Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - Universidade de São Paulo

Introdução à Teoria das Probabilidades
Professor: Francisco A. Rodrigues

Primeira lista de exercícios

1 - Defina os espaços amostrais associados aos experimentos abaixo:

- E_1: Lançamento de um dado.
- E_1: Lance uma moeda cinco vezes e verifique o número de caras.
- E_3: Lance uma moeda até que uma coroa apareça e conte o número de lançamentos.
- E_4: Verifique o tempo de funcionamento de uma máquina até falhar.
- E_5: Meça a altura de um jogador de basquete da seleção brasileira.

2 - Enuncie um evento associado a cada um dos espaços amostrais do exercício anterior.

3 - Em uma sala há 30 pessoas. Qual é a probabilidade de que duas dessas pessoas façam aniversário no mesmo dia? [Resp: 0,7]

4 - Um novo teste de diagnóstico para detectar o vírus HIV é apresentado tendo 95% de chance de dar um resultado positivo se o paciente é portador do HIV e 98% de chance de dar um negativo se o paciente não é portador do HIV. Em uma população com prevalência de 1/1000 casos de HIV (fração de infectados), qual é a chance de que uma pessoa com teste positivo ter realmente o vírus?(Resp: 0,045)

5 - Suponha que lancemos três moedas. Seja a variável aleatória Y : "número de caras obtidas". Calcule a função de probabilidade de Y.

6 - Seja X a variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x) = be^{-bx}$, $x \geq 0$. Mostre que se $p_j = P(j \leq X \leq j+1)$, então $p_j = (1-a)a^j$ e determine a.

7 - Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x/2, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ 1/2, \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -x/2+3/2, \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0, \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule $P(X > 2|1 \leq X \leq 3)$. (Resp: 1/3)

8 - O tempo T, em semanas, necessário para um programador desenvolver um website é uma variável aleatória com distribuição de probabilidade dada a seguir. Calcule $F(t) = P(T \leq t)$.

T	2	3	4	5
$P(T=t)$	0,2	0,1	0,3	0,4

9 - Seja $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ para $x \geq 0$. Calcule $f(x)$.

10 - Seja X uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} 4x, \quad 0 \leq x < 1/2 \\ 4(1-x), \quad 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Determine a função de distribuição acumulada de X.

11 - Uma fábrica produz peças automotivas tais que 5% delas são defeituosas e 95% são não-defeituosas. Se uma peça defeituosa for produzida, o fabricante perde R$ 5,00, enquanto uma peça não-defeituosa lhe dá um lucro de R$10,00. Se X for o lucro líquido por peça, calcule $E(X)$. (Resp: 9,25 reais)

12 - Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule o valor esperado de X. (Resp: 1,0)

13 - Sejam as variáveis aleatórias X e Y com distribuições de probabilidade:

X	-2	-1	0	1	2
$P(X = x)$	1/4	1/4	1/4	1/4	1/4

Y	-2	-1	0	1	2
$P(Y = y)$	0	1/4	1/2	1/4	0

Calcule $E[X]$, $E[Y]$, $E[X^2]$ e $E[Y^2]$. (Resp: $E[X] = E[Y] = 0$, $E[X^2] = 2,5$ e $E[Y^2] = 0,5$).

14 - Seja X uma variável aleatória contínua com função de distribuição de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule a variância de X. (Resp: 1/6)

15 - Mostre que se X é uma variável aleatória e A e B constantes:

$$E(AX + B) = AE[X] + B$$

$$V(AX + B) = A^2(X).$$