：CAD

### 课后测验

1. (2018 江西) 某高校做有关碎片化学习的问卷调查，问卷回收率为 90%，在调查对象中有 180 人会利用网络课程进行学习，200 人利用书本进行学习，100 人利用移动设备进行碎片化学习，同时使用三种方式学习的有 50 人，同时使用两种方式学习的有 20 人，不存在三种方式学习都不用的人。那么，这次共发放了多少份问卷？

- A. 370
- B. 380
- C. 390
- D. 400

【解析】1. 回收率：比如发出 100 份问卷，回收时可能只有 90 份，则回收率=90/100=90%。本题为三集合容斥问题，没有“既……又……”，用非标准公式。代入数据为：全部=180+200+100-20-2\*50+0=360。如果选项中有“360”的选项则会有很多同学掉坑，因为总数\*90%=360，则总数=360/90%=400。【选 D】

2. (2018 联考) 某村民要在屋顶建造一个长方体无盖贮水池，如果池底每平方米的造价为 150 元，池壁每平方米的造价为 120 元，那么要造一个深为 3

米容积为 48 立方米的无盖贮水池最低造价是多少元？

A. 6460

B. 7200

C. 8160

D. 9600

【解析】2. 长方体体积  $V=S_{\text{底}}*h=S_{\text{底}}*3=48$ ，则  $S_{\text{底}}=16$ 。设底边长、宽分别为  $a$ 、 $b$ ，总造价=池底造价+池壁造价= $150*16+120*2*(3a+3b)=150*16+720*(a+b)$ 。要想总造价最低，则使  $a+b$  最小。已知  $a*b$  为定值，当  $a=b$  时， $a+b$  最小。 $ab=a^2=16$ ，则  $a=4=b$ ，结果最小为  $150*16+720*(4+4)=8160$ 。【选 C】

【注意】均值定理： $a*b$  一定，当  $a=b$  时， $a+b$  最小。 $a+b$  一定，当  $a=b$  时， $a*b$  最大。

【注意】如何做行测：

1. 顺序：三大模块（资料、逻辑、言语）+常识+数量。行测总分是以三大模块为基础的，三大模块能掌握 80% 时，行测成绩应该能达到 65 分左右，如果要想突破 70 分，则需要做常识和数量。

2. 正常情况下，考试会提前 5 分钟发试卷，可以利用这个时间做类比题。考试开始后，优先做自己擅长的模块，便于正常发挥，快速进入状态。老师本人习惯先做资料，接着做逻辑，然后将言语和常识放在一起做（读题习惯差不多），最后做数量（一般留 10~15 分钟）。

3. 有舍有得。做题不要纠结，遇难则跳。

【注意】如何备考数量：

1. 夯实基础：听课，把每个题型的识别、方法熟记于心。

2. 专项训练：从自己擅长的题型开始专项训练，做到吐。比如工程问题的知识点掌握了，可以在 app 上刷工程类的专项题型。

3. 套题实战：放到套题里，快速找到自己会的题目，有限时间拿到更多的分。



遇见不一样的自己

Come to meet a different you