T13.1 $Tf(x)=\int_0^x k(x,y)f(y)dy$

$(Tf(x),g(x))=\int_0^1\int_0^x k(x,y)f(y)dy\cdot g(x)dx$ ，为什么 (Tf,g) 长这样？

$=\int_0^1\int_0^x k(x,y)f(y)g(x)\,dydx$

$=\int_0^1\int_x^1 k(x,y)g(x)\cdot f(y)\,dxdy=\int_0^1\left(\int_x^1 k(x,y)g(x)dx\right)f(y)dy=(T^*g,f)=(f,T^*g)$

$\therefore T^*g(x)=\int_x^1 k(y,x)g(y)dy$

T13.2: $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}\subseteq B(H)$ self-adjoint, $T_n\to T$ in $B(H)$, 证明self-adjoint 极限仍为self-adjoint

pf: $\forall\varepsilon>0,\ \exists N$ s.t. $\|T_n-T\|<\varepsilon\ \forall n\geq N$.

$\|(x,T_n^*y)-(x,T^*y)\|=\|(T_nx,y)-(Tx,y)\|=\|((T_n-T)x,y)\|_H$

即 $\|(x,(T_n^*-T^*)y)\|=\|((T_n-T)x,y)\|\leq\|T_n-T\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|$

let $x=(T_n^*-T^*)y$ then $\|(T_n^*-T^*)\cdot y\|^2\leq\|T_n-T\|\cdot\|\cancel{(T_n^*-T^*)}\cdot y\|\cdot\|y\|$

$\Rightarrow\|T_n^*-T^*\|\leq\|T_n-T\|$, $T_n^*\to T^*$ in $B(H)$ ← recall $\|T\|=\|T^*\|$ 这已证明了

$\therefore\|(Tx,y)-(x,Ty)\|\leq\|(Tx,y)-(T_nx,y)\|+\|(T_nx,y)-(x,Ty)\|$, $(x,Ty)=(T^*x,y)$, $T_n^*=T_n$

$=\|((T_n-T)x,y)\|+\|(T_n^*-T^*)x,y\|$

即 $\|((T-T^*)x,y)\|\leq\|(T_n-T)x\|\|y\|+\|(T_n^*-T^*)x\|\cdot\|y\|$

let $y=(T-T^*)x$, then obtain $\|(T-T^*)x\|\leq\|(T_n-T)x\|+\|(T_n^*-T^*)x\|$ Let $\|x\|=1$

$\|(T-T^*)\|\leq\|T_n-T\|+\|T_n^*-T^*\|=2\varepsilon$

ε 任意小, $\therefore\|(T-T^*)\|<\varepsilon$ implies $T=T^*$

T13.3 if $T\in B(H,K)$, then $\ker(T)=\text{rang}(T^*)^\perp$

pf: $x\in\text{rang}(T^*)^\perp$, then $(x,T^*y)\equiv0\ \forall y\in H\Rightarrow(Tx,y)\equiv0\ \forall y$

let $y=Tx$ $(Tx,Tx)=\|Tx\|^2=0\ \therefore x\in\ker(T)$, RHS $\subseteq$ LH

if $x\in\ker(T)$, $(Tx,y)\equiv0\ \forall y$ since $Tx=0$.

$\therefore(x,T^*y)\equiv0\ \forall y$, $x\in\text{rang}(T^*)^\perp$, RHS $\supseteq$ LHS $\Rightarrow\ker(T)=\text{range}(T^*)^\perp$

T13.4 if $T\in B(H,K)$, then $T^*T\in B(H,H)$, $\|T^*T\|_{B(H,H)}=\|T\|^2_{B(H,K)}$

obv H to H. bounded $\|T^*T\|=\|T\|^2$ 可知

pf: $(T^*Tx,y)=(Tx,Ty)\in K$

let $y=T^*Tx$, $\|x\|=1$ LHS $=\|T^*Tx\|^2=\|T^*T\|^2$

RHS $=(Tx,TT^*Tx)\leq\|Tx\|\cdot\|T\cdot T^*Tx\|\leq\|Tx\|\cdot\|T\|\cdot\|T^*\|\cdot\|Tx\|=\|T\|^4$ since $\|T^*\|=\|T\|$ ⋯ ①

$\|T^*T\|\geq\|T^*\|\cdot\|T\|=\|T\|^2$ ⋯ ②

① + ② $\Rightarrow\|T^*T\|=\|T\|^2$

T13.5 $T\in B(H,K)$ invertible, then $T^*\in B(K,H)$ inv, $(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*$

pf: ~~T is surjective, $\forall c\in K$, $\exists y\in H$ s.t. $Ty=c$~~

反证假设 T^* not injective, $\exists a\in K$ $a\neq 0$ s.t. $T^*a=0$

T invertible $\therefore \exists y\neq 0$ unique s.t. $Ty=a$

$(T^*a,y)=0=(a,Ty)=a^2 \Rightarrow a=0$ contradiction! $\therefore T^*$ injective $\cdots$ ①

~~if $T^*(Tx)=0$, T^* injective $\therefore Tx=0$, T injective too $\Rightarrow x=0$ $\therefore T^*T$ injective~~

本来想 $T^*T: H\to H$ inj $\Rightarrow$ inv 缺条件 finite-dim.

~~反证假设 T^* not surjective, $\exists y\in H$, $y\notin$ rangT^*~~

surj 麻烦

if $y_1\in$ rangT^*, $y_2\in$ rangT^*, $T^*(c_i\in K)=y_i$

then $\alpha y_1+\beta y_2\in$ rangT^* since T^* is linear.

$\ker T=$ rang$(T^*)^\perp$, 但没有 rang$T$ closed

不能用 $H=$ rang$T\oplus$ rang$T^\perp$

证: $I=T^{-1}T=(T^{-1}T)^*=T^*(T^{-1})^*$

$=\cdots=(T^*)^{-1}T^*$

定义知 $\Rightarrow (T^{-1})^*=(T^*)^{-1}$

$\|(T^{-1})^*\|=\|T^{-1}\|$ then T^* invertible

(所以 $T=T^*\Rightarrow (T^{-1})^*=(T^*)^{-1}=T^{-1}$, T^{-1} 也 self-adjoint)

定义: 说明 $\exists (T^{-1})^*\in B(H,K)$ s.t. $(T^{-1})^*\cdot T^*=T^*\cdot(T^{-1})^*=I$ $\Rightarrow (T^*)^{-1}$ 存在且 $(T^*)^{-1}:=(T^{-1})^*$

T14.1 $(x+iy,x'+iy'):=(x,x')+i(y,x')-i(x,y')+(y,y')$ 是 inner product.

pf: $(x+iy,x+iy)=(x,x)+(y,y)\geq 0$. 当且仅当 $x=y=0$ 取 0. $\Rightarrow$ positivity

$((x+iy)+(x'+iy'),w+iz)=(x+x',w)+i(y+y',w)-i(x+x',z)+(y+y',z)$

$=\cdots=(x+iy,w+iz)+(x'+iy',w+iz)$

$\alpha\in\mathbb{C}$ $(\alpha(x+iy),w+iz)=((ax-by)+i(bx+ay),w+iz)$ $\alpha=ax+by$ 注意 α 是复数!

$=\cdots=\alpha(x+iy,w+iz)$

$\Rightarrow$ linear

$\overline{(x+yi,w+iz)}=\overline{(xw)+i(yw)-i(xz)+(yz)}=\cdots=(w+iz,x+iy)$ $\Rightarrow$ conjugation.

$\|(x,y)\|^2=\|x\|_H^2+\|y\|_H^2$

$(x_n,y_n)\to(x_0,y_0)$ as $x_n\to x_0$, $y_n\to y_0$.

$\Rightarrow$ 可知 $H_{\mathbb{C}}$ hilbert space (complete)

T14.2: $H\subseteq\mathbb{R}^n$, $H_{\mathbb{C}}$ 由 T14.1 定义, $T\in L(H)$, $T_{\mathbb{C}}\in L(H_{\mathbb{C}})$ $T_{\mathbb{C}}(x+iy)=Tx+iTy$

(1): $T\in B(H)\Rightarrow T_{\mathbb{C}}\in B(H_{\mathbb{C}})$, $\|T_{\mathbb{C}}\|=\|T\|$

pf: $\|T_{\mathbb{C}}\|=\sup\limits_{\|x+iy\|=1}\|T_{\mathbb{C}}(x+iy)\|\leq\sup\limits_{\substack{\|x\|\\=\|y\|=1}}\|T_{\mathbb{C}}(x)\|+\sup\limits_{''}\|T_{\mathbb{C}}(iy)\|=2\|T\|$ $\therefore T_{\mathbb{C}}\in B(H_{\mathbb{C}})$

注意 $H_{\mathbb{C}}$ 的 norm!

$=\sup\limits_{\substack{\|x+iy\|=1\\ \text{即}\|x\|^2+\|y\|^2=1}}\|Tx+iTy\|_{H_{\mathbb{C}}}\geq\|Tx+iT0\|_{H_{\mathbb{C}}}$ 取 $\|x\|=1$, 即 $\|T_{\mathbb{C}}\|\geq\|Tx\|$ ~ ①

$=\sup\limits_{\|x\|^2+\|y\|^2=1}(\|Tx\|^2+\|Ty\|^2)^{\frac{1}{2}}\leq\sup\limits_{\|x\|^2+\|y\|^2=1}(\|T\|^2\|x\|^2+\|T\|^2\|y\|^2)^{\frac{1}{2}}\leq\|T\|^2$ $\cdots$ ②

①+② $\Rightarrow \|T_{\mathbb{C}}\|=\|T\|$

(2): λ is eigenvalue of T, then $T_\mathbb{C}$; μ real eigenvalue of $T_\mathbb{C}$, then T

Pf: $Tx=\lambda x \quad x\neq 0.$

$T_\mathbb{C}(x+ix)=Tx+iTx=\lambda x+i\lambda x=\lambda(x+ix)$ $\therefore$ λ也是$T_\mathbb{C}$的ev

$T_\mathbb{C}(x+iy)=Tx+iTy=ux+iuy \quad u\in\mathbb{R}$

$Tx-ux+i(Ty-uy)=0 \Rightarrow Tx=ux,\ Ty=uy$ 实部虚部$=0$ $\Rightarrow$ u也是T的ev $\quad u\in\mathbb{R}$

Thm: $D_a: \ell^2(\mathbb{C})\to\ell^2(\mathbb{C})$, $(x_1,x_2,\dots)\mapsto(a_1x_1,a_2x_2,\dots)$, $a\in\ell^\infty(\mathbb{C})$

(1): $\sigma_p(D_a)=\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (2) $\sigma(D_a)=\overline{\sigma_p(D_a)}$ (closure)

Pf: (1) $(a_1x_1,a_2x_2,\dots)=\lambda(x_1,x_2,\dots)$

$a_ix_i=\lambda x_i,\ i=1,2,\dots \quad x\neq 0$

$\Rightarrow \lambda=a_i,\ x_i=1,\ x_j=0$ 对$\forall j$ $\therefore$ $\sigma_p(D_a)=\{a_i\}_{i=1}^{+\infty}$ (若$\lambda\notin\{a_i\}$, $x=0$ 舍)

HW11 答

(2): $D_a-\lambda I: (x_1,x_2,\dots)\mapsto((a_1-\lambda)x_1,(a_2-\lambda)x_2,\dots)$ not invertible

$=(y_1,y_2,\dots)$

$\Rightarrow \begin{cases}(a_i-\lambda)x_i \text{ 没法得出 } y_i\\ (a_i-\lambda)x_i=(a_i-\lambda)x_i',\ x_i\neq x_i' \Rightarrow a_i=\lambda\end{cases}$

设$\lambda\notin\overline{\sigma_p(D_a)}$, 即$\exists\,\delta>0$ s.t. $|\lambda-a_i|\geq\delta\ \forall i$

$\|D_a-\lambda I\|=|\lambda-a_i|\geq\delta \Rightarrow$ injective

$\forall y_i, \exists x_i$ s.t. $(\lambda-a_i)x_i=y_i \Rightarrow$ surjective

$\therefore$ $\lambda\notin\overline{\sigma_p(D_a)}$, $\lambda\notin\sigma(D_a)$ $\Rightarrow$ $\sigma(D_a)\subseteq\overline{\sigma_p(D_a)}$

已知 onto, invertible $\rightleftharpoons \|D_a-\lambda I\|\geq\delta$

即$\lambda\notin\sigma(D_a)\Rightarrow\lambda\notin\overline{\sigma_p(D_a)}$ $\Rightarrow \sigma(D_a)\supseteq\overline{\sigma_p(D_a)}$ $\therefore$ 取等号.

(3): compact subset of $\mathbb{C}$ 一定是 spectrum of operator of this form D_a

Pf: $a\in\ell^{+\infty}(\mathbb{C})$ $\therefore$ $\max|a_i|<+\infty$

$\therefore$ $\overline{\sigma_p(D_a)}$ compact in $\mathbb{C}$; 反之设$A\subseteq\mathbb{C}$. A cpt thus bounded, $\max\limits_{a\in A} a<+\infty$ 记为a_M

Consider Disk $=\{r\in\mathbb{C}: |r|\leq a_m\}$

Let $R=\{r\in \text{Disk}: |r|\leq a_m,\ |r|\in\mathbb{Q},\ \arg r\in[0,2\pi)\cap\mathbb{Q}\}$ 其中$\arg r$指与实轴夹角

R countable, $\overline{R}=\text{Disk}$

$\therefore$ $\overline{R\cap(\text{Disk}\cap A)}=A$ 证明略 ($\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ 所以这个也是对的)

而 $R\cap(\text{Disk}\cap A)\subseteq R$, R countable, 可以写成$(a_1,a_2,\dots a_n,\dots)=a$ 证毕

T14.4: $X \subseteq \mathbb{C}$ Banach, $T\in B(X)$, 定义 spectral radius $r_\sigma(T)=\sup\{|\lambda| : \lambda\in\sigma(T)\}$

$$r_\sigma(T)\le \liminf_{n\to+\infty}\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

pf: 反证假设. if $r_\sigma(T) > \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ （如果是 $<$, $\exists N$ s.t. $\forall n\ge N$, $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} > r_\sigma(T)$）

$\forall N, \exists n\ge N, \|T^n\|^{\frac{1}{n}} < r_\sigma(T)$

说证: $Q(\sigma(T)) = \sigma(Q(T))$

$\Rightarrow (\sigma(T))^n = \sigma(T^n)$, $\sigma(T) = (\sigma(T^n))^{\frac{1}{n}}$, $\forall n$

又∵ $\sigma(T) \subseteq \{\lambda\in\mathbb{C} : |\lambda| \le \|T\|\}$

$\Rightarrow \overset{\lambda\in}{\sigma(T)} = (\sigma(T^n))^{\frac{1}{n}}$, $\lambda\le\|T^n\|^{\frac{1}{n}}$ $\forall n$

$\therefore r_\sigma(T) \le \liminf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$

T14.5: $X = C([0,1])$, show: $\forall\lambda\neq 0$ $\lambda\in\rho(T)$, $T\in B(X)$ $Tf(x)=\int_0^x f(s)ds$; $0\in\sigma(T)$ but not in $\sigma_p(T)$

pf: ~~$(T-\lambda I)f(x) = \int_0^x f(s)ds - \lambda f(x) \overset{记为}{=} S\cdot f(x)$~~ 我本来想用 contract mapping

~~$|Sf - Sg| = |\int_0^x(f(s)-g(s))ds - \lambda(f(x)-g(x))|$~~ 但这个强力条件 不一定成立的! (不必要!)

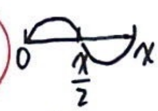
T11.7 $K\in C([a,b]^2)$, $\|K\|_{+\infty} \le M$, $Tf(x)=\int_a^x K(x,y)f(y)dy$, T bdd + linear

$$\begin{cases} |T^n f| \le M^n \|f\|_{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} & \text{induction.} \\ f(x)=g(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy & 有唯一解 \end{cases}$$

由T14.4 $r_\sigma(T) \le \liminf_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[b=1\ a=0]{在本题中\ K=1} r_\sigma(T) \le \lim_{n\to+\infty} \|f\|_{+\infty} \frac{(b-a)^n}{n!} \to 0$,

$\therefore \forall\lambda>0$, $\lambda\in\rho(T)$ ---(1)

$(T-0I)f(x)=\int_0^x f(s)ds$ not invertible T not surjective, $\forall f\in C^1([0,1])$ 而不可微函数没有原像!

since T not ~~inj~~. 若 $Tf=0$ 不是 $Tf x=0$! 

和  均可 $\therefore 0\in\sigma(T)$

若 $(T-0I)f=0$, then $(T-0I)f(x)=0$ $\forall x\in[0,1]$ $\Rightarrow f(x)=0$ in $[0,1]$

$(\int_0^x f(s)ds)' = f(s) = 0$ 求导可知. $\therefore 0\notin\sigma_p(T)$

T15.3: $T: l^2\to l^2$ $(x_1,x_2,\cdots) \longmapsto (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$ cpt

pf: $\{e_i\}_{i=1}^{+\infty}$ is orthonormal basis in H. $e_i = \{0,0,\cdots,\overset{\text{ith slot}}{1},0,\cdots\}$

$\sum_{i=1}^{+\infty}\|Te_i\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}(\frac{1}{i})^2 < +\infty$

$\therefore$ T is Hilbert-Schmidt $\Rightarrow$ T is compact

T15.5 WTS: $\|T\|_{B(H)} \le \|T\|_{HS} < +\infty$ given

pf: $\|Tx\| = \|T(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e_n)\| = \|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n Te_n\|$ since $T \in B(H)$, then cts, $\{e_i\}$为标准正交基

$\cancel{\le \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|\|Te_n\|}$ $\|x\|^2 = (x,x) = \sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2$

$\|Tx\|^2 = (\sum_{n=1}^{+\infty} a_n Te_n)^2 \le (\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|\|Te_n\|)^2 \le (\sum_{n=1}^{+\infty}|a_n|^2)(\sum_{n=1}^{+\infty}\|Te_n\|^2) \le \|x\|^2 \|T\|_{HS}^2$

$\Rightarrow \|Tx\| \le \|x\|^2 \|T\|_{HS}^2$

let $\|x\|=1$ 则 $\|T\|_{B(H)} = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \le \|T\|_{HS}^2$ 证毕

T15.7 $\{k_{ij}\}_{i,j=1}^{+\infty} \subseteq \mathbb{K}$, $\sum_{i,j=1}^{+\infty}|k_{ij}|^2 < +\infty$, 证明 $S: l^2 \to l^2$, $(Sx)_i = \sum_{j=1}^{+\infty} k_{ij}x_j$ compact

pf: $\{e_i\}$为标准正交基 $e_i = (0,0,\cdots 1\ 0\cdots)$ $S(e_i) = (Se_i)_i = \sum_{j=1}^{+\infty} k_{ij}e_j$

$\therefore \|S\|_{HS} = \sum_{i=1}^{+\infty}\|Se_i\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\|k_{ij}e_j\|^2 \le \sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\|k_{ij}\|^2\underbrace{\|e_j\|^2}_{=1} < +\infty$

$\therefore S$ Hilbert-Schmidt $\Rightarrow$ cpt

T15.9 $T: l^2 \to l^2$, $(x_1, x_2, \cdots) \longmapsto (0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$ cpt. 且无eigenvalue

pf: T15.3中证了 $(x_1, x_2\cdots) \xrightarrow{T_1} (x_1, \frac{x_2}{2}, \cdots)$ cpt

$T_2: (x_1, x_2\cdots) \mapsto (0, x_1, x_2, \cdots)$, $T_2 = S_r$ compact by Example 11.7

$\Rightarrow T = S_r \circ T_1$ $\therefore$ cpt

$Tx = \lambda x$ $\quad \lambda x_1 = 0$ $\quad$ if $\lambda = 0$. $\quad$ if $x_1 = 0$

$\lambda x_2 = x_1$ $\quad x_n = \lambda x_{n+1} = 0$ $n = 1, 2, \cdots$ $\quad x_{n+1} = \lambda^n x_1 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\cdots$

$\therefore T$ 不存在eigenvalue